Seconde partie, revue des publications académiques et périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 7, nº 2 (1883), p. 5-256

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_2_5_0>

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von C.-W. BORCHARDT [1].

Tome XC; 1880.

Frobenius (*G.*). — Relations entre les fractions réduites de séries procédant suivant les puissances de la variable. (1-17).

Le problème de déterminer une fonction rationnelle dont le numérateur et le dénominateur aient un degré prescrit et qui coïncide avec une fonction donnée pour le plus grand nombre possible de valeurs données a été résolu pour la première fois par Cauchy (*Analyse algébrique,* p. 528) et plus tard, mais plus amplement (*Journ. für Math.*, t. XXX), par Jacobi, qui a enseigné à représenter le numérateur et le dénominateur de diverses manières sous la forme de déterminants. Cependant il n'a pas abordé les relations qui ont lieu entre plusieurs fractions de ce genre dont les numérateurs et les dénominateurs sont de degrés différents. Ce sont les relations les plus importantes de cette sorte que M. Frobenius a réunies succinctement dans ce Mémoire; mais, pour plus de simplicité, il s'est borné au cas où les valeurs données de la variable coïncident toutes en une seule (JACOBI, *loc. cit.*, p. 149; voir aussi KRONECKER, *Monatsberichte der Berliner Akademie,* 1878, p. 97).

§ 1. Sur les fractions réduites de séries procédant suivant des puissances. —

(1) Voir *Bulletin,* V_2, 193.

§ 2. Relations algébriques entre les numérateurs, les dénominateurs et les restes des réduites. — § 3. Sur les réduites de la série de Taylor. — § 4. Intégration de l'équation différentielle $C_{\alpha\beta} = 0$. — § 5. Développement en fractions continues de séries procédant suivant des puissances.

Weingarten (*J.*). — Contribution à la théorie des surfaces isostatiques. (18-33).

Dans ses Leçons sur les coordonnées curvilignes, Lamé a énoncé la proposition qui dit qu'un solide élastique en équilibre peut être décomposé par trois familles de surfaces orthogonales, en parallélépipèdes infiniment petits dont les faces sont sollicitées normalement par les forces élastiques. Lamé a donné le nom de *surfaces isostatiques* à ces familles de surfaces. L'erreur inhérente à cette proposition n'est pas difficile à découvrir. Cependant un intérêt particulier s'attache à l'erreur de l'éminent mathématicien; car, selon ses propres paroles, c'est de cette propriété, si nettement caractérisée, que lui est venue l'idée des coordonnées curvilignes. Il semble qu'il n'existe pas de recherches, publiées jusqu'à présent, sur les conditions dont dépend l'existence de surfaces isostatiques. Les développements de M. Weingarten ont établi ces conditions et signalent quelques questions qui s'y rattachent de plus près. M. Weingarten montre en particulier que les conditions nécessaires et suffisantes consistent en ce que trois certains invariants s'évanouissent. Ces trois équations qui sont du premier ordre aux différentielles partielles par rapport aux grandeurs qu'elles contiennent, et linéaires par rapport aux quotients différentiels de ces mêmes grandeurs, font l'objet de l'adroite analyse de M. Weingarten.

Kirchhoff (*G.*). — Remarques sur le Mémoire de M. Voigt : *Théorie du point lumineux*. (34-38).

Dans ses *Leçons sur la Physique mathématique* (*Mécanique*), M. Kirchhoff a traité (Leç. XXIII, § 4) le mouvement causé par les mouvements infiniment petits d'une sphère rigide contenue dans un fluide compressible. Ce problème est très semblable à celui qu'a résolu M. Voigt dans son Mémoire [*Journ.*, t. LXXXIX; *Bulletin*, V_2, p. 199)]. La méthode employée par M. Kirchhoff dans son livre s'applique aussi à la solution du problème proposé par M. Voigt et est beaucoup plus expéditive que le chemin que cet auteur a pris : c'est ce que M. Kirchhoff fait voir par sa Note.

Geiser. — Sur un théorème fondamental de la Géométrie cinématique de l'espace. (39-43).

Il s'agit du théorème donné par M. Mannheim, p. 262 de son *Cours de Géométrie descriptive, comprenant les Éléments de la Géométrie cinématique :* « Lorsqu'une figure de forme invariable se déplace de manière que quatre de ses points restent sur quatre surfaces données, pour une position quelconque de cette figure, les normales aux surfaces trajectoires de tous ses points rencontrent deux mêmes droites. » Ce théorème, publié par M. Mannheim au *Journ. de Math.* de M. Liouville (2^e série, t. XI, 1866), appartient à Schönemann qui l'avait fait insérer en 1855 aux *Monatsberichte der Berliner Akademie.* — M. Geiser ajoute à cette Note historique une démonstration analytique du théorème que Schöneman s'était borné à énoncer sans démonstration, mais dont il avait tiré d'importantes conséquences.

Schoenemann. — Sur la construction de normales et de plans normaux de certaines surfaces et lignes courbes. (44-48).

Réimpression de la publication citée par M. Geiser dans la Note précédente.

Korteweg (Dr. J.).— Sur la loi pondéromotrice élémentaire. (49-70).

Les lois des effets pondéromoteurs et électromoteurs entre des courants fermés trouvent leur expression la plus simple dans les formules potentielles de M. F. Neumann et peuvent être considérées comme démontrées par l'expérience; au contraire, il est toujours encore possible de concevoir sur les deux lois élémentaires de l'Électrodynamique, la pondéromotrice et l'électromotrice, des hypothèses différentes et qui s'excluent l'une l'autre, mais qui peuvent être envisagées comme également autorisées, eu égard à l'explication des faits observés jusqu'à présent. M. Korteweg s'est proposé, dans le Mémoire actuel, de rechercher jusqu'où s'étend cette indétermination pour la loi pondéromotrice, c'est-à-dire d'établir une théorie générale, renfermant des fonctions indéterminées et qui ne se permet pas d'autres hypothèses que celles qui ont été examinées par l'expérience ou qui, à cause de leur probabilité intrinsèque, ont été reçues dans toutes les théories établies jusqu'à ce jour. Une addition d'hypothèses convenables pourra donc transformer cette théorie générale en une quelconque des théories plus spéciales. MM. Stefan et Maxwell, qui ont tenté d'établir une telle théorie, n'ont pas fait attention à la possibilité de couples de forces entre des éléments de courants. Depuis l'établissement de la théorie potentielle de M. Helmholtz où entrent ces effets de couples, on a signalé cette lacune dans le travail précieux de M. Stefan, et Margules, qui a essayé de la remplir, a omis un des effets possibles des couples.

§ 1. La loi élémentaire pondéromotrice. — § 2. Effet pondéromoteur entre des courants fermés. — § 3. Effet pondéromoteur qu'un courant fermé exerce sur un élément de courant. — § 4. Déduction des théories plus spéciales.

Fuchs (L.). — Extrait d'une lettre adressée à M. Borchardt. (71-73).

Hazzidakis (J.-N.). — Sur une équation différentielle du second ordre. (74-79).

Hazzidakis (J.-N.). — Sur une propriété des systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes. (80-82).

Grafle. — Déduction rapide des théorèmes d'addition pour les intégrales elliptiques en partant de l'équation $\frac{da}{\Delta a} + \frac{db}{\Delta b} = 0$. (83-84).

Sturm (J.). — Sur les courbes planes du troisième ordre. (85-101).

Dans son Mémoire *Sur les formes des courbes du troisième ordre* (t. LXXV du Journ.; *Bulletin*, IV_1, p. 90), M. Durège met à profit le théorème : « S'il y a sur elles des points d'où l'on peut tirer quatre tangentes réelles, il y en a aussi où ces tangentes sont toutes imaginaires. » Pour le démontrer, il suppose connus les trois systèmes de points conjugués et la génération de la courbe du troisième ordre par deux involutions projectives de rayons : ce sont des propriétés qu'on n'apprend qu'après une étude profonde de la courbe. M. Sturm donne au n° 1 une démonstration qui ressort immédiatement de la génération de la courbe au moyen de faisceaux projectifs de rayons et de sections coniques, génération découverte par Chasles et qui paraît être la plus naturelle. De plus, l'auteur développe, au n° 2, un supplément de la démonstration, due à M. Salmon, pour la constance du rapport anharmonique des quatre tangentes issues d'un point de la courbe; car, si excellente que soit cette démonstration, elle ne prouve la constance que pour les points qui appartiennent à la même branche. Les n^{os} 3 et 4 donnent enfin des considérations purement géométriques et extrêmement simples sur des propriétés, pour la plupart connues, des courbes du troisième ordre : réalité des points d'inflexion, des tangentes issues d'un point de la courbe, relation entre le point de contact et le point tangentiel.

Franke. — Sur les équations de troisième et de quatrième degré. (102-108).

Koenigsberger (*L.*). — Remarques générales sur le théorème d'Abel (109-163).

Soit v une fonction rationnellement logarithmique des grandeurs $a, a', a'', \ldots$, où $a, a', a'', \ldots$ sont certains paramètres; on peut mettre le théorème d'Abel sous la forme

$$(1)\qquad \int^{x_1} f(x, y)\,dx + \int^{x_2} f(x,y)\,dx + \ldots + \int^{x_\mu} f(x, y)\,dx = v,$$

$f(x, y)$ étant une fonction rationnelle de x et de la fonction y de x. Envisageons ce théorème d'abord sous le point de vue fourni par la théorie générale de la transformation des intégrales abéliennes : il fournit alors une relation spéciale d'intégrales semblables, qui correspond à l'équation de transformation linéaire dans les intégrales, ou bien le théorème d'Abel peut être considéré comme une combinaison algébrique, et unique dans sa forme, des valeurs de l'intégrale d'une fonction algébrique pour différentes limites d'intégration liées algébriquement l'une à l'autre et d'intégrales plus simples (les fonctions discontinues de celles-ci), pour des arguments composés algébriquement de ces limites d'intégration, et ainsi le théorème peut se prêter à de vastes recherches; car, si l'on envisage l'intégrale $\int f(x, y)\,dx$, où y désigne une fonction algébrique irréductible de x, comme intégrale de l'équation différentielle

$$(2)\qquad \frac{dz}{dx} = f(x, y),$$

le théorème d'Abel fournit une proposition sur une relation algébrique d'une même intégrale de l'équation différentielle (2) pour divers arguments liés algébriquement les uns aux autres, et d'une intégrale des équations différentielles

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \psi(a, a', a'', \ldots), \frac{\partial z}{\partial a'} = \psi_1(a, a', a'', \ldots), \frac{\partial z}{\partial a''} = \psi_2(a, a', a'', \ldots), \ldots,$$

où les fonctions ψ dénotent des fonctions rationnelles satisfaisant à la condition d'intégrabilité, des grandeurs a, et où celles-ci sont liées d'autre part aux premiers arguments. Sous ce point de vue, le théorème d'Abel permettra une généralisation des relations analytiques, et c'est pour développer ses études sur ce sujet que M. Königsberger a publié ce travail, qui se rattache à un autre Mémoire du même auteur. « Sur des relations algébriques entre des intégrales d'équations différentielles distinctes » (t. LXXXIV; *Bulletin*, III_2, p. 113).

Netto (*E.*). — Contribution à la théorie des discriminants. (164-185).

Voici comment M. Kronecker s'est exprimé sur ce travail (t. XCII du Journ., p. 119 et 120) : « Si des variables $\mathfrak{R}$ se présentent dans le domaine de rationnalité, la forme discriminante contiendra toujours des formes de la plus haute multiplicité comme diviseurs multiples; elles forment « les singularités » de la forme discriminante à la recherche desquelles s'attachent le plus grand intérêt et aussi de grandes difficultés. Voilà pourquoi nous insistons d'autant plus sur un travail publié récemment par M. Netto; ce Mémoire traite les problèmes algébriques, ainsi que nous venons de le faire ici, selon les principes de l'Arithmétique, et l'on y trouve déjà une série de résultats développés. Pour en exposer la portée pour la théorie générale des grandeurs algébriques, il faut reprendre les genres issus d'un domaine de rationnalité $(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n)$ qui font le sujet des élucidations du § 12. Les grandeurs entières algébriques de ces genres sont fonctions entières des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et conséquemment fonctions algébriques des fonctions élémentaires symétriques, désignées par $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n$ des mêmes variables x. Dans chacun de ces genres il existe des systèmes fondamentaux qui ne dépendent que d'un nombre aussi grand d'éléments que l'ordre du genre, et cet ordre a été désigné par ε aussi bien ci-dessus qu'au lieu cité de M. Netto. La forme discriminante sera donc remplacée par un « discriminant du genre », et celui-ci est une puissance du discriminant de l'équation

$$x^n - \mathfrak{f}_1 x^{n-1} + \mathfrak{f}_2 x^{n-2} - \ldots \pm \mathfrak{f}_n = 0,$$

dont l'exposant se trouve déterminé dans le travail de M. Netto. Le discriminant de chaque équation du genre est divisible par ce discriminant du genre, et en outre M. Netto fait voir que chacun des discriminants d'équation contient encore des systèmes de diviseurs ou des formes de plus haute multiplicité comme facteurs qui sont en même temps des diviseurs multiples de la forme discriminante. Si ces résultats de M. Netto se prêtent à être appliqués à l'équation fondamentale introduite ici, comme cela est probable, elles fourniraient des contributions à la connaissance de cette forme primitive $\frac{\mathfrak{D}}{D}$ qui fait l'objet principal des « développements ci-dessus ».

Faà de Bruno. — Sur quelques théorèmes relatifs au développement des fonctions et aux covariants. (186-188).

Schröder (*Ernst*). — Sur une détermination singulière d'une fonction par des conditions formelles. (189-220).

Wiener (*Christian*). — Étude géométrique et analytique de la fonction weierstrassienne. (221-252).

M. Weierstrass a démontré cette proposition remarquable : « La fonction

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{n} b_n \cos a^n x \pi,$$

où x est une variable réelle, a un nombre entier impair supérieur à 1, b une constante positive inférieure à 1, n'a en aucun point un quotient différentiel déterminé tant que la valeur du produit ab ne surpasse pas une certaine limite, les intervalles des x étant choisis d'une manière particulière, essentielle pour la proposition. M. Paul du Bois-Reymond observe là-dessus que certaines singularités n'affectent pas des espèces particulières de nombres qui ne se présentent toujours qu'isolément, mais qu'elles sont réparties uniformément et comme continûment sur le domaine entier des grandeurs de l'argument. Il dit encore dans une Note : « Mainte énigme me semble cachée sous la métaphysique des fonctions weierstrassiennes, et je ne puis me défendre de penser qu'une étude plus approfondie finira par nous amener à une limite de l'intellect semblable à la limite établie dans la Mécanique par les notions de force et de masse. En deux mots, ces fonctions me semblent constituer des séparations de l'espace, non comme les nombres rationnels dans l'illimitément petit, mais dans l'infiniment petit. »

M. Wiener fait l'étude géométrique et analytique de la fonction intéressante et y ajoute une représentation graphique en tant qu'elle est possible pour une ligne possédant dans l'espace fini un nombre infini d'ondulations. La proposition de M. Weierstrass se trouve être vraie en général; cependant, pour quelques endroits spéciaux, il résulte un quotient différentiel déterminé. L'intuition que l'auteur atteint ainsi sert à réfuter la conjecture de M. Paul du Bois-Reymond, qui aurait ouvert à l'inconcevable la porte des Mathématiques.

Craig (*Thomas*). — Distorsion d'une sphère élastique. (253-266).

En cherchant à estimer la déformation que les masses de glaces accumulées aux régions polaires de la Terre produisent dans la surface solide de notre globe, M. Craig fut porté à faire l'étude des distorsions d'une sphère solide élastique sollicitée aux extrémités d'un diamètre par deux forces données, sous l'hypothèse que l'axe ne se raccourcit que légèrement.

Königsberger (*L.*). — Sur des intégrales algébriquement logarithmiques d'équations différentielles linéaires non homogènes. (267-280).

Si l'équation différentielle $\frac{dz}{dx} = y$ (où y est une fonction algébrique de x) possède une intégrale algébrique ou algébriquement logarithmique, celle-ci ou son logarithmande est représentable comme fonction rationnelle de x et de y. Pris dans ce sens et sous cette forme, le théorème d'Abel permet une extension à des équations différentielles linéaires non homogènes d'ordre quelconque.

Picard (Émile). — Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. (281-302).

Écrivant l'équation de Lamé sous cette forme

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]y,$$

où $\operatorname{sn} x$ désigne la fonction elliptique ordinaire de module k, n un entier positif et h une constante quelconque, M. Hermite a montré qu'un système fondamental d'intégrales est formé de fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Des circonstances analogues se présentent pour toute équation différentielle linéaire à coefficients doublement périodiques de première espèce dont l'intégrale générale est uniforme. Les équations de ce genre jouissent d'une propriété dont la démonstration fait l'objet de la I^re Partie du travail. M. Picard établit qu'une équation d'ordre m admettra, en général, comme intégrales distinctes m fonctions doublement périodiques de seconde espèce; c'est ce qui arrive pour l'équation de Lamé, quand h est quelconque. Les changements de forme analytique que peuvent subir les intégrales dans certains cas particuliers sont l'objet d'une étude spéciale. Dans la II^e Partie l'auteur considère des systèmes d'équations linéaires simultanées à coefficients doublement périodiques; il étudie en particulier un système du troisième ordre jouissant d'une propriété remarquable, et il termine par une application géométrique de cette étude.

Rosanes. — Contribution à la théorie de la correspondance réciproque. (303-321).

La corrélation de deux plans, établie par une forme bilinéaire ternaire, a fait le sujet de recherches répétées : elles se sont étendues à la question de savoir comment l'on pourrait construire la transformation avec certaines données dont le nombre était suffisant, ou aux problèmes qui concernent la coïncidence des plans mis en correspondance. Mais on ne semble pas avoir fait attention à une autre sorte de propriétés de la transformation générale réciproque, propriétés qui sont remarquables tant par leur simplicité que par leur analogie avec des théorèmes connus de la théorie des sections coniques. Les figures relatives à ces courbes subissent une généralisation en ce sens qu'un élément simple (point, droite) est remplacé par un couple d'éléments dans la coïncidence desquels celles-là prennent leur origine. L'extension ainsi gagnée est encore très propre à faire mieux ressortir certaines propriétés des sections coniques et fournit une nouvelle proposition sur les couples conjugués de points d'une courbe de second ordre. — L'application aux formes quaternaires qui donne des généralisations de propriétés des surfaces de second ordre n'a été faite que dans un cadre plus restreint. — La connaissance de couples de points dépendants tels qu'ils ont été définis dans un Mémoire du même auteur (t. LXXXVIII, *Bulletin*, V_2, p. 107) se trouve complétée par les concepts nouvellement introduits. La construction du sixième couple dépendant de cinq couples est ramenée à un problème simple et connu. Enfin, pour la figure de l'espace de huit couples dépendants de points, le degré des surfaces qui s'y présentent se déduit maintenant avec facilité, tandis qu'il était alors resté indéterminé.

Bruns (*H.*). — Contribution à la théorie des fonctions sphériques. (322-328).

Dans sa démonstration pour la convergence des séries procédant suivant des fonctions sphériques, M. Dini s'appuie sur ces trois propositions, empruntées à la théorie des fonctions sphériques $P_n(x)$: 1° $(2n+1)P_n = P'_{n+1} - P'_{n-1}$; 2° les n racines de $P_n(\cos\omega) = 0$ sont toutes réelles, simples et à peu de chose près uniformément réparties sur l'intervalle de 0 à π, d'autant plus uniformément que n est plus grand; 3° $\lim P_n(\cos\omega) = 0$ pour $n = \infty$, non seulement si $\cos\omega$ diffère de ± 1 d'une quantité finie, mais aussi si ω tend avec n croissant suivant un certain mode vers 0 ou vers π. M. Bruns donne des démonstrations très élégantes, élémentaires et rapides de ces propositions sans aucun secours puisé dans la théorie des fonctions sphériques. Ainsi la démonstration de convergence que nous venons de mentionner se simplifie de manière à devenir aussi simple et directe que celle de Dirichlet pour les séries trigonométriques.

Heine (*E.*). — Sur la fonction sphérique $P^n(\cos\gamma)$ pour n infini. (329-331).

Hermite (*Ch.*). — Sur l'intégrale eulérienne de seconde espèce. (Extrait d'une lettre adressée à M. Schwarz, de Gœttingue). (332-338).

JORNAL DE SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS, publicado pelo Dr. Francisco Gomes Teixeira, professor de Mathematica na Universidade de Coimbra, socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa e da Sociedade de Sciencias physicas et naturaes de Bordeaux (1).

Tome II; 1880.

Bellavitis (*G.*). — Solution trouvée par la méthode des équipollences. (3-6, 1 pl; ital.).

A l'aide de sa méthode des équipollences, M. Bellavitis donne la solution de la question posée dans le Ier volume, page 142, par M. Schiappa-Monteiro, dans les termes suivants : « Trouver un cercle tangent à un cercle donné, qui passe par un point donné A, et dont le centre soit situé sur une droite également donnée CD », et aussi la solution de cette autre question, énoncée page 160

---

(1) Voir *Bulletin*, II_2, 185.

du même Volume, ainsi qu'il suit : « Tracer un arc de cercle qui fasse des angles donnés avec deux cercles concentriques connus. »

Da Ponte Horta (*F.*). — Étude sur le problème proposé au n° **10**. (7-32; 1 pl.).

Voir *Bulletin*, 2e série, p. 188.

Cette suite du travail de M. da Ponte Horta se rapporte : 1° aux lieux symétriques des centres des cercles qui coupent deux cercles donnés sous des angles donnés (p. 7-16); 2° aux lieux des centres des cercles qui coupent une droite donnée sous l'angle α', et un cercle aussi donné sous l'angle α.

Gomes Teixeira (*F.*). — Sur la décomposition des fractions rationnelles; fin. (33-41; fr.).

Marrecas Ferreira (*L.-F.*). — Sur un problème de Mécanique appliquée. (42-45).

Ce problème de Mécanique appliquée consiste à construire une voûte dans une cavité déterminée, sous certaines conditions énoncées.

Craveiro Lopes (*C.-H.*). — Solution d'un problème proposé. (46-48).

Cette question peut s'énoncer ainsi : « Étant données trois circonférences dont les centres sont A, B, C, et dont les deux premières ont une corde commune IJ, mener par le point I une transversale qui les rencontre respectivement aux points X, Y et Z, de telle sorte que XZ soit à XY dans le rapport donné $\frac{m}{n}$. »

Schiappa Monteiro (*A.*). — Question proposée. (48).

Il s'agit de prouver géométriquement que les lieux H, H' des points de l'espace dont les distances à deux droites fixes M, N, non situées dans le même plan, ont entre elles un rapport constant $\frac{m}{n}$, sont des hyperboloïdes scalènes ou non de révolution (*sic*).

Bellavitis (*G.*). — Extrait d'une Lettre à F. Gomes Teixeira. (49).

Cet extrait d'une lettre, écrite par Bellavitis de Padoue au Dr Gomes Teixeira de Coïmbre, est relatif à l'application de la méthode des équipollences au beau théorème énoncé, p. 47, par M. Craveiro Lopes.

Marrecas Ferreira (*L.-F.*). — Question proposée, n° **12**. (49).

Cette question est la suivante : « Deux points étant donnés, déterminer avec le compas ordinaire le point milieu de la distance qui les sépare. »

Marrecas Ferreira (*L.-F.*). — Sur la question proposée n° **11**. (50-53).

Schiappa Monteiro (*Alfredo*). — Recherches synthétiques et analytiques sur le cercle variable assujetti à couper continuellement deux cercles donnés sous des angles également donnés. (54-64, 130-137, 174-182; fr.).

Hermite (*Ch.*). — Sur l'intégrale $\int_0^{2\pi} f(\sin x, \cos x)\, dx$. (65-67).

Schiappa Monteiro (*Alfredo*). — Sur l'aire latérale d'un coin conique. (68-76, 81-96, 110-125).

Il s'agit de calculer élémentairement l'aire latérale et le volume d'un coin conique, déterminée par l'intersection d'un cône de révolution avec deux plans, l'un de ces plans étant perpendiculaire à l'axe de révolution. (C'est la question proposée à la page 176 du Ier volume du *Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas*.

Schiappa Monteiro (*Alfredo*). — Question proposée n° **13**. (76).

Il s'agit de déterminer le sommet commun de deux triangles symétriquement semblables, de bases données AD et BC.

Marrecas Ferreira (*L.-F.*). — Sur l'équation du second degré. (77-80).

Bellavitis (*G.*). — Résolution de la question proposée n° **12**. (86).

Schiappa Monteiro (*Alfredo*). — Solution de la question proposée au n° **1** du tome I en employant la méthode des équipollences, et comparaison de cette solution avec celle que donne la Géométrie élémentaire. (97-109).

Marrecas Ferreira (*L.-F.*). — Sur la question proposée n° **3**. (126-129).

On a vu que cette question n° 13 demande de déterminer le sommet commun de deux triangles symétriquement semblables et de bases données AD et BC.

Gomes Teixeira (*F.*). — Sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles de second ordre. (138-153).

Birger-Hansted. — Trois théorèmes relatifs à la théorie des nombres. (154-164; fr.).

Marrecas Ferreira (*L.-F.*). — Sur un problème. (165-166).

Ce problème est relatif aux arrangements des lettres dans deux cadenas à secret.

Martins da Silva (*J.-A.*). — Sur une formule intégrale. (167-172).

Dans ce Mémoire, M. Martins da Silva, sous-lieutenant élève d'artillerie, fait usage d'une formule abélienne et montre qu'il a puisé à bonne source sa connaissance approfondie du Calcul différentiel et intégral.

Birger-Hansted. — Questoes propostas n^{os} 14 e 15. (173).

Des deux questions envoyées par M. Birger-Hansted, de Copenhague, à son collègue de Coïmbre, la première a trait aux congruences de nombres premiers; la seconde est ainsi formulée : « Étant donnée une figure plane composée d'un hexagone régulier, sur les côtés duquel sont d'autres hexagones réguliers congruents au premier, on veut savoir comment il est possible de couper cette figure par trois lignes droites qui la divisent en parties congruentes ou non congruentes, de telle sorte qu'avec ces parties on puisse former un hexagone régulier. »

Birger-Hansted. — Quelques transformations de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants, par substitution d'une nouvelle variable. (183-187).

Perott (*J.*) et *Birger-Hansted.* — Questions proposées n^{os} 16 et 17. (188).

La première de ces deux questions, le n° 16, relative aux nombres, est proposée par M. J. Perott, jeune mathématicien et érudit polonais; la seconde, relative aux carrés magiques, est proposée par M. Birger-Hansted, de Copenhague.

Gomes Teixeira (*F.*). — Notice sur G. Bellavitis. (189-191).

Dans cette brève Notice, M. Gomes Teixeira a appelé l'attention de ses compatriotes sur le savant professeur de l'Université de Padoue, et sur ses immenses travaux que la mort venait d'arrêter, travaux parmi lesquels il faut citer au premier rang sa *Méthode des équipollences,* qui rendit son nom célèbre en Europe. Cette nouvelle méthode de Géométrie que Bellavitis développa plus tard avec tant de succès fut publiée pour la première fois, en 1832, dans les *Annales de l'Institut Lombard-Vénitien.* Un second Mémoire parut en 1837, un troisième en 1843, puis enfin en 1854, dans la collection des Mémoires de la Société italienne des Sciences de Modène, parut sa fameuse *Sposizione del metodo delle equipollenze,* qui donna à la nouvelle méthode une forme définitive, et que M. Laisant fit ensuite passer dans notre langue. Bellavitis était un érudit de premier ordre, un bibliographe distingué, en même temps qu'un éminent mathématicien. Il publiait à Padoue une *Revue des Journaux scientifiques,* qui est précieuse par les indications bibliographiques qu'elle renferme et qui fait autorité grâce à la haute compétence du directeur dans toutes les questions relatives aux diverses parties des Sciences mathématiques.

Tome III; 1881.

Schiappa Monteiro (*Alfredo*). — Sur une question proposée dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* de M. Bourget. (3-6).

Cette question est la suivante : « Inscrire un triangle dans un cercle donné, étant aussi donnés les points milieux des arcs sous-tendus par ses côtés. »

Marrecas Ferreira (*L.-F.*). — Sur un problème de Géométrie. (7-15).

Voici l'énoncé de ce problème : « Étant données deux droites qui se coupent en un plan, et un point, tirer par ce point des transversales satisfaisant à cette condition, que les rectangles des segments définis par les droites et le point soient équivalents à un rectangle déterminé. » Ce problème, proposé par Amyot et divers autres auteurs, est considéré comme l'un des problèmes les plus intéressants de la Géométrie élémentaire par M. Marrecas Ferreira, et cet habile géomètre en a fait l'objet d'une étude spéciale et approfondie.

Gomez Teixeira (*Pedro*). — Question proposée n° **18**. (16).

Martins da Silva (*J.-A.*). — Sur la transformation des fonctions X^n de Legendre en intégrale définie. (17-20).

Gomez Teixeira (*Francisco*). — Leçon préliminaire sur l'origine et sur les principes du Calcul infinitésimal, faite aux élèves de l'Université de Coïmbre. (21-45).

Rocha Peixoto (*A.-F.*). — Sur un théorème relatif aux sections planes du cône de révolution. (46-48).

Martins da Silva (*J.-A.*). — Sur la réduction directe d'une classe d'intégrales définies multiples. (49-54).

Rodrigues (*J.-M.*). — Sur une formule de Wronski. (55-64).

Martins da Silva (*J.-A.*). — Démonstration d'un théorème de M. Besge. (65-72).

Ce théorème de M. Besge se trouve simplement énoncé, sans démonstration, au tome XIX, novembre 1874, du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville, l'illustre mathématicien que la France vient de perdre.

Gomes Teixeira (*Fr.*). — Sur l'histoire de Nonius. (73-80).

Le savant fondateur et éditeur du *Journal des Sciences mathématiques et astronomiques* de Coïmbre reproduit d'abord un article de M. Brensing, de Brême, publié sous le titre de *Nonius ou Vernier?* dans le n° 2889 du journal allemand *Astronomische Nachrichten ;* et, pour donner une idée plus complète de l'histoire de Nonius, il fait suivre cet article de la proposition III^e du livre rarissime de Pedro Nunez intitulé *de Crepusculis*. C'est dans ce passage de son Livre que le savant portugais présente, pour la première fois, l'instrument qui sert à mesurer les petites parties des lignes droites ou des angles.

Schiappa Monteiro (*Alfredo*). — Solution de la question proposée n° **17**. (81-86).

La question à résoudre était celle-ci : « Étant donné un carré magique formé par n^2 nombres distincts, de combien de manières est-il possible de permuter entre eux ces n^2 nombres sans que le carré magique cesse d'exister? »

Rodrigues (*J.-M.*). — Sur la théorie des facultés. (87-96).

Schiappa Monteiro (*A.*). — Note de Géométrie descriptive sur l'intersection des surfaces de second ordre. (97-104).

Gomes Teixeira (*P.*). — Sur quelques théorèmes d'Arithmétique. (105-115).

Birger Hansted. — Question proposée n° 19. (116).

Schiappa Monteiro (*A.*). — Question proposée n° 20. (116).

Schiappa Montèiro (*A.*). — Solution de la question proposée n° 16. (117-130).

Schiappa Monteiro (*A.*). — Note sur la ligne de striction de l'hyperboloïde. (131-150).

Après les travaux de Michel Chasles et de M. de la Gournerie sur la ligne de striction de l'hyperboloïde, M. Schiappa Monteiro l'étudie à son tour, mais à l'aide seulement de l'Algèbre ordinaire.

Schiappa Monteiro (*A.*). — Solution de la question proposée n° 15. (151-153).

La question n° 15 était la suivante : « Étant donnée une figure plane composée d'un hexagone régulier, sur les côtés duquel sont six autres hexagones réguliers congruents au premier, on demande de couper cette figure par trois lignes droites qui la divisent en parties congruentes ou non congruentes, de telle sorte qu'avec ces parties on puisse former un hexagone régulier.

Gomes Teixeira (*Fr.*). — Bibliographie. (154-156).

Dans cette brève revue bibliographique, M. Gomes Teixeira analyse les Mémoires suivants :

1° Note sur l'équation aux dérivées partielles, par M. Paul Mansion, de Gand;

2° Sur une propriété de la fonction de Poisson et sur la méthode de Jacobi pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, par M. Philippe Gilbert, professeur de Mathématiques à l'Université catholique de Louvain;

3° Étude sur le déplacement d'un solide invariable dans l'espace, par M. Luis Porfirio da Motta Pegado;

4° Observations sur le magnétisme terrestre dans l'île de Saint-Thomas, par Guillaume-Auguste de Britto Capello.

Schiappa Monteiro (*A.*). — Question proposée n° 21. (156).

Il s'agissait de trouver les solutions entières de l'équation $x^y = y^x$, sans recourir aux logarithmes.

Rodrigues (*J.-M.*). — Sur une formule d'Euler. (157-176).

Il s'agit d'une formule fondamentale du Calcul intégral qui, si on la prend dans son acception philosophique, constitue, au dire de M. Rodrigues, l'expression algorithmique de l'unité logique entre les trois algorithmes théoriques, primitifs et fondamentaux du Calcul intégral.

Martins da Silva (*J.-A.*). — Note sur la transformation d'une intégrale définie. (177-184).

Gomes Teixeira (*F.*). — Sur la multiplication des déterminants. (185-186).

Schiappa Monteiro (*A.*). — Solution de la question proposée n° **14**. (187-189).

Gomes Teixeira (*F.*). — Bibliographie. (190-191).

L'auteur de cet article bibliographique s'occupe d'un Mémoire très important de M. Paul Mansion, professeur de Mathématiques à l'Université royale de Gand, sur l'*Évaluation approchée des aires planes*. Dans ce Mémoire, qui parut d'abord dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, M. Mansion traite des principales formules employées pour évaluer approximativement les aires planes, c'est-à-dire celles de Simpson, de Weddle, de Poncelet, de Parmentier, de Dupain et d'Eugène Catalan.

A. M.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. GERONO et CH. BRISSE (¹). — 3ᵉ série.

Tome I; 1882, 1ᵉʳ semestre.

Halphen. — Sur un critérium relatif à la théorie des sections coniques. (5-7).

Nature d'une conique, déterminée par trois de ses points et par son centre; cas spécial de l'hyperbole; conique déterminée par trois de ses tangentes et par son centre.

Resal (*H.*). — Sur quelques applications du théorème de Savary, relatif aux enveloppes des courbes planes. (7-15).

Roulement de deux circonférences (S) et (S'); enveloppe d'une hyperboloïde

---

(¹) Voir *Bulletin*, V_2, 151.

ou d'une épicycloïde; enveloppe de la développante d'une circonférence concentrique à (S); enveloppe d'une circonférence (S_1) dont le centre se trouve sur la circonférence (S). Pour des courbes roulantes quelconques, toute enveloppe est une certaine roulette. Enveloppes d'une normale à une ellipse roulante.

Barbarin (*P.*). — Note sur les coordonnées bipolaires. (15-28).

L'auteur a résumé d'une façon intéressante des notions générales sur les équations des courbes en coordonnées bipolaires sur leurs tangentes et leurs asymptotes. L'article se termine par une étude des ovales de Descartes, des coniques à centre et des ovales de Cassini, dans ce système de coordonnées.

Un abonné. — Généralisation d'une propriété de la surface de l'onde. (29-31).

Il s'agit d'un théorème de Mac-Cullagh sur la génération de la surface de l'onde au moyen de l'ellipsoïde et d'une propriété des normales.

Ocagne (*M. d'*). — Remarques sur le pendule. (32-33).

Deux propriétés du mouvement d'un pendule circulaire dans un milieu dont la résistance est constante.

Picart (*A.*). — Solution d'un problème de Géométrie. (33-39).

Voici l'énoncé du problème en question :

Dans un triangle isoscèle OAB, *l'angle à la base* A *vaut n fois l'angle au sommet* O; *déterminer le rapport de la base* AB *au côté* OA.

On arrive à l'intégration d'une équation aux différences finies que l'auteur effectue fort élégamment.

Ocagne (*M. d'*). — Étude sur un mode de détermination des courbes planes. Application cinématique. (40-45).

M. d'Ocagne considère une certaine transformation tangentielle d'une courbe, étudie les relations entre les rayons de courbure correspondants, et applique sa méthode à la Cinématique plane. Sur ce dernier point, les résultats sont loin de présenter de la nouveauté. Les notations des équipollences les rendraient à peu près intuitifs.

Correspondance. — *M. J. Romero :* intéressante figuration géométrique de propriétés arithmétiques, à l'occasion d'une question de M. Proth (1323).

Les Correspondances émanant d'étrangers devraient bien être mises tout d'abord en français correct par la Rédaction; il y a des formes de langage obscures pour le lecteur français. (46-48).

Questions proposées. — 1382, 1383. (48).

Picart (*A.*). — Note sur les propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de l'ellipsoïde. (49-62).

L'article en question a pour objet de démontrer géométriquement quelques-unes des plus importantes propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de l'ellipsoïde. Cependant, l'auteur ne craint pas d'y appliquer également l'analyse, ce qu'il fait avec beaucoup d'habileté. Les lignes géodésiques passant par un ombilic sont l'objet d'une étude toute spéciale.

Somme toute, il y a là un résumé fort intéressant de toutes les principales propriétés dont il s'agit avec des démonstrations fort élégantes.

Weill. — De l'involution de plusieurs points sur une conique. (62-79).

Par la considération de l'involution de trois points sur une conique, l'auteur arrive à déterminer tout d'abord la condition pour que deux coniques soient *capables* d'un triangle inscrit et circonscrit. De là, il passe ensuite à l'examen de l'hexagone inscrit et circonscrit à deux coniques, puis il énonce un certain nombre de propriétés nouvelles sur ces questions, dont il s'est occupé depuis longtemps avec une prédilection véritable et auxquelles les coordonnées tangentielles s'appliquent heureusement.

Concours d'agrégation des Sciences mathématiques en 1881. — Énoncé des conditions d'admissibilité : 1° sur un sujet de licence ; 2° sur les Mathématiques spéciales ; 3° sur les Mathématiques élémentaires. Énoncés des comparaisons finales : 1° sur un sujet de licence ; 2° de Calcul ; 3° sur la Géométrie descriptive. Énoncés de leçons : 1° sur les Mathématiques élémentaires ; 2° sur les Mathématiques spéciales. (79-85).

Questions proposées pour l'admission à l'École Polytechnique danoise. Énoncés de l'année 1872 à l'année 1879 inclusivement. (85-87).

Compositions données aux examens de licence dans les différentes Facultés de France, en 1880. Énoncés des Facultés de Marseille, Besançon, Bordeaux, Grenoble, Lyon, Montpellier, Nancy, Poitiers, Toulouse, Rennes, Clermont et Dijon (session de juillet) et des Facultés de Marseille et Besançon (session de novembre), (87-90, 133-140).

Bibliographie. — Traité de Géométrie analytique, par M. H. Picquet, capitaine du génie, répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique, secrétaire de la Société Mathématique de France. 1re Partie, Géométrie analytique à deux dimensions, 1 vol. gr. in 8° ; préface de l'auteur. (95-96).

Rouché (*E.*). — Sur l'intersection de l'hyperboloïde de révolution et d'une droite. (97-98).

Méthode nouvelle, simple en théorie et offrant de grands avantages au point de vue graphique.

Dufau (H.). — Théorème de l'hexagone inscrit dans une conique. (99-102).

L'auteur déduit de la propriété fondamentale de la polaire le théorème de Pascal, puis celui de Brianchon, et cela par un raisonnement géométrique élémentaire.

Antomari (X.). — Sur deux propriétés relatives aux foyers et aux cercles focaux dans les coniques. (102-109).

D'après la première de ces propriétés, une conique peut être considérée comme le lieu géométrique des points dont le rapport des distances à un cercle fixe et à une droite fixe est constant, les distances étant comptées normalement. D'après la seconde, c'est le même lieu géométrique, les distances au cercle étant comptées sous un angle constant.

Laquière. — Sur un théorème de Pappus; extrait d'une Lettre. (110).

Sur le centre de gravité d'un système de masses égales parcourant les côtés d'un polygone fermé.

Pomey (J.-B.). — Solution de la question proposée pour l'admission à l'École Polytechnique en 1881. (111-113).

Lieu géométrique relatif à un cylindre parabolique.

Moret-Blanc. — Solution de la question proposée pour l'admission à l'École Normale supérieure en 1881. (114-117).

Problème relatif à la courbe du troisième ordre $27y^2 = 4x^3$.

Cartier (H.). — Solution d'une question proposée pour l'admission à l'École Polytechnique en 1880. (118-122).

Lieux géométriques relatifs à une ellipse et à un cercle concentrique.

Lez (H.). — Concours d'admission à l'École Centrale en 1880 (première session); solution de la question proposée. (122-126).

Problème relatif à l'hyperbole.

École navale (Concours de 1881). — Énoncés des compositions de Géométrie, de Statique, d'Arithmétique, d'Algèbre, de Trigonométrie, de Géométrie descriptive. (126-127).

École forestière (Concours de 1881). — Énoncés des compositions de Mathématiques, de Trigonométrie et Calcul logarithmique. (128).

