BULLETIN DE LA S. M. F.

SMF

Vie de la Société

Bulletin de la S. M. F., tome 28 (1900), p. 121-136
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__121_1>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 7 FÉVRIER 1900.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

M. Touche fait la Communication suivante :

Les équations de l'Hydraulique données par Lagrange.

Lagrange a, vers la fin de sa vie, publié quelques pages sur la *Question du mouvement des fluides,* et M. Joseph Bertrand a reproduit ses Notes à ce sujet (*Mécanique analytique,* par Lagrange, 3e édition, revue par M. Joseph Bertrand). La théorie de Lagrange ne diffère guère de celle d'Euler que par les notations, mais nous avons pensé qu'il serait de quelque intérêt de déduire de ses équations les équations transformées que nous avons tirées de celles d'Euler. Lagrange ne considère que les fluides incompressibles. Les considérations qu'il a présentées l'amènent au résultat

$$
\text{(A)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\Delta\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\mathrm{X}\right)-\frac{\mathrm{D}\lambda}{\mathrm{D}x}=0,\\
&\Delta\left(\frac{d^2y}{dt^2}+\mathrm{Y}\right)-\frac{\mathrm{D}\lambda}{\mathrm{D}y}=0,\\
&\Delta\left(\frac{d^2z}{dt^2}+\mathrm{Z}\right)-\frac{\mathrm{D}\lambda}{\mathrm{D}z}=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Rappelons, en quelques mots, la transformation que nous avons fait subir aux équations d'Euler. Nous avons considéré trois éléments égaux en longueur, ds suivant la courbe trajectoire, ds' suivant la normale principale à la trajectoire, ds'' suivant la binormale, puis $d\alpha$, l'angle de contingence de la trajectoire pour la longueur ds.

Or, les équations (A), de Lagrange, sont rapportées à trois axes rectangulaires; nous pouvons choisir ces axes, celui des x parallèle à ds et les x positifs étant comptés dans le même sens que la vitesse positive, celui des y parallèle à ds'; alors celui des z est parallèle à ds''. $\frac{D\lambda}{Dx}$ est ce que nous avons appelé $-\frac{dp}{ds}$; Δ est la densité de la masse que nous avons désignée par ρ; X est la résultante des forces extérieures suivant l'axe des x et nous l'avons désignée par U. Donc la première des équations (A) peut, en conservant les notations que nous avons employées, être mise sous la forme

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds} = U - \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Pour voir ce que représente $\frac{d^2x}{dt^2}$, nous supposerons d'abord le mouvement permanent. Avant de considérer dx, élément de trajectoire, comme coïncidant avec ds, nous pouvons le considérer, toujours dans le plan de ds et ds', mais seulement voisin de ds, appeler α l'angle qu'il fait avec l'axe des y, et examiner ce que devient dx, lorsqu'on le rapproche indéfiniment de ds de manière à le faire coïncider avec lui. On a

$$dx = ds \sin\alpha,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt}\sin\alpha;$$

différentions, par rapport à t,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\sin\alpha + \cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}\frac{ds}{dt};$$

à la limite, lorsque dx se confond avec ds, on obtient

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Or, on a

$$\frac{ds}{dt} = v_1,$$

d'où, en différentiant par rapport à s,

$$\frac{d^2 s}{ds\, dt} = \frac{dv_1}{ds},$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{ds}{dt}\frac{dv_1}{ds},$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = v_1 \frac{dv_1}{ds}$$

et, comme nous venons de voir que $\frac{d^2 s}{dt^2}$ tend vers $\frac{d^2 x}{dt^2}$,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = v_1 \frac{dv_1}{ds};$$

la première des équations (A) revient donc à

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds} = \mathrm{U} - v_1 \frac{dv_1}{ds};$$

nous retrouvons la première de nos équations générales du mouvement des fluides transformées, dans le cas du mouvement permanent.

