Bull. Soc. math. France
133 (2), 2005, p. 199–204

CODIMENSION B-W D'UN IDÉAL À DROITE NON NUL DE $A_1(\mathbb{C})$

PAR MATHIAS KONAN KOUAKOU

RÉSUMÉ. — Soit $A_1(\mathbb{C})$ la première algèbre de Weyl sur $\mathbb{C}$. La codimension B-W d'un idéal à droite non nul I de $A_1(\mathbb{C})$ a été introduite par Yuri Berest et George Wilson. Nous montrons d'une part que cette codimension est invariante par la relation de Stafford : si $x \in Q_1 = \mathrm{Frac}(A_1(\mathbb{C}))$, le corps de fractions de $A_1(\mathbb{C})$, et si $\sigma \in \mathrm{Aut}(A_1(\mathbb{C}))$, le groupe des $\mathbb{C}$-automorphismes de $A_1(\mathbb{C})$, sont tels que $J = x\sigma(I)$ soit un idéal à droite de $A_1(\mathbb{C})$, alors $\operatorname{codim} I = \operatorname{codim} x\sigma(I)$. Nous relions d'autre part la codimension d'un idéal I à la codimension de Gail Letzter-Makar Limanov, de $\mathrm{End}(I)$, l'anneau des endomorphismes de I vu comme un $A_1(\mathbb{C})$ sous-module à droite de Q_1, par la formule $2\operatorname{codim} I = \operatorname{codim} \mathrm{End}(I)$.

ABSTRACT (*B-W codimension of a right ideal non-zero of $A_1(\mathbb{C})$*)

The B-W codimension of a right ideal non-zero I of $A_1(\mathbb{C})$, the first Weyl algebra on $\mathbb{C}$, has been introduced by Yuri Berest and George Wilson. In this paper we show that this codimension is invariant under Stafford relation: if $x \in Q_1 = \mathrm{Frac}(A_1(\mathbb{C}))$ the skew field of fractions of $A_1(\mathbb{C})$ and $\sigma \in \mathrm{Aut}(A_1(\mathbb{C}))$ the group of $\mathbb{C}$-automorphisms of $A_1(\mathbb{C})$ are such that $J = x\sigma(I)$ be a right ideal of $A_1(\mathbb{C})$, then $\operatorname{codim} I = \operatorname{codim} x\sigma(I)$. Elsewhere we also show the link between the codimension of an ideal and the codimension of End (I), defined by Gail Letzter-Makar Limanov: we show that $2\operatorname{codim} I = \operatorname{codim} \mathrm{End}(I)$.

Texte reçu le 14 octobre 2002, révisé le 27 mars 2004

MATHIAS KONAN KOUAKOU, UFR de Mathématiques et Informatique, Université d'Abidjan Cocody, 22 BP 582 Abidjan 22 (Côte d'Ivoire)
E-mail : `cw1kw5@yahoo.fr ; kouakou@igd.univ-lyon1.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 16S32.

Mots clefs. — Première algèbre de Weyl, idéal à droite, automorphisme, codimension.

1. Introduction

Soient $R = \mathbb{C}[t]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $A_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[t,\partial]$ la première algèbre de Weyl. Pour tout $b \in \mathbb{C}[t] \setminus \mathbb{C}$, notons

$$o(b) = \bigl\{h \in R : h' \in bR\bigr\},$$

où h' est la dérivée de h. Tout $d \in \mathbb{C}(t)[\partial]$ définit de façon naturelle une application $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathbb{C}(t)$ dans lui-même ; on notera $d{*}a$ l'image de $a \in \mathbb{C}(t)$ par d. Si V et U sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}(t)$, on notera

$$\mathcal{D}(U,V) = \bigl\{d \in \mathbb{C}(t)[\partial] : d * (U) \subset V\bigr\}$$

et on écrira simplement $\mathcal{D}(V,V)$ pour $\mathcal{D}(V)$. Pour tout sous $A_1(\mathbb{C})$-module à droite de type fini I de Q_1 on a

$$\operatorname{End}(I) = \bigl\{x \in Q_1 : xI \subset I\bigr\}$$

et le dual de I est

$$I^* = \bigl\{x \in Q_1 : xI \subset A_1(\mathbb{C})\bigr\}.$$

Toutes ces notations ont été déjà introduites dans [6] et [2]. Dans la suite $A_1(\mathbb{C})$ sera simplement noté A_1.