École Polytechnique (Concours de 1881). — Énoncés des compositions de Mathématiques, de Géométrie descriptive, données à quelques élèves qui n'ont pu concourir que tardivement. (129).

Concours d'admission à l'École Centrale en 1881 (première session). — Énoncés des compositions de Géométrie analytique, de Trigonométrie, de Physique et Chimie et de l'épure. (130-132).

Questions proposées. — 1384 à 1395. (140-143).

Avis aux candidats à l'École Polytechnique : au sujet des programmes d'admission. (143).

L'Astronomie. — Annonce du Journal publié, sous ce titre, par M. C. Flammarion. (144).

Legoux (*A.*). — Stabilité de l'équilibre d'un point matériel attiré ou repoussé par un nombre quelconque de points matériels fixes proportionnellement aux masses et à une puissance de la distance. (145-153).

L'éminent professeur de la Faculté de Grenoble traite seulement le cas de l'attraction, celui de la répulsion ne comportant qu'un simple changement de signes. Pour l'étude de la stabilité, on considère comme négligeable le carré du déplacement du point, et l'on trouve comme conditions trois inégalités, qui doivent être satisfaites simultanément.

Liguine (*V.*). — Sur les systèmes articulés de MM. Peaucellier, Hart et Kempe. (153-163).

Dans le même Recueil (2e série, t. XIV, p. 529), M. Liguine a déjà publié un intéressant Mémoire *Sur les systèmes de tiges articulées*. Il se propose ici d'établir la relation entre les chemins parcourus dans le mouvement donné et le mouvement transformé, ainsi que les rapports des vitesses, pour les trois appareils de MM. Peaucellier, Hart et Kempe (*Voir* aussi un article de M. d'Ocagne, *Nouv. Ann.*, 2e série, t. XX, p. 456).

Picart (*A.*). — Note sur les paraboloïdes du second ordre osculateurs aux surfaces. (163-171).

L'auteur résume les principales propriétés relatives à ces paraboloïdes, et se propose surtout d'étudier l'enveloppe des paraboloïdes osculateurs du second ordre qui ont leurs points de contact sur une ligne donnée.

Ocagne (*M. d'*). — Sommation d'une série remarquable. (171-173).

Il s'agit de la série de Stainville

$$1 + a\frac{z}{1} + a(a+k)\frac{z^2}{1.2} + \ldots + a(a+k)\ldots[a+(n-1)k]\frac{z^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

dont Gergonne et Ampère se sont occupés. M. d'Ocagne trouve pour somme $(1-kz)^{-\frac{a}{k}}$.

Berloty (le P.). — Sur les équations algébriques de la forme $(x^p - a^p)\psi(x) = 0$. (173-176).

Conditions pour que $F(x)$ admette comme facteur $(x^p - a^p)$.

Auzelle (*J.*). — Concours d'admission à l'École Centrale (2e session, 1879); solution de la question proposée (176-180).

Problème relatif aux coniques tangentes aux quatre côtés d'un carré.

Boudènes (*J.*). — Solution de la question de Mathématiques spéciales, proposée au concours d'agrégation de 1880. (180-184).

Problème relatif à un ellipsoïde et à un cône.

Leinekugel (*A.*). — Solution de la première question proposée au concours général de 1879 (Philosophie). (184-185).

Inscription d'un trapèze isoscèle dans un quadrilatère.

Lez (*H.*). — Solution des questions proposées au concours général de 1879 (troisième). (185-189).

Première question : Théorème sur la circonférence. — Deuxième question : Propriétés du triangle.

Concours général de 1881. — Mathématiques spéciales, Mathématiques élémentaires, Philosophie, Rhétorique, Seconde. Énoncés des compositions. (189-192).

Questions proposées. — 1396 à 1399. (192).

Brisse (*Ch.*). — Application des propriétés des polynômes homogènes à la discussion de l'équation en *s*. (193-206).

Cet intéressant article débute par l'étude de l'équation en *s* et par la discussion des divers cas qui peuvent se présenter, savoir : trois racines simples, une racine double, une racine triple, une ou plusieurs racines nulles. L'auteur examine ensuite l'influence de la nature des racines de l'équation en *s* sur la forme des fonctions considérées, ce qui le conduit naturellement à la classification complète des surfaces du second ordre. La détermination des sections circulaires et des conditions pour qu'une surface de second ordre soit de révolution termine l'étude dont il s'agit.

Brisse (*Ch.*). — Réduction de l'équation générale des surfaces de second ordre en coordonnées obliques. (207-216).

C'est en quelque sorte un complément de l'étude qui précède. L'auteur reprend les formules générales de transformation en coordonnées obliques, puis les applique à la recherche des cordes principales dans les surfaces du second ordre, cordes dont les directions dépendent essentiellement de l'équation en s. L'article se termine par l'étude des relations entre les directions des cordes principales et celles des plans de section circulaires, puis par la réduction de l'équation générale du second degré.

Caron (*J.*). — Sur l'intersection d'une droite et d'une surface de révolution du second degré. (217-219).

Extension à toutes les surfaces de révolution du second ordre, de la méthode de M. Rouché, analysées plus haut.

Lebon (*É.*). — Sur l'intersection d'une droite et d'une surface de révolution du second ordre. (219).

Même sujet.

Henry (*E.*). — Solution d'une question d'Analyse, proposée au concours d'agrégation de 1880. (220-229).

Propriétés diverses de la surface définie par les formules

$$\begin{aligned} x &= (u+\beta)\cos\alpha - u'\sin\alpha, \\ y &= (u+\beta)\sin\alpha + u'\cos\alpha, \\ z &= \varphi(\beta), \end{aligned}$$

en admettant que u soit une fonction de α et u' la dérivée.

Moret-Blanc. — Solution des questions de licence proposées au concours d'agrégation de 1880. (230-236).

1. Intégration d'un système d'équations différentielles simultanées. — 2. Problème de Mécanique : rotation d'un tube autour d'un axe vertical.

Concours d'agrégation de l'enseignement secondaire spécial en 1880. — Épreuves écrites : Algèbre et Géométrie, Géométrie descriptive, Mécanique. — Épreuves orales : Algèbre ou Trigonométrie, Géométrie descriptive, Mécanique. Épreuves pratiques. (236-239).

Questions proposées. — 1400 à 1403. (239-240).

Ocagne (*M. d'*). — Sur le développement des logarithmes et des exponentielles. (241-244).

Recherche du développement de $\log f(x)$ suivant les puissances de $\varphi(x)$, la fonction $f(x)$ étant elle-même développée suivant les mêmes puissances. Problème inverse : développement de $f(x)$ connaissant celui de $\log f(x)$. Développement de e^x comme vérification.

Gambey. — Solution de la question de Mathématiques spéciales, proposée au concours d'agrégation de 1879. (245-254).

Problème sur un hyperboloïde à une nappe et sur un paraboloïde circonscrit.

Gambey. — Solution de la question de Mécanique élémentaire, proposée au concours d'agrégation de 1879. (254-256).

Équilibre d'une lame homogène demi-circulaire, suspendue par un fil attaché aux extrémités de son diamètre.

Dorlet (E.). — Solution de la question proposée en Mathématiques spéciales au concours général de 1880. (256-265).

Problème sur une courbe de troisième degré ayant un point de rebroussement.

Moret-Blanc. — Solution des questions proposées en Mathématiques élémentaires au concours général de 1880. (266-268).

I. Résolution d'un système d'équations.
II. Problème sur le cercle.

Lebon (E.). — Solution de la question de Géométrie descriptive, proposée au concours d'agrégation de l'enseignement spécial en 1880. (269-274).

Cône enveloppe des plans qui coupent deux plans verticaux suivant deux droites rectangulaires.

Roubaudi (C.). — Solution de la question de Mécanique, proposée pour l'obtention du brevet de Cluny en 1880. (274-278).

Mouvement de deux corps unis par un fil et placés sur deux plans inclinés.

Kien (L.). — Solution de la question proposée en 1881 (1re section), pour le concours d'admission à l'École Centrale. (278-283).

Problème sur l'ellipse et ses normales.

Moret-Blanc. — Solution des questions proposées au concours pour les bourses de licence à Marseille, en 1881. (283-288).

I. Points d'inflexion d'une cubique.
II. Lieu des foyers des coniques passant par l'intersection d'un cercle et de deux droites parallèles données.

A. L.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN, begründet von H.-C. Schumacher, herausgegeben von Prof. Dr C.-A.-F. Peters. Kiel (¹).

Tome XCVIII, nos 2329-2352; 1880.

Jedrzejewicz (M.). — Mesures micrométriques d'étoiles doubles faites à son observatoire particulier de Plonsk. (1-16, 145-152, 171-190, 193-198, 225-234, 257-266, 273-282, 289-300, 353-362).

Dunér (N.-C.). — Découverte d'une nouvelle étoile variable. (15-16).

L'étoile des zones de Bonn, zone + 37°, n° 2771, est variable de la huitième à la onzième grandeur.

Luther (E.) et *Rahts (J.)*. — Observations de planètes faites au cercle méridien de l'Observatoire de Königsberg, de décembre 1879 à avril 1880. (17-20).

Hough (G.-W.). — Observations des satellites d'Uranus faites à l'Observatoire de Dearborn (Chicago), en mars, avril et mai 1880. (25-28).

Les satellites observés à l'équatorial de 18½ pouces anglais sont Ariel, Umbriel, Titan et Oberon.

Gill (D.). — Observations de la comète *a* de 1880, faites en février 1880 à l'Observatoire du cap de Bonne-Espérance. (29-30).

Doberck (W.). — Formules pour le mouvement de quelques étoiles doubles. (31-32).

Bruhns (C.) et *Peter (B.)* — Observations de planètes faites à l'équatorial de l'Observatoire de Leipzig en janvier, février et mars 1880. (33-48).

Swift (L.). — Découverte d'une comète, comète 1880 IV, faite le 18 août à Rochester. (47-48).

Abetti (A.). — Éléments paraboliques de la comète de Swift, 1879

(¹) Voir *Bulletin*, IV₁, 154.

III, et comparaison de l'éphéméride avec les observations faites à l'Observatoire de Padoue en juillet et août 1879. (49-54).

Les éléments

$$\begin{aligned} T &= 1879 \text{ avril } 28{,}06793 \text{ t. m. B.},\\ \pi &= 47.\ 9.17.1,\\ \Omega &= 44.57.29{,}9,\\ i &= 107.14.18{,}6,\\ \log q &= 9{,}940522, \end{aligned}$$

satisfont à l'ensemble des observations du 10 juillet au 15 août.

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations d'étoiles variables. (53-54).

Tacchini (*P.*). — Observations de planètes faites en juin et juillet 1880 à l'équatorial de Merz de l'Observatoire du Collège Romain. (55-58).

Doberck (*W.*). — Éléments de l'étoile double ζ d'Hercule. (59-62).

Les éléments sont calculés d'après l'ensemble des observations faites de 1826 à 1873.

Ceraski (*W.*). — Note sur une étoile variable. (61-64).

L'étoile de la Durchmusterung, dont la position est

$$\text{Æ} = 0^h 49^m 39^s, \quad \partial = +81°5',6,$$

est variable avec une période d'environ dix jours.

Peters (*C.-F.-W.*). — Résultats des observations du pendule. IIe Partie. — Mesure de la longueur du pendule simple à secondes à Berlin. (65-84).

Les observations ont été faites à l'aide du pendule à réversion de Lohmeier, dans le but de comparer les résultats fournis par cet instrument avec ceux autrefois obtenus à Berlin avec un pendule invariable de Fortin (observations de 1823 à 1824), avec un pendule filaire de Repsold (Bessel, 1835), enfin avec un pendule à réversion de Repsold (Albrecht, 1869). On sait que l'ensemble de ces observations a été discuté, en 1874, par Bruhns dans les publications de l'Institut impérial de Géodésie prussienne.

L'ensemble de huit séries d'expériences a donné à M. Peters, pour la longueur du pendule simple à secondes, à Berlin et au niveau de la mer,

$$\lambda = 994{,}1860^{mm}.$$

Les anciennes déterminations avaient donné

$$\lambda = 994{,}2318^{mm}.$$

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Recherches sur la couleur des étoiles. (83-90).

Le savant directeur de l'Observatoire d'Athènes a d'abord étudié, à l'aide d'une échelle de couleurs qui lui est spéciale et qui permet de définir par un nombre la couleur d'une étoile, les variations que présente la couleur de Vénus lorsque la planète s'abaisse vers l'horizon; dans ce cas, il ne lui a pas été difficile de montrer que la planète devient d'autant plus rouge que sa distance zénithale augmente. L'intensité de la coloration rouge peut d'ailleurs être traduite par une courbe dont les ordonnées croissent depuis zéro (la planète est blanche au zénith) jusqu'au rouge.

Cette courbe étant construite permet ensuite de mesurer le degré de rouge que l'atmosphère donne forcément aux étoiles qui restent toujours voisines de l'horizon et par suite d'arriver à une appréciation vraie de la couleur de ces étoiles.

Les étoiles spécialement étudiées par M. Schmidt sont δ de Céphée, η de l'Aigle, ζ des Gémeaux, β de la Lyre et Mira Ceti.

Burnham (*S.-W.*). — Note sur l'étoile double de 87 de Pégase. (89-90).

Les mesures montrent que le compagnon a un mouvement certain autour de l'étoile principale.

Meyer (*M.-W.*). — Observations équatoriales faites à l'Observatoire de Genève en mai, juin et juillet 1880. (91-94).

Les observations ont été faites au nouvel équatorial de 10 pouces que M. E. Plantamour a fait installer à Genève.

Swift (*L.*). — Note sur les circonstances de la découverte d'une comète faite le 17 août 1880. (95-96).

Cette nébulosité, observée une nuit par M. Swift, n'a pas été revue.

Möller (*Axel*). — Observations de la comète périodique de Faye, 1880 III, faites à Lund du 29 au 31 août 1880. (95-96).

Coggia. — Découverte d'une planète, (217), faite à Marseille le 30 août 1880. (95-96).

Spoerer. — Recherches sur la périodicité des taches solaires, la longueur de leur période et les époques des maxima ou minima. (97-104).

La période des taches solaires est de 11,313 années; les époques des minima et maxima sont données par les formules :

$$\text{Minimum} \ldots\ldots\ 1753,914 + \alpha.11.313,$$
$$\text{Maximum} \ldots\ldots\ 1758,364 + \alpha.12,333,$$

où α prend les valeurs entières 0, 1, 2, ...

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations d'étoiles variables, faites à Athènes en 1880. (103-112).

Palisa (*A.*). — Découverte de la planète (218), faite le 4 septembre 1880. (111-112).

Oppenheim (*H.*). — Calcul des perturbations de Clytie (73) par Jupiter, de 1862 à l'époque actuelle. (113-128).

Palisa (*A.*). — Observations de comètes et de planètes faites à l'Observatoire de Pola, de août 1879 à avril 1880. (129-144).

Hartwig. — Découverte d'une comète, 1880 V, faite à l'Observatoire de Strasbourg le 29 septembre 1880. (143-144).

Burnham (*S.-W.*). — Note sur l'étoile double ζ du Sagittaire. (151-152).

Les observations de 1867 à 1880 montrent un mouvement de rotation rapide.

Pechüle (*C.-F*). — Observations de la comète de Brorsen faites en 1879 au grand équatorial de l'Observatoire de Copenhague. (153-156).

Tebbutt (*J.*). — Éléments paraboliques de la grande comète australe, comète I, 1880. (155-156).

Doberck (*W.*). — Éléments de l'étoile double η de la Couronne boréale. (157-160).

Ces éléments représentent l'ensemble des observations faites de 1781 à 1872.

Bruhns (*C.*). — Observations de la comète Hartwig, comète 1880 V. (159-160).

Pechüle (*C.-F.*). — Passage de Mercure du 6 mai 1878 observé à Copenhague. (161-174).

Le premier contact intérieur a été observé par rupture brusque de la goutte noire. Des observations de la position de Mercure sur le disque du Soleil ont ensuite été faites avec un micromètre annulaire. Le Mémoire de M. Pechüle contient le développement des formules nécessaires à la réduction d'observations de cette espèce, lorsque l'astre observé est assez voisin de l'horizon pour que les corrections de réfractions deviennent considérables.

Zelbr (*K.*) et *Hartwig* (*E.*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète Hartwig, comète 1880 V. (169-170).

Oppenheim (*H.*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète Hartwig, 1880 V. (191-192).

Burnham (*S. W.*). — Note sur l'étoile double δ du Petit Cheval. 190-192).

La révolution du compagnon est de 30 à 40 ans.

Oppolzer (*v.*). — Perturbation du premier ordre exercées sur la planète Concordia (58) par Jupiter et Saturne. (199-204).

Burnham (*S.-W.*). — Note sur l'étoile double $O\Sigma 367$. (203-204).

Les deux étoiles mesurées par O. Struve sont fixes, mais il y a au voisinage du compagnon (à une distance de 0",77) une très petite étoile non encore signalée.

Klinkerfues (*W.*). — Observations de la comète *b* de 1880, faites en avril et mai à Göttingue. (205-206).

Notice nécrologique sur *W. Lassell.* (207-208).

W. Lassell, né le 18 juin 1799 à Bolton (Lancashire), est mort à Maidenhead le 5 octobre 1880. Vers 1820, il construisit de ses mains un télescope de 7 pouces d'ouverture, avec lequel il découvrait la sixième étoile du trapèze d'Orion. En 1844, il obtenait un télescope de 2 pieds d'ouverture et de 20 pieds de distance focale; c'est avec cet instrument qu'il a découvert le satellite de Neptune (1847), puis Hyperion (1848) et enfin Umbriel et Ariel (1851). Enfin en 1861, il transportait à Malte un télescope de 4 pieds d'ouverture et y découvrait environ 600 nébuleuses nouvelles.

Depuis son retour de Malte, le télescope de 4 pieds est resté inutile; M. Lassell avait seulement installé à Maidenhead le télescope de 2 pieds.

Swift (*L.*). — Découverte d'une comète, comète 1880 VI, faite à Rochester le 12 octobre 1880. (207-208).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Recherches sur la rotation de Jupiter. (209-222),

Une tache noire qui s'est montrée pendant l'été de 1862 sur l'hémisphère nord de Jupiter et que M. Schmidt a pu observer du 15 mai au 7 juillet avait autrefois donné à cet astromone pour la rotation de Jupiter :

$$\text{Rotation de Jupiter} = 9^h 55^m 25^s,684 \pm 0^s,179. \text{ — Observations de 1862.}$$

La tache rouge, qui est actuellement visible dans l'hémisphère austral de la planète, et que la constance de sa forme paraît devoir faire considérer comme fixe sur Jupiter, donne à M. Schmidt :

$$\text{Rotation de Jupiter} = 9^h 55^m 34^s,63 \pm 0^s,09. \text{ — Observations de 1879-1880,}$$

résultat qui surpasse de 9^s environ le nombre généralement admis.

Meyer (*M.-W.*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète Hartwig, 1880 V. (223-224).

Tacchini (*P.*). — Observations de la comète périodique de Faye et de la comète de Hartwig (1880 V) faites à l'Observatoire du Collège Romain en septembre et octobre 1880. (235-238).

Zelbr (*K.*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète de Hartwig, 1880 V. (239-240).

Küstner (*F.*). — Observations d'étoiles de comparaison faites en 1880, au petit cercle méridien de l'Observatoire de Berlin (241-248).

Knorre (*V.*). — Observations de petites planètes faites à l'équatorial de 9 pouces de Berlin, pendant le second semestre de 1879. (247-256).

Peters (*C.-F.-W.*). — Éléments paraboliques de la comète Hartwig. (255-256).

Meyer (*M.-W.*). — Observations de la comète périodique de Faye, faites à l'Observatoire de Genève en septembre et octobre 1880. (267-270).

Bredikhine (*Th.*). — Spectre de la comète de Hartwig. (271-272).

Les deux bandes les moins refrangibles ont été mesurées et elles ont pour longueurs d'ondes 556 et 515.

Doberck (*W.*). — Éléments de γ des Chiens de chasse $= \Sigma$, 1768. (271-272).

Ces éléments représentent les observations de 1827 à 1880. La période de révolution est de cent dix-neuf ans.

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Note sur l'étoile variable de Céphée, découverte par M. Ceraski. (283-284).

La période de variation est de $2^{j}\ 11^{h}\ 50^{m}$.

Knott (*G.*). — Observation du minimum de l'étoile variable de M. Ceraski, le 23 octobre 1880. (285-286).

Peters (*C.-H.-F.*). — Observations de la comète de Hartwig, 1880 V, faites en octobre 1880, à Clinton (U.-S.). (285-288).

Tempel (*W.*). — Observations de la comète périodique de Faye et de la comète de Hartwig, 1880 V, faites à l'Observatoire d'Arcetri (Florence) d'août à octobre 1880. (299-304).

Notice nécrologique sur *B. Peirce*. (303-304).

Peirce, professeur d'Astronomie à Cambridge (Massachusetts), né à Salem le 4 avril 1809, est mort à Cambridge le 6 octobre 1880.

Howe (*H.-A.*). — Note sur deux nouvelles solutions du problème de Kepler. (305-308).

Étant donné une solution approchée, toujours facile à obtenir, de l'équation

$$U = m - e \sin U,$$

M. Howe donne deux formules propres à calculer assez exactement la valeur de U.

Lehmann-Filhès (*R.*). — Note sur les formules dans le 134e paragraphe du *Theoria motus* de Gauss. (307-310).

Upton (*Winslow*). — Observations de la comète Hartwig, 1880 V, faites à l'Observatoire naval de Washington en octobre 1880, et éléments paraboliques de cette comète. (311-312).

Konkoly (*N.-V.*) et *Kobold* (*H.*). — Observations de la comète de Hartwig, 1880 V, faites à Ó Gyalla du 30 septembre au 2 novembre 1880. (311-318).

Le spectre de la comète est formé de quatre bandes lumineuses ayant pour longueurs d'ondes 560, 549, 517, 486; elles sont donc très voisines des lignes de C_2H_3.

Les positions de la comète ont été observées du 30 septembre au 2 novembre, par le Dr Kobold.

Ritchie (*J.*). — Éléments et éphémérides de la comète de Swift, 1880 VI. (319-320).

Lohse (*J.-G.*). — Éléments paraboliques de la comète de Swift, 1880 VI. (319-320).

Stebnitzky (major *J.*). — Nouvelle détermination de la longitude et de la latitude de Constantinople. (321-324).

Les résultats obtenus sont, pour la position géographique de la tour du Seraskierat,

$$\varphi = 40^\circ 0' 57'', 32,$$
$$L = 1^h 55^m 51^s, 72 \text{ E. de Greenwich.}$$

La longitude est déduite de celle d'Odessa.

Copeland (*Ralph*) et *Lohse* (*J.-G.*). — Éléments et éphéméride de la comète VI de 1880. (319-328).

La comète paraît identique à la comète III de 1869.

Zelbr (*K.*) et *Hepperger* (*J.-V.*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète VI de 1880. (327-328).

Chandler (*S.-C.*). — Note sur l'identité de la comète VI de 1880 (comète de Swift) avec la comète III de 1869. (327-330).

Block (*E.*). — Observations des comètes V et VI de 1880, faites à l'Observatoire d'Odessa en octobre et novembre 1880. (329-330).

Möller (*Axel*). — Observations de la comète Swift (1880 VI) faites à Lund. (331-332).

Oppenheim (*H.*), — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète de Swift (1880 VI). (331-332).

Moesta (*C.-W.*). — Note sur la parallaxe de α_2 du Centaure. (333-334).

La parallaxe a pour valeur $0'',521 \pm 0'',066$.

Abetti (*A.*). — Observations de la comète de Hartwig, faites à Padoue en octobre 1880. (333-334).

Peters (*C.-F.-W.*). — Observations de la comète Hartwig, faites à Kiel en novembre 1880. (335-336).

Löw (*M.*). — Recherches sur la hauteur du Pôle à Helgoland. (337-342).

La latitude de la station géodésique occupée en 1857 par le général Bayer est

$54° 10' 48'',80$.

Young (*C.-A.*). — Observations de la comète de Swift (1880 VI), faites en octobre et novembre, à Princeton, New-Jersey (U. S.). (341-342).

Tacchini (*P.*). — Observations de la comète périodique de Faye et de la comète Hartwig (1880 V), faites en octobre et novembre au Collège Romain. (343-346).

Block (*E.*). — Observations des comètes Hartwig (1880 V) et

Swift (1880 VI), faites en octobre et novembre à l'Observatoire d'Odessa. (347-348).

Young (*C.-A.*). — Observation du spectre de la comète de Hartwig. (349-350).

Le spectre se compose de trois bandes ayant pour longueurs d'onde les nombres 556,4, 516,9, 473,7. La première bande est très rapprochée de la ligne *b* du magnésium; les deux dernières se rapprochent des bandes les plus réfrangibles de la lumière du bec de Bunsen.

Börgen (*C.*). — Observations de la comète de Swift (1880 VI), faites à Wilhelmshaven en novembre 1880. (351-352).

Meyer (*M.-W.*). — Observations de la comète périodique de Faye et de la comète de Hartwig (1880 V), faites à l'Observatoire de Genève en octobre et novembre 1880. (363-366).

Upton (*Winslow*). — Éléments et éphéméride de la comète Swift (1880 VI), d'après les observations de Washington. (367-368).

Palisa (*J.*). — Observations de comètes et de planètes, faites à Pola pendant les mois de septembre et octobre 1880. (369-372).

Strasser (*G.*). — Observations de la Lune et d'étoiles de culmination lunaire, faites en 1878 et 1879 à Kremsmünster. (371-378).

Boss (*Lewis*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète de Swift (1880 VI). (377-380).

Bellamy (*W.*). — Éléments paraboliques de la comète de Swift (1880 VI). (379-380).

Notice nécrologique sur *J.-C. Watson*. (383-384).

Watson (J.-C.), longtemps directeur de l'Observatoire d'Ann Arbor, est mort à Madison, le 22 novembre 1880, à l'âge de 43 ans.

Tome XCIX, n^{os} 2353-2376; 1881.

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Note sur l'influence des erreurs d'observation dans la détermination de la durée de rotation de Jupiter. (1-12).

Les points noirs que l'on observe parfois sur Jupiter ou dans ses bandes, ainsi que les points brillants qui sont fréquents sur les bandes, ont, en général, un mouvement propre, rapide sur la planète.

Schulhof et *Bossert*. — Note sur la comète de Swift, comète VI de 1880. (11-16).

La comète de Swift est identique à la comète 1869 III, mais la révolution, au lieu de s'effectuer en onze ans, se fait en cinq ans et demi. La comète est donc revenue en 1874 sans avoir été aperçue; elle reviendra dans des conditions défavorables en 1885.

Pechüle. — Découverte de la comète VII de 1880, faite à Copenhague le 16 décembre 1880. (15-16).

Schulhof et *Bossert*. — Éléments elliptiques de la comète de 1880. (15-16).

D'après l'ensemble des observations, la durée de la révolution serait de 1280 ans.

Zelbr (*K.*). — Recherches sur l'orbite de la comète III de 1869. (17-20).

Les observations de 1869 peuvent être assez bien représentées par une ellipse de onze années. Le calcul paraît donc laisser indécise la question de savoir si la comète 1869 III ou 1880 VI a une révolution de cinq ans et demi ou de onze ans.

Hepperger (*I. v.*). — Éléments elliptiques et éphéméride de la comète VI de 1880, comète de Swift. (19-22).

Les éléments sont calculés dans l'hypothèse d'une révolution de 1097 ans; ils montrent l'identité de la comète actuelle avec la comète 1869 III.

Tempel (*W.*). — Observations de la comète V de 1880, comète Hartwig, et de la comète VI de 1880, comète Swift, faites à Arcetri, en novembre et décembre 1880. (21-24).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations de la comète VI de 1880, faites à Athènes en novembre et décembre 1880. (23-26).

Bredikhine (*Th.*). — Sur la constitution de Jupiter. (25-26).

La zone équatoriale de Jupiter est une zone solide élevée; l'hémisphère austral est plus chaud que l'hémisphère boréal.

Tacchini (*P.*). — Observations de la comète VI de 1880 (Swift), faites en décembre 1880 à l'équatorial du Collège Romain. (27-30).

Herz (*Norbert*). — Note sur la résolution du problème de Kepler. (31-32).

Pechüle (*C.-F.*). — Éléments et éphéméride de la comète VII de 1880, découverte par lui, le 16 décembre. (31-32).

Moesta (*C.-W.*). — Remarques sur les observations de β et α du Centaure. (33-44).

La différence de parallaxe des deux étoiles est de 0",35 d'après les observations de Sautinger; d'après celles du Cap, elle serait de 0",45.

Chandler (*S.-C.*). — Sur la période probable de la comète VI de 1880, comète de Swift. (45-46).

La période de la comète est de cinq ans et demi, soit deux mille trois jours. Cela résulte du calcul rigoureux des observations de la comète III de 1869.

Oppenheim (*H.*). — Éléments paraboliques de la comète VII de 1880, comète de Pechüle. (47-48).

Moesta (*C.-W.*). — Suite des remarques sur les observations α et β du Centaure. (49-58).

Glasenapp (*S.-V.*). — Résultat des observations de l'étoile variable β de Persée. (57-58).

L'éphéméride du Dr Schönfeld est très exacte.

Konkoly (*N. v.*). — Différence de longitude entre Berlin et Ó Gyalla. (57-60).

La longitude de Ó Gyalla est $0^h\,19^m\,10^s,69$ ouest de Berlin.

Holetschek (*J.*). — Éléments et éphéméride de la comète de 1880, comète de Pechüle. (59-60).

Kobold (*H.*). — Observations de la comète VI de 1880 faites à Ó Gyalla en novembre 1880. (61-62).

Peters (*C.-F.-W.*). — Observations de la comète VII de 1880 faites à Kiel en décembre 1880. (61-62).

Millosewich (*E.*). — Observations de la comète VII de 1880 (Pechüle) faites à l'Observatoire du Collège Romain en décembre 1880. (63-64).

Gasparis (*A. de*). — Sur les rapports qui existent entre les variations simultanées de certains éléments des ellipses instantanées du problème des trois corps; 1re partie. (65-72).

Peters (*C.-H.-F.*). — Note sur la transmission par le câble transatlantique des dépêches astronomiques annonçant une découverte. (73-75).

Holetschek (*J.*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète VII de 1880 (comète Pechüle). (75-78).

Millosewich (*E.*). — Observations de la comète VI de 1880, comète Swift, faites à l'équatorial de l'Observatoire du Collège Romain en décembre 1880. (77-80).

Oppenheim (*H.*). — Éléments et éphéméride de la comète VII de 1880. (79-80).

Gasparis (*A. de*). — Suite des recherches sur les variations simultanées des éléments de l'ellipse instantanée dans le problème des trois corps. (81-88).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Variations et éclat de T de Céphée, étoile variable découverte par M. Ceraski. (87-92).

La période est de $2^{j}\,11^{h}\,51^{m}$.

Searle (*A.*). — Note sur la lumière zodiacale. (91-94).

Il existe entre l'Aigle et les Pléiades, passant par le Verseau et la partie sud du Bélier et des Poissons, une bande permanente de matière cosmique lumineuse qui a été parfois confondue avec la lumière zodiacale.

Konkoly (*N. v.*). — Observations spectroscopiques de la comète Pechüle. (93-94).

Le spectre de la comète est formé de trois bandes ayant pour longueurs d'onde

	mm
I..........	560,3
II..........	516,3
III........	476,3

Ambronn. — Éléments et éphéméride de la comète VII de 1880. (95-96).

Pickering (*E.-C.*). — Observations de la comète III de 1869 faites en décembre 1869 à l'Observatoire de Harvard College (95-96).

Gasparis (*A. de*). — Suite des recherches sur les variations simultanées des éléments de l'ellipse instantanée du problème des trois corps. (97-102).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations des comètes de Faye et de Hartwig, faites en 1880 à l'Observatoire d'Athènes. (101-108).

Pickering (*E.-C.*). — Observations de l'éclipse du Soleil du 30 décembre 1880, faites à l'observatoire de Harvard College. (107-108).

Chandler (*S.-C.*). — Éléments de la comète VII de 1880, comète Pechüle. (109-110).

Frisby (*E.*). — Éléments de la comète de Swift, calculés d'après trois observations méridiennes de Washington. (111-112).

Notice nécrologique sur le baron *Dembowski*. (111-112).

Le baron Dembowski est mort à Gallarate le 19 janvier 1881, à l'âge de 69 ans. Ses premières observations d'étoiles doubles ont été faites à Naples en 1852; en 1860 il avait fait construire à Gallarate un observatoire où il a observé jusqu'à ses derniers jours.

Peters (*C.-H.-F.*). — Recherches sur les étoiles variables, faites à l'Observatoire de Clinton (Hamilton College). (113-128).

Schaeberle (*J.-M.*). — Observations de la comète IV de 1880, comète de Hartwig, faites en octobre 1880 à l'Observatoire de Ann Arbor. (127-128).

Peters (*C.-F.-W.*). — Détermination de la longueur du pendule simple à secondes à Königsberg. (129-138).

La longueur du pendule simple à secondes est de $994^{mm},4061$, à Königsberg ou dans les localités voisines, on a successivement trouvé, soit par les observations d'un pendule à fil, soit par les observations d'un pendule à réversion, les résultats suivants :

Station.	Observateur.	Longueur du pendule simple. mm	Longueur du pendule à reversion. mm	Différence. mm
Altona.	Sabine	994,3342	994,3007	+0,0335
Berlin........	Bessel	994,2318	994,1860	+0,0435
Königsberg......	Bessel	994,4098	994,4061	+0,0037
Königsberg......	Peters	994,4358	994,4061	+0,0297

L'existence de ces différences montre qu'il existe encore une assez grande incertitude dans la valeur du coefficient de résistance de l'air.

Tacchini (*P.*). — Observations de la comète Pechüle, comète VII de 1880, faites en décembre 1880 à l'Observatoire du Collège Romain. (137-140).

Peters (*C.-H.-F.*). — Observations de la planète Frigga (77), faites à l'Observatoire de Lichtfield (Clinton). (141-142).

Pritchett (*H.-S.*). — Observations de la comète IV de 1880, comète Hartwig, faites à l'observatoire Morrison (Glasgow, U. S) en novembre 1880. (143-144).

Luther (*R.*). — Observations de petites planètes, faites en 1880 à l'équatorial de l'Observatoire de Düsseldorf. (145-150).

Luther (*W.*). — Éphéméride de Leucothea (35) pour l'opposition de mars-avril 1881. (151-154).

Engelhardt (*B. v.*). — Observations des comètes Hartwig, Swift et Pechüle, faites à son observatoire privé de Dresde d'octobre 1880 à février 1881. (153-158).

Meyer (*W.*). — Observations de la comète Pechüle, faites à l'Observatoire de Genève en janvier 1881. (157-158).

Abetti (*A.*). — Observations de la comète Pechüle, faites à Padoue en janvier 1881. (157-160).

Strasser (*G.*). — Observations de la comète VI de 1880, faites à Kremsmünster en décembre 1880 et janvier 1881. (159-160).

Pucci (*E.*). — Note sur la réduction des observations astronomiques et des angles géodésiques d'une surface de niveau à une autre. (161-168).

Oppenheim (*H.*). — Éphéméride de la comète VII de 1880, comète de Pechüle, pour février et mars 1881. (169-170).

Upton (*Winslow*). — Éléments elliptiques de la comète VI de 1880, comète de Swift. (171-172).

La période serait de 2189^j, soit 6 ans.

Tacchini (*P.*). — Note sur le diamètre de Vesta. (173-174).

A la distance 1 le diamètre apparent de Vesta est de $1'',41$.

Burnham (*S.-W.*). — Note sur l'étoile double $o\Sigma 547$. (173-174).

Peters (*C.-F.-W.*). — Observations de la comète VII de 1880, comète Pechüle, faites à Kiel en janvier 1881. (173-174).

Börsch (*A.*). — Mesure des coefficients de dilatation du fer et du zinc, au moyen de l'appareil de Bessel pour la mesure des bases. (175-190).

Holetschek (*J.*). — Éphéméride de la comète VII de 1880, comète de Pechüle, pour mars 1881. (189-190).

Dunér (*N.-C.*). — Découverte d'une nouvelle étoile variable. (191-192).

L'étoile 1044 de la zone $+34°$ du Catalogue de Bonn, qui est l'étoile $57a$ du Catalogue des étoiles rouges de Schjellerup, est variable.

Abetti (*A.*). — Observation de la comète de Pechüle, comète VII de 1880, faite à Padoue le 22 février 1881. (191-192).

Palisa (*J.*). — Découverte de la planète (220). (191-192).

Tacchini (*P.*). — Suite des observations de la comète VII de 1880, Pechüle, faites au Collège Romain en janvier et février 1881. (193-194).

Winkler (*W.*). — Observations d'éclipses de satellites de Jupiter, faites à Gohles (près Leipzig) de 1876 à 1881. (195-198).

La lunette employée est un équatorial de Steinheil de 108^{mm} d'ouverture.

Tempel (*W.*). — Observations de la comète de Swift, faites à Arcetri en janvier 1881. (197-198).

Tacchini (*P.*). — Observations de petites planètes faites en 1880 à l'Observatoire du Collège Romain. (199-202).

Peters (*C.-H.-F.*). — Observations de la comète III de 1864, faites à Clinton. (203-204).

Tebbutt (*J.*). — Observation micrométrique de la distance de Jupiter à l'étoile 363 du Catalogue de Washington le 20 novembre 1880. (205-206).

Abetti (*A.*). — Observations de la comète de Pechüle, VII de 1880, faites à Padoue le 24 février 1881. (207-208).

Block (*E.*). — Observations des comètes VI de 1880 (Swift) et

VII de 1881 (Pechüle), faites à Odessa d'octobre 1880 à février 1881. (209-212).

Jedrzejewicz. — Observations de la tache rouge de Jupiter, faites à Plonsk pendant l'opposition de 1880-1881. (211-216).

La durée de la rotation de l'extrémité orientale de la tache est de

$$9^h 55^m 34^s,414 \pm 0^s,13.$$

Kobold (H.). — Observations de la comète VII de 1880 (Pechüle) faites à O'Gyalla du 20 décembre 1880 au 23 février 1881. (217-220).

Strasser (G.). — Observations de la comète VII de 1880 (Pechüle), faites à Kremsmünster en janvier 1881. (219-220).

Pickering (E.-C.). — Observations du satellite de Sirius, faites à Harvard College, de 1867 à 1872, par J. Winlock. (219-222).

Engelhardt (B. v.). — Observations de la comète VII de 1880 (Pechüle), faites à Dresde du 25 janvier au 3 mars 1881. (223-224).

Schmidt (J.-F.-J.). — Observations d'étoiles variables, faites à Athènes en 1880. (225-234).

Peters (C.-H.-F.). — Comparaison de la grandeur des étoiles d'après Ulugh Beg avec l'éclat actuel. (235-240).

Abetti (A.). — Observations de petites planètes en opposition, faites à l'équatorial de Padoue en 1880. (241-254).

Schmidt (J.-F.-J.). — Observations de la comète VII de 1880 (Pechüle), faites à Athènes du 30 décembre 1880 au 25 février 1881. (253-256).

Abetti (A.). — Observations de petites planètes en opposition, faites à l'équatorial de Padoue en 1880. (257-262).

Jedrzejewicz. — Mesures micrométriques d'étoiles doubles, faites à Plonsk en 1876 et 1877. (263-272).

Schmidt (J.-F.-J.). — Observations des taches solaires, faites à Athènes en 1880. (273-278).

Glauser (*J.*). — Recherches sur le point radiant des comètes. (279-282).

M. Hoek a signalé, dans plusieurs publications, que les comètes pouvaient être réunies par groupes ayant un point radiant commun, ce qui compléterait l'analogie entre ces corps et les étoiles filantes et il a signalé plusieurs de ces groupes.

Pour des comètes venant du même point de l'espace on doit, suivant M. Glauser, avoir la relation

$$\frac{q'}{q} = \frac{e-1}{e'-1}$$

où q est la distance périhélie et e l'excentricité.

Or il se trouve que, parmi les groupes signalés par M. Hoeck, il n'y a que le groupe des comètes, 1824 juillet 11, et 1833 novembre 10, qui satisfasse à cette relation.

Suivant M. Glauser, les autres groupes ne sont pas réels.

Kuhlberg (*P.*). — Résultat des observations du pendule dans le Caucase. (281-288).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Observations de la comète Swift, 1880 VI, faites à Athènes en décembre 1880. (287-288).

Löw (*M.*). — Note sur la théorie de l'instrument des passages établi dans le premier vertical. (289-298).

La méthode de réduction proposée par M. Low consiste à faire les réductions fil à fil et à déduire de chaque passage une valeur de ($\varphi - \delta$).

Sawyer (*E.-F.*). — Observations des étoiles variables η Aigle et β Lyre, faites en 1877-1878 à Cambridge (Massachusets). (297-300).

Ceraski (*W.*). — Note sur le calcul des observations des étoiles variables. (299-302).

Tacchini (*P.*).— Observations de la comète VII (Pechüle), faites à l'Observatoire du Collège Romain du 17 au 23 mars 1881. (301-304).