Nous avons de même

$$dy = \cot\alpha\, dx,$$

$$\frac{dy}{dt} = \cot\alpha \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{d\alpha}{dt}\frac{dx}{dt} + \cot\alpha \frac{d^2 x}{dt^2};$$

si l'élément dx se rapproche indéfiniment de ds, il vient à la limite,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{d\alpha}{dt}\frac{ds}{dt},$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -v_1 \frac{d\alpha}{dt},$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -v_1 \frac{ds}{dt}\frac{d\alpha}{ds},$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -v_1^2 \frac{d\alpha}{ds};$$

la seconde des équations (A) revient donc à

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds'} = \mathrm{U}' + v_1^2 \frac{d\alpha}{ds}.$$

Pour la troisième des équations (A) $\frac{d^2 z}{dt^2}$ est nul, car les différentielles des vitesses doivent être, comme les vitesses elles-mêmes, dirigées dans le plan osculateur, si l'on ne considère que le mouvement permanent, et alors elles donnent, suivant la binormale, des projections qui sont des infiniment petits du second ordre.

Nous retrouvons donc notre équation transformée

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds''} = \mathrm{U}''.$$

Nous avons aussi transformé l'équation de continuité d'Euler et nous sommes arrivés à une équation qui, réduite au cas d'un fluide incompressible, est

$$\frac{\frac{dv_1}{v_1}}{ds} - \frac{\delta\alpha}{ds'} - \frac{\delta'\alpha}{ds''} = 0,$$

dans laquelle $\delta\alpha$ est l'angle de contingence suivant ds' et $\delta'\alpha$ l'angle de contingence suivant ds''.

Cette équation est aussi donnée par Lagrange comme complément des équations (A); il la donne sous la forme

$$\text{(B)} \qquad \frac{\mathrm{D}\,dx}{\mathrm{D}x} + \frac{\mathrm{D}\,dy}{\mathrm{D}y} + \frac{\mathrm{D}\,dz}{\mathrm{D}z} = 0.$$

Si nous continuons à considérer les axes suivant ds, ds', ds'', nous ferons remarquer que, d'après les notations de Lagrange, $\frac{\mathrm{D}\,dx}{\mathrm{D}x}$ est la variation de la surface de la section de la petite masse D_m, qui correspond à la variation de la vitesse v_1 suivant l'axe des x et que, par suite, ce terme représente $\frac{1}{ds}\frac{dv_1}{v_1}$; de même $\frac{\mathrm{D}\,dy}{\mathrm{D}y}$ est la variation de la même surface qui correspond à l'angle de contingence $-\frac{\delta\alpha}{ds'}$ suivant ds' et $\frac{\mathrm{D}\,dz}{\mathrm{D}z}$ est la variation de cette surface qui correspond à l'angle de contingence $-\frac{\delta'\alpha}{ds''}$ suivant ds''. Comme la surface de cette section est assujettie à être constante, il faut égaler à zéro la somme des trois termes, ce qui donne l'équation (B) de Lagrange, laquelle n'est autre que notre équation de continuité transformée.

SÉANCE DU 21 FÉVRIER 1900.

PRÉSIDENCE DE M. POINCARÉ.

Élections :

MM. Servant, présenté par MM. Kœnigs et Borel, Perchot, présenté par MM. Kœnigs et Borel, Adhémar (vicomte Robert d'), présenté par MM. Picard et d'Ocagne, Sparre (comte Magnus de), présenté par MM. L. Lévy et Borel, Vuibert, présenté par MM. Bioche et Borel, Hoffbauer, présenté par MM. Fontené et Bricard, Saltykow, présenté par MM. Blutel et Borel, sont élus, à l'unanimité, membres de la Société.

Communications :

M. Torrès présente à la Société un appareil servant à la résolution de l'équation du second degré à coefficients imaginaires et indique comment on construirait des appareils pour la résolution des équations algébriques.

M. Touche fait la Communication suivante :

Observations sur les équations de l'Hydraulique d'après Lagrange.