1.1. La codimension B-W d'un idéal à droite non nul I. — Considérons plus généralement I un sous A_1-module à droite non nul de Q_1 de type fini et $e \in I^*$ tels que $eI \cap \mathbb{C}[t] \neq \{0\}$. L'ensemble

$$a_I = \bigl\{a \in R : \exists\, d = a\partial^n + a_{n-1}\partial^{n-1} + \cdots + a_0 \in eI\bigr\}$$

est un idéal de R. Soit c son générateur principal. On pose

$$I_t = c^{-1}(eI).$$

On vérifie dans [1] que I_t ne dépend pas du choix de e dans I^*.

Considérons l'application

$$r_t : \mathbb{C}(t)[\partial] \longrightarrow A_1, \quad \sum_{i=0}^{m} a_i(t)\partial^i \longmapsto \sum_{i=0}^{m} a_i^+(t)\partial^i$$

où $a_i^+(t)$ désigne la partie entière de $a_i(t)$, c'est-à-dire l'unique polynôme $a_i^+(t) \in \mathbb{C}[t]$ tel que $\deg(a_i(t) - a_i^+(t)) < 0$.

L'application r_t est $\mathbb{C}$-linéaire et $r_t(I_t)$ est un sous-espace vectoriel de A_1 *de codimension finie* dans A_1 par la construction même de I_t. La codimension B-W de I est

$$\operatorname{codim}_{BW}(I) = \dim \frac{A_1}{r_t(I_t)}\cdot$$

Par la définition de $\operatorname{codim}_{BW}(I)$, on voit que l'on a $J_t = I_t$ et donc $\operatorname{codim}_{BW}(J) = \operatorname{codim}_{BW}(I)$ si $J = xI$ où $x \in Q_1$. Nous allons établir la proposition suivante :

PROPOSITION 2. — *La codimension B-W d'un idéal à droite non nul I est invariante par les automorphismes de A_1, c'est-à-dire*

$$\forall\sigma \in \operatorname{Aut}(A_1), \quad \operatorname{codim}_{BW}(I) = \operatorname{codim}_{BW}\big(\sigma(I)\big).$$

1.2. La classe des idéaux $\mathcal{D}(R, o(b))$. — Nous allons utiliser le résultat suivant, déjà obtenu dans [3] :

LEMME 3. — *Si $n = \deg(b)$, on a $\mathcal{D}(R, o(b)) \sim \mathcal{D}(R, o(t^n))$ par la relation de Stafford.*

Ce lemme permet de construire des isomorphismes entre algèbres d'opérateurs différentiels sur des courbes algébriques affines de différentes singularités. Il permet surtout d'établir en utilisant la proposition 2, que

$$\operatorname{codim} \mathcal{D}\big(R, o(b)\big) = \operatorname{codim} \mathcal{D}\big(R, o(t^n)\big) = n.$$

Par ailleurs (voir [3]), nous savons établir que tout idéal I est équivalent à un autre de la forme $\mathcal{D}(R, o(b))$. La formule qui relie la codimension de Gail Letzter – Makar Limanov de $\operatorname{End}(\mathcal{D}(R, o(b)))$ à celle de Yuri Berest – Georges Wilson de $\mathcal{D}(R, o(b))$ est

$$2 \operatorname{codim}_{BW} \mathcal{D}\big(R, o(b)\big) = \operatorname{codim} \operatorname{End}(\mathcal{D}\big(R, o(b))\big).$$

D'où la formule $2 \operatorname{codim} I = \operatorname{codim} \operatorname{End}(I)$.