Burnham (*S.-W.*). — Observations du compagnon de Sirius en 1880-1881. (303-304).

Schmidt (*Alex.*). — Théorie des erreurs de division des instruments méridiens. (305-342).

Thraen (*A.*). — Nouvelles recherches sur l'orbite de la comète découverte en 1810 par Pons.

Schaeberle (*J.-M.*). — Note sur une méthode physique rapide pour régler la position d'un équatorial. (347-348).

Schmidt (*J.-F.-J.*). — Note sur la découverte d'une nouvelle étoile dans la tête du Petit Chien.

Tempel (*W.*). — Observations de la comète VII de 1880, Pechüle, faites à Arcetri du 24 février au 17 mars 1881. (351-352).

Egbert (*H.-V.*). — Éléments de (201) Pénélope. (351-352).

Swift. — Découverte d'une comète faite à Rochester (U. S.), le 30 avril 1881. (351-352).

Schiaparelli (*J.-V.*). — Observations de la tache polaire australe de Mars pendant l'opposition de 1879. (353-358).

La position du plan de l'équateur de la planète par rapport à l'équateur terrestre de 1880, à l'écliptique de 1880 et à l'orbite de Mars en 1880, est donnée par les valeurs suivantes du nœud et de l'inclinaison :

Équateur terrestre..........	$☊ = 48°.\ 7',8$	$i = 36°.22',9$
Écliptique...................	$84.28,3$	$26.20,6$
Orbite de Mars	$86.47,7$	$24.52,0$

Ces nombres sont très voisins de ceux qu'a employés M. Marth pour le calcul de ses éphémérides pour les observations physiques de Mars.

Meyer (*W.*). — Détermination des orbites des satellites de Saturne, Encelade, Thétis, Dione et Rhéa d'après une nouvelle méthode. (359-364).

Les calculs fondés sur les observations micrométriques faites en 1880 à Genève par M. W. Meyer ont donné les éléments elliptiques des quatre satellites.

Todd (*D.-P.*). — Observations de la tache rouge de Jupiter, faites à Washington en 1879-1880. (365-366).

Peters (*C.-F.-W.*). — Observations de la comète découverte le 30 avril par M. Swift. (365-366).

Leavenworth (*T.-P.*). — Éléments de la planète (213) Lilea. (367-368).

Searle (*A.*). — Note sur la lumière zodiacale et la distribution des étoiles dans la portion du ciel voisine de l'équinoxe du printemps. (369-372).

Spoerer. — Observations de taches solaires, faites à Potsdam de février à août 1880. (371-376).

Pickering (*E.-C.*). — Liste d'étoiles remarquables par leur couleur ou la distribution de la lumière dans leur spectre, découvertes à l'Observatoire de Harvard College. (375-378).

Les objets signalés par M. Pickering sont au nombre de 39.

Foerster (*W.*). — Remarques sur les observations du pendule faites à Königsberg par M. C.-F.-W. Peters. (379-382).

Block (*E.*). — Observations et éléments de la comète I de 1881, comète de Swift. (381-382).

Knorre (*V.*). — Observations de la comète I de 1881, faites à Berlin. (381-382).

Oppenheim (*H.*). — Éléments paraboliques et éphéméride de la comète I de 1881, Swift. (383-384). G. R.

The LONDON, EDINBURGH, AND DUBLIN PHILOSOPHICAL MAGAZINE and Journal of Science. Conducted by sir Robert Kane, sir William Thomson and William Francis. — London, in-8° (¹).

Tome VI; juillet-décembre 1878.

Croll (*J.*). — Sur l'origine des nébuleuses. (1-14).

L'auteur examine les contributions que la Science moderne de l'énergie apporte à la question de l'origine des nébuleuses, et il considère en particulier la cause physique de la dispersion de la matière dans l'espace, sous forme de nébulosités.

Hughes. — Sur l'action physique du microphone. (44-50).

Meldola (*R.*). — Sur la cause de l'apparition de lignes brillantes dans le spectre solaire. (50-61).

Mills (*E.-J.*). — Note sur des recherches de thermométrie. (62-63).

(¹) Voir *Bulletin*, II_2, 84-101.

Bosanquet (*R.-H.-M.*). — Sur la relation entre les tuyaux sonores ouverts et les tuyaux fermés. (63-66).

Clarke (*Col. A.-R.*). — Sur la figure de la Terre. (81-93).

Le nombre qui exprime l'aplatissement du sphéroïde terrestre et que l'on a évalué, au commencement de ce siècle, à $\frac{1}{300}$ environ, semble devoir s'accroître, à mesure que de nouvelles données viennent s'ajouter aux données anciennes sur la forme du globe. Ainsi, les travaux géodésiques récemment exécutés dans l'Inde anglaise donnent, pour les ellipticités des deux principaux méridiens terrestres, les fractions $\frac{1}{289,54}$ et $\frac{1}{295,77}$.

Blaikley (*D.-J.*). — Sur les instruments à vent en cuivre comme résonateurs. (119-128).

Chase (*P.-E.*). — Sur l'hypothèse nébulaire. — IX. Radiation et rotation. (128-132).

Lockyer (*J.-N.*). — Recherches récentes sur la Chimie solaire. (161-176).

Heaviside (*Ol.*). — Sur la résistance des électro-aimants télégraphiques. (177-185).

Zöppritz (*K.*). — Problèmes hydrodynamiques relatifs à la théorie des courants océaniques. (192-211).

« Le but de ce Mémoire est de montrer quels sont les mouvements qu'admet une couche liquide illimitée sous des influences extérieures agissant seulement à la surface, dans la supposition que le liquide admette un frottement (comme c'est le cas pour l'eau et pour tous les autres liquides connus, à un degré plus ou moins marqué). »

Ennis (*Jacob*). — Origine de la force qui produit les radiations stellaires. (216-225).

Dvorák (*V.*). — Sur la répulsion acoustique. Suivi d'une Note du professeur *A.-M. Mayer*. (225-233).

1. Répulsion acoustique des résonateurs ouverts à une seule extrémité. — 2. Le moulin acoustique. — 3. La balance de torsion acoustique. — 4. Production de courants aériens par le son.

Boltzmann (*L.*). — Sur quelques problèmes de la théorie mécanique de la chaleur. (236-237).

Clausius (*R.*). — Sur la relation entre le travail produit par la diffusion et le second théorème de la théorie mécanique de la chaleur. (237-238).

Blake (*J.-F.*). — Sur la mesure des courbes formées par les céphalopodes et autres mollusques. (241-263).

Études géométriques sur la forme et la loi d'accroissement des coquilles.

Hennessy (*H.*). — Sur les limites des hypothèses concernant les propriétés de la matière qui compose l'intérieur de la Terre. (263-267).

Worthington (*A.-M.*). — Sur la couleur bleue du ciel. (267-270).

Rayleigh (*Lord*). — Note sur la répulsion acoustique. (270-271).

Thompson (*Silv.-P.*). — Sur certains phénomènes accompagnant les arcs-en-ciel. (272-274).

Ball (*R.-St.*). — Sur les *vis* (*screws*) principales d'inertie d'un corps rigide libre ou restreint. (274-280).

Unwin (*W.-C.*). — Sur l'écoulement de l'eau à travers des orifices à des températures inégales. (281-287).

Edlund (*E.*). — Recherches sur l'induction unipolaire, sur l'électricité atmosphérique et sur l'aurore boréale. (289-306; 360-371 et 423-436).

Gray (*Th.*). — Sur la détermination expérimentale des moments magnétiques en mesure absolue. (321-331).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur la multiplication au moyen d'une Table à simple entrée. (331-347).

Il s'agit de l'emploi, pour remplacer les Tables de multiples ou les logarithmes, d'une Table contenant les quarts de carrés, qui permet d'obtenir un produit par une simple soustraction. L'usage de cette Table est fondé sur la formule

$$ab = \tfrac{1}{4}(a+b)^2 - \tfrac{1}{4}(a-b)^2. \tag{1}$$

La première Table de cette espèce qui ait paru a été publiée par Voisin, à Paris, en 1817, et s'étend jusqu'à 20000. Depuis S.-L. Laundy en a construit une allant jusqu'à 100000. Le général Shortrede en avait préparé une prolongée jusqu'à 200000, mais qui est restée manuscrite.

On peut remarquer que, si $a+b$ dépasse les limites de la Table, on pourra, d'après une remarque de Voisin, remplacer la formule (1) par la suivante :

$$ab = 2\left[\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2 - \tfrac{1}{4}(a-b)^2\right].$$

La formule (1) a été généralisée par M. Sylvester et étendue au produit de plusieurs nombres. Ainsi on peut calculer le produit de trois nombres au moyen d'une Table des vingt-quatrièmes de cubes, par la formule

$$24\,abc = (a+b+c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3 - (a+b-c)^3.$$

La Note de M. Glaisher se termine par des recherches historiques sur la *prosthaphérèse* des astronomes successeurs de Copernic; ce procédé se rattache à la formule

$$\sin a \sin b = \tfrac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)],$$

qui peut aussi être employée pour changer la multiplication en addition.

Thompson (*Silv.-P.*). — Figures magnétiques représentant les relations électrodynamiques. (348-353).

Purser (*J.*). — Sur l'application des équations de Lagrange à certains cas du mouvement des fluides. (354-359).

Stoney (*G.-J.*). — Sur la théorie mécanique de Crookes sur la tension (*stress*) des gaz (401-423).

Heaviside (*O.*). — Sur un moyen d'essai des lignes télégraphiques. (436-438).

Chase (*Pl.-E.*). — Sur l'hypothèse nébulaire. — X. Prédictions. (448-454).

Davis (*A.-S.*). — Sur une cause possible de la formation des queues des comètes. (459-462).

Lévy (*M.*). — Sur l'attraction moléculaire dans ses relations avec la température des corps. (466-468).

Tome VII; janvier-juin 1879.

Fitzgerald (*G.-F.*). — Sur la théorie mécanique de la force de Crookes. (15-29).

« Lorsque deux surfaces, à des températures inégales, se trouvent en présence et séparées par un gaz, il existe une force tendant à les séparer. En admettant cette force, on explique un grand nombre de phénomènes, parmi lesquels le mouvement observé dans les radiomètrés de M. Crookes et l'état sphéroïdal des liquides. »

L'auteur donne le développement mathématique de sa théorie.

Preece (*W.-H.*). — La lumière électrique. (29-34).

« La théorie de la lumière électrique ne peut être traitée rigoureusement par les formules mathématiques dans l'ignorance où nous sommes encore sur la relation exacte qui existe entre la production de la chaleur et l'émission de la lumière par un courant donné; mais on en sait assez pour affirmer que ce qui est vrai pour la production de la chaleur est également vrai pour la production de la lumière au delà de certaines limites. »

Weber (H.-F.). — Sur les inductions qui se produisent dans le téléphone. (34-39).

Baily (W.). — L'amidon et le verre non recuit vus au polariscope. (39-50; 4 pl.).

Fröhlich (J.). — Nouvelle proposition de la théorie de la diffraction, et son application. (51-57).

« Pour de petits angles de diffraction, quelle que soit la forme de l'ouverture, l'énergie cinétique de la lumière incidente est égale à l'énergie cinétique de la lumière diffractée. »

Crookes (W.). — Sur l'illumination des lignes de pression moléculaire, et sur la trajectoire des molécules. (57-64).

Hennessy (H.). — Sur la fignre de la planète Mars. (67-69).

Wiedmann (E.). — Recherches sur la nature des spectres. (77-95).

Mayer (A.-M.). — Sur la morphologie des configurations formées par des aimants flottant verticalement et soumis à l'attraction d'un aimant superposé; avec des notes sur quelques-uns des phénomènes de structure moléculaire que ces expériences peuvent servir à expliquer et à représenter. (98-108; avec 2 pl.).

Jacques (W.-W.). — Effet du mouvement de l'air dans une salle sur les qualités acoustiques de cette salle. (111-116).

Perry (J.) et *Ayrton (W.-E.)*. — Sur la musique des couleurs et sur le mouvement visible. (117-125; 2 pl.).

Lang (V. von). — Sur un goniomètre horizontal. (136-138).

Rayleigh (Lord). — Observations acoustiques, II. (149-162).

Trowbridge (J.). — Méthodes pour mesurer les courants électriques de grande puissance; avec la comparaison des machines de Wilde, de Gramme et de Siemens. (165-173; 1 pl.).

Steinhauser (A.). — Théorie de l'audition binauriculaire. Contribution à la théorie du son. (181-197, 261-274; 1 pl.).

Lodge (*O.-J.*). — Sur la détermination de la variation de la conductibilité thermique des métaux avec la température, au moyen de la courbe permanente de température le long d'une tige mince uniforme chauffée à l'une de ses extrémités. (198-211, 251-261; 1 pl.).

Fitzgerald (*G.-F.*). — Sur la théorie électromagnétique de la réflexion et de la réfraction de la lumière. (216-218).

Jacques (*W.-W.*). — Sur la vitesse des sons très aigus. (219-222).

Cook (*E.-H.*). — L'existence de l'éther lumineux. (225-239).

Oldham (*R.-D.*). — Sur le module de cohésion de la glace, et son rôle dans la théorie de l'érosion glaciaire des bassins lacustres. (240-247).

Hodges (*N.-D.-C.*). — Sur un nouveau galvanomètre absolu. (274-276).

Ayrton (*W.-E.*) et *Perry* (*J.*). — Nouvelle détermination du rapport de l'unité électromagnétique à l'unité électrostatique de la quantité d'électricité. (277-289, 1 pl.).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur une propriété des fractions ordinaires. (321-336).

« Si toutes les fractions propres, réduites à leur plus simple expression, et dont les numérateurs et les dénominateurs ne dépassent pas un nombre donné n, sont rangées par ordre de grandeur, alors chacune de ces fractions sera égale à la fraction dont le numérateur et le dénominateur sont respectivement égaux à la somme des numérateurs et à celle des dénominateurs des deux fractions inscrites l'une à gauche, l'autre à droite de la fraction considérée.

» Ainsi, pour $n = 7$, la suite des fractions étant

$$\frac{1}{7},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{7},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{1}{2},\ \frac{4}{7},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{7},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{6}{7},$$

on aura

$$\frac{1}{6} = \frac{1+1}{7+5},\quad \frac{1}{5} = \frac{1+1}{6+4},\quad \frac{1}{4} = \frac{1+2}{5+7},\quad \cdots.$$

» Cette propriété a été énoncée par John Farey dans le *Philosophical Magazine*, en 1816, et peu de temps après démontrée par Cauchy.

» Il existe une autre propriété de cette même suite de fractions, savoir, que la différence de deux fractions consécutives est égale à l'inverse du produit de leurs dénominateurs; par exemple,

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{6.7},\quad \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{5.6},\quad \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{4.5},\quad \cdots.$$

La première propriété découle immédiatement de celle-ci; car si

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3}$$

sont trois fractions consécutives de la série, telles que l'on ait

$$\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_1}{b_1}=\frac{1}{b_2 b_1},\quad \frac{a_3}{b_3}-\frac{a_2}{b_2}=\frac{1}{b_3 b_2},$$

alors

$$a_2 b_1 - a_1 b_2 = a_3 b_2 - a_2 b_3 = 1,$$

d'où

$$a_2(b_1+b_3) = b_2(a_1+a_3),$$

et par suite

$$\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_1+a_3}{b_1+b_3}.$$

» Dans les deux paragraphes suivants, l'auteur donne une démonstration élémentaire de ces deux propriétés. Dans les § 4 et 5 la première propriété est démontrée indépendamment de l'autre; le § 7 contient une extension des conditions pour lesquelles ces propriétés ont lieu. Enfin les § 7 à 13 sont principalement consacrés à l'historique de la question. »

Tait (*P.-G.*). — Sur la dissipation de l'énergie. (344-346).

Thomson (*Sir W.*). — Note sur la lettre précédente. (346-348).

Thomson (*Sir W.*). — Sur la motivité thermodynamique. (348-352).

Siemens (*W.*). — Sur la transmission et la distribution de l'énergie par le courant électrique. (352-356, 1 pl.).

Aron (*Hermann*). — Contribution à la théorie du microphone. (377-380).

Fisher (*O.*). — Sur les conditions thermales et la stratification des glaces antarctiques. (381-393).

Perry (*J.*) et *Ayrton* (*W.-E.*). — Nouvelle théorie du magnétisme. (401-411).

Naquet (*A.*). — Considérations sur les deux Mémoires de Sir B.-C. Brodie sur le calcul des opérations chimiques. (418-427).

Brodie (*Sir B.-C.*). — Note sur une objection faite par M. Naquet dans ses « Observations » précédentes. (427-431).

Naquet (*A.*). — Seconde Note. (431-432).

Van der Mensbrugghe (*G.*). — Sur une nouvelle application de l'énergie potentielle des surfaces liquides. (432-437).

Tome VIII; juillet-décembre 1879.

Auerbach (*F.*). — Sur le passage du courant galvanique à travers le fer. (1-18, 138-152, 217-229, 1 pl.).

Perry (*J.*) et *Ayrton* (*W.-E.*). — Sur un principe négligé, qui peut être employé dans les mesures des tremblements de terre. (30-50, 1 pl.).

Heaviside (*O.*). — Sur la théorie des erreurs dans les câbles. (60-74, 163-177).

Hodges (*N.-D.-C.*). — Sur la grandeur des molécules. (74-75).

Rowland (*H.-A.*). — Sur la nouvelle théorie du magnétisme terrestre, présentée par MM. Ayrton et Perry; avec une Note sur une nouvelle théorie de l'aurore polaire. (102-106).

Sylvester (*J.-J.*). — Note sur une équation aux différences finies. (120-121).

L'équation

$$u_x = \frac{u_{x-1}}{x} + u_{x-2}$$

admet les deux séries d'intégrales particulières

$$u_0 = 1,\quad u_1 = 1,\quad u_2 = \frac{1}{2},\quad u_3 = \frac{1}{2},\quad u_4 = \frac{1.3}{2.4},\quad u_5 = \frac{1.3}{2.4},\quad \ldots,$$

$$u_0 = 1,\quad u_1 = 2,\quad u_2 = 2,\quad u_3 = \frac{2.4}{1.3},\quad u_4 = \frac{2.4}{1.3},\quad u_5 = \frac{2.4.6}{1.3.5},\quad \ldots.$$

Si $\varphi(t)$ désigne la fonction génératrice de u_x, l'équation

$$x u_x - (x-2) u_{x-2} - u_{x-1} - 2 u_{x-2} = 0$$

donnera

$$(1-t^2)\frac{d\varphi}{dt} + (-1-2t)\varphi = C;$$

d'où, en intégrant,

$$\varphi = C' \frac{1+t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} + C \frac{\arcsin t + \sqrt{1-t^2}}{(1-t)^{\frac{3}{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}}},$$

et les deux termes de cette expression sont les fonctions génératrices correspondant aux deux suites précédentes.

Muir (*M.-M.-Pattison*). — Affinité chimique. (181-203).

Perry (*J.*) et *Ayrton* (*W.-E.*). — Sur les constructions dans un pays sujet aux tremblements de terre. (209-217).

Airy (*Sir G.-B.*). — Sur la construction et l'usage d'une échelle pour jauger les mesures cylindriques de capacité. (246-250).

Rayleigh (*Lord*).— Recherches optiques, relatives spécialement à la spectroscopie. (261-274, 403-413, 1 pl.).

Lodge (*O.*). — Essai d'une classification systématique des diverses formes d'énergie. (277-286).

Voici le résumé des propositions traitées par l'auteur :

1. Troisième loi de Newton.
2. Définition du travail, + et —.
3. Négation de l'*action à distance.*
4. Définition de la puissance active (*working power*).
5. Définition de l'énergie.
6. Conservation de l'énergie, et première loi de la Thermodynamique.
7. Possibilité de diverses formes d'énergie.
8. Classification des formes d'énergie.
9. Les formes fondamentales d'énergie.
10. Les énergies cinétique et potentielle correspondant aux deux facteurs du produit du travail.
11. Transformation d'une forme dans l'autre.
12. Subdivision ultérieure des formes d'énergie.
13. Table de classification.
14. Distinction entre l'énergie et ce qu'on appelait autrefois *entropie.*
15. Distinction entre l'énergie utilisable ou non utilisable, et entre le travail utile ou inutile.
16. Raison pour laquelle l'énergie des masses ordinaires est utilisable.
17. Raison pour laquelle l'énergie planétaire est presque inutilisable.
18. Raisons pour lesquelles l'énergie moléculaire est en grande partie inutilisable, et seconde loi de la Thermodynamique.
19. Extension de l'utilisation de l'énergie atomique et électrique.
20. Dissipation de l'énergie.

Rosetti (*F.*). — Recherches expérimentales sur la température du Soleil. (324-332, 438-449, 537-550).

Fitzgerald (*G.-F.*). — Sur la tension des vapeurs près des surfaces courbes de leurs liquides. (382-384).

Thompson (*S.-P.*). — Le pseudophone. (385-390).

Instrument destiné à l'étude de l'audition binauriculaire, au moyen des illusions qu'il produit dans la perception acoustique de l'espace.

Lodge (*O.-J.*). — Sur la détermination de la variation de la conductibilité thermique des métaux avec la température, au moyen de la courbe permanente de température le long d'une tige mince chauffée à une de ses extrémités, deuxième Mémoire. (510-523).

Schwendler (*L.*). — Sur une méthode simple d'utiliser, pour des usages télégraphiques, une fraction insignifiante du courant principal produit par une machine dynamo-électrique. (558-561).

Tome IX ; janvier-juin 1880.

Wiedemann (*G.*). — Sur la torsion. (1-15, 97-109, 1 pl.).

Guthrie (*Fred.*). — Sur certaines vibrations des solides. (15-20).

Challis. — Sur la « Regula tertia philosophandi » de Newton. (21-35).

» Le Livre III des *Principes de Newton,* auquel est attaché exclusivement le titre *De Mundi Systemate,* contient au commencement quatre règles de raisonnement philosophique, accompagnées chacune d'explications. De ces règles, la première, la deuxième et la quatrième, avec leurs explications, ont été universellement adoptées, et n'exigent aucune considération spéciale. La troisième règle, énoncée en ces termes : *Qualitates corporum quæ intendi et remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt in quibus experimenta instituere licet, pro qualitatibus corporum universorum habendæ sunt,* est accompagnée de remarques explicatives spéciales et de définitions relatives aux qualités ultimes des corps. Le but de cet article est d'indiquer et d'appliquer cette règle dans la conduite d'une théorie physique et de discuter les définitions dont Newton l'a accompagnée ».

Rayleigh (*Lord*). — Recherches d'optique, concernant spécialement le spectroscope. (40-55).

Walenn (*W.-H.*). — Note sur une méthode de preuve des opérations. (56-59).

Poynting (*J.-H.*). — Sur la graduation du sonomètre. (59-64).

Fletcher (*L.*). — La dilatation des cristaux par le changement de température. (81-96).

Fleming (*J.-A.*). — Sur une nouvelle forme de balance de résistance, adaptée à la comparaison des bobines-étalons. (109-117).

Perry (*J.*) et *Ayrton* (*W.-E.*). — Photomètre de dispersion. (117-120).

Walenn (*W.-H.*). — Sur l'unitation. — IX. Remarques pratiques sur ce sujet, avec des exemples. (121-123, 271-273).

Voir *Philos. Magazine,* t. V, p. 218 (*Bulletin,* II_2, 101).

Lodge (*O.-J.*). — Sur les courants intermittents et sur la théorie de la balance d'induction. (223-146).

Bosanquet (*R.-H.-M.*). — Note sur la mesure de l'intensité du son. (174-177).

Hodges (*N.-D.-C.*). — Sur la trajectoire libre moyenne des molécules. (177-180).

Fletcher (*L.*). — Notes cristallographiques. (180-191, 1 pl.).

Bridge (*J.*). — Sur un appareil de calcul fondé sur les baguettes de Napier. (191-197, 1 pl.).

L'auteur fait voir comment, en perfectionnant la manipulation de l'appareil décrit par Napier dans sa *Rhabdologia,* on peut en tirer un assez grand parti pour rendre les calculs plus sûrs et moins pénibles.

Lindemann (*F.*). — Sur les formes des vibrations des cordes pincées et percutées. (197-221).

Wright (*C.-R.-Alder*). — Sur la détermination de l'affinité chimique en fonction de la force électromotrice. (237-266, 331-347).

Rayleigh (*Lord*). — Observations acoustiques. III. (278-283).

Thomson (*J.-J.*). — Sur la théorie de la lumière de Maxwell. (284-291).

Ayrton (*W.-E.*) et *Perry* (*J.*). — Détermination de l'accélération de la gravité à Tokio (Japon). (292-301).

Cockle (*Sir James*). — Note supplémentaire sur les formes primaires. (348-351).

Voir une Note ajoutée au travail de l'auteur, *Philos. Mag.,* t. L, décembre 1875 (*Bull.,* II_2, 94).

Preston (*S.-Tolver*). — Sur la méthode de recherche des causes. (356-367).

Morisot. — Sur la chaleur spécifique et la conductibilité des corps. (386-389).

Clausius (*R.*). — Comment se comporte l'acide carbonique au point de vue de la pression, du volume et de la température. (393-408).

Wild (*H.*). — Théorie complète du magnétomètre bifilaire, et nouvelles méthodes pour la détermination de l'intensité horizontale absolue du magnétisme terrestre, ainsi que de la température et des coefficients d'induction des aimants. (443-445).

Herschel (*J.*). — Sur la détermination de l'accélération de la gravité à Tokio (Japon). (446-448).

Challis. — Supplément aux recherches sur la théorie hydrodynamique des forces physiques, comprenant une théorie du microphone. (448-452).

Mascart. — Sur la théorie des courants d'induction. (452-455).

Legebeke (*G.-J.*). — Sur un théorème général énoncé par M. Clausius relativement à l'influence électrique. (458-460).

Tome X ; juillet-décembre 1880.

Venn (*J.*). — Sur la représentation diagrammatique et mécanique des propositions et des raisonnements. (1-18).

Dickson (*J.-D.-A.*). — Sur le critérium au moyen duquel on peut déterminer le point critique d'un gaz. (40-43).

Ayrton (*W.-E.*) et *Perry* (*J.*). — Sur la détermination de l'accélération de la gravité à Tokio (Japon). (43-53).

Réponse aux critiques adressées par le major Herschel dans le journal *Nature*.

Cellérier (*C.*). — Remarque sur une simplification de la théorie des mouvements vibratoires. (57-60).

Rayleigh (*Lord*). — Sur la résultante d'un grand nombre de vibrations de même acuité (Pitch) et de phase arbitraire. (73-78).

Baily (*W.*). — Les vibrations d'une pellicule en rapport avec le phonéidoscope. (79-89).

Thomson (*Sir W.*). — Statique des tourbillons. (97-109).

L'objet de ce Mémoire est le *mouvement constant* des tourbillons.

Le mouvement système quelconque de matière solide, ou fluide, ou en partie solide et en partie fluide est dit *constant* quand la configuration du système reste égale et semblable à elle-même, et que les vitesses des parties homologues sont égales, de quelque manière que la configuration puisse se mouvoir dans l'espace, et à quelque distance que les particules matérielles individuelles puissent, à un instant donné, se trouver des points homologues à leurs positions à un autre instant.

Thomson (*Sir W.*).— Sur les oscillations causées par la gravitation dans l'eau animée d'un mouvement de rotation. (109-116).

» C'est là, en réalité, le sujet traité par Laplace dans sa théorie dynamique des marées, et cela avec la plus grande généralité, à une importante restriction près, le mouvement de chaque particule devant être infiniment peu différent de la direction horizontale, et la vitesse toujours égale pour toutes les particules situées sur une même verticale. Cela implique que la plus grande profondeur doit être très petite en comparaison de la distance qu'il faut parcourir pour trouver l'écart de niveau de la surface de l'eau, altéré d'une fraction sensible de sa valeur maximum. Dans la présente Note, l'auteur adopte cette restriction, et de plus, au lieu de supposer, comme le fait Laplace, la surface d'un sphéroïde solide, en totalité ou en grande partie recouverte par l'eau, il traite le problème plus simple d'une étendue d'eau assez restreinte pour que la figure d'équilibre de sa surface ne présente pas une courbure sensible. »

Rayleigh (*Lord*). — Sur le pouvoir résolvant des télescopes. (116-119).

Hennessy (*H.*). — Sur la figure de la planète Mars. (119-122).

Wiedemand (*E.*). — Sur un moyen pour déterminer la pression à la surface du Soleil et des étoiles, avec quelques remarques spectroscopiques. (123-125).

Plateau (*J.*). — Une application des images accidentelles. (134-136).

Clark (*J.-W.*). — Sur la manière dont se comportent les liquides et les gaz dans le voisinage de leur température critique. (145-155).

Thomson (*Sir W.*).—Vibrations d'un tourbillon en colonne. (155-168).

Mc Coll (*H.*). — Sur la représentation diagrammatique et mécanique des propositions et des raisonnements. (168-171).

Hummel (Rev. *F.-H.*). — Développement par soustraction. (190-199).

On obtient la racine carrée de 64, par exemple, en retranchant de 64 les termes successifs de la série 2, 4, 6, ..., 14. On trouve de même la racine cubique de $n^3 = 729$, en retranchant successivement les termes de la série 6, 18, 36, ..., 168, 216, formée au moyen des nombres triangulaires multipliés par 6. Dans la présente Note, l'auteur généralise cette méthode, en développant la valeur générale de l'expression

$$\begin{aligned} u_n &= n^m - n - [(n-1)^m - (n-1)] = n^m - 1 - (n-1)^m \\ &= -1 + mn^{m-1} - \frac{1}{2} m(m-1) n^{m-2} + \ldots - (-1)^m (mn - 1). \end{aligned}$$

La racine $m^{\text{ième}}$ du nombre n^m s'obtient par la soustraction successive des nombres $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$.

Glazebrook (*R.-T.*). — Notes sur le prisme de Nicol. (247-254).

Clausius (*R.*). — Sur l'emploi du potentiel électrique pour la détermination des forces pondéromotrices et électromotrices. (255-279).

Exner (*Fr.*). — La cause de la production d'électricité par le contact de métaux hétérogènes. (280-295).

Craig (*Th.*). — Sur le mouvement permanent dans un fluide visqueux incompressible. (342-357).

Macfarlane (*A.*). — Sur la décharge explosive de l'électricité. (389-407).

Tome XI, janvier-juin 1881.

McColl (*H.*). — Logique *implicationnelle* et équationnelle. (40-43).

Ayrton (*W.-E.*) et *Perry* (*J.*). — Note sur les articles de M. Exner au sujet de l'électricité de contact. (43-54).

Kirchhoff (*G.*). — Sur la mesure des conductivités électriques. (81-91).

Hastings (*Ch.-S.*). — Théorie de la constitution du Soleil, fondée sur les observations spectroscopiques, originales ou autres. (91-103).

Fitzgerald (*G.-F.*). — Sur l'article du professeur O. Reynold, intitulé : « Sur certaines propriétés *dimensionnelles* de la matière à l'état gazeux ». (103-109).

Glan (P.). — Sur un spectro-télescope. (110-113).

Oberbeek (A.). — Sur le frottement dans les surfaces libres des liquides. (132-147).

Draper (J.-W.). — Sur le phosphorographe d'un spectre solaire, et sur les raies de sa région infra-rouge. (157-169).

Rayleigh (Lord). — Sur la copie des réseaux de diffraction, et sur quelques phénomènes qui s'y rattachent. (196-205).

Rayleigh (Lord). — Sur les images formées sans réflexion ni réfraction. (214-218).

Preston (S.-Tolver). — Sur l'action à distance. (218-220).

Thomson (J.-J.). — Sur les effets électriques et magnétiques produits par le mouvement de corps électrisés. (229-249).

Challis. — Explications théoriques de la transmission rectiligne et de la diffusion spontanée du son et de la lumière. (249-254).

Rowland (H.-A.). — Sur la nouvelle théorie des attractions magnétiques, et sur la rotation magnétique de la lumière polarisée. (254-261).

Voir *Bulletin*, V_2, 216.

Hennessy (H.). — Sur les figures des planètes. (283-285).

Voir *Bulletin*, V_2, 88. L'auteur remarque que la formule donnée par lui dans les *Comptes rendus* peut s'écrire plus simplement sous la forme

$$e = \frac{5}{2} Q \left(\frac{D}{5D - 3D'} \right),$$

Q étant le rapport de la force centrifuge à la gravité à son équateur, D la densité moyenne de la planète, et D' sa densité à la surface. Mais, dans l'hypothèse de la fluidité primitive, on a

$$e' = \frac{Q}{q} e_1,$$

e_1 étant l'aplatissement de la Terre et q le rapport de la force centrifuge à l'équateur terrestre à la gravité. On en tire

$$\frac{e}{e'} = \frac{5}{2} \frac{e_1}{q} \frac{D}{5D - 3D'}.$$

Pour toute planète pour laquelle on peut admettre que le rapport de la densité moyenne à la densité superficielle soit à peu près le même que pour la Terre, soit $\frac{5.6}{2.6}$, on aura

$$\frac{e}{e'} = \frac{70}{101}\quad \frac{e_1}{q} = \frac{207}{303}.$$

L'auteur applique ses formules aux planètes Mercure, Vénus et Mars, et en tire des résultats intéressants.

Glazebrook (*R.-T.*). — Sur la mesure des petites résistances. (291-295).

Abney. — Sur les raies de la région infra-rouge du spectre solaire. (300-301).

Struve (*O.*). — Sur une proposition adressée à l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg par le général Schubert, relativement à l'arc russo-scandinave. (313-335).

Cet article a paru en 1861 dans le *Bulletin de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg,* t. III, 396-424. Il est reproduit ici à cause de l'importance des considérations qu'il renferme, et qui ne paraissent pas être assez répandues en Angleterre.

Boys (*C.-V.*). — Une machine intégrante. (342-348).

Glazebrook (*R.-T.*). — Sur une méthode pour comparer les capacités électriques de deux condenseurs. (370-377).

Browne (*W.-R.*). — Sur l'action à distance. (379-381).

Stoney (*G.-J.*). — Sur les unités physiques de la nature. (381-390).

Preston (*S.-T.*). — Sur l'importance des expériences relativement à la théorie mécanique de la gravitation. (391-393).

Glazebrook (*R.-T.*). — Sur la théorie de l'action électromagnétique, fondée sur les tourbillons moléculaires. (398-413).

Bosanquet (*R.-H.-M.*). — Sur les battements de consonances de la forme $h : 1$. (420-436 et 492-506, 4 pl.).

Macfarlane (*A.*). — Analyse des degrés de parenté. (436-446).

Watson (*H.-W.*) et *Burbury* (*S.-H.*). — Sur la loi de la force entre les courants électriques. (451-466).

Lodge (*O.-J.*). — Sur l'action à distance et la conservation de l'énergie. (529-534).

Tome XII; juillet-décembre 1881.

Thompson (*S.-P.*). — Sur la conservation de l'électricité, et sur l'unité absolue du potentiel électrique. (13-25).

Poynting (*J.-H.*). — Changement d'état : solide-liquide. (32-48; 1 pl.).

Thomson (*J.-J.*). — Sur quelques expériences électromagnétiques avec des circuits ouverts. (49-60).

Rayleigh (*Lord*). — Sur la théorie électromagnétique de la lumière. (81-101).

Thompson (*S.-P.*). — Sur l'opacité des cristaux de tourmaline. (112-129).

Tait. — Note sur la conductivité thermale et sur les effets des changements de température, de chaleur spécifique et de conductivité sur la propagation des ondes planes de chaleur. (147-151).

Airy (*Sir G.-B.*). — Sur une interruption systématique dans l'ordre des valeurs numériques des fractions ordinaires, rangées en séries suivant l'ordre de leurs grandeurs. (175-178).

En rangeant par ordre de grandeurs croissantes toutes les fractions irréductibles (au nombre de 3043) dont les termes ne dépassent pas 100, et écrivant les différences des logarithmes des fractions consécutives, on remarque dans ces différences des inégalités qui se reproduisent d'une manière régulière, et sur lesquelles Sir G. Airy appelle l'attention. Comme exemple, voici le tableau des différences des logarithmes des fractions voisines de $\frac{2}{1}$, exprimés en dix-millièmes :

$$\text{Fract.}\quad \frac{89}{45},\ \frac{91}{46},\ \frac{93}{47},\ \frac{95}{48},\ \frac{97}{49},\ \frac{99}{50},\ \frac{2}{1},\ \frac{99}{49},\ \frac{97}{48},\ \frac{95}{47},\ \frac{93}{46},\ \frac{91}{45};$$

$$\text{Diff. log.}\quad 10,\ 10,\ 10,\ 9,\ 10,\ 436,\ 441,\ 9,\ 9,\ 10,\ 11.$$

On voit que, dans cette portion de la Table, les plus grandes différences se rencontrent au milieu des plus petites, et ce phénomène est général.

Cockle (*Sir James*). — Problème inverse des criticoïdes. (189-196).

Brown (*F.-D.*). — Attraction moléculaire. (253-260).

Schuster (*A.*). — Sur la théorie dynamique de la radiation. (261-266).

Marquand (*Allan*). — Sur les diagrammes logiques pour n termes. (266-270).

Bosanquet (*R.-M.*). — Sur l'histoire de la théorie des battements des consonances fausses. (270-282).

Gray (*Th.*). — Sur la meilleure disposition du pont de Wheatstone pour la mesure d'une résistance particulière. (283-290).

Clausius (*R.*). — Sur la détermination théorique de la pression de la vapeur et des volumes de la vapeur et du liquide. (381-390).

Muir (*Th.*). — Sur les déterminants gauches. (391-394).

Brioschi a démontré, en 1855, en même temps que Cayley, que tout déterminant d'ordre pair peut s'exprimer par une fonction de Pfaff. La condition de parité de l'ordre a jusqu'ici été crue nécessaire. L'auteur se propose, dans cette Note, de montrer que cette restriction n'est pas nécessaire.

Dans un numéro récent du *Quarterly Journal of Mathematics,* on trouve une nouvelle expression du produit de deux déterminants, au moyen d'un déterminant dont les éléments sont formés avec les sommes et les différences des éléments correspondants des déterminants donnés. Ainsi

$$\begin{vmatrix} a'_1 & \ldots & a_1^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_n & \ldots & a_n^{(n)} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b'_1 & \ldots & b_1^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b'_n & \ldots & b_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a'_1 + b'_1 & \ldots & a_1^{(n)} + b_1^{(n)} & a'_1 - b'_1 & \ldots & a_1^{(n)} - b_1^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_n + b'_n & \ldots & a_n^{(n)} + b'_n & a'_n - b'_n & \ldots & a_n^{(n)} - b_n^{(n)} \\ a'_1 - b'_1 & \ldots & a_1^{(n)} - b_1^{(n)} & a'_1 + b'_1 & \ldots & a_1^{(n)} + b_1^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_n - b'_n & \ldots & a_n^{(n)} - b_n^{(n)} & a'_n + b'_n & \ldots & a_n^{(n)} + b_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Pour obtenir le carré d'un déterminant par cette formule, on remplacera le second déterminant par le premier dans lequel on aura échangé entre eux les indices supérieurs et inférieurs, ce qui donnera pour résultat un déterminant gauche, dont la racine carrée se présentera sous la forme d'une fonction de Pfaff. Donc tout déterminant peut se ramener à cette forme.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (¹).

Tome III ; 1879.

Morel (*A*.). — Théorie des axes radicaux. (Suite et fin.) (3-8).

Les cercles isogonaux à trois cercles fixes ont même axe radical. — Théorèmes de Hart et de Casey : condition que doivent remplir quatre cercles pour être tangents à un cinquième, A, B, C, D étant les points de contact.

$$\frac{AB}{\sqrt{r_1 r_2}}\frac{CD}{\sqrt{r_3 r_4}} \pm \frac{AD}{\sqrt{r_1 r_4}}\frac{BC}{\sqrt{r_2 r_3}} \pm \frac{AC}{\sqrt{r_1 r_3}}\frac{BD}{\sqrt{r_3 r_4}} = 0 \text{ (}^2\text{)}.$$

Le rapport des distances circulaires d'un point à deux cercles se conserve dans l'inversion. — L'inverse d'une anallagmatique est une anallagmatique. — Condition de possibilité de la construction, entre deux cercles dont l'un est intérieur à l'autre, d'une couronne de cercles tangents aux deux cercles donnés et chacun à ses deux voisins : a, b, c, rayons et distance des centres; la condition pour qu'une couronne de n cercles entoure h fois le cercle intérieur est

$$\sin^2\frac{h\pi}{n} = \frac{(a-b)^2 - c^2}{(a+b)^2 - c^2}.$$

Kliszowski. — Note sur le second degré. (9-13).

Méthode pour vérifier si les racines réelles sont comprises entre des limites que leur impose la nature de la question.

Malloisel. — Note de Géométrie. (13-17).

Définition des coniques par le foyer et la directrice, cette dernière considérée comme la polaire du premier.

Dostor (*Georges*). — Propriétés des nombres. (17-21).