Les équations générales du mouvement des fluides transformées, c'est-à-dire rapportées aux trois axes rectangulaires suivant ds, ds', ds'', sont les mêmes que nous les déduisions des équations d'Euler, ou que nous le fassions de celles de Lagrange, à la condition de nous borner au cas de la densité constante et du mouvement permanent. Mais, comme nous les avons dans ce cas, il est facile de les étendre au cas du mouvement non permanent, en s'appuyant sur le théorème de d'Alembert. En effet, dans le cas du mouvement permanent, nous avons obtenu, pour la première des équations du mouvement des fluides transformées,

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds} = \mathrm{U} - v_1\frac{dv_1}{ds}, \tag{1}$$

et cette équation est celle que donne le théorème de d'Alembert pour le mouvement permanent. En effet, p étant la pression, dp doit être la différentielle de $\frac{1}{2}v_1^2$ ou $v_1\,dv_1$; alors dv_1 est la différentielle de v_1 correspondante à ds, espace parcouru dans le temps dt; si, au contraire, le mouvement n'est pas permanent, en même temps que la différentielle dv_1 correspondante à l'augmentation de vitesse pour l'espace ds parcouru dans le temps dt, il faut considérer une différentielle $d'v_1$ de v_1, qui a lieu pendant le même temps dt et qui est due à l'augmentation de vitesse, au point A, origine de ds; la différentielle de $\frac{1}{2}v_1^2$ est alors

$$v_1\,dv_1 + v_1\,d'v_1$$

et il nous vient alors

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds} = \mathrm{U} - v_1\frac{dv_1}{ds} = v_1\frac{d'v_1}{ds},$$

ou bien

$$(1) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds} = \mathrm{U} - v_1\frac{dv_1}{ds} - \frac{d'v_1}{dt}.$$

Nous retrouvons ainsi la première équation que nous avions obtenue en transformant les équations d'Euler; seulement nous mettons en évidence la signification des dérivées $\frac{dv_1}{ds}$ et $\frac{d'v_1}{dt}$; sous cette nouvelle forme, on voit bien que $d'v_1$ peut avoir toutes les valeurs possibles pour une valeur déterminée de dv_1.

Nous pouvons développer le terme $\frac{d'v_1}{dt}$ suivant la série de Maclaurin et en appelant $f(0)$ la valeur initiale de $\frac{d'v_1}{dt}$, $f'(0)$ la valeur initiale de $\frac{d'^2v_1}{dt^2}$, $f''(0)$ celle de $\frac{d'^3v_1}{dt^3}$, ..., on aura, à un instant quelconque,

$$\frac{d'v_1}{dt} = f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{1.2}f''(0) + \ldots$$

et dans chaque cas particulier de mouvement non permanent, il faudra tenir compte des dérivées de divers ordres de $\frac{d'v_1}{dt}$ qui ne sont pas nulles.

Nous pourrions obtenir de la même manière la deuxième des équations générales du mouvement des fluides transformées; nous retrouverions l'équation tirée des équations d'Euler

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds'} = \mathrm{U}' + v_1\frac{d\alpha_1}{dt} + v_1^2\frac{d\alpha}{ds},$$

nous remarquerons que les différentielles $d\alpha$ et $d\alpha_1$ sont suffisamment indiquées séparément et, par suite, qu'il n'y a aucune nécessité de modifier l'équation (2). Nous observerons seulement que $\frac{d\alpha_1}{dt}$ peut être développé suivant la série de Maclaurin, comme nous l'avons fait pour $\frac{d'v_1}{dt}$ dans l'équation (1).

L'équation

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds''} = U'' + v_1\frac{d\alpha_2}{dt} \tag{3}$$

reste la même.

Dans l'équation de continuité transformée

$$\frac{1}{v_1}\frac{dv_1}{ds} - \frac{\delta\alpha}{ds'} - \frac{\delta'\alpha}{ds''} = 0,$$

si l'on passe du mouvement permanent au mouvement non permanent, $\frac{dv_1}{ds}$ doit être changé, d'après ce que nous vu, en $\frac{dv_1}{ds} + \frac{d'v_1}{ds}$, par suite en $\frac{dv_1}{ds} + \frac{1}{v_1}\frac{d'v_1}{dt}$ et $\frac{1}{v_1}\frac{dv_1}{ds}$ doit l'être en $\frac{1}{v_1}\frac{dv_1}{ds} + \frac{1}{v_1^2}\frac{d'v_1}{dt}$; de même $\frac{\partial\alpha}{ds'}$ doit être changé en $\frac{\delta\alpha}{ds'} + \frac{d\frac{\delta\alpha}{ds'}}{dt}$ et $\frac{\delta'\alpha}{ds''}$ en $\frac{\delta'\alpha}{ds''} + \frac{d\frac{\delta'\alpha}{ds''}}{dt}$. Les termes $\frac{1}{v_1^2}\frac{d'v_1}{dt}$, $\frac{d\frac{\delta\alpha}{ds'}}{dt}$ et $\frac{d\frac{\delta'\alpha}{ds''}}{dt}$ peuvent être développés suivant la série de Maclaurin.