Nous ajouterons le résultat suivant :

COROLLAIRE 5. — *On a $\operatorname{codim}_{BW} \theta(I^* q) = \operatorname{codim}_{BW} I$ pour tout idéal à droite non nul I de A_1 et pour tout $q \in I \setminus \{0\}$, où θ est l'anti-automorphisme de A_1 tel que $\theta(t) = t$ et $\theta(\partial) = -\partial$.*

2. La codimension de Berest-Wilson d'un idéal à droite non nul I de $A_1(\mathbb{C})$

Comme annoncé, nous allons montrer la proposition 2, mais auparavant montrons le lemme suivant.

LEMME 1. — *Considérons l'application*

$$\ell : \mathbb{C}(t)[\partial] \longrightarrow A_1, \quad \sum_{i=0}^{m} a_i(t)\partial^i \longmapsto a_m(t)\partial^m.$$

Pour tout I, sous A_1-module de type fini de Q_1, notons $\langle \ell(I_t) \rangle$ le sous-espace vectoriel de A_1 engendré par $\ell(I_t)$. On a :

$$\dim \frac{A_1}{r_t(I_t)} = \dim \frac{A_1}{\langle \ell(I_t) \rangle} = \dim \frac{\operatorname{gr}_\partial(A_1)}{\operatorname{gr}_\partial(I_t)}\cdot$$

Démonstration. — On note que, si la famille $\{d_i\}_i$ est une base de I_t, alors la famille $\{r_t(d_i)\}_i$ est une base de $r_t(I_t)$ et $\{\ell(d_i)\}_i$ est une base de $\langle \ell(I_t)\rangle$. On a par ailleurs $\dim A_1/\langle \ell(I_t)\rangle < +\infty$ et si la famille $\{\overline{t^k\partial^s}\}_{(k,s)}$ est une base de $A_1/\langle \ell(I_t)\rangle$, on a à la fois

$$A_1 = \big\langle \{t^k\partial^s\}_{(k,s)}\big\rangle \oplus \big\langle \ell(I_t)\big\rangle \quad \text{et} \quad A_1 = \big\langle \{t^k\partial^s\}_{(k,s)}\big\rangle \oplus \big\langle r_t(I_t)\big\rangle,$$

d'où l'égalité $\dim A_1(\mathbb{C})/r_t(I_t) = \dim A_1/\langle \ell(I_t)\rangle$.

Pour la deuxième égalité, considérons l'application $\mathbb{C}$-linénaire bijective

$$\Phi : A_1 \longrightarrow \operatorname{gr}_\partial(A_1) = \mathbb{C}[t,\xi], \quad \sum_{i=0}^{m} a_i(t)\partial^i \longmapsto \sum_{i=0}^{m} a_i^+(t)\xi^i.$$

On a $\Phi(\langle \ell(I_t)\rangle) = \operatorname{gr}_\partial(A_1)$, d'où $\dim A_1/\langle \ell(I_t)\rangle = \dim \operatorname{gr}_\partial(A_1)/\operatorname{gr}_\partial(I_t)$. □

Proposition 2. — *La codimension B-W d'un idéal à droite I non nul est invariante par automorphisme de A_1 :*

$$\forall \sigma \in \operatorname{Aut}(A_1), \quad \operatorname{codim}_{BW} \sigma(I) = \operatorname{codim}_{BW}(I).$$

Démonstration. — Ce lemme est dû au résultat suivant établi par Y. Berest et G. Wilson dans [1] :

$$\dim \frac{A_1}{r_\partial(I_\partial)} = \dim \frac{A_1}{r_t(I_t)}\cdot \tag{1}$$

En utilisant le fait que $\dim A_1/r_t(I_t) = \dim \operatorname{gr}_\partial(A_1)/\operatorname{gr}_\partial(I_t)$, on voit que pour tout $\sigma \in Aut(A_1)$ tel que $\sigma(t) = t$, on a

$$\dim \frac{A_1}{r_t(\sigma(I)_t)} = \dim \frac{\operatorname{gr}_\partial(A_1)}{\operatorname{gr}_\partial(\sigma(I)_t)} = \dim \frac{\operatorname{gr}_\partial(A_1)}{\operatorname{gr}_\partial(I_t)}\cdot \tag{2}$$