Si l'on partage la suite des nombres impairs par groupes successifs de $1, 2, 3, \ldots, n$ nombres, la somme des termes d'un groupe est égale au cube du nombre de ses termes. — Dans toute progression arithmétique à raison impaire on peut toujours trouver un nombre impair, $n = 2p + 1$, de termes consécutifs dont la somme soit égale à une puissance entière donnée de n. (L'énoncé est trop général; il faut dire : on peut toujours trouver des progressions arithmétiques, dans lesquelles, etc.)

Lemoine (*Émile*). — Note sur un problème classique. (21-22).

Le problème « construire une circonférence passant par deux points donnés

---

(¹) *Voir* la Note, page 72.

(²) La formule gagnerait à être écrite en observant l'ordre de permutation tournante entre les lettres; nous avons fréquemment constaté cette imperfection, d'une certaine importance, surtout dans un journal d'*éducation*. L.

et tangente à une droite donnée », habituellement présenté comme exercice sur le III[e] Livre de Géométrie, se résout par les deux premiers Livres.

Morel (*A.*). — Note de Géométrie. (22-24).

Ocagne (*Maurice d'*). — Note sur la parabole. (33-36).

Morel (*A.*). — Note de Trigonométrie. (36-43).

Relations entre les erreurs des données et celles des résultats ([1]).

Ocagne (*Maurice d'*). — Note sur la divisibilité. (43-46).

Ocagne (*Maurice d'*). — Théorie de l'incommensurabilité. (65-70, 97-104).

Définition de la limite. — Condition d'existence d'une limite pour une quantité variable. — Plus grande commune mesure. — Définition de l'incommensurabilité. — Nombres incommensurables.

Racines carrées incommensurables. — Calcul des nombres incommensurables. — Grandeurs géométriques incommensurables. Exemple de la diagonale du carré, développée géométriquement en fraction continue :

$$\alpha = \frac{d}{c} = 1 + \frac{d-c}{c} = 1 + \frac{c}{d+c} = 1 + \frac{1}{1+\alpha} = 1 + = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}$$

Pillet. — Éléments de la théorie du lavis. (70-79, 105-113, 151-155, 172-177, 212-217, 244-249.)

Généralités. Le lavis a pour but d'étudier et de rendre, à l'aide de couleurs, les différences d'éclat ou de couleur que présentent les corps suivant leurs positions relativement à la source de lumière et au spectateur.—Principe des orientations. — Poli et dépoli. — Un plan dépoli se conduit comme s'il avait une lumière propre. — Loi du cosinus d'incidence. — Lignes d'égal éclairement ou d'égal éclat. — Rayons de reflets. — Les rayons atmosphériques produisent l'effet d'un soleil plus pâle, symétrique du soleil vrai. — Les surfaces dans l'ombre sont d'autant plus noires qu'elles reçoivent moins de rayons indirects. — L'ombre propre d'un corps décroît de la ligne d'ombre au rayon vecteur normal. — Lignes d'égale teinte sur une sphère dépolie. — La ligne la plus claire est voisine du contour apparent.

Corps polis, c'est-à-dire réfléchissant spéculairement les rayons lumineux. — Aspect d'un plan, d'une sphère polie. — Point brillant correspondant à chaque

---

([1]) Les rédacteurs d'un journal pour les élèves ne sauraient trop insister sur les questions de ce genre, malheureusement trop négligées par beaucoup de professeurs. Il est très fréquent, en effet, de voir, sous le vain prétexte de les « exercer au calcul », demander aux élèves de déterminer des résultats avec une exagération « absurde » d'approximation. On fausse ainsi leur jugement, sans grand profit pour leur habileté dans la manipulation des chiffres. L.

direction de rayons lumineux. — La lumière diffuse revient à des rayons parallèles venant de toutes les directions. — Lignes d'égale teinte, l'intensité des rayons variant avec l'incidence. Elles sont les intersections de la sphère et des cônes du second ordre. — Corps mi-polis. Échelle de teintes. Conventions.

Tons simples et purs (jaune, rouge, bleu). — Tons simples, rabattus, composites du premier, du deuxième et du troisième ordre. — Couleurs complémentaires. — Teintes conventionnelles. — Lavis en camaïeu. — Couleur des objets. — Saturation; sur et sous-saturation; orientation correspondante.

Transparence et intensité d'une teinte. Règles pratiques

Principe des distances. — Différents plans. — L'effet des distances est de diminuer l'éclat relatif des objets éloignés par suite de la lumière réfléchie par l'atmosphère, et en second lieu de colorer de bleu la couleur propre de l'objet. — Manière de rendre en camaïeu, à l'encre de Chine, les effets de la distance. — Règle générale, prendre le ton des lointains comme base. — Effets de contraste et d'irridiation. — Dans le dessin on exagère ces effets.

Reflets. — Rayon terrestre principal.— Rayon aéro-terrestre principal incliné à 45°, de droite à gauche et de bas en haut. — Contre-ombres. — Lavis pratique. — Teinte générale du ton; teinte d'ébauche sur les ombres propres ou portées, dégradée de haut en bas; modelé des moulures considérées comme corps dépolis; lavis des surfaces planes, avec une teinte égale à celle des éléments parallèles des moulures, mais placées en réserve, c'est-à-dire en ménageant les filets de reflets sur les arêtes regardant le rayon aéro-terrestre.— Contre-ombres et retouches.

Combier. — Note de Géométrie. (79-81, 120-126, 129-136).

L'auteur, après avoir, par un calcul trigonométrique assez compliqué, résolu le problème : « Construire un triangle de forme donnée dont les sommets s'appuient sur trois circonférences concentriques données », en donne une solution géométrique simple; mais, s'étant proposé de donner un exemple de l'aide que le calcul peut prêter à la Géométrie, il a soin d'observer qu'il n'a été conduit à la solution géométrique que par la construction graphique de la solution trigonométrique [1].

Suter (*Henri*). — Histoire des Mathématiques. (Suite.). (82-87).

Philosophie d'Aristote (384 av. J.-C.). — Arrêt dans les progrès des Mathématiques.

Bernier (*F.*). — Formule d'approximation pour la racine carrée. (114-117).

a étant une valeur approchée de $\sqrt{N}$, la correction $\sqrt{N} = a + \dfrac{2a(N-a^2)}{3a^2+N}$ ne laisse subsister qu'une erreur au plus égale à quatre unités de l'ordre décimal double de celui du dernier chiffre de a.

---

[1] L'argument est spécieux, et l'exemple n'est sans doute pas des mieux choisis; car « pourquoi » la solution géométrique, d'ailleurs fort ancienne,

Morel (*A.*). — Question d'examen. (117-119).

Lemoine (*E.*). — Note sur un théorème d'Arithmétique. (119).

L'égalité en nombres entiers $x^2 \pm 2\lambda = k^2$ entraîne $x^2 \pm \lambda = (x \pm \alpha)^2 + \alpha^2$.

Morel (*A.*). — Note sur la divisibilité. (137-142).

Caractères de divisibilité par tout nombre premier inférieur à 100.

Morel (*A.*). — Note de Géométrie descriptive. (142-145).

Le centre du cercle de base d'un cône droit est foyer de la projection de toute section plane.

Lecoq (*H.*). — Note de Mécanique et de Géométrie. (161-167).

Construction du rayon de courbure de l'ellipse, au moyen du point correspondant sur le cercle concentrique de rayon $a + b$. Du point M décrire un cercle passant au point correspondant C du cercle précité, et construire son intersection I avec le diamètre conjugué de OM. La perpendiculaire, élevée de I sur la droite MI, passe au centre de courbure de l'ellipse au point M.

Morel (*A.*). — Variation du trinôme $ax^4 + bx^2 + c$. (167-171).

Morel (*A.*). — Note sur le triangle. (177-182, 202-207, 233-239, 268-274, 298-303, 329-336, 359-363).

Formules nouvelles du Rév. James Booth (traduit de l'anglais). Un triangle ABC, de surface $\Delta = pr$, étant donné, notations adoptées : r, r', r'', r''' ; $\omega, \Omega, \Omega', \Omega''$ (*mauvais. Pourquoi pas* $\Omega', \Omega'', \Omega'''$?) rayons et centres des cercles inscrits et exinscrits; R et O, du cercle circonscrit. — Cercle orthocentrique, ou des neuf points, circonscrit au triangle orthocentrique, passant par les pieds des hauteurs; ρ et H, rayon et centre du cercle inscrit au triangle orthocentrique

$$4R + r = r' + r'' + r''' \text{ (}^1\text{)},$$
$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r''^2} + \frac{1}{r'''^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\Delta^2};$$

enfin, h', h'', h''' désignant les hauteurs, et q', q'', q''' les distances de O aux côtés du triangle,

$$\sum \frac{q}{h} = 1, \quad \sum \frac{1}{h} = \frac{1}{r}.$$

---

croyons-nous, n'aurait-elle pas précédé, plutôt que suivi, sa compagne, de laquelle elle n'est en somme dans aucune dépendance forcée? Ce n'est qu'une application des plus élémentaires de la théorie des figures semblables d'orientation variable avec le module, ou de la « rotation avec épanouissement ». L.

([1]) Cette formule devrait s'écrire : $4R = \Sigma r$; car le signe de r est contraire à ceux de r', r'', r''', en bonnes notations.

Formules de J. Booth :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''} \text{ (}^1\text{)}.$$

$$\Delta = pr = \sqrt{rr'r''r'''}, \quad q' + q'' + q''' = R + r.$$

$$\cos A \cos B + \cos B \cos C \cos C \cos A = \frac{r^2 + p^2 - 4R^2}{4R^2},$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}.$$

Si δ', δ'', δ''' sont les surfaces des triangles ayant les côtés pour bases et leur sommet à l'orthocentre, et π', π'', π''' les distances de l'orthocentre aux côtés,

$$\pi' + \pi'' + \pi''' = \frac{p^2 + r^2 - 4R^2}{2R},$$

$$h + h' + h'' - (\pi' + \pi'' + \pi''') = 2(R + r).$$

Soient $x, x_1; y, y_1; z, z_1$ les côtés des carrés inscrits et exinscrits, s'appuyant sur l'un des côtés

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y_1} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z_1} = 2\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''}\right) = \frac{2}{r}.$$

Morel (A.). — École spéciale militaire. Concours de 1879. (182-188).

Lionnet. — Limite de l'erreur commise en remplaçant la circonférence, ou le périmètre d'un polygone régulier circonscrit, par celui d'un polygone inscrit semblable au premier. (193-197).

Launoy. — Note de Géométrie sur la normale à l'ellipse. (197-202).

Kœhler. — Théorie des centres des moyennes harmoniques. (225-229, 257-263, 289-293, 321-329, 354-359).

Historique. — Maclaurin; Poncelet; de Jonquières.— Cremona, et les centres harmoniques des divers ordres.

Règle des signes.— Proportion harmonique, ou rapport anharmonique $= -1$; Faisceau harmonique. — Polaire d'un point par rapport au système de deux droites, droite lieu du conjugué harmonique du point, par rapport à leurs intersections par les rayons qui pivotent autour du point.

Progression ou échelle harmonique, perspective de divisions successives égales sur une droite parallèle à la droite qui joint l'œil au point origine des segments. On a

$$\frac{1}{pa} - \frac{1}{pb} = \frac{1}{pb} - \frac{1}{pc} = \frac{1}{pc} - \frac{1}{pd} = \ldots.$$

---

(1) Cette formule serait mieux sous la forme $\sum \frac{1}{r} = 0$.

Construction de Poncelet d'une échelle harmonique, par rapport à un point et à un segment déterminé.

Centre des moyennes harmoniques d'un système de points en ligne droite; il est perspective du centre des moyennes distances de points en ligne droite, le point origine étant le point de fuite de la droite sur laquelle sont prises les moyennes distances; q étant centre des moyennes harmoniques de p, on a

$$\frac{n}{pq} = \sum \frac{1}{pa}.$$

Le même centre des moyennes harmoniques d'un groupe de n points correspond à $n-1$ pôles différents. — Centre des moyennes harmoniques de points en ligne droite affectés de coefficients (poids). — Si les n points sont les intersections de n droites fixes par le rayon mobile d'un faisceau de centre P, le lieu du centre harmonique relatif à P des intersections, affectées de poids fixes pour chaque droite, est une droite, polaire rectiligne de P. — Le point d'intersection de l'une des droites par la polaire rectiligne de P par rapport aux $(n-1)$ autres appartient à la polaire rectiligne de P par rapport aux n droites (Cayley). — Les droites qui joignent respectivement les points d'intersection des trois côtés d'un triangle, par une transversale, à leurs conjugués par rapport aux sommets, sont concourantes.

Centre des moyennes harmoniques d'un système de points dans un plan ou point fixe par lequel passe constamment l'axe des moyennes harmoniques par rapport au faisceau des rayons allant à ces points, lorsque le sommet du faisceau décrit la droite origine.

Centres harmoniques des divers ordres.—Les rapports des distances du pôle et du centre harmonique du $r^{\text{ième}}$ ordre (par rapport au système de points situés avec eux sur la même droite) au même point du système étant tous formés et combinés, r à r, de toutes les manières possibles par multiplication, la somme des produits obtenus est nulle. — Le pôle p, pour lequel le point q est centre harmonique du second ordre, par rapport à trois points, est lui-même le centre du premier ordre du même système par rapport au centre q, pris pour pôle. — Le nombre des centres est égal à l'ordre. — Si q_1 et q_2 sont les centres du second ordre de (a, b, c) par rapport au pôle p, le centre du premier ordre Q du système (q_1, q_2) par rapport à p est en même temps le centre harmonique de (a, b, c) par rapport au même pôle p. — Si (q_1, q_2) (q_1'', q_2'') sont respectivement les centres harmoniques de (a, b, c) pour deux pôles différents p et p', ces deux points auront même conjugué harmonique par rapport aux deux couples de centres harmoniques du second ordre. — Les centres harmoniques du second ordre de tous les points de la droite abc, par rapport au même système (abc), forment une involution quadratique. — Ces propriétés sont projectives.

Construction des centres harmoniques du second ordre d'un système de trois points. Le cas du pôle à l'infini se résout immédiatement, comme représentant les racines de l'équation $3X^2 - 2S_1X + S_2 = 0$. Le cas général s'en déduit.

Polaire rectiligne et conique d'un point par rapport à un triangle. — Le lieu des centres harmoniques du second ordre des intersections des trois côtés du triangle par les transversales issues d'un pôle p est une conique circonscrite au triangle, polaire conique de p. — La polaire rectiligne du point, par rapport aux côtés du triangle, est en même temps sa polaire par rapport à la polaire conique. — Le lieu des points dont les polaires rectilignes passent en p est la polaire conique de p, et le lieu des points dont la polaire conique passe en q est la polaire rectiligne de q. — Les polaires coniques de points en ligne droite concourent en un point dont la droite est polaire du second ordre. — Toutes les droites qui passent par un point ont leurs pôles sur la polaire conique du point. — La tangente à la polaire conique du point p, menée par le sommet A, est le rayon conjugué harmonique de Ap par rapport aux côtés AB, AC. — Les points situés sur les côtés du triangle ont deux droites pour polaire conique (dont le côté lui-même). — La polaire conique du centre de gravité est une ellipse circonscrite ayant son centre en ce point. — Le pôle du cercle circonscrit est le point de concours des droites allant des sommets aux points qui divisent les côtés opposés en raison directe des carrés des côtés adjacents. — Le lieu des points dont les polaires sont des paraboles est une ellipse, tangente aux trois côtés en leurs milieux. — Celui dont les polaires sont des hyperboles équilatères est une droite, polaire du point de concours des hauteurs.

Cochez (*C.*). — Note d'Algèbre. (230-232).

Maximum et minimum de la fraction homogène du second ordre.

Triangles inscrits dans un cercle et circonscrits à un autre. O, R, centre et rayon du cercle circonscrit; ω, r, du cercle inscrit; $D = O\omega$; D', D'', D''', mêmes distances pour les cercles de contact exinscrits,

$$D^2 + D'^2 + D''^2 + D'''^2 = 12 R^2;$$

d et δ, distances de O au pôle et à la polaire communs aux deux cercles.

$$(D + \delta)\, d = R^2, \quad (d - D)\, \delta = r^2.$$

Cercle orthocentrique, A', B', C', ou T'

$$\Delta' = \Delta\, 2 \cos A \cos B \cos C.$$

Les perpendiculaires abaissées des sommets de T sur les côtés de T' passent en O. — H est le centre du cercle inscrit à T',

$$\frac{\rho}{R} = \frac{\Delta'}{\Delta}, \quad OH^2 = (3R)^2 - (a^2 + b^2 + c^2), \quad AH^2 + BH^2 + CH^2 - OH^2 = 3R^2.$$

ρ', ρ'', ρ''', rayons des cercles exinscrits au triangle orthocentrique : soit

$$P^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2};$$

$$\rho = \frac{P^2 - 4R^2}{2R}, \quad \rho' = \frac{P^2 - a^2}{2R}, \quad \ldots, \quad \rho + \rho' + \rho'' + \rho''' = \frac{P^2 - 2R^2}{R} \text{ (1)}.$$

On a encore

$$q'^2 + q''^2 + q'''^2 = R(R - \rho).$$

$$3\Sigma D^2 = 4\Sigma a^2 + 4\, OH^2,$$

$$16 R^2 = \Sigma r^2 + \Sigma a^2,$$

$$\sum \frac{a}{r'} \frac{\Sigma a}{\Sigma r'} = 4,$$

$$H\omega^2 = 4R^2 - 8Rr + \Sigma ab - \Sigma a^2,$$

$$H\omega^2 + \Sigma H\Omega^2 = \Sigma D^2 + 4\, OH^2.$$

---

(1) Même observation que ci-dessus; le signe de ρ doit, logiquement, être

Distance du centre de gravité K aux centres des cercles étudiés

$$\omega K^2 = \frac{5}{36}\sum a^2 + \frac{1}{6}\sum ab + r^2,\quad \omega K^2 + \sum \Omega K^2 = 16R^2 - \frac{4}{9}\sum a^2;$$

$$OK^2 = R^2 - \frac{\Sigma a^2}{9},\quad OH = 3OK.$$

La somme des carrés des douze droites qui joignent les sommets aux points de contact des cercles sur les côtés opposés est quintuple de celle des carrés des côtés. — Celle des carrés des douze distances des milieux des côtés aux centres des cercles de contact, augmentée de celle des côtés, est égale à douze fois le carré du cercle circonscrit. — La somme des aires des quatre triangles formés en joignant trois par trois les points de contact est constante et égale au double de l'aire du triangle. — Valeurs des côtés, angles et surface des triangles excentraux $\Omega\Omega'\Omega''$, $\Omega\omega\Omega'$, etc.

$$\Omega\Omega'^2 = (r' + r'')^2 + b^2.$$

Les puissances des centres des cercles de contact, par rapport à tout cercle passant au centre du cercle circonscrit, ont une somme constante, triple du carré du diamètre de ce dernier. — Si l'on forme successivement les triangles excentraux d'un triangle, de son excentral, et ainsi de suite, la forme du triangle a pour limite l'égalité des trois angles. — Un quelconque des quatre centres des cercles de contact est l'orthocentre du triangle des trois autres. — Le cercle des neuf points bissecte tous les rayons vecteurs menés de l'un des centres de contact à la circonférence des trois autres.—Les droites qui joignent les centres Ω aux milieux des côtés opposés du triangle sont concourants. — Cercles radicaux d'un triangle ayant pour diamètre l'une des six distances des centres des cercles de contact. — Les six axes radicaux des cercles de contact, pris deux à deux, se coupent à angle droit au milieu des côtés du triangle et sont parallèles aux côtés du triangle excentral principal $\Omega\Omega'\Omega''$.

Le cercle des neuf points est tangent aux trois cercles de contact. — La somme des distances de son centre aux quatre centres de ceux-ci est égale à six fois le rayon du cercle circonscrit. — La somme des carrés des distances du centre du cercle circonscrit aux centres des cercles de contact est égale au produit de son diamètre par la somme des distances, aux mêmes points, du centre du cercle des neuf points.

Dostor (Georges). — Sommation directe et élémentaire des cinq premières puissances des n premiers nombres, naturels ou impairs. (239-243).

La formule de récurrence

$$n^2 = A_n - A_{n-1}\quad \text{où}\quad A_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

donne Σn^2. On obtient aussi

$$\frac{\Sigma n^2}{\Sigma n} = \frac{n+n+1}{3},\quad \Sigma(2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

---

pris contraire de celui de ρ', ρ'', ρ'''. En observant cette règle, on obtient l'expression beaucoup plus simple

$$\Sigma\rho = 2R.$$

De même

$$n^3 = B_n - B_{n-1} \quad \text{où} \quad B_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad \frac{(\Sigma n^2)^2}{\Sigma n^3} = \left[\frac{n+(n+1)}{3}\right],$$

$$\Sigma(2n-1)^3 = n^2(2n^2-1).$$

Thual. — Note d'Algèbre. (251-252).

Transformation de $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ en $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$.

Dostor (Georges). — Sommation directe et élémentaire des cinq premières puissances des n premiers nombres, naturels ou impairs. (Suite). (263-267).

$$\sum n^4 = \sum n^2 \frac{3n^2+3n-1}{5}, \quad \sum (2n-1)^4 = \frac{(2n-1)2n(2n+1)(12n^2-7)}{30}.$$

Posant $D_n = \dfrac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$, on voit que $n^5 = D_n - D_{n-1}$, d'où

$$\sum n^5 = D_n = \sum n^3 \frac{2n^2+2n-1}{3}, \quad \sum (2n-1)^5 = \frac{1}{3}n^2(16n^4-20n^2+7).$$

$$4(\Sigma n)^3 = 3\Sigma n^5 + \Sigma n^3.$$

Ocagne (Maurice d'). — Note sur la soustraction des fractions. (275-276).

Morel (A.). — Note d'Algèbre. (294-297).

Quelques expressions sur les nombres figurés de Pascal et de Fermat.— Théorème de Goldbach : dans la fraction $\dfrac{1}{(m+1)^{p+1}}$, si l'on donne à m et p toutes les valeurs positives entières, la somme de toutes ces fractions a pour limite l'unité.

Ocagne (Maurice d'). — Sur le minimum d'une expression algébrique à plusieurs variables. (304-308).

Recherche élémentaire du minimum de la somme des carrés de m fonctions linéaires à $m-1$ variables.

Kœnigs. — Note de Géométrie. (308-310).

Tout triangle autopolaire (vulg. conjugué) par rapport à une conique est inscrit à un cercle dont la puissance par rapport au centre de la conique est (a^2+b^2). — Théorème analogue dans l'espace.

Malloisel (R.). — Note de Géométrie, sur le quadrilatère inscrit dans un cercle et circonscrit à un autre. (365-369).

Les cordes de contact des côtés opposés se coupent à angle droit, en un point constant pour tous les quadrilatères, en nombre infini lorsqu'il y en a un. La condition de possibilité est

$$(d^2 - R^2)^2 = 2r^2(R^2 - d^2) \quad (^1).$$

Ocagne (*Maurice d'*). — Théorème sur le trapèze. (370-372).

L'auteur, construisant par des parallèles aux côtés une série de trapèzes semblables au premier, leur trouve des propriétés qu'il suppose « nouvelles ». Malheureusement il oublie de remarquer que tout est évident et que le point de concours des diagonales est le centre de similitude de toutes ces figures successives.— Les rédacteurs du journal auraient dû, au lieu d'insérer ce petit travail d'un élève, excellent d'ailleurs, mais qui a eu un moment d'oubli, lui en faire l'observation.

Kœnigs (*G.*). — Note de Géométrie. (372-374).

La médiane d'un triangle est perpendiculaire à la droite qui joint le point de concours des hauteurs au point où la base est coupée par la droite qui joint les pieds des hauteurs correspondant aux côtés. — La polaire réciproque d'une conique, par rapport au cercle d'où elle est aperçue sous un angle droit, est le lieu des points dont les deux tangentes et la polaire forment un triangle dont les hauteurs se coupent sur la conique.

Gino-Loria. — Note sur un problème classique de Géométrie. (374).

Pour construire sur une corde m un segment capable de l'angle A, inscrire arbitrairement entre les côtés de l'angle une base de longueur m; construire le cercle circonscrit au triangle formé; le transporter sur la corde donnée. — La solution est plus simple que celle que donnent les traités élémentaires. — Mais nous ne partageons pas l'avis du rédacteur qui ajoute que l'indétermination du triangle arbitraire permet, en le prenant voisin du triangle rectangle, d'augmenter la précision de la détermination graphique du rayon. C'est certainement un lapsus, car la condition choisie serait au contraire la plus défectueuse possible.

Bibliographie. 62.

Correspondance. 32, 53, 64, 128, 352, 353.

Questions proposées. (Nos 141 à 205), 31, 60, 95, 128, 159, 192, 223, 288, 319, 350, 324.

Concours pour les Écoles. 182, 252, 253, 280-283.

---

(1) Pourquoi n'avoir pas donné la signification géométrique de cette condition? Si l'on joint le centre O′ du cercle inscrit au point C du cercle circonscrit, extrémité du rayon perpendiculaire à la ligne des centres, le segment O′D compris dans le prolongement en arrière de cette droite, entre O′ et la circonférence circonscrite, est égal au côté du carré inscrit dans la circonférence inscrite. Pourquoi aussi ne pas représenter par un carré (μ^2 au lieu de μ) l'indice de transformation? Chez un professeur ces nuances ont leur importance.

L.

L.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES élémentaires et spéciales, publié sous la direction de MM. Bourget et Kœhler.

Tome IV; 1880 [1].

Dostor (*G.*). — Nombres relatifs des polygones réguliers de n et de $2n$ côtés, suivant que n est un nombre impair ou un nombre pair. — Polygones réguliers correspondants. — Polygones réguliers étoilés. (3-8).

Le second de ces nombres est égal ou double du premier, suivant que n est impair ou pair. — A chaque polygone de n (impair) côtés correspond un polygone de $2n$ côtés, les espèces étant p et $n-2p$, et les côtés cordes supplémentaires du cercle circonscrit. — Si n est pair, à chacun des polygones de n côtés

[1] A partir de 1880, le *Journal de Mathématiques* élémentaires, dirigé par MM. Bourget et Kœhler, a élargi son cadre, pour admettre désormais les questions de Mathématiques spéciales, et s'adresser, sans distinction, à tous les candidats aux écoles du gouvernement. Le sous-titre des *Nouvelles Annales de Mathématiques* semblerait indiquer que les questions nouvelles que renfermera le journal dont nous nous occupons avaient déjà leur organe de publicité; toutefois il y a lieu de remarquer que les *Nouvelles Annales* n'ont jamais été, à proprement parler, un journal d'élèves. Un bien petit nombre des candidats aux Écoles Polytechnique et Normale, généralement d'un instinct mathématique précoce, et fort en dehors des aptitudes qui se développent dans un cours, suivaient avec fruit cette publication, et y mêlaient leurs noms à ceux de mathématiciens déjà classés. Il y avait donc une lacune à combler, et, si le rôle du *Journal de Mathématiques elémentaires et spéciales* est plus modeste, il n'en peut être que plus utile; aussi nous pouvons désormais étendre à tous les étudiants en Mathématiques ce que nous disions à son sujet, dans un précédent compte rendu, de son influence sur les études des élèves des classes élémentaires. L.

d'espèce p, correspondent deux polygones de $2n$ côtés, d'espèces p et $n-p$, que l'on considère comme conjugués, et qui ont pour côtés des cordes supplémentaires du cercle circonscrit. — Le côté d'un polygone régulier d'un nombre pair de côtés est quatrième proportionnelle au rayon du cercle circonscrit, et aux côtés des deux polygones réguliers conjugués d'un nombre double de côtés, inscrits dans le même cercle.

Dostor (*G.*). — Formules sur les bissectrices des angles intérieurs et extérieurs au triangle. (20-23).

Kœhler.—Théorie des centres des moyennes harmoniques. (Suite et fin.). (29-34).

Pôles et polaires dans les courbes du troisième ordre. — Si la cubique se décompose en une conique et une droite, la polaire conique d'un point se décompose en la polaire du point par rapport à la conique et la droite.—Les polaires coniques ou rectilignes d'un point par rapport à un faisceau de cubiques forment un faisceau. — Si c et c' sont les polaires coniques de deux points p et p' par rapport à la cubique k, les polaires rectilignes de p par rapport à c', et de p' par rapport à c, coïncident. — La polaire conique d'un point p, par rapport à une cubique à point double δ, est tangente en δ au conjugué harmonique de δp par rapport aux tangentes à la cubique (théorème s'étendant aux courbes d'ordre quelconque). Un arc de rebroussement de cubique est tangent à toutes ses polaires coniques par rapport aux divers points du plan. — Si la polaire de p est un couple de droites concourant en p', la polaire de p' sera de son côté un couple de droites passant en p. — Le lieu des points, dont les polaires sont doublement rectilignes, est une seconde cubique, qui est en même temps le lieu du point de concours de ces droites (hessienne de la cubique). — Pour les degrés supérieurs au troisième, le lieu des points dont les premières polaires ont un point double est d'ordre $3(m-2)^2$. Courbe de Steiner. — La polaire d'un point d'inflexion est un couple de droites, la tangente d'inflexion, et la droite qui unit les points de contact des tangentes issues du point d'inflexion. — Toute cubique a donc neuf points d'inflexion, réels ou imaginaires, intersections avec sa hessienne. — La droite passant par deux points d'inflexion d'une cubique passe par un troisième.

Boquel (*E.-J.*). — Propriétés générales des formes quadratiques, et leurs applications en Géométrie. (35-41, 79-88, 164-170, 318-323, 371-376).

Définitions. — Décomposition en sommes de carrés, de nombre au plus égal à celui des variables. — Les nombres respectifs de carrés positifs et négatifs des formes équivalentes sont invariables (Sylvester). — Invariant ou déterminant (symétrique) des demi-dérivées partielles. — L'invariant Δ' de la forme obtenue par une substitution linéaire est égal au produit de celui de la forme primitive, Δ, par le carré δ^2 du déterminant de la substitution.

Étant opérée une substitution linéaire dans une forme quadratique ternaire à trois variables, faisant $z=z'=1$, le module de transformation a pour valeur $\delta=\dfrac{\sin\theta'}{\sin\theta}$, d'où $\dfrac{\Delta}{\sin^2\theta}$ est invariable pour une même conique, quels que soient les axes des coordonnées. Le nombre de carrés de décomposition d'une forme quadratique est égal à celui des variables, en même temps que l'invariant de la forme est différent de zéro. Propriété fondamentale de la forme F, adjointe de f (Gauss), c'est-à-dire telle que le résultat de la substitution, aux variables x, de leurs valeurs en fonction des demi-dérivées partielles, X, de la forme, soit $\frac{F}{\Delta}$.

Si $\varphi = \theta f - \Sigma(xX)^2$, l'invariant de φ est $\theta^2(\theta\Delta - F)$.

Si f' est la forme transformée de f par la substitution $x_s = \Sigma_{u=1}^{u=n} \alpha_{us} x'_u$, et F, F' les formes adjointes de f et f', R le module de la transformation, en posant $X'_s = \Sigma_{u=1}^{u=n} \alpha_{us} X_u$, on aura identiquement

$$F'(X'_1, X'_2, \ldots, X'_n) = R^2 F(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Applications. — Distance, en coordonnées obliques, d'un point à une droite (P. Joubert).

Longueur des axes d'une section plane centrale d'une surface du second ordre.

Lorsque l'invariant d'une forme est nul, son adjointe est un carré parfait. — Applications.

Longchamps (*G. de*). — Recherches des facteurs commensurables de degré quelconque d'une équation. (41-44).

Exposé de la méthode de M. Landry pour déterminer les facteurs de forme $(x^p - a)$.

Launoy. — De l'ellipse, de l'hyperbole et de leurs propriétés. (49-60, 97-106, 145-152, 193-201, 241-246, 289-297, 337-353, 385-394).

Démonstration des principales propriétés en partant de la définition par la directrice et le foyer.

Théorèmes sur les tangentes et leurs intersections avec les axes et les tangentes aux sommets. — Normale. — D'un point donné on peut mener quatre normales.

Constructions de normales. — Rayon de courbure. — Relation

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{2}{R\cos\alpha}.$$

Normales rectangulaires. — Ellipses et hyperboles homofocales.

Parabole. — Théorème de Steiner. — Normales. — Le lieu du point d'où partent deux normales rectangulaires est une parabole. — Le centre de gravité des pieds des trois normales issues d'un même point est sur l'axe, et le cercle des trois pieds passe au sommet. — Problèmes divers.

Rayon de courbure de la parabole. — La projection du foyer sur les normales est une parabole à cordes focales. — Les rayons de courbure en ses extrémités sont liés par la relation

$$\frac{1}{R^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{R_1^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{p^{\frac{2}{3}}}$$

Longchamps (*G. de*). — Recherche des facteurs commensurables de degré quelconque d'une équation. (70-74).

Facteurs du second degré. — Recherches. — Conditions de divisibilité d'un polynôme par le trinôme du second degré.

Collin (*J.*). — Recherches sur les courbes planes du troisième ordre. (74-79, 171-176, 315-317).

L'auteur expose une méthode simple et ingénieuse de construction par points des courbes du troisième degré ayant au moins une asymptote à distance finie.

Courbes à point singulier. — Les rayons vecteurs de la courbe issus du point double sont la somme de deux rayons vecteurs de même direction, limités, le premier à l'asymptote directrice, le second à une conique directrice, passant au point double, ayant ses asymptotes parallèles aux deux autres asymptotes de la courbe, et passant par les points où l'asymptote directrice est coupée par les tangentes au point double; elle a pour tangente au point double le rayon vecteur du point d'intersection de la courbe avec son asymptote directrice. — Si les trois asymptotes sont réelles, le rayon vecteur de la courbe est la somme des trois rayons vecteurs compris, sur sa direction, entre le point double et les trois asymptotes. — Classification. — Dix-huit espèces de cubiques à point double ayant au moins une branche hyperbolique.

Construction de ces courbes, au moyen d'une conique fixe et d'une parallèle mobile à l'asymptote située à distance finie.

Seconde méthode de construction des cubiques considérées, par le moyen d'une conique fixe et de deux parallèles fixes. — Les deux rayons vecteurs issus d'un point particulier de la courbe étant ρ' et ρ'', on a

$$\rho' + \rho'' = \rho_1 + \rho_2 \quad \text{et} \quad \rho'\rho'' = \rho_1\rho_3,$$

ρ_1, ρ_2, ρ_3 étant les rayons vecteurs de la conique et des deux droites.

Laurent (*H.*). — Notes sur les fonctions trigonométriques. (88-92).

Prenant pour définition des fonctions e^x, $\cos x$, $\sin x$ leurs développements en série, l'auteur établit les formules fondamentales de la Trigonométrie, abstraction faite de toute considération géométrique.

Longchamps (*G. de*). — Sur la somme des puissances semblables des n premiers nombres. (92-96).

Relation récurrente $n S_n^p = \Sigma_1^n S_x^p - S_n^p$ est fonction entière de degré $(p+1)$ en n, sans constante, et chez laquelle les coefficients de n^{p+1} et de n sont $\frac{1}{p+1}$ et $\frac{1}{2}$. — Valeurs de S_n^2 et S_n^3.

Guéroult (*L.*). — Note de Géométrie. (106-108).

Un cercle étant tracé sur une face d'un dièdre d'ouverture variable, l'angle α des droites qui joignent son centre aux foyers de sa projection sur l'autre face est invariable (¹).

(¹) Démonstration qui serait suffisante dans un examen, mais à proscrire

Ainsi que nous l'avons déjà observé, on ne devrait admettre dans le *Journal* que des démonstrations « recommandables par leur goût approprié au sujet »; car elles servent fatalement de types modèles.

Malloisel (*R.*). — Problème d'admission à l'École Normale supérieure en 1877. (108-113).

Colombier (*P.-A.-G.*). — Note relative au théorème de Pappus, sur le quadrilatère complet. (113-114).

Cernesson (*J.*). — Propriété de l'hyperbole. (115).

Janin (*A.*). — Note sur l'intersection de deux surfaces de révolution du second ordre à axes concourants. (116-127).

Détermination graphique des éléments de la conique, projection de l'intersection sur le plan des axes.

Kœnigs (*G.*). — Concours général de 1878. (Mathém. spéciales). (128-133).

Laurens (*Ch.*). — Variétés. — Essai pour les coniques de Pascal. (133-141, 176-183, 232-240).

Historique. — Propriétés de l'hexagramme mystique.

Relation d'involution de Desargues. — Origine de la théorie des pôles et polaires.

Pajon. — Note d'Algèbre. (152-158).

Ocagne (*Maurice d'*). — Étude sur une ligne remarquable du triangle, antibissectrice. (158-164).

Définition : droite divisant la base inversement à la division par la bissectrice. Longueurs, angles, formules diverses. — Application à des problèmes. — Enveloppe de la corde mobile détachant sur une courbe un arc de longueur constante. — Son contact est le pied de l'antibissectrice de la corde et des deux tangentes.

Morel (*A.*). — Formules trigonométriques relatives aux éléments

---

d'une façon absolue du *Journal* comme d'un esprit des moins appropriés à la nature du sujet; elle offre un développement d'écriture algébrique fort inutile, et du plus fâcheux exemple. La seule démonstration présentable de ce théorème, quasi évident, serait la suivante : O et O' étant les centres du cercle et de sa projection, A leur projection sur l'arête, B l'extrémité du rayon OA et G sa projection sur OO'; BG est le demi petit-axe, OG la demi-distance focale, d'où

$$\tang\frac{\alpha}{2} = \frac{OG}{OO'} = \frac{OB}{OA}.$$

d'un triangle rectiligne. (201-204, 246-249, 297-300, 493-497).

Formules extraites du « Recueil de problèmes de Trigonométrie et de Stéréotomie de Reidt ».

Relations diverses : r, r', r'', r''', rayons des cercles inscrit et exinscrit; S, surface; R, rayon du cercle circonscrit

$$r r' r'' r''' = S^2, \quad R = \frac{abc}{4S}, \quad \frac{r' r'' r'''}{h_a h_b h_c} = \frac{R}{2r}, \quad \Sigma r^2 = 4R^2 + \Sigma h_a^2,$$

$$r' = 4R \sin\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}.$$

Questions résolues. (497-501).

Fajon. — Variations des fonctions bicarrées, déduites de celles des fonctions du second degré. (205-210).

Questions à l'usage des candidats à Saint-Cyr. (210-212).

Boquel (E.-J.). — Note sur un point de la discussion des équations du premier degré à trois inconnues. (213-214).

Collin (J.). — Note sur le théorème de Descartes. (215-217).

Théorème de Descartes sur le nombre des racines positives, déduit de celui de Rolle.

Kœhler. — Note sur les fractions continues indéfinies, non périodiques. (217-223).

Longchamps (G. de). — Transversales réciproques et applications. (272-277).

Les transversales réciproques coupant les côtés du triangle en des points réciproques, symétriques l'un de l'autre par rapport au milieu du côté.— Construction des tangentes aux cissoïdes et strophoïdes, droites ou obliques, à la lemniscate de Bernoulli, aux conchoïdes.

Collin (J.). — Sur le nombre de points d'inflexions réels d'une courbe du troisième degré. (277-278).

Minine. — Du nombre qui exprime combien il y a de nombres premiers à un nombre donné n, et compris entre 0 et p. (278-280).

Désignant par $[\varphi(N)]_0^p$ le nombre cherché, par $E(x)$ la partie entière de x, enfin, symboliquement, par $n E\frac{(1)}{x}$ l'expression $E\left(\frac{u}{x}\right)$, on a la valeur

$$[\varphi(N)]_0^p = p\left[1 - E\frac{(1)}{a}\right]\left[1 - E\frac{(1)}{b}\right]\left[1 - E\frac{(1)}{c}\right]\cdots,$$

$a, b, c, \ldots$ étant les facteurs de N, tels que $N = a^\alpha, b^\beta, c^\gamma, \ldots$. On a de plus, entre des nombres N, N', N'', ..., premiers entre eux,

$$[\varphi(N)]_0^p[\varphi(N')]_0^{p'}[\varphi(N'')]_0^{p''}=\ldots=[\varphi(NN'N''\ldots)]_0^{p\,p'\,p''\ldots},$$

et en particulier

$$\varphi(N)\varphi(N')\varphi(N'')=\ldots=\varphi(NN'N''\ldots).$$

Jouanne. — Note de Géométrie analytique. (280-283).

Équation du cercle passant par trois des pieds des normales menées d'un point à une conique à centre (1).

Bourget (J.). — Note sur un point de la discussion des équations du premier degré à trois inconnues. (411-415).

Questions résolues. — Concours d'agrégation 1879. (415-425).

1° On donne un hyperboloïde gauche et un point A. — Un plan P roule autour du point A. — Lieu du point M d'intersection du paraboloïde touchant l'hyperboloïde suivant sa section par le plan P, avec son diamètre passant par le point A; 2° du point Q où le plan P est percé par la droite qui va de son pôle, par rapport à l'hyperboloïde, au point M; 3° des positions du point A pour lesquelles la dernière surface (qui est du second ordre) est de révolution.

Kœnigs. — Théorème concernant une courbe algébrique. (425-427).

Arnaud. — Démonstration élémentaire d'une formule d'Abel. (427-429).