Le but que nous nous proposons, c'est d'établir les équations d'une courbe trajectoire, ce qui résoudra le problème. Dans le cas où la trajectoire n'est pas une courbe fixe, nous considérerons la vitesse en un point A; nous prendrons dans la direction de cette vitesse une longueur AB égale à ds; ensuite, dans la direction de la vitesse au point B et au même instant, une nouvelle longueur égale à ds et, en continuant ainsi de suite, nous obtiendrons ce que nous appellerons une *trajectoire instantanée*. Nous établirons d'abord les équations d'une courbe trajectoire, pour le cas des fluides incompressibles et du mouvement permanent. Nous étendrons ensuite ces équations au cas du mouvement non permanent et des fluides compressibles, en suivant la méthode employée pour le calcul des mouvements des corps célestes, c'est-à-dire en dirigeant le calcul de manière à considérer des termes qui peuvent être négligés, en conservant une approximation suffisante.

SÉANCE DU 7 MARS 1900.

PRÉSIDENCE DE M. MAURICE D'OCAGNE.

Communications :

M. André : *Sur la comptabilité des systèmes de jeux en escrime.*

MM. Borel et Landau présentent quelques observations à propos de la Communication de M. André.

M. Ferber fait la Communication suivante :

Application du symbole des déterminants positifs.

Comme application de la théorie des déterminants positifs qui a paru dans le Tome XXVII du *Bulletin,* nous donnerons aujourd'hui deux formules. La première donne la somme des puissances $p^{\text{ièmes}}$ des $n - 1$ premiers nombres au moyen de la résolution en nombres entiers positifs de l'équation

$$(1) \qquad s_1 + s_2 + s_3 \ldots = p.$$

Soit $s_1, s_2, \ldots, s_\sigma$ une solution (1) de cette équation, nous formons le déterminant positif

$$\left\| \begin{matrix} \frac{1}{s_1!} & \frac{1}{s_2!} & \cdots & \frac{1}{s_\sigma!} \\ \frac{1}{s_1!} & \frac{1}{s_2!} & \cdots & \frac{1}{s_\sigma!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{s_1!} & \frac{1}{s_2!} & \cdots & \frac{1}{s_\sigma!} \end{matrix} \right\|$$

que nous convenons de développer seulement par lignes et qu'on peut écrire plus simplement (2)

$$\left\| \frac{1}{s_1!} \quad \frac{1}{s_2!} \quad \cdots \quad \frac{1}{s_\sigma!} \right\|,$$

---

(1) σ est toujours $< p$ naturellement.

(2) *Voir* le *Bulletin,* Tome XXVII, page 285. Rappelons que toutes les fois que a colonnes sont égales, la factorielle $\frac{1}{a!}$ est sous-entendue, de sorte que, par exemple,

$$\left\| \frac{1}{1!} \ \frac{1}{1!} \right\| = 1, \qquad \left\| \frac{1}{2!} \ \frac{1}{2!} \right\| = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad \left\| \frac{1}{2!} \ \frac{1}{1!} \ \frac{1}{1!} \right\| = \frac{3}{2}.$$

nous le multiplions par la factorielle $\frac{p!\, n(n-1)\ldots(n-\sigma)}{\sigma+1!}$ qu'on peut écrire plus simplement ([1]) $\frac{p!\, n^{\sigma+1|-1}}{\sigma+1!}$ et nous ajoutons autant de termes semblables qu'il y a de solutions dans l'équation (1) pour trouver la somme cherchée ([2]).