De même, l'égalité $\dim A_1/r_\partial(I_\partial) = \dim gr_t(A_1)/gr_t(I_\partial)$ montre que si β appartient à $\operatorname{Aut}(A_1)$ et $\beta(\partial) = \partial$, alors on a

$$\dim \frac{A_1}{r_\partial(\beta(I)_\partial)} = \dim \frac{A_1}{r_\partial(I_\partial)}\cdot \tag{3}$$

En utilisant les formules (1), (2), (3) et le fait que $\operatorname{Aut}(A_1)$ est engendré par les automorphismes qui fixent le 't' et ceux qui fixent le '∂', on arrive bien à la formule finale

$$\dim \frac{A_1}{r_t(\gamma(I)_t)} = \dim \frac{A_1}{r_t(I_t)}, \quad \forall \gamma \in \operatorname{Aut}(A_1),$$

c'est-à-dire $\operatorname{codim}_{BW} \gamma(I) = \operatorname{codim}_{BW} I$ pour tout $\gamma \in \operatorname{Aut}(A_1)$. □

3. La classe des idéaux $\mathcal{D}(R, o(b))$

Le principal résultat de ce paragraphe est le lemme 3. Nous calculerons $\operatorname{codim}_{BW}(\mathcal{D}(R, o(t^n))$ pour la relier à la codimension $\operatorname{codim} \operatorname{End} \mathcal{D}(R, o(t^n))$ de Letzter-Limanov.

LEMME 3. — *Soit $b \in \mathbb{C}[t] \setminus \{0\}$. Si $\deg(b) = n$, alors on a $\mathcal{D}(R, o(b)) \sim \mathcal{D}(R, o(t^n))$ par la relation de Stafford.*

Démonstration. — On a $\mathcal{D}(R, o(b)) = A_1 \cap \partial^{-1} b A_1 = \partial^{-1} b (A_1 + A_1 \partial^{-1} b)^*$ et

$$\mathcal{D}\big(R, o(t^n)\big) = \partial^{-1} t^n (A_1 + A_1 \partial^{-1} t^n)^*.$$

Il suffit alors de prendre un automorphisme σ de A_1 tel que $\sigma(\partial) = \partial$ et $[\sigma(t)]^n - b \in \partial A_1$ pour obtenir $\sigma[(A_1 + A_1 \partial^{-1} t^n)^*] = A_1 + A_1 \partial^{-1} b$. De tels σ se calculent directement, voir [3]. $\square$

REMARQUE. — Cette preuve est directe et s'établit sans aucune théorie.

Comme nous l'avons dit dans l'introduction l'équivalence entre $\mathcal{D}(R, o(b))$ et $\mathcal{D}(R, o(t^n))$ montre que $\mathcal{D}(X(b)) \simeq \mathcal{D}(X(t^n))$ où $X(b)$ est la courbe algébrique affine associée à $o(b)$. Rappelons (voir [4]) que $X(b)$ est une courbe dont les singularités sont les racines de b.

COROLLAIRE 4. — *On a* $\operatorname{codim} \mathcal{D}(R, o(b)) = \deg(b)$.

Démonstration. — Il suffit de calculer $\operatorname{codim} \mathcal{D}(R, o(t^n))$. On a

$$I = \mathcal{D}\big(R, o(t^n)\big) = t^{n+1} A_1 + (t\partial - 1)(t\partial - 2) \cdots (t\partial - n) A_1.$$

Soit $a_I = \big\{ a \in \mathbb{C}[t] : \exists\, a = a\partial^m + a_{m-1}\partial^{m-1} + \cdots + a_0 \in I \big\}$. Alors

$$f_0 = (t\partial - 1)(t\partial - 2) \cdots (t\partial - n) = t^n \partial^n + \cdots$$

appartient à I ; donc t^n appartient à a_I.