Démonstration, par la dérivation de la formule binômale

$$(x+a)^m = x^m+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}\,a(a+nb)^{n-1}(x+nb)^{m-n}+\ldots.$$

VARIÉTÉS. — Université de Tokio (Japon). 429-432.

Ocagne (Maurice d'). — Principes élémentaires de Géométrie cinématique. (433-441).

Conventions de symboles — (a) Trajectoire du point a — $d(a)$, déplacement élémentaire de a sur (a). — Principes :

1° Si t est le point de concours des tangentes aux courbes (a) et (b), on a l'égalité

$$\frac{d(a)}{d(b)}=\frac{at}{bt};$$

2° Si e est le point où ab touche son enveloppe

$$\frac{d(a)}{d(b)}=\frac{ae}{be}\,\frac{at}{bt};$$

3° Soient α et β les intersections des normales en a et b, aux courbes (a) et

(1) Dans la solution de la question 176 (p. 307), l'auteur repousse comme non

(b) par la normale en e, à l'enveloppe (e), on a

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{a\alpha}{b\beta}.$$

Déplacement d'une figure, variable de forme, dans un plan. — Problèmes généraux :

1° On donne m courbes (a_1), (a_2), ..., (a_m), sur lesquelles les m points $a_1, a_2, \ldots, a_m$ doivent se mouvoir, les courbes $E_1, E_2, \ldots, E_{m-1}$, enveloppe des $m-1$ premiers côtés successifs du polygone $a_1, a_2, \ldots, a_m$. — Trouver l'enveloppe E_m de $a_m a_1$;

2° On donne les m enveloppes et $(m-1)$ trajectoires, trouver la $m^{\text{ième}}$ trajectoire. — Les deux solutions sont données par la relation

$$1 = \frac{a_1\alpha_1 . a_2\alpha_2 . a_3\alpha_3 \ldots a_{m-1}\alpha_{m-1} . a_m\alpha_m}{a_1\beta_1 . a_2\beta_2 . a_3\beta_3 \ldots a_{m-1}\beta_{m-1} . a_m\beta_m}.$$

Si les normales en e et h, aux enveloppes (e) et (h) de ab et ac, se coupent en α sur la normale (en a) à (a), on a

$$\frac{d(b)}{d(a)} = \frac{b\beta}{c\gamma},$$

en désignant par β le point de concours des normales $e\alpha$ et $b\beta$, et par γ celui des normales $h\alpha$ et $c\gamma$. — Application. — Construction de la normale à l'enveloppe du côté bc du triangle abc, dans lequel l'angle a pivote autour de son sommet, les points a et b décrivant (a) et (b).

Morel (A.). — Inégalité des jours et des nuits. (441-444).

Discussion de la formule $\cos\varphi = \operatorname{tang}\delta \operatorname{tang}\lambda$.
Examens oraux de Saint-Cyr en 1880. (444-446).
Questions résolues (Examens de Saint-Cyr). (446-456).
Choix de questions, avec solutions, par M. A. Morel.
Questions résolues. (456-459).

Boquel (E.-J.). — Note sur une application du Calcul des déterminants à certaines questions de maxima et de minima. (460-464).

Distance d'un point à une droite, sur le plan et dans l'espace.

Guichard. — École Normale supérieure, 1880. — Composition. (465-471).

Correspondance. — Faire passer un carré par quatre points donnés. (478).

---

susceptible d'interprétation une racine négative, solution des plus naturelles du problème. Le Comité de rédaction du Journal devrait, nous semble-t-il, ne pas laisser échapper des erreurs aussi grossières.

Solution fondée sur ce théorème : « Les portions de deux droites rectangulaires, interceptées entre les deux côtés opposés d'un carré, sont égales ([1]). »

Morel (A.). — Note sur les fractions décimales périodiques. (481-487, 529-535).

Nouvelles propriétés des périodes développées dans un Mémoire de M. A. Bouché. Soient x le quotient et y le reste de la division $\frac{1}{N}$, poussée de manière à avoir K chiffres décimaux au quotient, et abstraction faite de la virgule,

$$\frac{1}{N} = \frac{\frac{x}{10^k}}{1 - \frac{y}{10^k}} = \frac{x}{10^k}\left[1 + \frac{y}{10^k} + \left(\frac{y}{10^k}\right)^2 + \ldots\right],$$

d'où le calcul facile par séries de K chiffres.

Deux nombres dont les chiffres correspondants ont tous 9 pour somme sont dits complémentaires; une période est dite complète lorsqu'elle est formée de deux nombres complémentaires mis à la suite l'un de l'autre.

Soient p la période de la fraction irréductible $\frac{1}{N}$, et D un nombre d'autant de 9 qu'il y a de chiffres à p; on a

$$\frac{1}{N} = \frac{p}{D},$$

p doit contenir tous les facteurs premiers de D qui ne se trouvent pas dans N. — Si, en réduisant $\frac{a}{N}$ en décimales, on trouve le reste $N - a$, la période est complète; et, si la fraction est irréductible, sa période a le même nombre de chiffres que celle de $\frac{1}{N}$. — Si h est l'un des restes de $\frac{1}{N}$, la période $\frac{h}{N}$ ne diffère de celle de $\frac{1}{N}$ que parce qu'elle commencera à un autre chiffre. — Si N est premier, le nombre de chiffres de la période est $N - 1$, ou l'un de ses sous-multiples.

Lorsqu'une fraction, à dénominateur premier, donne naissance à une période non complète, le nombre des chiffres de la période est impair. — Réciproque. — Si la période p, correspondant à la fraction $\frac{1}{N}$, est divisible par le nombre premier N, la période $\frac{1}{N^2}$ aura le même nombre, K, de chiffres que $\frac{1}{N}$. — Si p n'est pas divisible par N, le nombre de chiffres de la période de $\frac{1}{N^h}$ est KN^{h-1}; les deux périodes sont en même temps complètes ou incomplètes. — Le nombre de chiffres de la période correspondant à $\frac{1}{NN'N'',\ldots}$ est égal au plus petit commun multiple des nombres de chiffres des autres périodes. — Recherche des nombres N tels que la période $\left(\frac{1}{N}\right)$ ait p chiffres. — Ce sont les diviseurs de

([1]) On a voulu dire « réciproquement interceptées entre les deux couples de côtés du carré ». Solution fort élégante, d'ailleurs. L.

10^p-1, dont on supprime 3, 9 et les diviseurs des nombres tels que 10^a-1, eux-mêmes diviseurs de 10^p-1.

Ocagne (*Maurice d'*).—Sur le partage des polygones. (487-489).

Construction fort simple pour diviser dans un rapport donné un polygone par une transversale passant par un point de son contour [1].

Desmons. — Note sur les irrationnelles. (489-493).

Morel (*A.*). — Formules trigonométriques. (Suite.). (493-497).

Songaylo. — Sur les tangentes aux points doubles de l'intersection des surfaces. (502-506).

L'auteur recherche, en projection sur un plan perpendiculaire à son axe, les tangentes au point double d'intersection d'une surface de révolution par son plan tangent [2].

Jouanne. — Note de Géométrie analytique. (507-512).

Recherche des systèmes de diamètres conjugués parallèles dans les courbes et surface du second ordre [3].

Janin. — Concours d'Admission à l'École Polytechnique. (513-519).

---

[1] Cette construction était connue de temps immémorial des géomètres du Cadastre, et enseignée jadis dans les Cours les plus élémentaires. Comment les rédacteurs n'ont-ils pas relevé la phrase malheureuse de l'auteur où il dit que jusqu'à son travail « on ne connaissait qu'une solution approximative!! du problème»? Que de fois on réédite, sans s'en douter, du « vieux neuf »!

[2] Dans cet article, dont la suite sera donnée plus loin, il est fait usage des procédés de la Géométrie descriptive et des calculs de Géométrie analytique pour arriver, assez péniblement, à une construction que de simples considérations infinitésimales rendent quasi évidente. — Il eût été presque aussi court de développer franchement la théorie de l'indicatrice. — Pourquoi enfin ne pas donner la construction de l'angle en vraie grandeur des tangentes, au lieu de sa projection? La construction en est plus simple. C'est celui d'où est vue, du centre de courbure du méridien, la corde que le cercle, décrit sur la distance de ce centre au point d'intersection de la normale et de l'axe, détache sur la tangente au méridien. L.

[3] Les articles émanant de professeurs devraient, dans le *Journal* des élèves, être marqués au coin d'une perfection toute particulière. Aussi remarquerons-nous que l'auteur aurait dû observer que la distance des courbes ou surfaces est indifférente, leur orientation seule étant en jeu. — Étudier dès lors la question pour les courbes ou surfaces à centre, en les prenant concentriques; il en fût résulté, outre la simplification des équations, l'avantage de faire songer très probablement l'auteur à la solution géométrique, beaucoup plus simple, plus prompte et surtout plus lumineuse pour la classification que la solution analytique. Cette étude géométrique et analytique menée parallèlement était jadis fort en honneur chez les « bons élèves ». L.

Nettre. — Sur une propriété des coniques. (519-522).

Ocagne (*Maurice d'*). — Note de Géométrie. (535-538).

Trois circonférences passent par un même point et se coupent deux à deux sur une même droite. Par un point de celle-ci on mène une tangente à chacune des trois premières; les points de contact de ces tangentes et le point commun aux trois circonférences sont sur un même cercle; les points diamétralement opposés au point commun dans chacune des trois circonférences sont, avec celui-ci, sur un même cercle. — Transformation par inversion, et application du théorème de Ptolémée.

Descube. — Théorème de Géométrie. (538).

Ocagne (*Maurice* (*d'*). — Note sur une ligne dans le triangle rectiligne. (539-542).

Propriétés de la droite symétrique de la médiane par rapport à la bissectrice. — Relations métriques. — Construction d'une parabole, connaissant deux tangentes et leurs points de contact. — Normale à la lemniscate.

Songaylo. — Sur les tangentes aux points doubles de l'intersection des surfaces. (Suite.). (552-559).

Intersections de surfaces coniques et cylindriques.

Boquel (*E.-J.*). — Note sur une application du calcul des déterminants à certaines questions de maxima et minima. (Suite et fin.). (560-564).

Démonstration de l'identité $\Sigma a^2.\Sigma b^2 = \Sigma(a_s b_u - a_u b_s)^2 + (\Sigma a_s b_s)^2$, maximum de la fonction du second degré de $(n-1)$ variables, telle qu'on puisse écrire $F = \Sigma X^2$, les n quantités X étant fonctions linéaires des $n-1$ variables. Il est égal à $\frac{\Delta^2}{\Sigma L^2 - 1}$, Δ étant le déterminant des X, et L les fonctions multiplicateurs des éléments de sa dernière colonne (termes connus) dans son développement par rapport à ceux-ci.

Bibliographie. — 526.

Questions proposées. — (Nos 206-283). 28, 45, 69, 96, 143, 190, 285, 479, 527, 574.

Concours pour les Écoles. — 8, 249, 302, 324, 417, 444, 477, 551, 574.

Concours généraux et Concours académiques. — 301, 302, 475.

Baccalauréat ès sciences. — 24, 27, 269, 271, 408, 411, 549-551.

Examens divers. — 210, 226, 255, 283, 312, 333, 368, 382, 324.

QUESTIONS RÉSOLUES. — 8-19, 20-69, 141-143, 183-190, 259-269, 304-312, 325-333, 353-367, 380, 394-407, 456-459, 465, 497-501, 513, 523-526, 542-548, 564-573 (¹).

LAQUIÈRE.

ANNALES DES MINES (²).

7ᵉ série. — Tome XVIII; 2ᵉ semestre 1880.

Ce Volume ne renferme point de Mémoires ayant trait aux applications des Mathématiques.

Tome XIX; 1ᵉʳ semestre 1881.

Marié (G.). — Étude sur la mesure exacte des hautes pressions et sur le frottement des cuirs emboutis des presses hydrauliques. (104-156, 2 pl.).

Emploi des manomètres et des soupapes à la mesure des pressions. Évaluation des causes d'erreur.

Étude spéciale et mesure des frottements des cuirs emboutis; nouveau dynamomètre.

Laussedat. — Sur la méthode employée par d'Aubuisson, en 1810, pour la mesure des bases géodésiques. (172-174).

L'idée d'employer une seule règle, transportée successivement entre des repères placés sur l'alignement de la base, a été préconisée par le major piémontais Porro, à qui elle a été généralement attribuée.

Il est intéressant, pour l'histoire de la Science, de rapporter le mérite de cette précieuse innovation à l'ingénieur des mines d'Aubuisson, qui le premier a employé ce procédé dans la mesure d'une base destinée à appuyer des opérations trigonométriques ayant pour objet la détermination de la hauteur du sommet du

---

(¹) La question 235 : « Trouver l'enveloppe des directrices des coniques, dont on donne un point et le foyer correspondant à la directrice », revenant à demander d'une manière détournée la définition du cercle, peut être posée dans un examen pour tâter la présence d'esprit de l'élève; mais ne devrait en aucune sorte figurer au Journal; des questions aussi insignifiantes ne sont guère susceptibles d'une solution intéressante ou utile; aussi sont-elles traitées par des calculs « à l'aveugle », alors qu'en Géométrie analytique le bon élève n'écrit jamais, ou rarement, une équation dont il ne lise clairement l'interprétation. L.

(²) Voir *Bulletin*, IV_2, 204.

mont Gregorio, à l'entrée de la vallée d'Aoste. Cette mesure fut effectuée au commencement de l'année 1810.

Mallard (*E.*). — Sur les propriétés optiques des mélanges cristallins de substances isomorphes et sur l'explication de la polarisation rotatoire. (256-313, 1 pl.).

L'auteur a essayé déjà dans les *Annales* (1876) de montrer que la théorie de la double réfraction pouvait tirer quelque utilité de l'étude des phénomènes observés par Nörremberg sur des lames de mica très minces superposées, et par Reusch sur ces mêmes lames, associées suivant une certaine loi d'empilement. Il se propose, dans ce nouveau Mémoire, de développer cette théorie et d'en fixer, d'une part, le moyen de déduire les propriétés biréfringentes d'un mélange cristallin, en partant de celles des corps mélangés, et de l'autre, une explication complète et rationnelle de tous les faits que l'on groupe sous le nom de *polarisation rotatoire*, aussi bien ceux qui se produisent dans les cristaux que ceux que montrent les dissolutions ou les liquides.

Tome XX; 2e semestre 1881.

Trautmann. — Organisation du service d'hiver et réfrigération artificielle de l'eau minérale à l'établissement thermal de Bourbonne. (86-120, 1 pl.).

Description des procédés économiques employés à cette réfrigération artificielle.

De Kossuth (*F.*). — Étude sur l'application de la ventilation artificielle à l'aérage du tunnel du mont Cenis. (285-322).

L'aérage du tunnel du mont Cenis est insuffisant. Pour la longueur de 12849^{m} et la section de 42^{mq} de ce tunnel, il faudrait 84^{mc} d'air par seconde, tandis que les aspirateurs des installations actuelles peuvent extraire à peine le douzième de ce Volume.

8e série. — Tome I; 1er septembre 1882.

Resal. — Examen critique des hypothèses auxquelles on a recours pour calculer les efforts transmis aux pièces des systèmes de bancs employés dans les constructions. (449-462, 1 pl.).

Les systèmes de cette nature se trouvent réalisés dans certaines catégories de combles et de ponts.

La statique étant insuffisante pour calculer les efforts transmis, on a recours à des hypothèses plus ou moins plausibles dont la principale consiste à considérer les tiges comme étant rigides dans le sens de leur longueur. On est ainsi conduit à créer des points fixes fictifs aux joints de certains assemblages. Mais comment doit-on choisir ces points fixes pour ne pas être conduit à des incompatibilités? Tel est le problème que l'auteur s'est proposé, mais dont la solution ne paraît pas susceptible d'être résumée dans un énoncé général. Il n'y a qu'en traitant quelques cas particuliers que l'on peut faire comprendre la marche que doivent suivre les ingénieurs chargés des constructions de la nature de celles dont il s'agit.

Thiré. — Note sur le planimètre polaire d'Amsler. (487-500, 1 pl.).

On a déjà établi la théorie de cet instrument de bien des manières différentes, et divers Ouvrages en renferment l'exposé (*Annales des Mines,* 1871, Notice de M. Combes; *Mémorial de l'Officier du Génie,* 1874, travail de M. Peaucellier; *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux,* 1876, Note de M. Laisant).

La nouvelle monographie a pour objet la démonstration du planimètre, fondée sur des calculs assez restreints.

Mallard (E.). — Expériences sur la pression du grisou dans la houille (530-551, 1 pl.).

Traduction par extrait et interprétation analytique des résultats de très intéressantes observations faites par M. Lindsay Wood. La conclusion de ces études peut être ainsi énoncée : le grisou est un gaz renfermé dans la houille comme l'eau l'est dans une couche poreuse. Il s'y trouve comprimé sous une pression très variable, qui peut atteindre et sans doute dépasser 32^{kg} par centimètre carré.

Haton de la Goupillière. — Tambours spiraloïdes pour les câbles d'égale résistance. (566-587, 1 pl.).

Le profil théorique du câble d'égale résistance est, comme on sait, celui d'une logarithmique. Dans la pratique courante, les constructeurs le remplacent jusqu'ici par le câble conique, en supprimant à des intervalles constants un fil dans le misage. Le tambour, que l'on déterminera ainsi en rigueur, s'adaptera à l'emploi du câble conique ordinaire avec l'approximation même que celui-ci réalise par rapport à la forme idéale et dont on se contente jusqu'ici.

L'étude de ce problème comprend deux parties distinctes dans le présent Mémoire. La première renferme les propriétés générales de tout système d'extraction d'équilibre rigoureux, quelle que soit la forme de son câble, que celui-ci soit cylindrique d'un bout à l'autre, ou formé de mises cylindriques différentes, qu'il soit logarithmique, conique, ou de telle forme que l'on voudrait, même imaginée d'une manière absolument arbitraire et sans qu'elle fût motivée par aucune raison de pratique usuelle.

Une seconde partie sert à fonder, sur ces principes généraux, la solution complète de la détermination du profil du tambour spiraloïde pour le cas le plus typique de tous, celui du câble d'égale résistance, c'est-à-dire de la forme logarithmique.

Moyennant une transformation de coordonnées, la courbe méridienne du tambour est déterminée par l'équation différentielle

$$\frac{y}{z}\,dz + \frac{dy}{y-1} - \frac{(z+1)\,dy + (y-z)\,dz}{(z+1)y - 2z} = 0.$$

Cette équation paraissant rebelle à toutes les méthodes d'intégration, l'auteur a pensé avec raison que, pour le praticien, l'équation aux différences finies du profil suffirait parfaitement pour en déduire de proche en proche chaque ordonnée des divers points d'insertion des spires successives.

Par une analyse très simple, l'auteur établit l'équation aux différences finies

$$y_{n+1} = \frac{[(\beta^n + 1)y_n - 2\beta^n]\,\beta^{\frac{y_n}{2}} - 2\beta^{n+1}(y_n - 1)}{[(\beta^n + 1)y_n - 2\beta^n]\,\beta^{\frac{y_n}{2}} - (\beta^{n+1} + 1)(y_n - 1)},$$

qui résout la détermination du profil du tambour.

L'application numérique de cette relation serait sans difficultés et présenterait tout au plus des longueurs. On peut abréger considérablement ces dernières en introduisant une approximation qui n'affecte aucune des décimales que la pratique la plus exigeante pourrait tenir à conserver dans les évaluations. L'équation définitive devient

$$u_{n+1} = (\beta - 1)\beta^n - l\beta + \left(1 + \frac{l\beta}{2}\right)u_n + \frac{(1 - \beta^{2n})\,l\beta}{2u_n}.$$

H. B.

REVUE D'ARTILLERIE [1].

Tome XIX; octobre 1881-mars 1882.

Pravaz. — Calcul des éléments du tir lorsque l'angle d'élévation du but est considérable et application au tir plongeant. (5-13, 3 fig., 1 pl.).

Les Tables de tir des diverses bouches à feu sont dressées pour le tir sur un but situé au niveau de la pièce, condition qui ne se présente habituellement point dans la pratique.

Si l'angle de site du but est faible, on ne change pas la hausse; l'angle à donner au niveau est simplement augmenté de l'angle de site du but, et l'on admet que l'angle de chute est égal à celui que donnent les Tables pour la même distance sur le plan horizontal diminué de la valeur de l'angle de site du but.

Lorsque l'angle de site atteint une certaine valeur, on n'obtient plus ainsi une approximation suffisante.

Il faut avoir recours à d'autres procédés de calcul. On arrive, en faisant une hypothèse qui se rapproche davantage de la réalité, à calculer ou plutôt à mesurer, par un procédé graphique très simple, les éléments du tir sur un but situé au-dessus ou au-dessous de la bouche à feu.

Cette hypothèse est que, pendant un même temps t, la valeur des déplace-

---

(1) Voir *Bulletin*, V_2, 231.

ments composants suivant l'axe de la bouche à feu et suivant la verticale est constante, quel que soit l'angle de tir.

Dans cette hypothèse, le lieu des positions du projectile lancé dans un plan vertical sous différents angles est, au bout d'un temps t, une circonférence.

L'auteur arrive ainsi à transformer les Tables de tir en tableaux quadrillés et en tracés graphiques qui donnent, à première vue, les charges, les durées du trajet, et les vitesses restantes.

Lefèvre (*J.-B.-V.*).— Influence de la diminution progressive des vitesses initiales données par les cartouches métalliques sur la portée du fusil d'infanterie. (89-109, 3 fig.).

L'expérience a montré que la poudre des cartouches métalliques subit avec le temps une certaine transformation, et que tous les ans, la vitesse initiale, qui était de 450^m, éprouvait une diminution de $3^m,05$ à 4^m.

L'auteur se propose d'évaluer les modifications qui doivent en résulter pour le réglage des hausses, et de soumettre les résultats obtenus à une interprétation pratique.

De Galembert. — Étude sur le tir fusant de l'obus modèle 1879. (185-196, 4 fig.).

Remarques nouvelles sur une question déjà traitée dans le même Recueil (t. XVII et XVIII) par MM. Percin et Talayrach.

On est fondé à croire que parfois l'écart probable en portée de la fusée à double effet a une valeur beaucoup plus forte que celle qu'on lui avait attribuée. Dans certaines expériences, cette valeur aurait atteint 35^m, ce qui montre que les points d'éclatement se seraient répartis entre deux plans verticaux, à un intervalle de 280^m.

Quel que soit son caractère de généralité, cette donnée, très différente de celle qui avait été admise, mérite d'être étudiée, et l'auteur la prend pour base de son travail.

Percin. — Correction à faire subir à la hausse en raison de l'élévation du but. (281-311, 8 fig.).

Dans le tir sous de petits angles, on admet que la trajectoire reste reliée au canon d'une manière invariable et se relève avec lui, sans changer de forme, si l'on fait varier l'angle de tir. C'est ce que l'on appelle l'hypothèse de la rigidité de la trajectoire. Cette hypothèse, admissible pour des angles suffisamment petits, cesse de l'être lorsque ceux-ci atteignent des valeurs un peu considérables.

On peut admettre, par exemple, que le rapport de l'abaissement dans l'air à l'abaissement dans le vide est indépendant de l'angle de projection; ou encore que, pour une même longueur prise sur la ligne de projection, l'abaissement est indépendant de l'angle de tir; ou enfin, toute autre donnée moyenne permettant de dresser des tableaux graphiques, procédé indiqué précédemment (p. 5-13).

L'auteur se propose, non plus de présenter une hypothèse nouvelle, mais de déterminer, indépendamment de toute hypothèse, l'allure générale de la variation que doit éprouver la correction à la hausse, et cela pour toutes les valeurs de l'angle d'élévation. A cet effet, il considère les lignes d'égale hausse, c'est-à-dire le lieu des points du plan de tir qu'on atteindrait avec une même hausse.

A chaque valeur de α correspond une ligne d'égale hausse. On reconnaît que sa forme et sa position coïncident approximativement avec la seconde trajectoire dont la portée est la même que celle qui correspond à l'angle α. Cette propriété, approximative dans l'air, se vérifie exactement dans le vide. Enfin, l'angle d'arrivée, dans l'air, est plus grand que l'angle de départ, mais inférieur à 90°, et d'autant plus grand que le projectile est plus influencé par la résistance de l'air.

Dans la pratique, on reconnaît que la correction à faire subir à la portée est approximativement égale au centième du produit de la hauteur du but par l'angle de projection des Tables exprimé en degrés.

La courbe neutre, lieu géométrique des points du plan de tir qui ne nécessitent aucune correction, autrement dit, des points qu'on atteindrait avec la hausse correspondant à leur distance absolue, sans s'inquiéter de leur élévation comme si l'hypothèse de la rigidité de la trajectoire était rigoureusement exacte, cette courbe affecte la forme d'une boucle tangente aux deux axes à l'origine et à l'enveloppe des trajectoires.

Cette forme ne peut guère être précisée davantage, car, pas plus que pour les courbes d'égale hausse, il n'est possible d'en établir l'équation en termes finis.

Quoi qu'il en soit, il y a là un sujet d'études qui pourra conduire à d'intéressants résultats.

Decepts. — Sur la représentation graphique des Tables de tir plongeant par les procédés de la géométrie anamorphique (377-397, 10 fig.).

La théorie exposée est fondée sur le principe de l'anamorphose développé pour la première fois par M. Léon Lalanne, dans un Mémoire datant de 1843. Ce Mémoire, qui mérita un rapport élogieux de Cauchy à l'Académie des Sciences, a été reproduit en entier dans les *Annales des Ponts et Chaussées,* en 1846, sous le titre suivant : *Mémoire sur les Tables graphiques et la géométrie anamorphique appliquée à diverses questions qui se rattachent à la Science de l'ingénieur.*

Frique (E.). — Appareils de pointage indirect et de repérage des bouches à feu de siège et de place. (484-510, 9 fig., 1 pl.).

Exposé des divers appareils ou procédés qui ont été imaginés en France ou à l'étranger pour exécuter le repérage de la position de la bouche à feu et permettre le pointage en toutes circonstances.

Ces appareils se divisent en deux grandes classes : ceux qui repèrent la position de l'affût, et ceux qui repèrent la position de la bouche à feu elle-même.

La première classe d'appareils est décrite dans le présent article.

Tome XX; avril-septembre 1882.

Percin. — Sur différentes questions de probabilité qui se présentent dans le réglage du tir percutant. (5-33).

Détermination des éléments du réglage du tir.
Observations sur les règles de tir applicables à une batterie isolée.
Réglage du tir dans les groupes de batteries.

Frique (*E.*). — Appareils de pointage indirect et de repérage des bouches à feu de siège et de place. (51-86, 18 fig., 1 pl.; 119-144, 9 fig., 1 pl.; 265-283, 4 fig.).

Description des quatre groupes des appareils de la seconde classe, qui servent à repérer la position de la pièce.

Tome XXI; octobre 1882-mars 1883.

Gaudin (*A.*). — Rendement de la poudre dans les bouches à feu. (425-441).

On désigne ainsi la quantité de travail recueillie par le projectile, par unité de poids de poudre employée.

L'auteur se propose de signaler quelques relations existant entre la valeur du rendement et la manière dont la poudre se comporte dans l'arme, relations déduites de résultats d'expériences, explicables jusqu'à un certain point, par un examen attentif de ce qui se passe dans les bouches à feu, et qui ont paru conduire à des conséquences importantes.

Le principe de ce travail peut s'énoncer en disant que le rendement est fonction du déplacement qu'a déjà subi le projectile au moment où la production des gaz utilisables est terminée, et il atteint sa plus grande valeur quand la charge peut être considérée comme entièrement brûlée dans un volume peu différent de celui de la chambre.

H. B.

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATHEMATIKY A FYSIKY (1); rediguje Dr F. J. STUDNIČKA, v Praze.

Tome VIII; 1879.

Studnička (Dr *F.-J.*). — Sur l'origine et le développement du Calcul différentiel et du Calcul intégral. (1-10, 97-109, 272-295).

Seydler (*A.*). — Sur les figures d'équilibre des liquides qui ne sont pas soumis à des forces extérieures. (10-19).

Šebesta (*J.-P.*). — Sur les lignes semblables. (19-24).

Remarques sur les sécantes, les tangentes, les rayons de courbure et l'aire des lignes semblables.

(1) Voir *Bulletin*, II_2, 69.

Jäger (*V.*). — Solution de l'équation du cinquième degré

$$x^5 + 5px^3 + 5p^2x + q = 0.$$

(25-27).

L'auteur part de l'expression de $\alpha_1^5 + \alpha_2^5$ en $\alpha_1 + \alpha_2$ et $\alpha_1\alpha_2$, qui s'écrit sous la forme de l'identité

$$(\alpha_1 + \alpha_2)^5 - 5\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)^3 + 5\alpha_1^2\alpha_2^2(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_1^5\alpha_2^5) = 0;$$

en mettant x à la place de $\alpha_1 + \alpha_2$ et en identifiant cette relation avec l'équation proposée, on a

$$\alpha_1^5\alpha_2^5 = -p^5, \quad \alpha_1^5\alpha_2^5 q,$$

d'où l'on tire α_1, α_2 et enfin $x = \alpha_1 + \alpha_2$.

Koláček (*Fr.*). — Déduction élémentaire des lois de la gravitation. (27-32).

L'auteur montre, par un procédé élémentaire, qu'on peut mettre l'équation de la conique $\rho = \dfrac{a}{1 + \varepsilon \cos\varphi}$ d'abord sous la forme (géométrique)

$$p^2\left(1 - \varepsilon^2 - \frac{2a}{r}\right) = -a^2,$$

p étant la normale abaissée du foyer sur la tangente; puis, d'après la première loi de Kepler, $vp = 2C$, sous la forme (cinématique)

$$\frac{a^2}{2C^2}\left(\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}\right) = 2a\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right).$$

La comparaison de cette équation avec le principe des forces vives, appliqué à la loi de la raison inverse du carré de la distance

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = k\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

montre que cette loi a lieu effectivement dans le mouvement planétaire et, réciproquement, qu'en partant de cette loi l'on trouve pour orbite une section conique.

Zahradník (D^r *K.*). — Contribution à l'application des déterminants. (32-33).

Hoza (*Fr.*). — Construction de la tangente à la conchoïde. (34-35).

Bernard (*J.*). — Remarque relative à la trisection de l'angle. (35).

Solution approchée.

Studnička (D^r *F.-J.*). — Remarque sur les nombres premiers. (36-37).

Hromadko (*Fr.*). — Extraits tirés des Biographies écrites par Arago. — Joseph Fourier. (49-59, 151-165, 237-247).

Bečka (Dr *B.*). — Notice sur la théorie des tangentes et des asymptotes des lignes planes. (59-74).

Seydler (*A*). — Aperçu sur les progrès récents en Astronomie. (74-84, 109-118, 257-272).

Jung (*V.*). — Signification géométrique des modules des systèmes logarithmiques. (119-121).

C'est, comme on sait, la quadrature de l'hyperbole qui donne cette signification.

Jäger (*V.*). — Solution des équations du septième degré de la forme

$$x^7 \pm 7px^5 + 14p^2x^3 \pm 7p^3x + q = 0.$$

(121-124).

On identifie cette équation avec la relation qui donne $\alpha_1^7 + \alpha_2^7$ en fonction de $\alpha_1 + \alpha_2$ et $\alpha_1\alpha_2$ en mettant pour $\alpha_1 + \alpha_2 = x$; cela donne

$$\alpha_1^7\alpha_2^7 = -q, \quad \alpha_1^7\alpha_2^7 \mp p^7;$$

d'où l'on tire α_1, α_2 et x.

Pánek (*A.*). — Résolution d'un triangle dans lequel on connaît ou les trois côtés ou deux côtés avec l'angle compris. (124-131).

Studnička (Dr *F.-J.*). — Sur le problème de Délos. (132-133).

Énoncé de deux solutions approchées données par le Dr *Buonfalcea* dans sa *Duplicazione del cubo e quadratura del circolo, nuove soluzioni grafiche colle dimostrazioni analitiche;* Pisa, F. Mariotti, 1878.

Pokorný (*M.*). — Théorème sur le quadrilatère inscrit dans le cercle. (133-134).

Studnička (Dr *F.-J.*). — Démonstration déductive de la formule du binôme. (145-150).

Sucharda (*A.*). — Sur la ligne décrite par un foyer d'une conique qui roule sur une de ses tangentes. (166-175).

L'auteur détermine l'équation de la roulette (à l'aide d'une quadrature) et discute sa construction graphique.

Seydler (*A.*). — Démonstration rigoureuse du parallélogramme des forces. (175-180).

Cette démonstration est fondée sur les axiomes suivants :

A. La grandeur et la position relative des forces ne changeant pas, la grandeur et la position relative de la résultante restent aussi les mêmes.

B. L'action d'un système quelconque de forces n'est pas altéré par l'addition ou par l'enlèvement d'un système qui est équilibre.

C. Les forces qui agissent sur un point suivant une même direction donnent une résultante égale à leur somme algébrique.

Ces propositions supposées vraies, on peut démontrer successivement que :

1. Deux forces dont les directions sont inclinées entre elles ne se font pas équilibre.

2. La résultante de deux forces agissant sur un point est située dans leur plan.

3. Cette résultante tombe dans l'angle déterminé par les directions des composantes.

4. Les forces P, Q ayant pour résultante R, les forces mP, mQ, de même position relative, ont une résultante mR qui a aussi la même position relative.

5. La résultante des forces P, Q faisant un angle γ est donnée, quant à la grandeur, par la formule

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(\gamma + z),$$

z étant une fonction encore inconnue de γ.

6. Cet angle z est toujours égal à zéro; la résultante est donnée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme des forces.

Jeřábek (*V.*). — Lieu géométrique des centres des sections faites dans une surface quadrique par des plans menés par une droite fixe. (180-182).

Pánek (*A.*). — Sur la formule qui donne l'aire d'un quadrilatère en fonction des côtés. (182-183).

Jung (*V.*). — Remarque sur la théorie des nombres. (184-185).

Fürst (*J.*). — Sur le centre des forces parallèles. (186-187).

Šimerka (*V.*). — Remarque. (187-188).

Cette courte remarque du P. Šimerka est ainsi conçue : « Quant aux deux cas signalés par Pervouchine, c'est-à-dire que

$$d = 114689 = 7.2^{14} + 1$$

est diviseur du nombre $2^{2^{12}} + 1$ et que

$$d = 167772161 = 5.2^{25} + 1$$

divise le nombre $2^{2^{23}} + 1$, on peut s'en convaincre de la manière suivante :

Posons, pour plus de simplicité, $2_k = 2^{2^k}$; on aura

$$(2_k)^2 = (2_{k+1}).$$

Pour que le nombre $2^{2^{12}}+1=2_{12}+1$ fût divisible par le module 114689, il faudrait qu'on eût $2_{12}\equiv -1$. Mais on trouve

$$\begin{aligned}
2_5 &\equiv -21064,\\
2_6 &\equiv (2_5)^2 \equiv -39645,\\
2_7 &\equiv 27969,\\
2_8 &\equiv -28708,\\
2_9 &\equiv -5890,\\
2_{10} &\equiv 56022,\\
2_{11} &\equiv -1.
\end{aligned}$$

Ce serait donc par une inadvertance qu'on a mis $2^{2^{12}}+1$ au lieu de $2^{2^{11}}+1$ dans l'énoncé du premier cas. Quant au second, on a, pour le module

$$d = 167772161,$$

$$\begin{array}{lll}
 & 2_5 \equiv -67108890, & 2_6 \equiv 40265974,\\
2_7 \equiv 8214125, & 2_8 \equiv -73840779, & 2_9 \equiv -35900037,\\
2_{10} \equiv 2027927, & 2_{11} \equiv 56706897, & 2_{12} \equiv -65302291,\\
2_{13} \equiv 42312541, & 2_{14} \equiv 37665517, & 2_{15} \equiv 46675951,\\
2_{16} \equiv 81947549, & 2_{17} \equiv -66200787, & 2_{18} \equiv -22450470,\\
2_{19} \equiv -39437715, & 2_{20} \equiv 35921276, & 2_{21} \equiv 30406922,\\
2_{22} \equiv -65249968, & 2_{23} \equiv -1. &
\end{array}$$

De cette manière, on a vérifié les deux énoncés en calculant directement

$$(2_{10})^2 \equiv -1 \quad \text{et} \quad (2_{22})^2 \equiv -1;$$

quoique ces calculs soient assez laborieux, leur exécution est cependant beaucoup plus aisée que la résolution de la congruence $x^2\equiv -1$ pour les deux modules indiqués. Il paraît que M. Pervouchine n'agit pas d'une autre manière; car autrement il aurait fait connaître les autres facteurs des deux nombres composés, ou bien il aurait pu indiquer des cas analogues en plus grand nombre. Je m'applique à généraliser cette théorie relativement aux nombres de la forme

$$(2a)^{2^n}+1 \quad \text{ou de la forme} \quad \tfrac{1}{2}[(2a+1)^{2^n}+1];$$

il semble qu'on pourra tirer avantage de leur décomposition en produits de deux séries de la forme

$$\sum_0^k (A_k 2^{\alpha+k}+1)\times\sum_0^r (B_r 2^{\alpha+r}+1).$$

Zahradník (Dr *K.*). — Sur la masse de l'ellipsoïde à trois axes inégaux. (188-189).

Weyr (*Éd.*). — Sur les lignes algébriques unicursales planes. (193-236).

Exposé de la théorie de ces lignes d'après les travaux de Chasles, Cayley Clebsch, Hermite et Lüroth, avec des exemples spéciaux.

Jarolímek (*Č*.). — Sur la surface développable formée par les normales d'un cône du deuxième degré construites le long d'une ligne de courbure. (247-257).

L'auteur donne l'équation de cette surface, ainsi que les équations de son arête de rebroussement.

Ce Tome contient en outre des exercices et des questions proposés aux élèves, leur solution et des notices littéraires.

A. S. et Ed. W.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (¹).

N° 1; 3 juillet 1882.

Gyldén. — Sur la seconde comète de l'année 1784. (16).

On ne possède que deux observations de cette comète, et l'on ne peut déterminer que les deux éléments de l'orbite autour de la Terre; il est possible que cette comète appartienne au même groupe que la comète périodique découverte, en 1881, par M. Denning.

Faà de Bruno. — Sur une nouvelle série dans les fonctions elliptiques. (22).

Pour construire des Tables elliptiques avec vingt décimales exactes, la formule

$$\sqrt{\frac{K}{8\pi}} = \frac{1}{1+\sqrt{k'}+\sqrt[4]{1+k'}\sqrt[8]{64k'}}$$

suffirait à elle seule pour donner les nombres cherchés.

Poincaré. — Sur les transcendantes entières. (23).

Soit une fonction entière $F(x)$ de genre n, c'est-à-dire une fonction dont les facteurs primaires sont de la forme

$$e^{P(x)}\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

$P(x)$ étant un polynôme du degré n.

Si, x croissant indéfiniment en conservant un argument déterminé, α est un nombre tel que

$$\lim e^{\alpha x^{n+1}} = 0,$$

on aura

$$\lim e^{\alpha x^{n+1}} F(x) = 0;$$

(¹) Voir *Bulletin*, V_2, 193.

l'intégrale définie

$$\int_0^\infty e^{(xz)^{n+1}} F(x)\, dz,$$

prise le long d'une droite d'argument tel que la limite de

$$e^{(xz)^{n+1}},$$

pour $z = \infty$, soit nulle, représente une fonction entière de $\frac{1}{x}$.

La série

$$\Sigma A_p \sqrt[n+1]{(p')\, x^p}$$

représente une fonction entière.

On peut écrire

$$F(x) = \int \frac{\Phi(z)}{z} e^{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}} \frac{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1} - 1}{\frac{x}{z} - 1} dz,$$

$\Phi(z)$ désignant une fonction entière et l'intégrale étant prise le long d'un contour enveloppant l'origine.

N° 2; 10 juillet.

Gyldén (H.). — Sur l'équation différentielle qui donne immédiatemen la solution du problème des trois corps jusqu'aux quantités di deuxième ordre inclusivement. (35).

Le but le M. Gyldén, dans ses recherches de Mécanique céleste, est de tenir compte, dès la première approximation, des termes du deuxième ordre par rapport aux forces perturbatrices; il établit, dans cette Communication, l'équation différentiele du second ordre qui, dans le sens indiqué plus haut, donne la solution du poblème des trois corps.

Darboux. — Sur une équation linéaire aux dérivées partielles. (69).