Par exemple la somme des carrés est

$$2!\,\frac{n(n-1}{1}\left\|\frac{1}{2!}\right\| + 2!\,\frac{n(n-1)(n-2}{3!}\left\|\frac{1}{1!}\;\frac{1}{1!}\right\|,$$

la somme des cubes

$$3!\,\frac{n^{2|-1}}{2!}\left\|\frac{1}{3!}\right\| + 3!\,\frac{n^{3|-1}}{3!}\left\|\frac{1}{2!}\;\frac{1}{1!}\right\| + 3!\,\frac{n^{4|-1}}{4!}\left\|\frac{1}{1!}\;\frac{1}{1!}\;\frac{1}{1!}\right\|,$$

la somme des quatrièmes puissances

$$4!\,\frac{n^{2|-1}}{2!}\left\|\frac{1}{4!}\right\| + 4!\,\frac{n^{3|-1}}{3!}\left\|\frac{1}{3!}\;\frac{1}{1!}\right\| + 4!\,\frac{n^{3|-1}}{3!}\left\|\frac{1}{2!}\;\frac{1}{2!}\right\|$$
$$+ 4!\,\frac{n^{4|-1}}{4!}\left\|\frac{1}{2!}\;\frac{1}{1!}\;\frac{1}{1!}\right\| + 4!\,\frac{n^{5|-1}}{5!}\left\|\frac{1}{1!}\;\frac{1}{1!}\;\frac{1}{1!}\;\frac{1}{1!}\right\|.$$

Cette formule se trouve en sommant $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi t$ directement et par itération. En effet l'itération, qui est l'opération $f[f(\ldots f(x)]]$ ou $f^{(n)}_{x_0}$, peut donner des intégrations aux différences finies. En voici un autre cas. Faisons $fx = x + \tau\varphi x$, itérer fx c'est alors chercher successivement

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \tau\varphi x_0, \\ x_2 &= x_1 + \tau\varphi x_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n &= x_{n-1} + \tau\varphi(x_{n-1}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire intégrer $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi(x)$ pour $\Delta t = \tau$ et à partir de $t = 0$ jusqu'à $t = n\tau$.

([1]) En employant la notation de Van der Monde.

([2]) En fait, pour le calcul, les déterminants se développent très simplement et se réduisent à des monomes; mais, en les laissant sous leur forme primitive, ils facilitent l'exposition de la formule suivante.

Voici la formule qui donne x_n

$$x_n = x_0 + n\tau\varphi(x_0) + \frac{n^{2|-1}}{2!}\tau^2\varphi x_0 \mathrm{D}\varphi x_0$$
$$+ \tau^3\left[\frac{n^{2|-1}}{2!}\left\Vert \varphi^2\frac{\mathrm{D}^2}{2}\right\Vert \varphi + \frac{n^{3|-1}}{3!}\left\Vert \varphi\mathrm{D} \quad \varphi\mathrm{D}\right\Vert \varphi\right]$$
$$+ \tau^4\left[\frac{n^{2|-1}}{2!}\left\Vert \varphi^3\frac{\mathrm{D}^3}{3!}\right\Vert \varphi + \frac{n^{3|-1}}{3!}\left\Vert \varphi^2\frac{\mathrm{D}^2}{2!} \quad \varphi\mathrm{D}\right\Vert \varphi\right.$$
$$\left. + \frac{n^{4|-1}}{4!}\left\Vert \varphi\mathrm{D} \quad \varphi\mathrm{D} \quad \varphi\mathrm{D}\right\Vert \varphi\right] + \ldots.$$

Les déterminants positifs (¹) formant le coefficient de τ^{p+1} contiennent des exposants qui sont encore des solutions de l'équation (1), les factorielles en n sont les mêmes que précédemment; les deux problèmes sont analogues.

Cette formule contient naturellement le développement de Taylor; en effet, passons aux différences infiniment petites en faisant $n\tau = \text{const.} = t$, puis $\tau = 0$, $n = \infty$, il reste

$$x = x_0 + t\varphi x_0 + \frac{t^2}{2!}\varphi \mathrm{D}x + \frac{t^3}{3!}\varphi \mathrm{D}\varphi \mathrm{D}\varphi + \ldots,$$

ce qui est bien le développement en série par la formule de Taylor de la solution de $dx = \varphi x \times dt$.

Pour obtenir x_n il suffirait évidemment de chercher $\frac{d^p f^{(n)}}{d\tau^p}$, mais le calcul devenant rapidement inextricable nous avons cherché directement x_n en appliquant le procédé indiqué dans les *Nouvelles Annales* de novembre 1898.

SÉANCE DU 21 MARS 1900.