D'après les remarques faites au paragraphe 1.2, t^n est le générateur de a_I, c'est-à-dire $a_I = t^n \mathbb{C}[t]$. On a donc

$$I_t = t^{-n} I = t A_1 + t^{-n} (t\partial - 1) \cdots (t\partial - n) A_1$$

et on voit bien que $r_t(I_t) = t A_1 + \partial^n A_1 \mathbb{C}[t]$ d'où

$$\dim \frac{A_1}{r_t(I_t)} = \operatorname{codim} \mathcal{D}\big(R, o(t^n)\big) = n. \qquad \square$$

Pour conclure, rappelons que tout idéal I de A_1 est équivalent à un autre idéal de la forme $\mathcal{D}(R, o(b))$. Plus précisement, si I est un idéal à droite non nul de A_1, il existe $x \in Q_1$, $\sigma \in \operatorname{Aut}(A_1)$ et $b \in \mathbb{C}[t]$ tels que $I = x\sigma\,(\mathcal{D}(R, o(b)))$.

On a $\operatorname{codim}_{\mathrm{GL}} \operatorname{End}(I) = \operatorname{codim}_{\mathrm{GL}} \operatorname{End}(\mathcal{D}(R, o(b))) = 2\deg(b)$ d'après G. Letzter et M. Limanov. On obtient par conséquent :

$$\operatorname{codim}_{\mathrm{GL}} \operatorname{End}(I) = 2 \operatorname{codim}_{\mathrm{BW}}(I)$$

Nous allons comme annoncé relier cet invariant de l'idéal I à l'idéal $\beta(I^*q)$, idéal à droite non nul de A_1 obtenu à partir du dual I^* de I. On a précisement :

COROLLAIRE 5. — *Soit θ l'anti-automorphisme de A_1 tel que $\theta(t) = t$ et $\theta(\partial) = -\partial$. Pour tout idéal à droite non nul I de A_1 et pour tout q appartenant à $I \setminus \{0\}$, on a :*

(i) *$\theta(I^*q)$ est un idéal à droite non nul de A_1 ;*
(ii) $\operatorname{codim}_{BW} \theta(I^*q) = \operatorname{codim}_{BW}(I)$.

Démonstration. — Il suffit de faire le calcul pour $I = \mathcal{D}(R, o(t^n)) = t^{n+1}A_1 + (t\partial - 1)(t\partial - 2)\cdots(t\partial - n)A_1$. On a

$$I^* = \mathcal{D}\big(o(t^n), R\big) = A_1 \cdot t^{-(n+1)}t\partial + A_1, \quad t^{n+1} \in I,$$
$$I^*t^{n+1} = A_1(t\partial + (n+1)) + A_1t^{n+1}.$$

Par suite $\theta(I^*t^{n+1}) = (t\partial - n)A_1 + t^{n+1}A_1$. Par ailleurs, on a exactement $(t\partial - n)A_1 + t^{n+1}A_1 = \beta(t^{-n}\partial I)$, où β est l'automorphisme de A_1 tel que $\beta(t) = -\partial$ et $\beta(\partial) = t$. La proposition 2 nous permet de conclure. □

Remerciements. — Je voudrais remercier les Professeurs M. Chamarie et Gadi Perets de l'Institut IGD de l'Université Claude Bernard Lyon I qui ont aidé à écrire cet article.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEREST (Y.) & WILSON (G.) – *Ideal classes of the Weyl algebra and non commutative projective geometry*, Internat. Math. Res. Notices, t. **26** (2002), pp. 1347–1396, with an appendix by Michel Van Den Bergh.

[2] CANNINGS (R.C.) & HOLLAND (M.P.) – *Right ideals of rings of differential operators*, J. Algebra, t. **167** (1994), pp. 116–141.

[3] KOUAKOU (M.K.) – *Isomorphisme entre algèbres d'opérateurs différentiels sur des courbes algébriques affines*, Thèse, Université Claude Bernard, Lyon 1, 1994.

[4] PERKINS (P.) – *Isomorphism of rings of differential operators on curves*, Bull. London. Math. Soc, t. **23** (1991), pp. 133–140.

[5] SMITH (S.P.) & STAFFORD (J.T.) – *Differential operators on an affine curve*, Proc. London Math. Soc, t. **56** (1988), pp. 229–259.

[6] STAFFORD (J.T.) – *Endomorphism of right ideals of the Weyl algebra*, Trans. Amer. Math. Soc, t. **299** (1987), pp. 623–639.