Il s'agit de l'équation bien connue

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{m(1-m)}{(x-y)^2} z.$$

Cette équation ne change pas quand on soumet les variables x, y à une même substitution linéaire quelconque; donc de l'intégrale particulière

$$z = \varphi(x, y)$$

on pourra déduire l'intégrale

$$z = \varphi\left(\frac{mx + n}{px + p}, \frac{my + n}{py + q}\right);$$

c'est ainsi que de la solution

$$z = \left(1 - \frac{y}{x}\right)^m F\left(m, m, 1, \frac{y}{x}\right)$$

on peut déduire la solution obtenue par Riemann

$$\omega = \left[\frac{(y-x)(x'-y')}{(y-x')(x-y')}\right]^m \mathrm{F}\left[m, m, 1, \frac{(y-y')(x-x')}{(y-x')(x-y')}\right].$$

Si $\varphi(x, y)$ est une solution, il en sera de même des fonctions

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad x^2\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Si z_p désigne en général une solution de l'équation proposée, où l'on a remplacé m par p, on aura

$$z_{m+1} = \frac{\partial z_m}{\partial x} - \frac{\partial z_m}{\partial y} - 2m\,\frac{z_m}{x-y};$$

cette relation, si m est entier, fournit la solution générale de l'équation diférentielle sous la forme

$$z_m = (x-y)^m\,\frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{m-1}\,\partial y^{m-1}}\left(\frac{\mathrm{X}-\mathrm{Y}}{x-y}\right);$$

si m n'est pas entier, on peut supposer la partie réelle de m comprise entre 0 et 1, et l'on a alors la solution

$$z = (y-x)^m \int_x^y \frac{\varphi(\alpha)\,d\alpha}{[(y-\alpha)(\alpha-x)]^m} + (y-x)^{1-m}\int_x^y \frac{\psi(\alpha)\,d\alpha}{[(y-\alpha)(\alpha-x)]^{1-m}}.$$

L'auteur propose en outre la définition suivante de l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre entre z, x, y, dans le cas où le procédé suivi par l'intégration ne fournit pas toutes les solutions.

On a l'intégrale générale toutes les fois que les arbitraires contenues dans la définition de cette intégrale permettent de satisfaire à la condition suivante : la surface représentée par l'intégrale peut être amenée à passer par une courbe quelconque et à être tangente, le long de cette courbe, à une développable quelconque donnée à l'avance.

En se plaçant à ce point de vue, l'auteur annonce que la dernière forme donnée pour z constitue, pour $m \gtrless \frac{1}{2}$, l'intégrale générale de l'équation proposée.

Lindemann. — Sur le rapport de la circonférence au diamètre et sur les logarithmes népériens des nombres commensurables ou des irrationnelles algébriques. (72).

On sait que M. Hermite a démontré l'impossibilité d'une relation de la forme

$$\mathrm{N}_1 e^{z_1} + \mathrm{N}_2 e^{z_2} + \ldots + \mathrm{N}_n e^{z_n} = 0,$$

où les quantités $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2, \ldots, \mathrm{N}_n, z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont des nombres entiers; c'est l'étude du beau Mémoire de M. Hermite qui a conduit M. Lindemann à l'importante généralisation que voici :

Une telle relation, où les z désignent des nombres différents rationnels ou à irrationnalité algébrique et les N des nombres à irrationnalité algébrique qui ne sont pas tous nuls, est impossible : donc, en particulier, le nombre π et les logarithmes népériens de toutes les irrationnelles algébriques sont des nombres transcendants.

Tannery (J.). — Rectification à une Communication antérieure sur les intégrales eulériennes. (73).

N° 3 ; 17 juillet.

Jordan (C.). — Rapport sur un Mémoire de M. P. Gilbert, sur divers problèmes de mouvements relatifs. (111).

Le Mémoire de M. Gilbert a pour objet l'étude du mouvement des appareils gyroscopiques, et pour point de départ un théorème donné par Bour pour étendre aux mouvements relatifs les formules célèbres de Lagrange. L'auteur retrouve cette proposition par une voie nouvelle et très simple. Une interprétation géométrique élégante des divers termes qui figurent dans cette formule lui permet ensuite d'obtenir par de simples différentiations et presque sans calcul les équations différentielles des mouvements qu'il étudie. Chacune d'elles est ensuite discutée d'une manière approfondie. Après avoir déterminé dans chaque cas les diverses positions d'équilibre qui peuvent se présenter et les conditions de stabilité, M. Gilbert procède à l'intégration des équations différentielles et réussit souvent à l'effectuer complètement.

Les appareils analysés par M. Gilbert peuvent se ramener à trois types : 1° le gyroscope de Foucault; 2° le tore-pendule et le barogyroscope; 3° la toupie.

Relativement au gyroscope, l'auteur trouve tout d'abord que l'équilibre a lieu :

1° Si l'axe du tore est parallèle à l'axe du monde;

2° Si l'anneau extérieur a, par rapport au méridien, une vitesse de rotation égale et contraire à celle de ce méridien lui-même;

3° Si la vitesse de rotation du tore a une valeur convenable.

M. Gilbert s'occupe ensuite de l'intégration des équations différentielles; il montre qu'elle peut s'effectuer par les fonctions elliptiques dans les trois cas suivants (d'ailleurs connus) :

1° Si l'anneau extérieur du gyroscope est invariablement fixé au plan du méridien;

2° S'il est invariablement fixé à l'anneau intérieur;

3° Si l'axe de rotation de l'anneau extérieur est dirigé suivant l'axe du monde, pourvu qu'on néglige, en outre, la masse des anneaux.

Dans chacun de ces trois cas, l'un des angles variables dont dépend la position du gyroscope est déterminé par une équation différentielle identique à celle dont dépend le mouvement d'un point pesant sur un cercle tournant autour d'un diamètre vertical. Cet angle subira donc des oscillations périodiques dont la loi s'exprime par des fonctions elliptiques du temps; chacun des autres angles se compose d'une fonction linéaire du temps et d'un terme périodique, où figurent les transcendantes Θ. Le *barogyroscope* imaginé et étudié par M. Gilbert offre une disposition particulièrement ingénieuse. Une chape en acier est supportée par deux couteaux placés aux extrémités de son diamètre horizontal. Elle porte à son intérieur un tore ayant pour axe un second diamètre perpendiculaire au premier. Cet axe se prolonge par une tige mince, terminée par une aiguille et le long de laquelle on peut faire monter ou descendre un curseur.

L'appareil doit être réglé de telle sorte que dans l'état de repos l'axe du tore soit vertical et que le centre de gravité du système se trouve sur cet axe, un peu au-dessous de la ligne des couteaux. On remplira aisément cette dernière condition par le déplacement du curseur.

Supposons que l'appareil ainsi réglé soit placé de telle sorte que le plan d'oscillation de l'aiguille soit confondu avec le méridien et imprimons au tore un mouvement de rotation rapide, de gauche à droite par rapport à la zénithale. L'aiguille déviera aussitôt vers le nord et exécutera une série d'oscillations autour d'une position d'équilibre nettement distincte de la verticale.

Si le tore tournait de droite à gauche, on observerait une déviation vers le sud, un peu moins forte que la précédente.

Enfin, si l'on tourne l'appareil de manière à faire varier l'azimut du plan d'oscillation de l'aiguille, on verra les effets s'atténuer à mesure que ce plan s'écarte du méridien, et, lorsqu'il sera venu dans le premier vertical, on ne constatera plus aucune variation.

Radau. — Sur un point de la théorie des perturbations. (117).

Pour éviter la variation des constantes, on peut comparer l'orbite actuelle d'une planète à une certaine orbite fondamentale dont les éléments sont des constantes absolues. M. Radau étudie et compare diverses façons de procéder dues à Hansen, à M. Gyldén et à lui-même. (*Bulletin*, 2e série, t. V, 1881; Ire Partie, p. 270).

Rouget. — Observations astronomiques sans mesures d'angles. (120).

Suite aux Mémoires des 3 et 10 janvier 1881. — I. Perfectionnement des formules qui utilisent les trajectoires combinées. — II. Doubles solutions d'une même trajectoire — III. Théorie des observations circumpolaires : son application à la détermination de la longitude par l'heure du passage de la Lune dans le vertical d'une étoile passant près du zénith.

Boussinesq. — Sur le choc d'une plaque élastique plane supposée indéfinie en longueur et en largeur, par un solide qui vient la heurter perpendiculairement en un de ses points et qui lui reste uni. (125).

Soient μ la masse de ce solide, rapportée à celle de la plaque par unité d'aire, φ le déplacement, à l'époque t d'un point (x, y) du feuillet moyen de la plaque, r la distance de ce point heurté, pris lui-même pour origine et où est censée concentrée la masse μ, enfin $F(t)$ l'impulsion extérieure totale jusqu'à l'époque t; l'auteur trouve par une méthode d'intégration exposée dans le numéro des *Comptes rendus de l'Academie des Sciences* du 20 février 1882 le résultat suivant :

$$\varphi = \int_0^\infty f\left(at - \frac{r^2}{2\zeta}\right) \sin\frac{\zeta}{2}\,\frac{d\zeta}{\zeta},$$

en supposant

$$f(at) = \frac{1}{4\pi a}\left[F(t) - \int_{-\infty}^{t} e^{8a\frac{\theta - t}{\mu}} F'(\theta)\,d\theta\right];$$

il déduit de là diverses conséquences relatives au rapport de la vitesse prise par la petite partie directement ébranlée et de la vitesse de propagation des sons longitudinaux, ainsi qu'à la limite vers laquelle tend le déplacement du point heurté.

N° 4; 24 juillet.

Folie. — Théorie du mouvement diurne de l'axe du monde. (163).

Faye. — Observations relatives à la publication des *Annales de l'Observatoire* de Rio de Janeiro. (164).

M. Faye fait l'historique du développement de cet Observatoire.

Tacchini. — Observations des taches et des facules solaires faites à l'Observatoire royal du Collège Romain, pendant le premier semestre de 1882. (165).

Ricco. — Latitude des groupes de taches solaires en 1881. (167).

Hall. — Sur l'orbite de Japhet. (168).

Réduction des observations de Bernard; leur comparaison avec les éléments adoptés.

Zenger (*C.*). — Solution rapide du problème de Kepler.

Pour résoudre l'équation

$$E - e \sin E = F,$$

l'auteur donne la formule approchée

$$\cos E = \cos F - \frac{e \cos F}{1 + \frac{1}{6}\sin^2(e\omega) + \frac{3}{40}\sin^4(e\omega) + \ldots},$$

où $e\omega$ est l'excentricité exprimée en secondes d'arc; cette formule suppose l'excentricité e très faible.

Cette formule donne une valeur de E approchée à quelques minutes près.

N° 5; 31 juillet.

Zenger. — Note additionnelle sur la solution rapide du problème de Kepler. (207).

L'auteur montre comment, de la solution approchée donnée par lui, on peut déduire rapidement d'autres solutions plus approchées.

Zenger. — Tables approchées pour calculer l'anomalie vraie des planètes. (206).

Machal (*Y.*). — Sur quelques théorèmes d'électricité démontrés d'une manière inexacte dans les Ouvrages didactiques. (210).

Sébert et *Hugoniot*. — Sur les vibrations longitudinales des barres élastiques dont les extrémités sont soumises à des efforts quelconques. (215).

Déterminer le mouvement vibratoire d'une barre élastique et homogène de longueur finie, dont l'une des extrémités est soumise à des efforts quelconques, pressions ou torsions, variables avec le temps, l'autre extrémité étant libre ou encastrée.

N° 6; 7 août.

Radau. — Remarques concernant le problème de Kepler. (274).

Examen de la méthode de Gauss, abrégée par l'emploi des Tables de M. Doberck; critique de la méthode de M. Zenger.

Tacchini. — Observations des protubérances, des facules et des taches solaires faites à l'Observatoire du Collège Romain, pendant le premier semestre de 1882. (276).

Sébert et *Hugoniot*. — Sur les vibrations longitudinales des barres élastiques dont les extrémités sont soumises à des efforts quelconques. (278).

En supposant qu'il y ait une extrémité encastrée, les efforts exercés à l'extrémité libre se transmettent intégralement de proche en proche vers le point d'encastrement. Là, ils éprouvent une réflexion sans changement de signe et reviennent vers l'extrémité libre où ils subissent une nouvelle réflexion, avec changement de signe.

Les vitesses que la force imprime à chaque instant à l'extrémité libre se transmettent d'une façon analogue; toutefois elles éprouvent, à l'extrémité encastrée, une réflexion avec changement de signe et à l'autre extrémité une réflexion sans changement de signe.

Les efforts produits par ces différentes ondes s'ajoutent les uns aux autres, conformément au principe de superposition.

Si la force cesse d'agir au bout d'un certain temps, le mouvement périodique s'établit. — Les auteurs ont établi des formules qui représentent le mouvement dans tous les cas.

N° 7; 14 août.

Faye. — Note sur la théorie des cyclones de M. le D[r] Andries. (316).

Rozé. — Des termes à courte période dans les mouvements de rotation de la Terre. (327).

Sur les variations périodiques de l'angle entre l'axe principal de la Terre regardée comme un solide invariable et l'axe résultant des moments des quantités de mouvements.

Wolf. — Description de l'amas de l'Écrevisse et mesures micrométriques des positions relatives des principales étoiles qui le composent. (333).

Mittag-Leffler. — Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. (355).

Rectification d'une démonstration précédemment donnée par l'auteur.

Brassinne. — Méthode générale pour la solution des problèmes relatifs aux axes principaux d'inertie et aux moments d'inertie. Balance d'oscillation pour l'évaluation des moments d'inertie. (337).

Sébert et *Hugoniot.* — Sur les vibrations longitudinales des barres élastiques dont les extrémités sont soumises à des efforts quelconques. (338).

Cas où aucune extrémité n'est encastrée; étude du problème suivant, généralisation d'un problème traité par Navier :

Une tige fixée à une extrémité subit à l'autre le choc d'un corps, de poids Π, supposé assez court ou assez raide pour qu'on puisse en négliger le mouvement vibratoire; le corps est lui-même sollicité, parallèlement à la direction de la tige, par une force quelconque $F(t)$ et l'on se propose de déterminer le mouvement du système, en supposant que la masse étrangère demeure, après le choc, invariablement reliée à la tige. (340).

N° 8; 21 août.

De Saint-Venant. — Du choc longitudinal d'une barre élastique libre contre une barre élastique d'autre matière ou d'autre grosseur, fixée au bout non heurté; considération du cas extrême où la barre heurtante est très raide et très courte. (360).

Cette Communication de M. de Saint-Venant et une autre postérieure (n° 10) se rapportent au problème traité par MM. Sebert et Hugoniot. Le savant auteur montre, en prenant pour exemple une solution en série trigonométrique, que le problème du choc longitudinal, par un corps de forme quelconque d'une barre élastique fixée à un bout, peut être résolu comme cas simple et extrême de celui du choc mutuel de deux barres. Il en induit que le problème est susceptible d'une solution en termes finis, qui se prête mieux au calcul.

Il rappelle celle qu'il a donnée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 30 mars 1868 en formules de deux termes, pour le cas de liberté complète de la barre heurtée; puis il donne une solution analogue, débarrassée des complications de la mise en compte des ébranlements intérieurs du corps heurtant, pour le cas bien plus pratique d'une barre fixée au bout opposé à celui qui reçoit le choc.

Borrelly. — Observations des planètes (226) et (227) à l'Observatoire de Marseille. (376).

Tacchini. — Sur les éruptions métalliques solaires, observées à Rome pendant le 1er semestre 1882. (377).

N° 9; 28 août.

Mouchez. — Discours prononcé à l'inauguration de la statue élevée à Fermat dans la ville de Beaumont-de-Lomagne (Tarn-et-Garonne). (399).

Mouchez. — Observations méridiennes des petites planètes et de la comète de Wells, faites à l'Observatoire de Paris pendant le deuxième trimestre de l'année 1882. (403).

Paul et *Prosper Henry.* — Observations des planètes (227) et (229) faites à l'équatorial ouest du jardin de l'Observatoire de Paris. (415).

Zenger. — Solution du problème de Kepler pour des excentricités considérables.

N° 10; 4 septembre.

De Saint-Venant. — Solution, en termes finis et simples, du problème du choc longitudinal, par un corps quelconque, d'une barre élastique fixée à son extrémité heurtée. (423).

Voir plus haut.

Faye. — Sur la figure des comètes. (417).

De Gasparis. — Sur le problème de Kepler. (446).

μ, ε étant les anomalies moyenne et excentrique, en parties du rayon comptées de l'aphélie, on a

$$\mu - \varepsilon = \frac{\mu e}{1+e}\left[1 - \frac{\mu^2}{6}\frac{1}{(1+e)^3} - \frac{\mu^4}{120}\frac{9e-1}{(1+e)^6} - \frac{\mu^6}{5040}\frac{225e^2-54e+1}{(1+e)^9} - \frac{\mu^8}{362880}\frac{11025e^3+4131e^2+243e-1}{(1+e)^{12}} - \ldots\right].$$

Brassinne. — Balance d'oscillation pour le calcul des moments d'inertie. (446).

Une tige verticale traverse l'axe horizontal de suspension, qu'elle dépasse un peu. Sa partie inférieure est reliée à une couronne circulaire graduée, qui supporte un petit plateau mobile sur lequel le corps est posé. Chaque expérience d'oscillation donne la valeur du moment d'inertie autour d'une parallèle à la suspension passant par le centre de gravité, parallèle qui variera par une rotation convenable du plateau.

Un poids déterminé, suspendu à l'extrémité supérieure de la tige, s'inclinera et donnera le moyen d'obtenir les distances Δ, D, D' du centre de gravité de l'appareil vidé, chargé, ou du corps en expérience à l'axe horizontal en suspension.

L'oscillation de l'appareil vidé fournit une longueur pendulaire λ et un moment d'inertie $\mu\lambda\Delta$ (μ est la masse de l'appareil). Si la balance est chargée, la longueur pendulaire l donnera pour le moment d'inertie de tout système $(\mu + M)e D$. La différence des deux moments sera le moment d'inertie de la masse M.

N° 11; 11 septembre.

Faye. — Discours prononcé aux funérailles de M. *Liouville,* au nom de l'Académie des Sciences, de la Faculté des Sciences de Paris et du Bureau des Longitudes. (468).

Lemonnier. — Conditions pour que deux équations différentielles linéaires dans le second membre aient p solutions communes. Équation qui donne ces solutions. (476).

L'auteur parvient à ces conditions par un procédé analogue au procédé d'élimination de M. Sylvester entre deux équations algébriques.

Boussinesq. — Définition naturelle des paramètres différentiels des fonctions et notamment de celui du second ordre Δ_2. (479).

Ce paramètre exprime, à un facteur constant près, la valeur moyenne des dérivées secondes de la fonction, prises, au point considéré (x, y, z) suivant toutes les directions possibles.

N° 12; 18 septembre.

Faye. — Note sur la vie et les travaux de M. Plantamour. (495).

Bourget. — Sur les permutations de n objets et sur leur classement. (508).

La classification adoptée par l'auteur consiste essentiellement dans le partage des permutations en groupes de permutations circulaires : elle permet de trouver la *formule* du rang occupé par un élément déterminé dans la permutation de rang donné.

Quet. — Les carrés des forces d'induction produites par le Soleil dans les planètes et dues à la vitesse de révolution de ces corps sont, toutes choses égales d'ailleurs, en raison inverse des septièmes puissances des distances à l'astre. Induction des comètes, des bolides et des étoiles filantes. (514).

N° 13; 25 septembre.

Resal. — Sur une question de principe qui se rapporte à la théorie du choc des corps imparfaitement élastiques. (547).

L'auteur admet en principe que, abstraction faite du frottement, la perte de force vive éprouvée dans le choc de deux corps imparfaitement élastiques, quelles que soient leur forme et la manière dont le choc a lieu, est égale à la force vive due aux vitesses perdues multipliée par un coefficient ε dépendant de la nature des deux corps, ε étant égal à zéro ou à l'unité dans les hypothèses où les corps seraient parfaitement élastiques ou complètement dénués d'élasticité. Dans le cas du choc direct, Navier avait fait une hypothèse qui est comprise dans celle de M. Resal.

S. M. l'Empereur du Brésil. — Observations d'une comète à Rio de Janeiro. (555).

Thollon et *Gouy.* — Sur une comète observée à Nice. (555).

Flammarion. — Communication de diverses dépêches relatives à la nouvelle comète.

Fonvielle (*W. de*). — Note sur une observation de la grande comète de 1882, vue en ballon. (558).

Barbier (*É.*). — Description du dodécaèdre régulier complet. (560).

PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON (¹).

Tome CLXVI; 1876.

Chambers (*C.*). — Direction absolue et intensité de la force magnétique terrestre à Bombay. (75-90).

Reynolds (*O.*). — Sur le frottement de roulement. (155-174).

(¹) Voir *Bulletin*, I_2, 187.

Spottiswoode. — Sur le contact multiple des surfaces. (227-256).

Ce Mémoire résume et continue les recherches contenues dans les Mémoires de l'auteur *On the contact of quadrics with other surfaces* (*Proceedings of the London Mathematical Society*, mai 1874) et « Sur les surfaces osculatrices » (*Comptes rendus*, 6 juillet 1874). M. Spottiswoode y traite du contact tri-, quadri-, quinti-, sexti-ponctuel d'une surface quelconque et d'une quadrique ainsi que du contact à quatre, cinq et six branches : la fin de son Mémoire est consacrée aux mêmes questions, mais en remplaçant la quadrique par une cubique.

Deuxième Partie.

Crookes. — Sur la répulsion résultant de la radiation. (325-376).

Broun. — Sur les variations quotidiennes de la moyenne force horizontale du magnétisme terrestre produites par la rotation du Soleil et les révolutions synodiques et tropiques de la Lune. (387-404).

Schuster. — Sur la nature des forces produisant le mouvement d'un corps exposé aux rayons lumineux et calorifiques. (715-724).

Tome CLXVII; 1877.

Gordon. — Sur la détermination de la constante de Verdet en unités absolues. (1-34).

Brodie. — Le calcul des opérations chimiques. (34-116).

Shadwell (*C.*). — Contribution au magnétisme terrestre. (137-148).

Darwin (*H.*). — Influence des changements géologiques sur l'axe de rotation de la Terre. (271-312).

Les changements causés dans l'obliquité de l'écliptique par une petite déformation graduelle de la figure de la Terre ne peuvent être que très petits; ainsi, pendant la période glaciaire et en supposant les circonstances les plus favorables, l'obliquité de l'ecliptique n'a pas dû varier de plus de $\frac{1}{2100}$ de seconde d'arc; par suite, l'axe de rotation coïncide sensiblement avec l'axe principal de figure.

L'auteur discute avec détail la possibilité du changement géographique du pôle terrestre dans l'hypothèse d'une plasticité plus ou moins grande, puis, en supposant la densité intérieure constante, examine quelles formes doivent présenter les continents et le fond des mers pour que le transport d'une quantité donnée de matière d'un lieu à l'autre produise le plus grand déplacement possible des pôles terrestres et calcule, dans différentes suppositions ou d'après les données de la Géologie, des limites supérieures de ce déplacement.

Spottiswoode (*W.*). — Sur les surfaces et les courbes hyperjacobiennes. (351-365).

Soient U, φ, ψ, ... des fonctions homogènes des quatre coordonnées x, y, z, t; si l'on considère la matrice

$$\left\|\begin{matrix} U'_x & U'_y & U'_z & U'_t & \Delta U & \Delta' U & \dots \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z & \varphi'_t & \Delta\varphi & \Delta'\varphi & \dots \\ \psi'_x & \psi'_y & \psi'_z & \psi'_t & \Delta\psi & \Delta'\psi & \dots \end{matrix}\right\|,$$

où U'_x, U'_y, ... sont les dérivées premières de la fonction U, où ΔU, $\Delta' U$, ... désignent des dérivées d'ordre supérieur au premier, où φ'_x, ..., $\Delta\varphi$, ψ'_x, ... $\Delta\psi$ ont un sens analogue, où l'on suppose enfin que le nombre des colonnes excède le nombre des lignes d'une unité, les deux déterminants indépendants que l'on peut tirer de cette matrice, égalés à zéro, représentent des *surfaces hyperjacobiennes,* l'intersection de ces surfaces est une courbe hyperjacobienne. Les fonctions φ, ψ, ... étant supposées du même degré n, on voit clairement comment la théorie de ces surfaces et de ces courbes se relie à l'étude du contact (d'un ordre plus ou moins élevé) de la surface $U = 0$ avec les surfaces du système linéaire $a\varphi + b\psi + \ldots = 0$. C'est dans ce sens que M. Spottiswoode étudie les propriétés des surfaces et des courbes hyperjacobiennes : ces recherches se relient à celles de M. Brill (*Mathematische Annalen,* t. III, p. 450), à celles de M. Krey (*Id.,* t. X, p. 231), enfin à celles qu'il a publiées lui-même dans son Mémoire *On the sextactic point of a plane curve* (*Phil. Trans.,* 1865, p. 657).

Casey (*J.*). — Sur une nouvelle forme de l'équation tangentielle. (367-440).

M. Casey montre sur un grand nombre d'exemples, d'une nature élémentaire, tout le parti qu'on peut tirer de la considération de l'équation de la droite

$$x + y \cot\varphi - r = 0,$$

où r désigne une fonction de φ; cette équation définit une courbe, enveloppe de la droite variable. Les dernières pages de son Mémoire, relatives aux quartiques bicirculaires, offrent un intérêt particulier. L'auteur parvient à la rectification de ces courbes au moyen des intégrales elliptiques et généralise ainsi les théorèmes de M. W. Roberts et de M. Genocchi relatifs aux arcs des ovales de Descartes.

Cette rectification repose sur la quadruple génération des quartiques bicirculaires [Casey, *Bicirculars quartics* (*Transactions of the Royal Irish Academy,* t. XXIV, p. 480)]. Une telle courbe peut en effet être regardée comme l'enveloppe d'un cercle qui coupe orthogonalement un cercle fixe et dont le centre décrit une conique fixe, dite *focale,* et cela de quatre façons différentes; les quatre coniques focales sont homofocales; les quatre cercles correspondants, dont chacun peut être regardé comme un cercle d'inversion de la quartique sont orthogonaux et leurs centres sont, par conséquent, disposés comme les sommets et le point de rencontre des hauteurs d'un triangle; l'un d'eux est évidemment imaginaire; à cette quadruple génération se relie cette intéressante proposition de Géométrie : si l'on considere quatre cercles tels que ceux qui viennent d'être décrits et que l'on prenne la figure inverse d'une figure donnée par rapport au premier cercle, puis qu'on transforme de la même façon cette figure inverse par rapport au second cercle, ..., la quatrième inversion reproduira la figure primitive; on voit, d'après cela, qu'il existe dans une quartique bicirculaire une infinité de quadrilatères inscrits dont les côtés vont passer par les centres des quatre cercles d'inversion, chacun des côtés pouvant être regardé comme la corde de contact du cercle bitangent à la quartique dans un des modes de génération; en combinant cette proposition avec le théorème suivant :

Si la sécante OPP′ *coupe le cercle* J *aux points* P, P′, *la différence ou la somme des diamètres des deux cercles qui passent par le point* O *et qui touchent le cercle* J *aux points* P, P′ *est égale au diamètre du cercle* J,

on parvient à la rectification de la quartique.

Si, en effet, on fait varier infiniment peu le quadrilatère inscrit, en désignant par ds, ds' les arcs décrits par deux sommets, par ρ le rayon du cercle générateur bitangent à la quartique aux deux sommets, le théorème précédent conduit immédiatement à la formule

$$ds' \pm ds = 2\rho\, d\theta,$$

θ étant l'angle du côté du quadrilatère avec une direction fixe; en considérant ainsi les quatre côtés, on parvient à la formule

$$ds = \int \rho\, d\theta + \int \rho'\, d\theta' + \int \rho''\, d\theta'' + \int \rho'''\, d\theta''';$$

un calcul bien facile montre ensuite que les quatre intégrales qui figurent dans le second membre dépendent des intégrales elliptiques.

Cayley. — Sur les quartiques bicirculaires : addition au Mémoire du professeur Casey « Sur une nouvelle forme de l'équation tangentielle ». (441-460).

Les recherches de M. Cayley complètent de la façon la plus heureuse, dans le sens analytique, les résultats obtenus géométriquement par M. Casey : les élégants calculs de l'éminent géomètre ont naturellement le même point de départ que les recherches géométriques de M. Casey, la considération d'un quadrilatère inscrit ABCD et du quadrilatère infiniment voisin A′B′C′D′; la position de chaque côté (qui passe par l'un des centres des cercles d'inversion) dépend d'un paramètre ω, les quatre paramètres ω, ω_1, ω_2, ω_3 dépendant d'ailleurs d'un seul. Chacun des arcs infinitésimaux AA′, BB′, CC′, DD′ est susceptible de deux expressions différentes; par exemple, AA′ peut s'exprimer sous les formes $M\,d\omega$ et $M_1\,d\omega_1$ et C, ...; les identités entre ces diverses formes résultent des relations entre les paramètres; chacune d'elles est d'ailleurs compliquée et ne dépend pas simplement des fonctions elliptiques; ce sont les expressions BB′ — AA′, CC′ — BB′, DD′ + CC′, DD′ — AA′ que M. Casey obtient sous forme de différentielles qui dépendent uniquement des fonctions elliptiques et c'est de ces expressions qu'il déduit l'expression de AA′ comme somme de quatre telles différentielles.

M. Cayley se propose d'obtenir directement les expressions monômes telles que $M\,d\omega$ et d'en déduire l'expression de l'arc infinitésimal dS sous la forme de M. Casey,

$$dS = N\,d\omega + N_1\,d\omega_1 + N_2\,d\omega_2 + N_3\,d\omega_3.$$

Si l'on considère en particulier l'un des quatre modes de génération de la quartique, en désignant par $(f+\theta)x$, $(g+\theta)y$ les coordonnées d'un point M de la conique focale

$$\frac{X^2}{f+\theta} + \frac{Y^2}{g+\theta} - 1 = 0,$$

par ω l'anomalie excentrique correspondante, par α, β, γ les coordonnées et le rayon du cercle d'inversion, le cercle générateur dont la quartique est l'enveloppe ayant pour centre le point M et pour rayon δ, l'un des côtés du quadrilatère inscrit ABCD sera la perpendiculaire abaissée du point (α, β) sur la tangente en M à l'ellipse focale et les deux points où cette perpendiculaire rencontre le cercle générateur seront deux sommets du quadrilatère. On aura les quantités analogues relatives aux trois autres modes de génération en affectant des indices 1, 2, 3 les quantités $x, y, \theta, \alpha, \beta, \gamma, \delta$.

M. Cayley parvient aux formules suivantes qui donnent les expressions (sous une double forme) des arcs infinitésimaux AA', BB', CC', DD' décrits par les quatre sommets du quadrilatère

$$\begin{aligned}
dS &= -\varepsilon\,R'\,\delta\,\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}\sqrt{\Theta}} = \varepsilon_1 R_1 \delta_1 \frac{d\omega_1}{\sqrt{\Omega_1}\sqrt{\Theta_1}},\\
dS_1 &= \varepsilon_1 R'_1 \delta_1 \frac{d\omega_1}{\sqrt{\Omega_1}\sqrt{\Theta_1}} = \varepsilon_2 R_2 \delta_2 \frac{d\omega_2}{\sqrt{\Omega_2}\sqrt{\Theta_2}},\\
dS_2 &= \varepsilon_3 R'_2 \delta_2 \frac{d\omega_3}{\sqrt{\Omega_2}\sqrt{\Theta_2}} = \varepsilon_3 R_3 \delta_3 \frac{d\omega_3}{\sqrt{\Omega_3}\sqrt{\Theta_3}},\\
dS_3 &= \varepsilon_3 R'_2 \delta_2 \frac{d\omega_3}{\sqrt{\Omega_3}\sqrt{\Theta_3}} = \varepsilon\,R\,\delta\,\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}\sqrt{\Theta}};
\end{aligned}$$

les quantités ε représentent l'unité positive ou négative; on a d'ailleurs

$$\begin{aligned}
\Theta &= (f+\theta)(g+\theta),\\
\Omega &= (1-\alpha x-\beta y)^2 - y^2(x^2+y^2),\\
R &= \frac{1-\alpha x-\beta y+\sqrt{\Omega}}{x^2+y^2}, \quad R' = \frac{1-\alpha x-\beta y-\sqrt{\Omega}}{x^2+y^2},
\end{aligned}$$

et des expressions analogues pour les quantités affectées d'indices; on déduit de ces formules

$$\begin{aligned}
dS + dS_1 &= +2\varepsilon\,P\,d\omega,\\
dS_1 - dS &= -2\varepsilon_1 P_1\,d\omega_1,\\
dS_2 - dS_1 &= -2\varepsilon_2 P_2\,d\omega_2,\\
dS_3 - dS &= -2\varepsilon_3 P_3\,d\omega_3,
\end{aligned}$$

en faisant

$$P = \frac{\delta}{(x^2+y^2)\sqrt{\Theta}}, \quad P_1 = \ldots;$$

et de là on tire

$$dS = \varepsilon\,P\,d\omega + \varepsilon_1 P_1\,d\omega_1 + \varepsilon_2 P_2\,d\omega_2 + \varepsilon_3 P_3\,d\omega_3,$$

et des expressions analogues pour dS_1, dS_2, dS_3; enfin chacune des intégrales telles que $\int \frac{\delta\, d\omega}{(x^2+y^2)\sqrt{\Theta}}$ ne dépend plus que des intégrales elliptiques et M. Cayley effectue la réduction.

Sabine (E.). — Contribution au magnétisme terrestre. (461-508).

Jenkin (F.). — Sur le frottement entre deux surfaces qui se déplacent lentement. (509-528).

Tome CLXVIII; 1879.

Ce Volume ne contient aucun travail mathématique.

Tome CLXIX; 1878.

Lockyer. — Rapport sur l'éclipse totale de Soleil du 6 avril 1875. (139-154).

Crookes. — Sur la répulsion résultant de la radiation. (243-318).

Joule (P.). — Nouvelle détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur. (365-384).

Cayley. — Addition au Mémoire sur la transformation des fonctions elliptiques. (419-424).

L'auteur complète pour le cas de $n = 7$ les résultats de son *Memoir on the transformation of elliptic Functions* (*Phil. Trans.*, t. CLXIV, 1874; p. 397-456).

Cayley. — Dixième Mémoire sur les quantics. (603-662).

Ce Mémoire, qui, par sa nature même, échappe à l'analyse, est relatif à la forme binaire du cinquième ordre.

Clifford. — Sur la classification des lieux. (663-681).

Courbes unicursales d'ordre n dans un espace à n dimensions; courbes unicursales d'ordre n dans un espace à $n-1$, à $n-k$ dimensions; courbes elliptiques (ou bicursales) d'ordre n dans un espace à $n-1$ dimensions; théorie des points dérivés sur une courbe elliptique; courbes de genre p; relation entre l'ordre et le genre d'une courbe.

Tome CLXX; 1879.

Darwin. — Des marées de la Terre regardée comme un sphéroïde visqueux et semi-élastique; des marées océaniennes en supposant un noyau susceptible de céder. (1-86).

Ce travail peut être regardé comme faisant suite à un Mémoire de Sir William Thomson (*Phil. Trans.*, 1863, p. 573); ses conclusions sont nettement contraires à la supposition d'une masse liquide considérable à l'intérieur de la Terre.

Crookes. — Sur la répulsion résultant de la radiation. (87-134).

Crookes. — Sur l'illumination des lignes de pression moléculaire; sur les trajectoires des molécules. (135-164).

Niven (D.). — Sur une certaine intégrale définie qui se rencontre dans l'analyse sphérico-harmonique et sur le développement en séries des potentiels de l'ellipsoïde et de l'ellipse. (379-416).

Il s'agit de l'intégrale définie

$$\int_S e^{\alpha x+\beta y+\gamma z}\,ds$$

étendue à tous les éléments ds de la surface S d'une sphère de rayon R; x, y, z désignent les coordonnées d'un point de l'élément ds : on trouve immédiatement que cette intégrale est égale à

$$2\pi R\,\frac{e^{R\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}-e^{-R\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$$

ou, en développant en série, à

$$2\pi R^2\left[1+\frac{R^2}{3!}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+\ldots+\frac{R^{2i}}{(2i+1)!}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^i+\ldots\right].$$

Si maintenant V désigne une fonction quelconque de x, y, z développable en série de Taylor pour tous les points de la sphère, cette série pourra s'exprimer symboliquement par la formule

$$e^{\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)}V_0$$

et, par conséquent, l'intégrale $\int_S V\,ds$ étendue à tous les éléments ds de la surface sphérique S pourra être représentée par la série

$$4\pi R^2\sum_0^\infty\frac{R^{2i}}{(2i+1)!}\left(\frac{\partial^2}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial y}+\frac{\partial^2}{\partial z}\right)^i V_0,$$

où le facteur élevé à la puissance i a une signification symbolique qui s'aperçoit immédiatement. Il est à peine utile de dire qu'il y a un théorème analogue où la sphère est remplacée par un cercle. M. Niven fait d'intéressantes applications de ce théorème, d'une part à la théorie des fonctions sphériques, de l'autre au développement en série des potentiels de l'ellipsoïde et de l'ellipse.

Darwin. — Sur la précession dans un ellipsoïde visqueux et sur l'histoire géologique ancienne. (447-538).

Darwin. — Problèmes relatifs aux marées d'un ellipsoïde visqueux. (539-594).

Crookes. — Contribution à la physique moléculaire dans un vide extrême. (641-682).

Reynolds (O.). — Sur certaines propriétés relatives aux dimensions de la matière dans l'état gazeux. (727-846).

Tome CLXXI; 1880.

Niven (C.). — Sur la propagation de la chaleur dans un ellipsoïde de révolution. (117-152).

Hicks. — Sur le mouvement de deux sphères dans un fluide. (455-492).

Adney. — Sur la photographie de l'extrémité la moins réfrangible du spectre solaire. (653-668).

Huggins (W.). — Sur la photographie du spectre des étoiles. (669-690).

Darwin. — Sur les perturbations séculaires des éléments de l'orbite d'un satellite tournant autour d'une planète, causées par le phénomène des marées. (713-892).

Cayley. — Mémoire sur les fonctions Θ, simples et doubles.

La marche suivie par l'illustre géomètre pour établir les propriétés des fonctions Θ, simples ou doubles, conviendrait encore évidemment pour les fonctions analogues à un nombre quelconque de variables; toutefois, en se bornant à ces cas relativement simples, il a pu donner aux résultats de sa théorie une forme plus explicite. — Nous allons en indiquer rapidement les principales étapes.

En posant

$$\begin{pmatrix} m \\ u \end{pmatrix} = \tfrac{1}{4}am^2 + \tfrac{1}{2}\pi i u,$$

$$\begin{pmatrix} m, & n \\ u, & v \end{pmatrix} = \tfrac{1}{4}(am^2 + 2hmn + bn^2) + \tfrac{1}{2}\pi i(mu + nv),$$

et de même

$$\begin{pmatrix} m + \alpha \\ u + \gamma \end{pmatrix} = \tfrac{1}{4}a(m + \alpha)^2 + \tfrac{1}{2}\pi i(u + \gamma),$$

$$\begin{pmatrix} m + \alpha, & n + \beta \\ u + \gamma, & n + \gamma \end{pmatrix} = \tfrac{1}{4}[a(m + \alpha)^2 + \ldots] + \tfrac{1}{2}\pi i[m(u + \gamma) + \ldots],$$

les fonctions ϑ à une ou deux variables sont définies par les formules

$$\vartheta\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix}(u)=\Sigma e^{\begin{pmatrix}m+\alpha\\ u+\gamma\end{pmatrix}},$$

$$\vartheta\begin{pmatrix}\alpha,\ \beta\\ \gamma,\ \delta\end{pmatrix}(u,\ v)=\Sigma e^{\begin{pmatrix}m+\alpha,\ n+\beta\\ u+\gamma,\ v+\delta\end{pmatrix}};$$

les quantités m, n doivent prendre toutes les valeurs entières paires; les constantes a, h, b doivent satisfaire aux conditions exigées pour la convergence des séries; les quantités u, v sont les variables. Les quantités α, β, γ, δ sont des nombres entiers; quand on ne s'impose pas cette restriction, on n'a plus affaire aux fonctions ϑ proprement dites, mais à des fonctions adjointes (*allied functions*). L'équation évidente

$$\vartheta\begin{pmatrix}\alpha+2x,\ \beta+2y\\ \gamma+2z,\ \delta+2w\end{pmatrix}(u,\ v)=(-1)^{\alpha x+\beta w}\vartheta\begin{pmatrix}\alpha,\ \beta\\ \gamma,\ \delta\end{pmatrix}(u,\ v),$$

où x, y, z, w désignent des entiers, montre qu'on obtiendra toutes les fonctions ϑ distinctes en donnant aux quantités α, β, γ, δ les valeurs 0 et 1 : on aura ainsi quatre fonctions ϑ simples et seize fonctions ϑ doubles; quand on ajoute aux quantités α, β, γ, δ des entiers impairs, les fonctions s'échangent entre elles.

Les propriétés relatives à la périodicité résultent des égalités

$$\vartheta\begin{pmatrix}\alpha,\ \beta\\ \gamma,\ \delta\end{pmatrix}(u+z,\ v+w)=\vartheta\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma+z, & \delta+w\end{pmatrix}(u,\ v),$$

$$\vartheta\begin{pmatrix}\alpha,\ \beta\\ \gamma,\ \delta\end{pmatrix}\left(u+\frac{ax+hy}{\pi i},\quad v+\frac{hx+by}{\pi i}\right)=\lambda\vartheta\begin{pmatrix}\alpha+x, & \beta+y\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}(u,\ v),$$

où

$$\lambda=e^{-\frac{ax^2+2hxy+by^2}{4}-\frac{\pi i}{2}[(u+\gamma)x+(v+\delta)y]},$$

x et y désignant des nombres entiers.