PRÉSIDENCE DE M. ANDRÉ.

Communications :

M. André : *De l'organisation des assauts complets.*

M. d'Ocagne : *Sur un problème d'analyse combinatoire.*

(¹) Ces déterminants, qui sont à développer par lignes, sont symboliques et donnent naissance à des termes de la forme $\varphi^3\frac{\mathrm{D}^3}{3!}\varphi^2\frac{\mathrm{D}^2}{2!}\varphi$ qui indiquent l'opération $\varphi^3\times\frac{\mathrm{D}^3}{3!}\left[\varphi^2\times\frac{\mathrm{D}^2}{2!}(\varphi)\right]$. L'opération faite, on remplace, dans les φ, x par x_0. *Voir* le *Bulletin*, Tome XXVII, page 288.

M. A. Tresse fait la Communication suivante :

Sur les propriétés projectives des coniques.

M. Leau a récemment démontré (¹), *par une voie élémentaire, que la perspective d'une conique est une conique;* sa méthode suppose connus les théorèmes de Dandelin, qui permettent d'étendre aux coniques les propriétés des pôles et polaires, établies pour la circonférence.

La brève esquisse qui suit a pour but de montrer que, dans les éléments, on peut arriver simplement au même résultat, dès que sont établies les propriétés fondamentales des tangentes et particulièrement la suivante : *La portion d'une tangente mobile à une conique, comprise entre deux tangentes fixes, est vue d'un foyer sous un angle constant.*

Sans présenter la valeur scientifique des articles ordinaires du *Bulletin*, les lignes qui suivent intéresseront peut-être ses lecteurs, et, parmi eux, les professeurs.

Problème. — *Construire une conique dont on connaît les positions* Ox, Oy *des deux axes, un point* M *et la tangente en ce point.*

Soient T, T′ les intersections de la tangente avec Ox et Oy, N et N′ celles de la normale en M avec les mêmes axes.

Si F, F′ sont les foyers, situés sur Ox, d'une conique cherchée, les bissectrices de l'angle en M du triangle MFF′ sont MT, MN et rencontrent Oy, perpendiculaire sur le milieu de FF′, en des points T′ et N′ situés sur le cercle circonscrit à MFF′; F, F′ sont donc donnés par l'intersection de Ox avec le cercle circonscrit au triangle MT′N′.

On peut répéter la même construction sur Oy; mais le point O étant dans un seul des angles formés par MT et MN est intérieur à une seule des deux circonférences MTN, MT′N′, la construction réussit dans un seul cas.

Une conique étant définie par deux foyers et une tangente, le problème admet, les cas évanouissants laissés de côté, une solution et une seule.

(¹) *Bulletin de la Société Philomathique de Paris,* 9ᵉ série, t. I, nᵒ 2, p. 87.

LEMME. — *Si un segment* PQ *d'une droite* Δ *est vu d'un point fixe* F *sous un angle constant, il existe deux points fixes* A *et* B *sur la droite, tels que* AP.BQ *soit constant.*

Car soient A et B les positions respectives de P et de Q quand FQ et FP se placent sur Fx parallèle à Δ, c'est-à-dire soient $(\overline{\mathrm{FP}, \mathrm{FQ}}) = (\overline{\mathrm{FA}, \Delta}) = (\overline{\Delta, \mathrm{FB}})$; FA et FB sont symétriques par rapport à Fx et à sa perpendiculaire Fy; soit FQ′ la symétrique de FQ.

On a

$$(\mathrm{FP}, \Delta) = (\mathrm{FQ}, \mathrm{FB}) = (\mathrm{FA}, \mathrm{FQ}')$$

ou

$$(\mathrm{PF}, \mathrm{PQ}') = (\mathrm{FA}, \mathrm{FQ}'),$$

et, par suite, la circonférence passant par P, F, Q′ est tangente à FA, de sorte que

$$\mathrm{AP}.\mathrm{AQ}' = \overline{\mathrm{AF}}^2$$

ou

$$\mathrm{AP}.\mathrm{BQ} = -\overline{\mathrm{AF}}^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On en déduit immédiatement :

THÉORÈME I. — *Les segments* AP, BQ *interceptés, à partir des points de contact* A, B, *sur deux tangentes parallèles fixes* AT, BT′ *d'une conique à centre, par une tangente mobile* PQ, *ont un produit constant.*

Car, si l'on mène, par un foyer F, la parallèle Fx aux tangentes, on sait que

$$(\mathrm{FP}, \mathrm{FQ}) = (\mathrm{FA}, \mathrm{F}x) = (\mathrm{F}x, \mathrm{FB}).$$

Si FB, FQ rencontrent AT en B_1 et Q_1, on a donc

$$\mathrm{AP}.\mathrm{B}_1\mathrm{Q}_1 = \text{const.},$$

d'où

$$\mathrm{AP}.\mathrm{BQ} = \text{const.}$$

COROLLAIRE. — *Les segments* AP, AP′ *interceptés, à partir du point de contact* A, *sur une tangente fixe d'une conique à centre, par deux tangentes parallèles variables, ont un produit constant.*

Car, avec les notations précédentes, AP′ = — BQ.

Réciproque du théorème I. — *Si une droite mobile* PQ *intercepte, sur deux parallèles fixes* AT, BT′ *à partir des origines fixes* A *et* B, *deux segments* AP, BQ *dont le produit soit constant, elle enveloppe une conique; et cette conique est tangente en* A *et* B *aux droites* AT, BT′.

Soit

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{AP}.\mathrm{BQ} = k,$$

et soit O le milieu de AB.

Construisons d'abord sur AT deux points R, R′, tels que OR, OR′ soient rectangulaires et que

$$\mathrm{AR}.\mathrm{AR}' = -k.$$

Pour cela, si $k < 0$, on prend sur AT

$$\mathrm{AC} = -\mathrm{AC}' = \sqrt{-k},$$

et il suffit de prendre pour OR, OR′ les bissectrices de l'angle COC′.

Si $k > 0$, on prend sur la perpendiculaire en A à AT

$$\mathrm{AD} = -\mathrm{AD}' = \sqrt{k},$$

et il suffit de prendre pour R et R′ les intersections de AT avec la circonférence circonscrite à ODD′.

Cela fait, considérons la conique Γ dont les axes sont placés sur OR, OR′ et qui est tangente en A à AT (problème).

R et R′ sont les intersections, avec AT, de deux tangentes de cette conique, lesquelles sont parallèles, comme symétriques de AT, par rapport aux axes; et comme

$$\mathrm{AR}.\mathrm{AR}' = -k,$$

toutes les tangentes à Γ (théorème I et son corollaire) sont des droites mobiles PQ.

Enfin, comme par un point quelconque P de AT on ne peut mener, d'une part, qu'une tangente à Γ distincte de AT; d'autre part, qu'une droite mobile PQ, toute droite PQ est bien tangente à Γ. c. q. f. d.

Remarque. — Du théorème I et sa réciproque résulte, en presque toute généralité, et très simplement, que la perspective d'une conique est une conique. Il suffit que l'on puisse mener à la conique deux tangentes parallèles à la ligne de fuite.

Pour ne laisser échapper aucun cas, il n'y a qu'à généraliser ce qui précède.

THÉORÈME II. — *Soient* SA, SB *deux droites fixes tangentes en* A *et* B *à une conique;* P, Q *leurs points d'intersection avec une tangente mobile de la conique; le produit*

$$\frac{AP}{SP}\cdot\frac{BQ}{SQ}$$

est constant.

En effet, soient F un foyer de la conique, $A\theta$, $B\theta'$ les parallèles à FS menées par A et B, P′ et Q′ leurs intersections respectives avec FP, FQ; on sait que

$$(FP, FQ) = (FA, FS) = (FS, FB).$$

Donc, comme dans le théorème I,

$$AP'.BQ' = \text{const}.$$

Or,

$$AP' = SF.\frac{AP}{SP} \quad \text{et} \quad BQ' = SF.\frac{BQ}{SQ}.$$

Donc

$$(2) \qquad \frac{AP}{SP}\cdot\frac{BQ}{SQ} = \text{const}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — *Si la conique est une parabole*, dans une position particulière de l'angle (FP, FQ), FP et FQ sont respectivement parallèles à SA et SB, auquel cas on a

$$AP' = SF, \qquad BQ' = SF.$$

La valeur constante du produit est donc l'unité.