Les propriétés relatives à l'addition (*product-theorem*) dépendent de la proposition suivante :

Le produit

$$\vartheta\begin{pmatrix}\alpha,\ \beta\\ \gamma,\ \delta\end{pmatrix}(u+u',\ v+v')\times\vartheta\begin{pmatrix}\alpha',\ \beta'\\ \gamma',\ \delta'\end{pmatrix}(u-u',\ v-v')$$

est égal à la somme de quatre produits qui se déduisent de la formule

$$\Theta\begin{pmatrix}\dfrac{\alpha+\alpha'}{2}+p, & \dfrac{\beta+\beta'}{2}+q\\ \gamma+\gamma', & \delta+\delta'\end{pmatrix}(2u,\ 2v)$$

$$\times\Theta\begin{pmatrix}\dfrac{\alpha-\alpha'}{2}+p, & \dfrac{\beta-\beta'}{2}+q\\ \gamma-\gamma', & \delta-\delta'\end{pmatrix}(2u',\ 2v'),$$

en prenant pour p, q *respectivement les systèmes de valeurs* 0, 0; 1, 0; 0, 1; 1, 1; *quant au symbole* Θ, *il a le sens du symbole* ϑ *dans lequel on remplace* *a, h, b par* $2a$, $2h$, $2b$. Cette proposition s'établit directement de la façon la plus simple.

Il est à peine utile de dire que les propositions qui n'ont été mentionnées que pour les fonctions ϑ doubles ont leurs analogues dans la théorie des fonctions ϑ simples : il suffit, pour ces dernières, de supprimer les lettres qui correspondent aux secondes variables. Ainsi, en donnant aux nombres α, γ les quatre groupes de valeurs $0, 0$; $1, 0, \ldots$, le théorème précédent fournit seize équations dont les premiers membres sont des produits de fonctions ϑ simples à systèmes d'indices pareils ou dissemblables, et dans les seconds membres desquelles figurent ou des fonctions Θ véritables, ou des fonctions adjointes; dans le cas des fonctions ϑ doubles, on obtient 256 équations analogues; M. Cayley donne le tableau complet de toutes ces équations. Par exemple, pour les fonctions ϑ simples, on aura

$$\begin{aligned}
\vartheta\binom{0}{0}(u+u')\,\vartheta\binom{0}{0}(u-u') &= \mathrm{XX}'+\mathrm{YY}',\\
\vartheta\binom{1}{0}(u+u')\,\vartheta\binom{1}{0}(u-u') &= \mathrm{YX}'+\mathrm{XY}',\\
\vartheta\binom{0}{1}(u+u')\,\vartheta\binom{0}{1}(u-u') &= \mathrm{XX}'-\mathrm{YY}',\\
\vartheta\binom{1}{1}(u+u')\,\vartheta\binom{1}{1}(u-u') &= -\mathrm{YX}'+\mathrm{XY}',\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

les quantités X, Y désignant $\Theta\binom{0}{0}(2u)$, $\Theta\binom{1}{0}(2u)$, et les quantités X′, Y′ les mêmes fonctions de $2u'$, $2v'$.

En faisant u' nul dans ces équations, on voit que les carrés des quatre fonctions ϑ s'expriment linéairement au moyen de X et Y et que, ainsi, ces carrés peuvent être regardés comme proportionnels aux quatre quantités

$$\mathcal{A}(a-x),\quad \mathcal{B}(b-x),\quad \mathcal{C}(c-x),\quad \mathcal{D}(d-x),$$

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, a, b, c, d$ désignant des constantes et x une variable : ce résultat s'interprète géométriquement si l'on regarde les quatre fonctions ϑ comme les coordonnées homogènes d'un point de l'espace. Arrivé là, M. Cayley abandonne la notation avec deux indices $\vartheta\binom{\alpha}{\gamma}$ dont l'usage a été si avantageux pour systématiser les résultats essentiels de la théorie des fonctions ϑ, mais ne va pas sans quelques longueurs : les notations

$$\vartheta\binom{0}{0}(u),\quad \vartheta\binom{1}{0}(u),\quad \vartheta\binom{0}{1}(u),\quad \vartheta\binom{1}{1}(u)$$

sont dorénavant remplacées par les suivantes :

$$\mathrm{A}(u),\quad \mathrm{B}(u),\quad \mathrm{C}(u),\quad \mathrm{D}(u).$$

En combinant convenablement les douze équations qui complètent les quatre équations que l'on a précédemment écrites explicitement, on parvient à des formules telles que la suivante :

$$\frac{B(u+u')A(u-u')-A(u+u')B(u-u')}{C(u+u')D(u-u')+D(u+u')C(u-u')} = \text{fonction de } u.$$

La forme de la fonction qui figure dans le second membre s'obtient immédiatement en faisant $u = 0$ dans le premier membre : cette fonction s'annule évidemment pour $u' = 0$. En supposant que u' tende vers zéro, on arrive à l'égalité

$$\frac{A(u)B'(u)-B(u)A'(u)}{C(u)D(u)} = \text{const.}$$

où A', B' désignent les dérivées de A, B.

On voit ainsi que la dérivée de la fonction-quotient $\frac{B(u)}{A(u)}$ est égale à une constante multipliée par le produit des deux fonctions-quotient $\frac{C(u)}{A(u)}$ et $\frac{D(u)}{A(u)}$.

En substituant à la place de ces dernières valeurs leurs expressions en x, on arrive à la formule

$$du = \frac{M\,dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x)(d-x)}},$$

et l'on voit ainsi apparaître les fonetions elliptiques; on a effectivement

$$\operatorname{sn}(Ku) = -\frac{1}{k}\frac{D(u)}{C(u)},$$

$$\operatorname{cn}(Ku) = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{B(u)}{C(u)},$$

$$\operatorname{dn}(Ku) = \sqrt{k'}\frac{A(u)}{C(u)}.$$

Une autre combinaison facile des équations relatives au produit de deux fonctions $\mathfrak{S}$ donne quatre formules du type suivant :

$$C^2(0)C(u+u')C(u-u') = C^2(u)C^2(u') - D^2(u)D^2(u');$$

on tire de cette dernière, en supposant u' infiniment petit,

$$\frac{C(u)C''(u)-[C'(u)]^2}{C^2(u)} = \frac{C''(0)}{C(0)} - \left[\frac{D''(0)}{C(0)}\right]^2\frac{D^2(u)}{C^2(u)},$$

équation qui correspond à la formule de Jacobi

$$\Theta(u) = \sqrt{\frac{2Kk'}{\Pi}}\,e^{\frac{1}{2}u^2(E-K)-k^2\int du\int du\,\operatorname{sn}^2 u};$$

c'est de la même formule que M. Cayley déduit encore cette autre équation de Jacobi

$$\Pi(u, a) = u\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}.$$

La théorie des fonctions $\mathfrak{S}$ doubles est faite sur le même plan. Les 256 équations auxquelles conduit le théorème relatif au produit de deux fonctions $\mathfrak{S}$ fournissent d'une part 16 équations où figurent linéairement les carrés des 16 fonctions $\mathfrak{S}$, et de l'autre des relations linéaires entre des fonctions $\mathfrak{S}$ différentes; en résumé, on se trouve avoir un système de relations du second degré entre les seize fonctions $\mathfrak{Z}$ qui permettent d'exprimer, au moyen de deux variables x, y, les rapports mutuels de ces fonctions.

En désignant par a, b, c, d, e, f des constantes et en posant pour abréger

$$\sqrt{a} = \sqrt{(a-x)(a-y)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\sqrt{ab} = \frac{1}{x-y}\sqrt{(a-x)(b-x)(f-x)(c-y)(d-y)(e-y)}$$
$$+\frac{1}{x-y}\sqrt{(a-y)(b-y)(f-y)(c-x)(d-x)(e-x)},$$

on trouve que les 16 fonctions sont proportionnelles à des constantes multipliées par

$$\sqrt{a},\ \sqrt{b},\ \sqrt{c},\ \sqrt{d},\ \sqrt{e},\ \sqrt{f},\ \sqrt{ab},\ \sqrt{ac},$$
$$\sqrt{ad},\ \sqrt{ae},\ \sqrt{bc},\ \sqrt{bd},\ \sqrt{be},\ \sqrt{cd},\ \sqrt{ce},\ \sqrt{de}:$$

telle est l'origine de la notation employée par M. Cayley et qui consiste à employer une des six lettres A, B, C, D, E, F, ou un des couples AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE, pour désigner les 16 fonctions.

Le théorème relatif au produit de deux fonctions $\mathfrak{Z}$ fournit des expressions pour les quantités de la forme

$$\overset{u+u'}{\mathrm{A}}\,.\,\overset{u-u'}{\mathrm{B}} - \overset{u+u'}{\mathrm{B}}\,\overset{u-u'}{\mathrm{A}},$$

où il faut entendre que $\overset{u+u'}{\mathrm{A}}$, par exemple, est mis à la place de

$$\mathrm{A}(u+u',\ v+v'),$$

et où, aussi, les symboles A, B pourraient être remplacés par des lettres accouplées : en faisant tendre u' et v' vers zéro, on obtient la valeur de

$$\overset{u}{\mathrm{A}}\,\delta\overset{u}{\mathrm{B}} - \overset{u}{\mathrm{B}}\,\delta\overset{u}{\mathrm{A}},$$

où u est encore mis à la place de (u, v) et où δ est une différentielle totale, sous la forme d'une fonction du second degré des fonctions de (u, v) : en divisant par A^2, on voit qu'on obtient la différentielle totale d'une fonction-quotient exprimée au moyen des fonctions-quotients; en substituant aux fonctions-quotients leurs valeurs en x, y, on obtient des relations différentielles entre dx, dy, du, dv, relations qui montrent que, en posant

$$\mathrm{X} = \sqrt{(a-x)(b-x)\ \ldots\ (f-x)},$$
$$\mathrm{Y} = \sqrt{(a-y)(b-y)\ \ldots\ (f-y)},$$

les quantités

$$\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}} - \frac{dy}{\sqrt{\mathrm{Y}}},\quad \frac{x\,dx}{\sqrt{\mathrm{X}}} - \frac{y\,dy}{\sqrt{\mathrm{Y}}}$$

s'expriment linéairement au moyen de du et dv et que, ainsi, les 15 fonctions-quotients ne sont autre chose que les fonctions hyperelliptiques relatives aux intégrales

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}},\quad \int\frac{x\,dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}.$$

Enfin, M. Cayley indique la correspondance entre ses propres notations, celles de Göpel et celles de Weierstrass, ainsi que les liens de cette théorie avec la surface de Kummer.

ANNALES DES PONTS ET CHAUSSÉES ([1]).

6ᵉ série. — Tome IV. — 2ᵉ semestre 1882.

Allan Cunningham. — Expériences hydrauliques faites à Roorkee. (43-96, 3 fig.).

Compte rendu d'expériences extrêmement intéressantes, faites de 1874 à 1879, sur les conditions de l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts, par le capitaine Allan Cunningham, ingénieur anglais dans l'Inde, qui les a exposées dans un Ouvrage publié, en 1881, à Roorkee.

M. Flamant a jugé qu'un résumé de ce travail méritait d'être signalé aux lecteurs des *Annales des Ponts et Chaussées*. Les ingénieurs y trouvent, en effet, d'utiles indications sur les méthodes d'observation et les résultats de mesures.

De Perrodil. — Arc d'expérience en maçonnerie de brique et ciment de Portland. (111-139, 1 pl.).

L'auteur avait demandé la construction d'un arc d'expérience destiné à être soumis à diverses épreuves dont les résultats pussent être comparés à ceux que l'on obtient par la théorie de la resistance des matériaux, et notamment par les nouvelles méthodes de calcul indiquées, dans un Ouvrage spécial, publié en 1879. Cet arc d'expérience avait une portée de 20^m et l'épaisseur extrêmement faible de $0^m,105$; les déformations devenaient ainsi considérables et faciles à observer. Elles ont d'ailleurs dépassé de beaucoup toutes celles qui se produisent dans les arcs établis suivant les données ordinaires de la pratique des constructions.

De nombreux Tableaux, ajoutés à ce travail, résument les comparaisons des résultats des calculs et des observations; les formules employées sont, à quelques changements de notations près, celles du Mémoire de l'auteur inséré aux *Annales des Ponts et Chaussées,* en 1880 (t. XIX, p. 218-232).

Resal. — Étude sur la stabilité des ponts métalliques en arc. (329-368, 2 pl.).

La recherche des conditions de stabilité à réaliser dans l'exécution d'un pont en fer sur la Loire, devant servir au passage du chemin de fer de jonction des deux gares de Nantes, a conduit l'auteur à différents résultats pouvant présenter quelque intérêt pour les ingénieurs qui auront à dresser des projets de ponts métalliques en arc.

([1]) Voir *Bulletin,* IV_2, 211.

Cette étude a été dirigée vers les points suivants :

1° Détermination, dans chaque section d'un arc métallique articulé aux naissances, du maximum absolu du travail du fer à la compression ainsi qu'à l'extension, sous l'action simultanée de la charge permanente, des variations de la température et d'une surcharge d'épreuve immobile répartie de la manière la plus favorable;

2° Détermination de la flèche ou de l'abaissement à la clef, ainsi que du travail maximum du métal, dus à l'effet d'une charge volante pour un pont en arc ou en poutre droite, influence de la vite se du convoi et de la charge permanente de l'ouvrage;

3° Détermination des efforts subis par les tympans rigides d'un pont en arc, par suite des déformations éprouvées par les arcs sous l'influence des variations de la température de la surcharge.

Sampitié. — Appareil orthogonal dans les voûtes biaises dont la section droite est une ellipse surbaissée. (578-599, 2 fig., 1 pl.).

Les questions concernant les appareils biais ont été résolues d'une façon complète au point de vue pratique aussi bien qu'au point de vue théorique, pour les arches où le centre est la courbe de section droite comme pour celles où il est la courbe de tête.

Dans son remarquable Ouvrage *De l'appareil et de la construction des ponts biais,* M. Graeff a, de plus, généralisé le problème; cependant sa méthode laisse de côté le cas, beaucoup plus fréquent dans la pratique, où la section droite est une ellipse surbaissée.

Quant à la construction donnée par M. Collignon, dans le *Cours de Mécanique appliquée,* pour la trajectoire orthogonale parallèle sur le développement, elle ne s'applique pas avec toute la facilité et l'exactitude désirables lorsque la section droite est surbaissée et présente une grande ouverture, 30^{m} par exemple.

Telles sont les hypothèses dans lesquelles s'est placé l'auteur.

Après avoir étudié l'appareil orthogonal parallèle, il montre que la méthode employée conduisait aussi facilement aux équations des sinusoïdes de développement de la trajectoire, dans le cas de l'appareil orthogonal convergent.

H. B.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE (¹).

Tome IX; 1881.

Laquière (E.). — Note sur le nombre des marches rentrantes que l'on peut obtenir en remplissant successivement les deux

(¹) Voir *Bulletin,* V_2, 15.

demi-échiquiers rectangulaires, ayant pour frontière commune l'une des médianes de l'échiquier total. (11-17).

De Polignac. — Note sur la marche du cavalier dans un échiquier. (17-24).

Humbert. — Sur une généralisation de la théorie des fractions continues algébriques (*suite*). (24-30).

De Polignac. — Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications (*suite*). (30-41).

Humbert. — Sur une formule de M. Hermite. (42-45).

De la formule, donnée par M. Hermite,

$$\mathrm{B}\int f(x,a)f(x,b)\,dx = \frac{\Theta(x+a+b)}{\Theta(x)}\,e^{-\left[\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}+\frac{\Theta'(b)}{\Theta(b)}\right]x},$$

où

$$f(x,a) = \frac{\mathrm{H}(x+a)}{\Theta(x)}\,e^{-\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}},$$

l'auteur déduit ce fait, démontré autrement par M. Hermite, que la fonction $f(x,a)$ satisfait à l'équation de Lamé ($n=1$),

$$f''(x,a) = (2k^2\,\mathrm{sn}^2 x - 1 - k^2 + k^2\,\mathrm{sn}^2 a)\,f(x,a).$$

Léauté. — Remarque sur le frottement d'une corde sur un cylindre, lorsque tous deux tournent avec une grande vitesse. (46-49).

La formule qu'on applique habituellement est établie en supposant le cylindre fixe; elle ne peut convenir quand le cylindre se meut rapidement. M. Léauté montre comment on doit la modifier dans ce cas.

Stéphanos. — Sur certaines directions de transversales des courbes algébriques qui correspondent aux directions des axes dans les coniques. (49-56).

Si l'on considère une courbe algébrique quelconque dont l'équation soit

$$f(x,y) = 0,$$

et un point quelconque M, le produit des segments compris entre le point M et les points d'intersection de la courbe et d'une transversale passant par le point M devient maximum ou minimum pour certaines directions, indépendantes du point M; ce sont ces directions que M. Stéphanos étudie sous le nom de *directions axiales*.

Le produit considéré est donné par la formule

$$\frac{f(x,y)}{\mathrm{F}(\cos\omega,\,\sin\omega)},$$

et les directions axiales par l'équation

$$\varphi = \cos\omega \frac{\partial F}{\partial \sin\omega} - \sin\omega \frac{\partial F}{\partial \cos\omega} = 0.$$

Il y a une infinité de directions axiales pour les courbes de degré $2n+2$, admettant les points cycliques à l'infini pour points $(n+1)^{\text{uples}}$. — Dans le cas d'une conique, les deux directions axiales sont perpendiculaires; M. Stéphanos montre que, en général, le système des m directions axiales d'une courbe $f=0$ (de degré m) n'est assujetti à remplir une relation métrique que dans le cas où m est pair. La démonstration de ce théorème est liée à la solution du problème suivant : Quelle condition doit remplir une fonction $\varphi(\cos\omega, \sin\omega)$ entière, homogène et de degré m en $\cos\omega$, $\sin\omega$ pour qu'elle coïncide avec la dérivée d'une autre fonction $F(\cos\omega, \sin\omega)$ entière, homogène et de degré m en $\cos\omega$, $\sin\omega$?

Humbert. — Sur la fonction $(x-1)^a$. (56-58).

Déterminer les polynômes P, Q, R de degrés respectifs p, q, r, de façon que le développement de

$$P(x-1)^a + Q(x-1)^b + R$$

commence par un terme du degré le plus élevé possible en x, savoir de degré $p+q+r+2$.

De Polignac. — Sur la représentation analytique des substitutions. (59-67).

Forme générale des fonctions entières qui peuvent servir à représenter analytiquement une substitution de k lettres.

Le Paige. — Sur la règle de multiplication des déterminants. (67-69).

Démonstration simple de cette règle en s'élevant du cas d'un déterminant de l'ordre n au cas d'un déterminant de l'orde $n+1$.

Laquière. — Démonstrations élémentaires des lois fondamentales des probabilités des écarts dans les méthodes expérimentales. (69-88).

Extraits des procès-verbaux. (89-95).

Halphen. — Problème concernant les courbes planes du troisième degré. (96-112).

M. Cremona a montré que la hessienne et la cayleyenne d'un même réseau de coniques sont tangentes entre elles en neuf points. Toute courbe du troisième degré étant de trois manières différentes la hessienne d'un réseau de coniques, il lui correspond donc trois cayleyennes qui la touchent en neuf points. Donc ce problème :

Étant donnée une courbe plane du troisième degré, trouver une courbe de *la troisième classe qui lui soit tangente en neuf points,* admet au moins trois solutions. M. Halphen établit la proposition suivante :

1° Si la cubique donnée est équiharmonique, le problème admet une infinité de solutions; les courbes de troisième classe, touchant la cubique en neuf points, forment un système dont ne font pas partie les trois cayleyennes ; celles-ci donnent trois solutions isolées.

2° Si la cubique n'est pas équiharmonique, il n'y a pas d'autre solution que les trois cayleyennes.

Jordan. — Sur les conditions de convergence de certaines séries multiples. (113-115).

Démonstration simple de ce théorème d'Eisenstein :

La série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\cdots\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(v_1^2+v_2^2+\ldots+v_n^2)\mu},$$

où $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont des fonctions linéaires des variables entières $x_1, \ldots, x_n$, par rapport auxquelles on fait la sommation, est convergente ou divergente selon que l'on a

$$2\mu > n \quad \text{ou} \quad 2\mu \leq n,$$

pourvu, toutefois, que le déterminant des fonctions v ne soit pas nul.

Genty. — Étude sur les courbes gauches unicursales. (113-161).

Considérations générales. — Du nombre des conditions nécessaires pour déterminer une courbe unicursale d'ordre m. — Tangente. — Plan osculateur. — Plans osculateurs stationnaires. — Points d'inflexion linéaire et tangentes singulières. — Plans surosculateurs. — Développable osculatrice. — Nombre maximum des points doubles d'une courbe gauche. — Divisions homographiques sur une courbe gauche unicursale.

Sonine. — Note sur une formule de Gauss. (162-166).

De la formule

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

l'auteur déduit la formule de Gauss relative au produit

$$\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right).$$

Humbert. — Sur les courbes de Clebsch dont les coordonnées s'expriment en fonction elliptique d'un paramètre. (166-172).

L'auteur montre comment on peut obtenir l'équation entre x, y de la courbe de Clebsch, définie par les équations

$$x = a_0 + a_1\frac{H'}{H}(t-\beta_1) + \ldots + a_k\frac{H'}{H}(t-\beta_k),$$

$$y = b_0 + b_1\frac{H'}{H}(t-\beta_1) + \ldots + b_k\frac{H'}{H}(t-\beta_k),$$

avec

$$a_1 + \ldots + a_k = 0, \quad b_1 + \ldots + b_k = 0;$$

cette équation est du cinquième degré et la courbe considérée peut être regardée comme la perspective d'une partie de l'intersection de deux surfaces du troisième degré tangentes le long d'une conique, qui contient le point de rencontre des génératrices rectilignes de chaque surface, situées dans son plan.

Weill. — Théorème d'Arithmétique. (172).

Si un nombre N est décomposé en plusieurs parties, de manière que l'on ait

$$N = \alpha + \beta_1 + \ldots + pq + \ldots + p_1 q_1 + \ldots + rst,$$

l'expression $1.2.3\ldots N$ est divisible par le produit

$$(1.2\ldots\alpha)(1.2\ldots\beta)\ldots(1.2\ldots p)^q(1.2\ldots sq)$$
$$(1.2\ldots p_1)^{q_1}(1.2\ldots q_1)\ldots(1.2\ldots r)^{st}(1.2\ldots s)^t(1.2\ldots t).$$

Extraits des procès-verbaux. (172-174).

Tome X; 1882.

Lindemann. — Sur les courbes d'un système linéaire trois fois infini qui touchent une courbe algébrique donnée par un contact de troisième ordre. (21-40).

Étant donnés une courbe de degré n $f = 0$ et un système linéaire

$$\varphi + \varkappa\psi + \lambda\chi + \mu\omega = 0,$$

dont les éléments φ, ψ, χ, ω sont du degré s, il s'agit de déterminer les points où la courbe $f = 0$ est touchée au troisième ordre par une courbe du système linéaire. L'auteur commence par traiter les problèmes analogues pour le contact du premier ou du second ordre et retrouve ainsi les résultats connus; le procédé suivi est systématique : par exemple, pour le second ordre, on part de l'équation de la courbe appartenant à un système linéaire de trois éléments φ, ψ, χ qui touche au premier ordre, en un point donné x, la courbe $f = 0$, puis on écrit que cette équation est vérifiée quand on y remplace les coordonnées courantes x_i par $x_i + 2dx_i + 1d^2x_i$. On parvient ainsi à l'équation d'une courbe de degré $3(n+s-3)$ qui coupe la courbe $f = 0$ aux points cherchés; l'auteur montre comment le résultat coïncide avec celui obtenu par M. Brill (*Mathematische Annalen*, t. III). La méthode employée conduit naturellement à l'équation de la courbe du réseau

$$\varphi(x) + \varkappa\psi(x) + \lambda\chi(x) + \mu\omega(x) = 0,$$

qui touche la courbe $f = 0$, en un point donné o, au second ordre, et, par des calculs analogues, on parvient à déterminer une courbe sur laquelle doit se trouver le point x pour que le contact soit du troisième ordre; cette courbe est de degré $4s + 6(n-3)$; la même marche permettrait de traiter ensuite le problème analogue relatif au quatrième ordre. Au surplus, la possibilité de passer du problème concernant le contact $(\gamma - 1)^{\text{uple}}$ d'un système linéaire $\gamma - 1$

fois infini au problème concernant le γ^{uple} d'un système γ fois infini, tient à la proposition générale que voici :

Soient φ_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, \gamma)$ *les éléments d'un système linéaire* γ *fois infini, et soient* $\varphi_i = 0$ *les courbes qui déterminent pour un système partiel* $\gamma - 1$ *fois infini et contenu dans le précédent les points où la courbe* $f = 0$ *est touchée au* $\varphi - 1^{\text{ième}}$ *ordre par une courbe de ce système partiel, l'équation de la courbe du système* γ *fois infini qui touche la courbe* $f = 0$ *au* $\gamma - 1^{\text{ième}}$ *ordre au point* x *sera de la forme*

$$\varphi_0(y)\psi_0(x) + \varphi_1(y)\psi_1(x) + \ldots + \varphi_\gamma(y)\psi_\gamma(x) = 0,$$

les coordonnées courantes étant représentées par la lettre y. Cette équation donne précisément le contenu de la loi de réciprocité de M. Brill. (*Mathematische Annalen*, t. IV, p. 527.)

Laisant. — Sur certaines propriétés des centres de gravité. (40-44).

Si plusieurs corps de même nature tournent dans le même sens autour d'axes parallèles entre eux avec la même vitesse angulaire et dans un milieu dont la température soit variable, leur centre de gravité se meut comme s'il appartenait à un corps de même nature, tournant dans le même milieu autour d'un axe parallèle aux premiers et avec la même vitesse angulaire.

Cet axe *moyen* de rotation s'obtient en prenant un point quelconque sur chacun des axes individuels et en déterminant le centre de gravité de ces points, respectivement affectés des masses des corps correspondants. Ce centre de gravité appartient à l'axe moyen.

Goursat. — Sur l'équation linéaire qui relie au module la fonction complète de première espèce. (45-52).

Les quantités K et K′ étant définies, pour des valeurs quelconques de x, par l'équation différentielle

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + (1-2x)\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}y = 0,$$

la fonction $\omega = \dfrac{iK'}{K}$ a été étudiée en particulier par M. Picard (*Annales scientifiques de l'École Normale*, t. IX, p. 149); quand on fait décrire à la variable x une courbe fermée quelconque, cette fonction, partie de la valeur ω_0 revient au point initial avec la valeur $\dfrac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$, a, b, c, d étant quatre entiers réels satisfaisant à la relation $ad - bc = 1$; il résulte des recherches de M. Picard que, en regardant comme identiques tous les chemins qui peuvent être réduits à l'un d'entre eux sans franchir aucun des points 0 et 1, il n'y a qu'un chemin pour la variable x qui conduise de la valeur ω_0 à la valeur $\dfrac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$; c'est cette proposition que M. Goursat établit directement en s'appuyant uniquement sur la façon dont se permutent les solutions de l'équation différentielle quand on tourne autour des points critiques.

Laisant. — Remarques sur la théorie des régions et des aspects. (52-55).

Recherche d'une limite supérieure du nombre des *aspects* possibles pour un système de n points. D'après M. Halphen, un aspect est la permutation qui indique l'ordre dans lequel les points apparaissent autour de l'observateur, deux permutations représentant le même aspect lorsqu'on peut les déduire circulairement l'une de l'autre.

Weill. — Sur un triangle dont les côtés sont exprimés par des nombres entiers, premiers entre eux, et dans lequel le rapport de deux angles est un nombre entier. (55-58).

Appell. — Sur des cas de réduction des fonctions Θ de plusieurs variables à des fonctions Θ d'un moindre nombre de variables. (59-67).

La fonction

$$\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_p | a_{ij}) = \sum_{m_i=-\infty}^{m_i=+\infty} e^{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_p x_p + \varphi(m_1, \ldots, m_p)}$$

où $\varphi(m_1, \ldots, m_p)$ est la forme quadratique

$$\sum_{i,j=1}^{i,j=p} a_{ij}\, m_i\, m_j \quad (a_{ij}) = a_{ji},$$

s'exprime au moyen de fonctions Θ à $p-1$ variables et de fonctions ϑ d'une variable si les périodes relatives à x_p sont liées par $p-1$ relations distinctes à coefficients entiers de la forme

$$k_{i1} a_{p1} + k_{i2} a_{p2} + \ldots + k_{ip} a_{pp} = h_i \pi \sqrt{-1},$$

où

$$i = 1.2 \ldots, p-1.$$

Il y a une réduction analogue quand les p groupes de périodes simultanées des $(p-1)$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ se réduisent à $p-1$ groupes distincts. Cette circonstance se présente lorsque, entre les périodes relatives à ces variables, ont lieu des relations de la forme

$$k_1 a_{i1} + k_2 a_{i2} + \ldots + k_{p-1} a_{i,\,p-1} + k_p a_{i,\,p} = h_i \pi \sqrt{-1}$$
$$(i = 1.2 \ldots p-1).$$

Halphen. — Sur une série d'Abel. (67-87).

Il s'agit de la série

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(\beta) + \frac{x(x-2\beta)}{2}\varphi''(2\beta) + \ldots$$
$$+ \frac{x(x-n\beta)^{n-1}}{2.3\ldots n}\varphi^{(n)}(n\beta) + \ldots,$$

où β désigne une quantité arbitraire. M. Halphen cherche sous quelles conditions cette série, formée avec une fonction quelconque et indéfiniment prolongée, représente effectivement cette fonction.

Il commence par étudier la série

$$F(x) = \mu_0 + \mu_1 x + \ldots + \mu_n \frac{x(x - n\beta)^{n-1}}{2.3\ldots n} + \ldots,$$

où les μ sont indépendants de x.

La condition nécessaire et suffisante de convergence consiste dans la convergence de la série indépendante de x, qui a pour terme général

$$u_n = (-1)^{n-1}(e\beta)^n n^{-\frac{3}{2}} \mu_n.$$

Si la série $F(x)$ satisfait à cette condition, elle représente une fonction symétrique dans tout le plan.

Relativement à la série $\varphi(x)$ (d'Abel), M. Halphen établit les propositions suivantes :

Pour que la série d'Abel puisse être applicable à une fonction $f(x)$, il faut qu'il existe des constantes α laissant le produit $\alpha^m f^m(x)$ fini pour m infini.

Soit a le plus grand des modules de ces quantités α, soit u la racine positive de l'équation $ue^{1+u} = 1$; la série d'Abel représente $f(x)$ quand le module de β est moindre que ua.

En particulier, à une fonction $f(x)$ pour laquelle la constante, désignée par a, dépasse toute limite, la série d'Abel s'applique, quelle que soit la constante β.

Le produit $(ez)^m f^{(m)}(mz)$ reste fini, pour m infini, tant que le module de z reste inférieur à ua.

Mais si z conserve un même argument ω et que son module croisse d'une manière continue au delà de ua, le produit $z^m f^{(m)}(mz)$ reste encore fini jusqu'à un centre limite du module de z. Soit $\varphi(\omega)$ cette limite, dont la forme dépend de la fonction $f(x)$.

La condition nécessaire et suffisante pour que la série d'Abel s'applique à $f(x)$ consiste en ce que le point affixe de β soit situé à l'intérieur de la courbe $\rho = \varphi(\omega)$, ou, en d'autres termes, que si l'on donne à β l'argument ω, le module de β soit moindre que $\varphi(\omega)$.

La série d'Abel peut converger sans représenter la fonction qui sert à la construire. M. Halphen en cite divers exemples intéressants : en particulier, en partant de la fonction $\frac{1}{x - z}$, il parvient à la transcendante

$$G(x, z) = \frac{1}{z} + \frac{x}{(z+1)^2} + \ldots + \frac{x(x+n)^{n-1}}{(z+n)^{n+1}},$$

qui est, dans tout le plan, une fonction uniforme de x et de z, symétrique par rapport à x, fractionnaire par rapport à z. Cette fonction jouit de la propriété

$$\frac{\partial G(x, z)}{\partial x} = -\frac{\partial G(x+1, z+1)}{\partial z}.$$

Perott. — Sur un théorème de Gauss. (87-88).

Nouvelle démonstration de cette proposition : l'expression

$$\frac{(1 - x^m)(1 - x^{m-1})\ldots(1 - x^{m-\mu+1})}{(1 - x)(1 - x^2)\ldots(1 - x^\mu)}$$

est une fonction entière de x.

Günther (*S.*) — Sur l'évaluation de certaines intégrales pseudo-elliptiques. (88-97).

Lorsque l'on cherche si l'intégrale

$$S = \int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \frac{dx}{\sqrt{ax^3 + bx^2 + ex + d}},$$

dans laquelle $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ représentent deux fonctions algébriques entières, respectivement d'ordre P et N, est une intégrale elliptique ou si elle peut s'effectuer sous forme finie, on posera

$$y = \frac{\alpha x^{N-P+2} + \beta x^{N-P+1} + \ldots + \mu x + r}{\sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}}$$

et l'on formera l'expression

$$\frac{dy}{my^2 + n}.$$

En posant ensuite

$$\frac{dy}{my^2 + n} = \frac{\zeta \varphi(x)\, dx}{\psi(x)\sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}},$$

ζ désignant un facteur arbitraire constant, on obtiendra, par l'identification des coefficients de x^0, x^1, x^2, ..., un système d'équations. La simultanéité de ces équations est une condition suffisante pour que l'intégrale S appartienne aux intégrales pseudo-elliptiques.

M. S. Günther applique la méthode qui résulte de cet énoncé à l'intégrale

$$\int \frac{x\,dx}{(x^3 + 8)\sqrt{x^3 - 1}},$$

traitée par Legendre et par Clausen; il retrouve, par cette voie, les ingénieux calculs de ce dernier.

Extraits des procès-verbaux. (97-103).

Perrin. — Sur le problème des aspects. (103-127).

Weill. — Sur des polygones dont les côtés sont tangents à une courbe et dont tous les sommets sont sur la courbe (127-131).

Si l'on mène en un point t d'une courbe unicursale (dont les points sont déterminés individuellement par la valeur du paramètre t) la tangente qui rencontre la courbe en des points T, et que l'équation qui donne T en fonction de t soit homogène en T et t, les tangentes aux points T se coupent deux à deux en des points B de la courbe, les tangentes aux points B se coupent trois à trois en des points C de la courbe, et ainsi de suite. Si d'un point de la courbe qui jouit des propriétés indiquées, on mène des tangentes, leurs points de contact sont deux à deux sur des droites tangentes à la courbe; les points de contact de ces nouvelles droites sont trois à trois sur des tangentes à la courbe, et ainsi de suite.

M. Weill donne un théorème analogue relatif aux plans osculateurs des courbes gauches unicursales.

Laquière. — Sur le théorème de M. Laisant, relatif à certaines propriétés des centres de gravité. (131-133).

Démonstration élémentaire de ce théorème que M. Laisant avait établi en faisant usage des quaternions.

Stephanos. — Sur la relation qui existe entre le problème de la Trigonométrie sphérique et la théorie du système de trois formes quadratiques. (134-137).

Les formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique correspondent aux relations qui lient les invariants simultanés du système de formes binaires

$$a_x^2, \quad b_x^2, \quad c_x^2$$

à ceux du système covariant

$$l_x^2 = (bc)\,b_x c_x, \quad m_x^2 = (ca)\,c_x a_x, \quad n_x^2 = (ab)\,a_x b_x.$$

Weill. — Sur le centre des moyennes distances des points d'une courbe unicursale. (137-139).

Le lieu du centre des moyennes distances des points communs à une courbe unicursale fixe d'ordre p et à un système de courbes d'ordre m, dont l'équation contient un paramètre variable du degré k, est une courbe unicursale d'ordre pk, ayant pour directions asymptotiques multiples d'ordre k les directions asymptotiques de la courbe unicursale.

Le lieu des centres des moyennes distances des sommets d'un polygone inscrit et circonscrit à deux coniques fixes est une conique homothétique à celle dans laquelle le polygone est inscrit.

Perrin. — Sur une nouvelle méthode de résolution de l'équation du quatrième degré et son application à quelques équations de degrés supérieurs. (139-146).

Cette méthode repose sur l'identité relative aux *trois* quantités a, b, c,

$$(a+b+c)^4 - 2\Sigma a^2(a+b+c)^2 - 8abc(a+b+c) + (\Sigma a^2)^2 - 4\Sigma a^2 b^2 = 0,$$

qui pour l'équation

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

conduit à la résolvante

$$y^3 + \frac{p}{2}y^2 + \frac{p^2-4r}{16}y - \frac{q^2}{64} = 0.$$

De même, l'identité

$$(a+b)^m - mab(a+b)^{m-2} + m\frac{(m-3)}{1.2}a^2b^2(a+b)^{m-4}$$
$$- m\frac{(m-4)(m-5)}{1.2.3}a^3b^3(a+b)^{m-6} + \ldots (a^m + b^m) = 0$$

permet d'obtenir, par des formules analogues à celles de Cardan, les racines d'une équation de degré impair m, ne contenant que les puissances impaires de l'inconnue et dans laquelle les coefficients ne dépendent que d'un seul paramètre, en vertu de $\frac{m-3}{2}$, relation que l'on peut écrire sous la forme

$$p_{2k} = \frac{(m-k-1)(m-k-2)\ldots(m-2k+1)}{1.2\ldots k.m} p_2^k,$$

où p_{2k} est le coefficient de x^{m-2k}.

L'auteur examine particulièrement le cas de $m = 5$.

Selivanoff. — Sur les intégrales définies uniformément convergentes.

L'intégrale

$$\Phi(x) = \int_a^\infty f(x, z)\,dz$$

est dite uniformément convergente si pour toutes les valeurs de x contenues dans l'intérieur d'un certain contour on peut déterminer un nombre p tel que, en prenant $m > p$, on ait

$$\text{mod} \int_a^\infty f(x, z)\,dz < k,$$

k étant une quantité aussi petite qu'on voudra, et donnée d'avance.

Si l'intégrale est uniformément convergente, elle est une fonction continue pour les valeurs du paramètre contenues dans le contour de convergence uniforme. Si l'intégrale

$$\int_a^\infty f(x, z)\,dz u$$

est uniformément convergente pour $(x) \leqq r$, elle est développable suivant les puissances positives, entières et croissantes de x.

On peut différentier sous le signe $\int$ une intégrale telle que les précédentes si, dans le voisinage du point x, l'intégrale est uniformément convergente et si la fonction f se comporte régulièrement.

Pellet. — Sur les résidus cubiques et biquadratiques. (157-162).

Soient θ une racine de l'équation

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0,$$

p étant un nombre premier, g une racine primitive de p et e un diviseur de $p-1$; si l'on fait

$$\omega = \frac{p-1}{e},$$

l'expression $\theta^{g^{i+ej}}$ ne prend que ω valeurs distinctes lorsque, i étant constant, on fait varier j. Soit

$$S_i = \sum_{j=0}^{j=\omega-1} \theta^{g^{i+ej}};$$

S_i admet ω valeurs distinctes qu'on obtient en donnant à i les valeurs $0, 1, e-1$.

Ces quantités sont dites les périodes des racines d'ordre p de l'unité correspondantes au diviseur e de $p-1$. Gauss a donné l'équation aux périodes pour e égal à l'un des nombres 2, 3, 4.

M. Pellet montre comment cette équation permet de reconnaître si un nombre q est résidu quadratique, cubique ou biquadratique suivant le module premier p.

Halphen. — Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles.

Donner neuf points doubles, c'est donner vingt-sept conditions ; vingt-sept conditions sont nécessaires pour déterminer une courbe du sixième degré : toutefois il n'y a pas en général de telle courbe qui admette neuf points doubles assignés arbitrairement.

Si une courbe du sixième degré admet neuf points doubles, par ces neuf points passe une seule courbe du troisième degré.

Pour que neuf points $a_1, a_2, \ldots, a_8, a_9$, situés sur la courbe du troisième degré A, soient des points doubles d'une courbe du sixième degré, voici la condition nécessaire et suffisante :

Choisissez huit de ces points $a_1, \ldots, a_8$ et prenez le point a'_9 commun aux courbes du troisième degré qui passent par les huit premiers; des tangentes de la courbe A aux points a_9 et a'_9 doivent se rencontrer sur cette même courbe A; ou encore, par a'_9 menez les quatre tangentes à A ; les quatre points de contact donnent lieu à trois couples de cordes conjuguées. Le point a_9 doit être l'intersection des deux cordes conjuguées.

Étant donnés huit points doubles d'une courbe de sixième degré qui doit avoir un neuvième point double, le lieu de ce dernier est une courbe du neuvième degré, sur laquelle chacun des huit points donnés est triple.

Ce lieu passe par les douze points doubles des cubiques du faisceau déterminé par les huit points. Quand les huit points sont les points d'inflexion d'une courbe du troisième degré, le lieu se réduit à une droite.

L'auteur forme l'équation générale des courbes du sixième degré à neuf points doubles ; il indique aussi d'intéressantes généralisations des propositions précédentes, relatives aux courbes d'ordre $3m$ admettant neuf points multiples d'ordre m.

Schlegel (V.). — Quelques théorèmes de Géométrie à n dimensions. (172-207).