COROLLAIRE. — *Si une conique à centre est inscrite dans un parallélogramme* $S\alpha T\beta$, *la droite qui joint les contacts* A, B *de deux côtés* $S\alpha$, $S\beta$ *issus d'un même sommet* S, *est parallèle à la diagonale* $\alpha\beta$ *qui ne passe pas par ce sommet.*

Car, en amenant la tangente mobile dans les deux positions αT, βT, on trouve, en appliquant le théorème,

$$\frac{A\alpha}{S\alpha} = \frac{B\beta}{S\beta},$$

ce qui exprime que AB et $\alpha\beta$ sont parallèles.

Réciproque du théorème II. — *Si une droite mobile* PQ *rencontre les côtés* SA, SB *d'un triangle* SAB *en des points* P, Q, *tels que le produit*

$$\frac{AP}{SP} \cdot \frac{BQ}{SQ}$$

soit constant, elle enveloppe une conique; et cette conique est tangente en A *et* B *aux droites* SA et SB.

Soit k la valeur constante du produit; si $k \neq 1$, prenons sur SA, SB, les points α et β, tels que

$$k = \frac{A\alpha}{S\alpha} = \frac{B\beta}{S\beta}, \tag{3}$$

et construisons le parallélogramme $S\alpha T\beta$. Il existe (réciproque du théorème I) une conique Γ ayant son centre au centre du parallélogramme, tangente à SA en A, et à sa parallèle βT et enfin tangente à une troisième droite $S\beta$. Cette conique est manifestement inscrite dans le parallélogramme; et elle touche $S\beta$ en B, AB étant, d'après (3), parallèle à la diagonale $\alpha\beta$.

La droite αT étant une tangente particulière de Γ, parallèle à SB, avec la condition (3), toutes les tangentes à Γ sont, d'après le théorème II, des droites mobiles PQ; et, comme plus haut (réciproque du théorème I), toute droite PQ est tangente à Γ.

C. Q. F. D.

Si $k = 1$, on prendra pour conique Γ la parabole tangente en A et B à SA et SB. Toute tangente à Γ est encore une droite PQ et réciproquement. C. Q. F. D.

Théorème III. — *La perspective d'une conique est une autre conique.*

Conservons, en effet, les notations du théorème II, et désignons la perspective d'un point P par la lettre accentuée P'; la droite SA et sa perspective S'A' se coupent en un point α; si ω est le point de vue, le faisceau de quatre droites ωS, ωA, ωP, $\omega\alpha$, coupé par les transversales SA, S'A', donne

$$\frac{AP}{SP}\cdot\frac{S\alpha}{A\alpha}=\frac{A'P'}{S'P'}\cdot\frac{S'\alpha}{A'\alpha}$$

ou

$$\frac{A'P'}{S'P'}=\frac{AP}{SP}\times \text{const.}$$

De même pour SB. Si donc on considère la conique Γ comme l'enveloppe de ses tangentes PQ, la relation (2) (théorème II) donne

$$\frac{A'P'}{S'P'}\cdot\frac{B'Q'}{S'Q'}=\text{const.},$$

c'est-à-dire (réciproque II) que les projections des tangentes à Γ enveloppent une conique Γ'. C. Q. F. D.

Conclusion. — Dans tout ce qui précède, une conique est considérée comme l'enveloppe de ses tangentes, chacune de ses tangentes étant définie par les deux segments AP, BQ qu'elle intercepte sur deux tangentes fixes AT, BT' à partir de leurs points de contact A, B.

On peut, de même, se placer au point de vue ponctuel, et, considérant toujours deux points fixes A, B de la conique et leurs tangentes AT, BT', définir un point quelconque M de la conique par les segments AP_1, BQ_1, qu'interceptent respectivement sur AT et BT' les droites BM et AM. La position de M, point de contact d'une tangente, étant définie par le corollaire du théorème II, on retrouve, pour P_1 et Q_1, les relations (1) et (2), et l'on peut répéter, presque mot à mot, tout ce qui a été dit.

On arrive ainsi, sans s'écarter d'un ordre d'idées très élémentaires, aux propriétés des faisceaux et divisions homographiques, propriétés qui ont constamment inspiré ces lignes, ce qui n'aura pas échappé au lecteur.