L'auteur, en employant la méthode de Grassmann, étend à l'espace à n dimensions divers théorèmes de Géométrie ordinaire relatifs au triangle, au quadrilatère, au tétraèdre, à l'hexaèdre, à l'octaèdre. On sait d'ailleurs que les analogues du dodécaèdre et de l'icosaèdre n'existent pas dans l'espace à plus de quatre dimensions.

Gascheau. — Étude sur un cas singulier du mouvement d'un point matériel. (207-219).

Sur le mouvement d'un point matériel sollicité par une force centrale, attractive et inversement proportionnelle au cube de la distance du mobile au centre d'action.

Schoute. — Deux théorèmes relatifs aux centres des courbes algébriques. (219-220).

Généralisation de deux théorèmes de Steiner.

Schlegel. — Sur le théorème de M. Laisant, relatif aux centres de gravité. (220-222).

Démonstration de ce théorème par la méthode de Grassmann.

Schoute. — Aperçu d'une solution géométrique du problème suivant : « Trouver le lieu des centres des hyperboles équilatères qui ont un contact du troisième ordre avec une parabole donnée. » (222-223).

Lemonnier (H.). — Intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à n variables indépendantes. (223-249).

Le travail de M. Lemonnier comprend deux Parties :

La première est l'exposition d'une méthode simple pour ramener le problème à l'intégration du système bien connu d'équations différentielles ordinaires et de la formation de l'intégrale complète.

Dans la seconde, l'auteur montre comment, inversement, on peut de l'intégrale complète déduire un système intégral correspondant au système d'équations différentielles.

Perott. — Sur les recherches des diviseurs des fonctions entières. (250-251).

Extraits des procès-verbaux. (251-255).

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES ET SPÉCIALES, publié sous la direction de MM. BOURGET, KOEHLER et DE LONGCHAMPS.

Tome V ; 1881.

Landry. — Note d'Algèbre. Procédé nouveau pour déterminer les valeurs numériques des racines réelles de l'équation $x^2+px+q=0$, p et q étant des nombres entiers positifs ou négatifs. (3-9).

Exposé d'une méthode de calcul, abrégeant les opérations arithmétiques à exécuter, dans le cas où p est un nombre considérable, et consistant à déterminer successivement, au moyen de divisions rapides, les chiffres des racines.

S.-B. — Note de Cosmographie. Étant données la déclinaison d'une étoile et la latitude d'un lieu, calculer la durée de la présence de l'étoile au-dessous de l'horizon du lieu, en temps sidéral. (10-11).

Établissement, par les procédés de la Géométrie descriptive, de la formule $\cos\theta = \operatorname{tang}\lambda \operatorname{tang}\delta$.

Colombier (P.-A.-G.). — Note d'Arithmétique. Détermination d'une limite supérieure du nombre des divisions à effectuer dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres. (12-18).

Désignant par A, B, D les deux nombres et leur plus grand commun diviseur; par M le plus petit commun multiple de leurs diviseurs apparents; par B′, B″, D″ les quotients $\frac{B}{D}$, $\frac{B}{M}$, $\frac{D}{M}$; enfin par n le nombre des divisions à effectuer, l'auteur démontre les limites suivantes :

$$2^{n-1} < \frac{B}{D}, \tag{1}$$

$$2^{n-1} < B', \tag{2}$$

$$2^{n-1} < B'', \tag{3}$$

$$2^{n-1} < B. \tag{4}$$

Formule Binet : L'exposant entier α de la plus petite puissance 2^α de 2, non inférieure à B est une limite supérieure du nombre n des divisions à effectuer. Formule Lamé : Si k désigne le nombre des chiffres du plus petit B des deux nombres $n < 1 + \frac{10}{3}k$, soit *a fortiori* $n < 5k$.

Formule de l'auteur : $n < 1 + 4k$.

Kœnigs. — Note de Géométrie analytique. (29-31).

Par un calcul aussi simple qu'élégant, l'auteur montre que l'on peut, d'un point de l'espace, abaisser six normales sur une surface du second ordre; que ces six normales sont situées sur un même cône du second degré; la cubique gauche qui passe par les six pieds des normales contient le point d'où elles sont issues (centre du pinceau) et le centre de la surface; elle admet les axes de la surface pour ses directions asymptotiques. Il aborde ensuite la question de tracer sur la surface, par son intersection avec une seconde surface du deuxième ordre, une courbe du quatrième degré telle qu'il existe sur cette courbe un groupe de six points dont les normales soient concourantes; il conclut : pour que sur une courbe du quatrième ordre, tracée sur une surface du second ordre, on puisse trouver un groupe de six points, pieds de normales concourantes, il faut et il suffit que par cette courbe on puisse faire passer une surface du second ordre, circonscrite au tétraèdre principal de la surface première.

Kœhler. — Sur les permutations de n lettres. (32-33).

Démonstration élémentaire de la formule donnant le nombre des permutations pour lesquelles aucune lettre n'occupe le rang indiqué par son indice

$$n!\left[1-\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}\right].$$

Amigues (*E.*). — Note sur les racines multiples de l'équation en *s*. (33-36).

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une valeur soit racine double ou triple, de l'équation en S servant à déterminer les plans principaux est d'annuler tous les mineurs du premier ou du second ordre de l'équation.

G. de Longchamps. — Note de Géométrie analytique. (36-39).

Conditions nécessaires pour que l'équation du second degré à deux variables représente deux cercles. Recherche simple des deux facteurs.

Boquel (*E.-J.*). — Étude sur les coordonnées tangentielles et leurs applications. (40-46).

Définitions. — L'équation $ux+vy=1$, suivant que l'on considérera comme données les valeurs u et v, inverses de coordonnées à l'origine de la droite D, et comme variables les coordonnées x et y du point P, ou inversement, exprimera : soit que le point P, variable, est situé sur la droite D, soit que la droite D, mobile, passe par le point P. u et v sont les coordonnées-lignes (Clebsch), coordonnées de la droite D, tandis que x et y sont les coordonnées-points (Clebsch), coordonnées du point P.

La relation $f(u,v)=0$ définit une courbe comme l'enveloppe de la droite $D(u,v)$. Les quantités u, v sont les coordonnées tangentielles de la courbe. L'équation du premier ordre est l'équation du point, enveloppe des droites mobiles qu'elle représente. Coordonnées tangentielles homogènes $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$, analogues aux coordonnées homogènes $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$.

Faisceau de droites, rayons mobiles autour d'un centre. Les coordonnées d'un rayon quelconque du faisceau, déterminé par deux rayons (u_0, v_0), (u_1, v_1), ont pour expression générale

$$u=\frac{u_0+\lambda u_1}{1+\lambda},\quad v=\frac{v_0+\lambda v_1}{\lambda+\lambda},$$

λ étant un paramètre variable. Le rapport $\frac{\lambda}{\lambda'}$ est le rapport anharmonique des quatre rayons $(0, 1, \lambda, \lambda')$. Il est projectif.

Geoffroy (*L.*). — Nouvelle méthode pour le calcul du rapport de la circonférence au diamètre. (49-55).

Prenant pour point de départ l'expression géométrique de l'égalité

$$d\operatorname{tang}\omega=\frac{d\omega}{\cos^2\omega},$$

l'auteur cherche la valeur de l'arc $\frac{\pi}{4}$, décomposé en une infinité d'arcs élémentaires dont les rayons déterminent des divisions égales sur la tangente à l'origine des arcs sur la circonférence. L'expression ci-dessus donne la valeur des arcs élémentaires successifs dont la somme est le résultat cherché

$$\frac{\pi}{4} = \lim n\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \ldots + \frac{1}{n^2+(n-1)^2}\right),$$

avec une erreur inferieure à $\frac{1}{2n}$.

Théorème. — S_p *étant la somme des puissances* $p^{\text{ièmes}}$ *des* $(n-1)$ *premiers membres, on a*

$$\lim \frac{S_p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

De là

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

Marin (*Eug.*). — Note d'Arithmétique. (56-58).

Minine (*A.*). — Sur la somme des nombres premiers à un nombre donné *n*, inférieurs à *p*. (58-62).

Posant $p = mn + k$, et désignant par $[\Sigma_n(p)]_0^p$ la somme cherchée, par $[\varphi(n)]_0^p$ le nombre qui exprime combien de nombres premiers à n sont compris entre 0 et p, l'auteur recherchant la somme des nombres en question compris entre 0 et mn, puis entre mn et $mn+k$, établit la formule générale

$$[\Sigma_n(p)]_0^{mn+k} = \frac{m^2}{2}\varphi(n^2) + mn[\varphi(n)]_0^k + [\Sigma_n(p)]_0^k.$$

Gino-Loria. — Applications de la Trigonométrie. (62-66).

1° Relations entre les éléments de figures déduites d'un triangle $S, C, \Gamma, \Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c$, surfaces du triangle et des cercles circonscrit, inscrit et exinscrits. On a

$$\frac{S}{C} = \frac{2}{\pi}\sin A \sin B \sin C, \quad \frac{S}{\Gamma} = \frac{1}{\pi}\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2},$$

$$\frac{S}{\Gamma} = \frac{1}{\pi}\cot\frac{A}{2}\tang\frac{B}{2}\tang\frac{C}{2}.$$

$r_1, r_2, R_1, R_2, \ldots$ étant les rayons des cercles inscrits et circonscrits aux deux triangles en lesquels la médiane divise un triangle, on a

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_5} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_6} = \frac{\frac{3}{2}(a+b+c) + (m_a + m_b + m_c)}{2S}.$$

(1) servant d'indices aux éléments du triangle T_1 formé avec les trois segments inégaux détachés sur T par le cercle inscrit

$$pr_1 = 2S_1, \quad 4pS_1R_1 = S_2, \quad 2R_1r_1 = \frac{S^2}{p^2} = r^2.$$

(a) indice du triangle T_a, formé avec les éléments déterminés par le cercle exinscrit a

$$2R_ar_a = \frac{S^2}{(p-a)^2} = r'_a.$$

G. de Longchamps. — Sur la série de Taylor. (76-80).

Boquel (E.-J.). — Étude sur les coordonnées tangentielles et leurs applications. (80-85).

Équation générale ($\pi + \mu\chi = 0$) des points de la droite unissant les points dont $\pi = 0$ et $\chi = 0$ sont les équations. Le rapport $\frac{\mu}{\mu'}$ des deux paramètres correspondant à deux points de la droite est le rapport anharmonique des quatre points, y compris ceux qui définissent la droite, ou les « points de base » (Clebsch). Celui de quatre points (μ_1, μ_2, μ_3, μ_4) est égal à

$$\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_3 - \mu_2} \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_3 - \mu_4}.$$

Le point M, ($M_0 + \mu M_1$) de la droite $M_0 M_1$ est dit le correspondant de la droite P, ($P_0 + \lambda P_1$) du faisceau $P_0 P_1$, si l'on a $\mu = \lambda$. Si trois droites d'un faisceau sont en correspondance avec trois points d'une droite, la condition caractéristique de la correspondance d'une quatrième droite quelconque du faisceau, avec un point de la droite, est l'existence, entre les paramètres μ et λ, d'une relation du premier ordre séparément entre les deux paramètres, c'est-à-dire telle que $a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0$.

Il serait plus simple et plus net de dire : deux figures sont dites en correspondance lorsqu'à une droite, ou à un point, de la première correspond un point et un seul, ou une droite et une seule de la seconde. Les figures présentant la correspondance ainsi définie sont dites *projectives*. Deux figures projectives par rapport à une troisième le sont également entre elles.

Geoffroy (L.). — Nouvelle méthode pour le calcul du rapport de la circonférence au diamètre. (97-103).

L'expression géométrique de la valeur $d\omega = \frac{d \sin\omega}{\cos\omega}$, appliquée à la série des axes élémentaires détachés par des parallèles équidistantes, en nombre infini, donne le développement en série suivant :

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{9} + \dots$$

Une autre expression de π résulte de la surface du quart de cercle, considérée comme la somme des aires des trapèzes élémentaires en lesquels se décomposent une infinité (n) d'ordonnées équidistantes. La valeur de l'ordonnée $y_p = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - p^2}$, développée en série, fournit l'expression suivante :

$$\frac{\pi}{2} = 2 - \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{1.2}\cdot\frac{1}{5} - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2.3}\cdot\frac{1}{7} - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{9} - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1}{11} - \dots,$$

formule qui n'avait point été remarquée jusqu'ici.

On peut reprocher à cette dernière d'être peu convergente, et, par suite, d'un calcul laborieux ; mais c'est un bon exercice d'élève.

Gino-Loria. — Applications de la Trigonométrie. (104-109).

Éléments du triangle formé par les intersections des bissectrices d'un triangle donné avec le cercle circonscrit. — Du triangle formé par les tangentes au cercle circonscrit, en ses sommets $S_1 = \frac{4S^3}{2p.abc}$, aux cercles exinscrits $S_a = \frac{4S^3}{2(p-a)abc}$; d'où le théorème $\frac{1}{S_1} = \Sigma \frac{1}{S_a}$ du triangle formé par les points d'intersection des hauteurs du premier avec son cercle circonscrit

$$a_1 = 2R \sin 2A, \quad S_1 = 2R^2 \sin 2A \sin 2B \sin 2C.$$

Note de Géométrie. — (109-111).

Soient a, b, c les arêtes d'un parallélépipède; α, β, γ les faces ou angles plans opposés dans l'un des sommets trièdres; 2σ la somme $\alpha + \beta + \gamma$; le volume $V = 2abc\sqrt{\sin\sigma \sin(\sigma-\alpha)\sin(\sigma-\beta)\sin(\sigma-\gamma)}$.

Questions d'examen. — (111-115).

Parmi les questions d'examens, dont l'étude est des plus immédiatement profitables aux « candidats » sinon aux « mathématiciens de l'avenir », nous ne pouvons, faute de place, signaler que celles, rares d'ailleurs, dont le sujet lui-même ou la solution ordinaire nécessitent une observation critique. A ce point de vue, ingrat sans doute, mais essentiel de notre tâche, nous ne saurions laisser passer la solution du n° 4, dont le type est malheureusement du plus fâcheux exemple. On y résout en effet, au moyen de l'Algèbre mise au service d'un artifice des plus détournés (la médiane du triangle n'ayant rien à faire dans la question), le problème suivant :

4. *On donne un triangle* ABC, *et un point* P, *sur la base* BC; *on demande de mener une parallèle* MN *à* BC, *qui rencontre les côtés* AB *et* BC *aux points* M *et* N, *de telle sorte que l'angle* MPN *soit droit.*

La solution qui nous paraît la seule rationnelle est la suivante : La base BC du triangle et la droite MN ont le sommet A pour centre de similitude. Le point I, correspondant à P, dans le triangle semblable à MNP construit sur BC, sera donc à l'intersection du rayon AP avec le cercle lieu des points d'où CB est vu sous un angle droit.

Cette démonstration, qui a l'avantage de simplifier à la fois la figure et le raisonnement, de supprimer un calcul sans intérêt, ne serait-elle pas celle du *Mathematical Visitor,* dont parle l'article? En ce cas, nous ne saurions trop répéter que, « principalement dans un Journal d'élèves », les solutions ou démonstrations déjà connues ne doivent jamais être compliquées à plaisir, mais au contraire rendues plus simples et plus claires, toutes les fois que la chose sera possible.

Question 241. — (115-117).

Bonne solution géométrique, par M. Callon (élève), du problème : « Déterminer le lieu des points dont les tangentes à deux cercles sont dans un rapport donné ». Mais pourquoi la rédaction ajoute-t-elle la remarque naïve d'un autre solutionniste, que les lieux géométriques des points dont les puissances par rapport aux cercles O et O', d'une part, aux cercles O et O'', d'autre part, sont dans un même rapport donné, se coupent sur l'axe radical de O′ et O″?

Kœnigs. — Sur les maxima et minima. (123-125).

Jouanne. — Note de Géométrie analytique. — (125-129).

Question de Géométrie analytique. — (129-134).

Former l'équation du second degré qui admet pour racines les demi-axes de la conique représentée par l'équation générale, en coordonnées obliques, du second degré à deux variables.

Représentant par Δ le discriminant de l'équation rendue homogène, et par δ celui de l'ensemble des termes du second ordre, l'équation en z est

$$\delta^3 z^2 + \Delta\delta(\mathrm{A}+\mathrm{C}-2\mathrm{B}\cos\theta)z + \Delta^2\sin^2\theta = 0;$$

les racines en sont, grandeur et signe, les carrés des demi-axes.

Applications. — Aire de l'ellipse : $\mathrm{S} = \pi\dfrac{\Delta\sin\theta}{\delta\sqrt{\delta}}\cdot$ On voit de suite que $\mathrm{S} = k\dfrac{\Delta}{\delta^{\frac{3}{2}}}$, k étant une constante. Appliquant à l'équation générale du cercle, on a la valeur $k = \pi\sin\theta$ de la constante (cette dernière remarque non faite dans l'article).

Boquel (E.-J.). — Étude sur les coordonnées tangentielles et leurs applications. (137-141).

Interprétation géométrique de la projectivité. Quatre éléments de l'une des deux figures projectives ont même rapport anharmonique que les quatre éléments correspondants de l'autre. Homographie, définie par la relation

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0,$$

c'est-à-dire la correspondance d'un seul élément (point ou rayon d'une base, ou d'un faisceau) à un élément (point ou rayon) de la première figure. Deux séries de points en projectivité sont homographiques. Figures perspectives, ou division d'une base et faisceau, tels que les rayons du second passent par les points correspondants de la première. Deux divisions sont perspectives si les droites joignant les points homologues concourent en un centre de perspective, ou si les intersections des rayons homologues sont en ligne droite, axe de perspective.

Équation tangentielle d'une courbe. La relation $f(u, v)$ entre les coordonnées tangentielles d'une droite mobile est l'équation tangentielle de la courbe enveloppe de cette droite.

Morel (A.). — Note sur la décomposition, en facteurs premiers, du produit $1.2.3\ldots m$. (145-148).

Lorsque $m \geqq \alpha + \beta + \gamma + \delta$, la fraction $\dfrac{m!}{\alpha!\beta!\gamma!\delta!}$ est un nombre entier.

Gino-Loria. — Applications de la Trigonométrie. (Suite). (148-155).

Surface du quadrilatère, en fonction des deux côtés opposés, a, d, et des angles; de trois côtés et des angles. Autres expressions relatives au quadrilatère.

Note de la Rédaction. — Nous ne donnons point ces formules, d'ailleurs faciles à trouver; le défaut de symétrie de la notation demanderait des longueurs d'explication. On pourrait corriger ce défaut, capital dans des formules classiques, en assimilant pour la notation le quadrilatère à un triangle, tronqué par une transversale.

Andrieux. — Solution de la question 277 : « Une circonférence O roule sur deux autres de rayon égal au sien, roulant elles-mêmes sur une droite. Quelle est la position respective qui rend maximum le pentagone formé par les trois centres et les points de contact de la droite? (158-159). »

Bonne solution algébrique; mais combien plus élégante eût été (comme toujours dans les questions de ce genre) la solution géométrique fondée sur la méthode de Fermat, montrant immédiatement que la projection du centre O sur la droite doit être sur les tangentes communes au cercle O et à chacun des deux autres.

Ibach. — Surface du triangle polaire d'un triangle donné. (164-168).

D étant le déterminant des équations des côtés, P le produit des mineurs correspondant à la colonne des constantes, on a

$$2S = \frac{D^2}{P}.$$

De même, pour le tétraèdre,

$$6V = \frac{D^3}{P}.$$

Σ surface du triangle polaire du premier par rapport à la conique $U = 0$, Δ discriminant de U. On a

$$\Sigma = \frac{2S^2\Delta^2}{P},$$

et pour le volume Θ du tétraèdre polaire de V

$$\Theta = \frac{24V^3\Delta^3}{P}.$$

Haure. — Problème de Géométrie analytique. (168-174).

Lieu des intersections P des polaires, relatives à deux coniques C_1 et C_2, des points p d'une courbe σ d'ordre m. Cette courbe Σ est d'ordre $2m$. Soit $S_1S_2S_3$ le triangle autopolaire à toutes les coniques du faisceau (C_1C_2). Il est à lui-même son conjugué, sommet à côté opposé (en disant que P et p sont conjugués).

Ce théorème est le point de départ d'une méthode de transformation fort intéressante, et le travail de M. Haure, d'une valeur réelle, est de ceux dont l'insertion dans le *Journal* est à recommander. Nous croyons toutefois devoir relever au début une remarque incomplète qui, prise au pied de la lettre, conduirait à des erreurs. Toute droite l a pour correspondante une conique L, circonscrite au triangle autopolaire; mais elle ne constitue pas toute la conjuguée de la conique, à laquelle correspondent en outre les trois côtés dudit triangle. Soient σ_1 et σ_2 les intersections de l avec les côtés S_2S_3 et S_3S_1; le point S_1 de la conique L a pour correspondants tous les points de S_2S_3; l'arc S_1S_2 a pour correspondante la partie $\sigma_1\sigma_2$ de la droite l; le point S_2 pour correspondants les points de S_3S_1, et ainsi de suite, c'est-à-dire un quadrilatère formant un circuit continu.

Boquel (*E.-J.*). — Étude sur les coordonnées tangentielles et leurs applications. (Suite). — (174-179).

Méthode générale pour passer de l'équation d'une ligne en coordonnées cartésiennes à son équation en coordonnées tangentielles, et réciproquement.

Gino-Loria. — Applications de la Trigonométrie. (Suite). (199-211).

Note de la Rédaction. — L'auteur extrait du Recueil allemand de M. Reidt une série d'exemples de maxima et minima, absolument dépourvus d'élégance, et qui ne peuvent servir qu'à maintenir les élèves dans la voie fâcheuse, déjà trop suivie, qui consiste à appliquer automatiquement des formules algébriques, sans chercher à se rendre compte de l'essence même du problème, un résultat à obtenir étant le seul point qui les intéresse dans la solution cherchée.

Dans la patrie de Fermat, on ne saurait donner, à notre avis, à de tels problèmes que des solutions de la nature de celles que nous allons substituer à celles de l'auteur, pour montrer, une fois pour toutes, la supériorité de la méthode géométrique des « valeurs voisines égales », non seulement comme élégance et comme simplicité, mais aussi comme fécondité généralisatrice.

1° *Entre tous les rectangles qui ont la même diagonale, déterminer ceux de périmètre maximum a et de plus grande surface b.*

Soient AB, A'B' deux positions voisines de la droite, égale à la diagonale donnée, glissant sur les côtés de l'angle droit YOX. Soit C le point du plan dont A et B sont les projections sur les côtés de l'angle droit. Soient encore I l'intersection des deux droites AB, A'B', que l'on sait être la projection du point C sur la droite mobile AB. Les triangles infinitésimaux IAA' et IBB' ont leurs surfaces proportionnelles aux carrés $\overline{IA}^2$ et $\overline{IB}^2$ des segments de AB; les rectangles élémentaires construits, d'une part, sur AA' et AC, d'autre part sur BB' et BC', sont donc entre eux dans les rapports de AI à BI. Le maximum de la surface ayant lieu lors de l'égalité de ces deux éléments, parties excédante et déficiente des deux rectangles voisins, correspondra à la valeur AI = IB, pour laquelle le rectangle est le carré construit sur AB. Soient de plus S et R les projections réciproques de A' sur AB, et de B sur A'B': les longueurs AS et RB' seront égales, puisque AB = A'B' et SB = A'R. Mais, le maximum du périmètre correspondant à BB' = AA', les triangles rectangles infinitésimaux BRB' et ASA' seront égaux et isoscèles, et, par suite, aussi le rectangle AOBC sera encore le carré construit sur AB.

2° *Un quadrilatère a deux côtés parallèles, « et les deux autres égaux »; on en donne une diagonale et la somme des côtés parallèles, et l'on demande* *de trouver, entre tous les quadrilatères qui satisfont à ces conditions, celui dont l'aire est maximum.*

Supprimant la condition des « côtés égaux » qui fait de la figure un parallélogramme, il est géométriquement évident que le maximum correspond à la figure dans laquelle la diagonale est hauteur commune des deux triangles, en lesquels elle partage le trapèze, dont les bases ont une somme constante.

3° *Inscrire dans un secteur circulaire un parallélogramme ayant un angle commun avec le secteur, un sommet sur l'arc du secteur, et dont la surface soit maxima.*

Soient OXYZ le parallélogramme ayant l'angle O commun avec le secteur AOB, et le sommet Y sur le secteur. Soit U le point de l'arc voisin de Y. Le maximum correspond à l'égalité des surfaces du triangle OYU et du parallélogramme YU.YX. La hauteur du triangle doit donc être double de celle du parallélogramme, eu égard à la base commune YU. Donc, si Z est l'intersection de OY par XZ parallèle à YU, c'est-à-dire, si Z est la projection de X sur OY, ce point doit tomber sur le milieu du rayon OY. Le parallélogramme à surface maxima est donc le losange ayant son sommet au milieu de l'arc AB.

4° *Du centre* C *d'un cercle donné on tire un rayon quelconque* CA, *sur lequel on prend un segment arbitraire* CB $= a$; *trouver le plus grand des angles dont le sommet est sur la courbe, et dont les côtés passent par* B *et* C.

Géométriquement, et remplaçant le cercle par une courbe quelconque, on voit que les angles, maxima et minima, dont les côtés passent par A et B, ont leurs sommets aux points de contact, sur la courbe, des cercles tangents que l'on peut lui mener passant par A et B.

5° *Entre tous les triangles ayant la même base, et pour lesquels la somme des deux autres côtés est constante, quel est celui qui a le plus grand angle au sommet.*

Isoscèle (contact d'une ellipse et d'un cercle passant aux deux foyers).

6° *Partager un arc en deux parties telles que a la somme, b le produit, c la somme des carrés des cordes, soient maximum.*

Quelle que soit la courbe, la solution géométrique est immédiate; a, la variation des deux cordes étant égale, leur inclinaison sur l'élément doit être la même; d'où points de contacts entre la courbe et les ellipses dont les deux extrémités de l'arc sont les foyers; b, le produit xy, étant proportionnel au quotient de la surface du triangle par $\sin M$, son maximum correspondra, pour le cercle, à la position de M sur le point de contact de la tangente parallèle à la corde AB; pour toute autre courbe, au point pour lequel la variation du rapport $\frac{\sin M}{H}$ sera nulle; c la somme des carrés des cordes (x, y), étant égale au carré $(AB)^2$ augmenté du produit $xy \cos M$, sera maximum avec ce dernier produit.

Le maximum b est obtenu, dans le cas le plus général, par le contact de la courbe avec les lemniscates ayant pour foyers les extrémités A et B de l'arc. Les diverses constructions géométriques de la tangente, ou la normale, à la lemniscate donnent d'élégantes conditions géométriques du maximum, entre autres celle-ci : « Le produit des deux cordes AM.BM est maximum au point M de la courbe pour lequel la normale est conjuguée harmonique de la bissectrice extérieure de l'angle M, par rapport aux directions des bissectrices intérieures des angles A et B du triangle AMB. »

7° *Entre tous les triangles isoscèles inscrits dans un cercle donné, quel est celui dont a le périmètre, b la surface est un maximum.*

Soit A le sommet; le diamètre du point A sera la médiane, axe de symétrie; soient B l'une des extrémités de la base, et P son milieu. Soit B', projeté en P' sur la médiane, le point voisin du cercle. Le sommet A restant fixe, le maximum *a* a lieu lors de l'égalité des variations de BP et de AP, projections de l'élément BB' sur la base BP et la médiane AP. Donc, pour une courbe quelconque dont AP serait axe de symétrie, le maximum a lieu lorsque le point B est le point de contact d'une tangente, à 45° sur AP.

Maximum *b*. Soit *b* l'intersection de AB' avec la parallèle B*b* à AP. Le maximum *b* aura lieu avec B*b* = 2PP'; donc, lorsque BP sera bissectrice de l'angle de la tangente en M avec la corde BA (même généralité que pour *a*).

8° *La hauteur d'une tour est a*; *sur son sommet est fixé un étendard* BC, *de hauteur b*; *trouver le point du terrain horizontal d'où l'étendard est vu sous l'angle maximum.*

L'application du principe général donne le point X cherché comme contact de l'horizontale AX avec un cercle passant par A et B. D'une manière générale, c'est-à-dire sur un sol varié quelconque, elle le présenterait comme intersection des deux courbes tracées sur le sol de la manière suivante : 1re courbe, dans chaque méridien passant par AB, construire les points K de contact, de la section du sol par le plan méridien, avec les cercles tangents de corde AB; 2e courbe, dans chaque méridien construire les points V où la normale à la surface du terrain est située dans le plan méridien. Les points X d'intersection des courbes K et V sont ceux où le maximum cherché est obtenu.

Boquel (E.-J.). — Étude sur les coordonnées tangentielles et leurs applications. (Suite.). (232-237).

Classe d'une courbe, égale au degré de son équation tangentielle, en général égal à $m(m-1)$; m, degré de la courbe. — Le premier membre de l'équation tangentielle des coniques est la forme adjointe de la forme quadratique ternaire constituant le premier membre de son équation cartésienne homogène, et réciproquement. — Corrélation de dualité entre les principes relatifs aux points des coniques et ceux relatifs à leurs tangentes.

Delpit. — Note sur le quadrilatère inscrit à diagonales orthogonales. (241-249).

La perpendiculaire abaissée du centre sur un côté est égale à la moitié du côté opposé. — Les quatre quadrilatères, en lesquels ces droites partagent le quadrilatère primitif, sont équivalents. — Le centre de gravité est au tiers de la distance du centre au point d'intersection I des diagonales. Ce point I est également distant des projections des quatre sommets sur deux côtés opposés. Le quadrilatère est circonscrit à une ellipse dont le point I et le centre sont les foyers, et dont les tangentes issues des milieux des côtés sont parallèles aux côtés opposés. — Si les diagonales tournent autour de I, le cercle principal et les cercles directeurs de cette ellipse resteront fixes.

Junek. — Théorème d'Arithmétique. (250-251).

Les fractions irréductibles de même dénominateur ont des quotients périodiques dont le nombre de chiffres ne dépend que du dénominateur.

Bourget. — Note sur le crépuscule. (254-256).

La longueur β de la moitié de la nuit, en fonction de la déclinaison δ du Soleil, de la latitude λ du lieu, et de la distance angulaire $\omega = 18°$, de l'arc crépusculaire au-dessous de l'horizon, est donnée par la formule

$$\cos\beta = \operatorname{tang}\lambda \operatorname{tang}\delta + \frac{\sin\omega}{\cos\lambda\cos\delta} = \frac{\sin\delta\sin\lambda + \sin\omega}{\cos\delta\cos\lambda}.$$

Problème de Géométrie. — (Concours d'agrégation 1879). (259-261).

Un triangle ABC étant inscrit dans un cercle S, on considère deux points P et P′ de la circonférence et le point M d'intersection de leurs droites de Simpson. Démontrer que le point M décrit un cercle S′, quand le point C, seul mobile, décrit le cercle S; 2° trouver le lieu des centres ω du cercle S′, lorsque la corde PP′, mobile à son tour, conserve une longueur constante.

Note de la Rédaction. — La première Partie est bien démontrée; mais la seconde donne lieu à des longueurs; il valait mieux déduire de la première partie la construction de ω sur la perpendiculaire au milieu D de QQ′, par l'intersection des rayons $Q\omega$ et $Q'\omega$, tels que l'angle $Q\omega Q' = POP'$ (O centre de S). Donc α étant le milieu de AB et Ω celui de PP′, le rapport de ωD à $O\Omega$ est égal à celui de QQ′ à PP′. La distance $\alpha\omega$ est donc égale à $O\Omega$, et par suite constante.

Ibach. — Note sur les déterminants. (269-277).

Boquel (*E.-J.*). — Étude sur les coordonnées tangentielles et leurs applications. (Suite). (277-281).

Transformation de l'équation tangentielle au moyen de la substitution de la forme adjointe de la substitution linéaire en coordonnées cartésiennes. Applications géométriques. Le lieu des foyers des coniques dont on donne les points de contact sur deux droites est une cubique à point double au point d'intersection des deux droites.

Catalan (*E.*). — Deux problèmes d'Arithmétique. (296-299).

1° De 1 à n, combien y a-t-il de nombres non divisibles par des nombres premiers donnés : $a, b, c, \ldots, k, l$?

$$f(n) = n - \sum\left(\frac{n}{a}\right) + \sum\left(\frac{n}{ab}\right) - \sum\left(\frac{n}{abc}\right) + \cdots;$$

2° La somme $S(n)$ des nombres précédents est donnée par

$$2.S(n) = n(n+1) - \sum a\left(\frac{n}{a}\right)\left[\left(\frac{n}{a}\right)+1\right] + \sum ab\left(\frac{n}{ab}\right)\left[\left(\frac{n}{ab}\right)+1\right] - \cdots.$$

Questions d'examens. (299-308).

Sur l'équation des surfaces du second ordre. (315-319).

Boquel (E.-J.). — Étude sur les coordonnées tangentielles et leurs applications. (Suite). (319-325).

Équation $(uf'_{u_1} + vf'_{v_1} + wf'_{w_1} = 0)$ des points de contact des tangentes (u_1, v_1, w_1) à la courbe $f(u, v, w) = 0$. Les coordonnées des tangentes à la courbe en ses points de rencontre avec la droite (u_0, v_0, w_0) sont les solutions communes des deux équations ci-dessus. Une courbe de la $n^{\text{ième}}$ classe est en général du $n(n-1)^{\text{ième}}$ ordre, sauf les singularités. La condition analytique pour qu'un point $(mu + nv + pw = 0)$, soit sur une courbe $[f(u, v, w)]$ est la relation obtenue en éliminant u_1, v_1, w_1 entre l'équation du point et les équations $\frac{f'_{u_1}}{m} = \frac{f'_{v_1}}{n} = \frac{f'_{w_1}}{p}$; déterminant facile d'après la méthode dialytique Sylvester. Tangentes communes à deux coniques.

Delpit. — Propriétés du tétraèdre à arêtes (opposées) orthogonales. (337-343).

Si quatre des six arêtes d'un quadrilatère sont perpendiculaires deux à deux, les deux autres le sont également. Centre ou point de concours des hauteurs, point qui est aussi point de concours des plus courtes distances des arêtes orthogonales. Le volume est égal au produit de deux arêtes orthogonales par leur plus courte distance. Les milieux des arêtes et les pieds des distances sont douze points d'une sphère. Le centre de gravité est milieu de la distance du centre des hauteurs à celui de la sphère circonscrite. Le centre de gravité des faces forme un tétraèdre homothétique inverse, dont le centre de gravité est le même. Ellipsoïde de révolution inscrit, ayant pour foyers le centre des hauteurs et son symétrique au centre d'une deuxième sphère des douze points, passant par les centres de gravité des faces, le centre des hauteurs et divisant dans le rapport 1 à 2 ses distances aux sommets. Sphère polaire, par rapport à laquelle chaque sommet est pôle de la face opposée, et les arêtes opposées conjuguees entre elles. Relation entre les rayons ρ, ρ', R des sphères polaires, première des douze points, et circonscrite $\rho' = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - \rho^2}$.

Baudoin (F.). — Tout triangle dans lequel les rapports du périmètre aux diamètres des cercles exinscrits sont exprimables en nombres entiers est rectangle. (347-348).

L'auteur fait un élégant usage de quantités et relations auxiliaires, x, y, z étant les distances des sommets A, B, C aux points de contact du cercle inscrit dont le rayon est pris pour unité, d'où $p = (p-a)(p-b)(p-c)$ et par suite $xyz = x + y + z$. Solution $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$; $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$. (Incomplet.)

Pravaz (Ch.). — Conditions de divisibilité d'un polynôme entier par le trinôme du second degré. (357-360).

Boquel (*E.-J.*). — Étude sur les coordonnées tangentielles et leurs applications. (Suite). (360-365).

Équation générale en coordonnées tangentielles homogènes, ou trilatères, des coniques inscrites dans le même quadrilatère que deux coniques $f(u, v)$ et $\varphi(u, v)$ données, $f + \lambda\varphi = 0$. Équation ($f + \lambda MN = 0$) des coniques qui touchent les tangentes menées à ($f = 0$) par les points $M = 0$, $N = 0$. Équation ($MN + \lambda PQ$) des coniques inscrites dans un quadrilatère de sommets M, N, P, Q. ($\lambda PQ + \mu QR + \nu RP = 0$) des coniques inscrites dans un triangle. Des coniques circonscrites au triangle $\Sigma\lambda^2 P^2 - 2\Sigma\lambda\mu PQ = 0$. Des coniques circonscrites à un quadrilatère $\frac{p^2 N^2}{\lambda} + \frac{q^2 P^2}{1-\lambda} - M^2 = 0$; M, N, P étant les équations des points de concours des côtés opposés et des diagonales. Des coniques doublement tangentes à deux coniques f et φ dont P et Q sont les deux points ombilicaux $\mu^2 P^2 + 2\mu(f + \lambda\varphi) + Q^2 = 0$. Les pôles des deux droites de contact sont conjugués harmoniques des points ombilicaux. Des coniques conjuguées par rapport à un triangle $\lambda M^2 + \mu N^2 + \nu P^2 = 0$. Des coniques homofocales de foyers PQ. $PQ + \lambda(u^2 + v^2) = 0$.

Pravaz (*Ch.*). — Somme des puissances semblables des n premiers nombres entiers. (385-388).

$$S^p = \frac{n!}{(n-p)!} \sum_{m=1}^{m=p+1} \frac{S_m^p \times (-1)^{p+1-m}}{m!(p+1-m)!(n-m)}.$$

Morel (*A.*). — Sur le maximum et le minimum de la fraction du second degré. (388-392).

Ibach (*L.*). — Recherches sur une famille de coniques. (408-414).

Le lieu géométrique des points tels que leurs polaires par rapport à deux coniques, U et V, se coupent sous l'angle donné α, est une conique P_α de U, V. Son équation peut s'écrire $P_\alpha = P_0 + \tang\alpha P_{\frac{\pi}{2}} = 0$. Les coniques P_α de U, V sont circonscrites à un même quadrilatère; le lieu de leurs centres est la conique P'_0 des deux coniques P_0 et $P_{\frac{\pi}{2}}$. L'enveloppe des droites dont les pôles sont à une distance angulaire fixe α d'un point donné est une conique dont l'équation tangentielle a la forme $Q_0 + \lambda Q_{\frac{\pi}{2}} = Q_\alpha = 0$. Le lieu des coniques Q est une ligne droite. Les coniques P de deux coniques concentriques passent par le centre de celles-ci.

Systèmes de trois coniques directrices : Les coniques P_α de (U, V), P_β de (V, W) et $P_{\pi-(\alpha+\beta)}$ de (W, U) sont circonscrites au même quadrilatère. Les $\frac{n(n+1)}{1.2} - 2$ conditions de tangence en un même point de n coniques résultent de l'élimination de x, y entre les n équations $U_k = 0$ et les $\frac{n(n-1)}{1.2}$ équations P_0 de $(U_k, U_{k'}) = 0$. Le lieu des points du plan, tels que leurs polaires par rapport à trois coniques forment un triangle de surface constante Σ, est la courbe du sixième degré ayant pour équation $\Sigma . P_{u,v} . P_{v,w} . P_{w,u} = S^2$, où $P_{u,v}$ désigne P_0 de U, V, et S symbolise le déterminant aux dérivées partielles, surface des polaires de (x, y). Le lieu des points, dont les polaires relatives à n coniques forment un polygone de surface donnée, est une courbe de degré $n(n-1)$. Conditions de l'existence d'un point de plan dont les polaires relatives à n coniques forment un polygone régulier (?). L'inclinaison constante d'un côté sur le précédent donne $\frac{n(n-1)}{1.2} - 3$ conditions, le point devant se trouver sur les courbes $P\pi - \frac{2\pi}{n}$ relatives à tous les groupes de deux des coniques.

Boquel (*E.-J.*). — Étude sur les coordonnées tangentielles et leurs applications. (Suite et fin). (414-423).

Les tangentes menées d'un point fixe du plan, à toutes les coniques inscrites dans un quadrilatère, sont en involution. Les sommets de deux angles circonscrits à une conique, et les quatre points de contact, sont sur une même conique; les quatre côtés et les deux cordes de contact enveloppent une autre conique. Les six sommets de deux triangles conjugués à une conique sont situés sur une même conique, et leurs six côtés en enveloppent également une autre. Analogie entre la méthode des polaires réciproques et celle des coordonnées tangentielles.

La classe d'une courbe est abaissée de $p(p-1)$ unités par l'existence de chaque point multiple d'ordre p; de $2+q$ unités par celle de chaque point de rebroussement, en lequel la courbe et sa première polaire ont un contact d'ordre q.

G. de Longchamps. — Résolution géométrique de deux problèmes du quatrième degré sur la parabole. (433-437).

Le segment intercepté sur une droite, entre un diamètre de la parabole et la tangente au point où il rencontre la courbe, est moyen proportionnel entre les deux segments interceptés entre la tangente et la courbe. On construit d'après ce principe les deux points C et C′, où la corde AB, unissant deux points donnés d'une parabole, coupe deux tangentes T et T′ également données; le milieu de CC′ et l'intersection O de T et T′ donnent la direction des diamètres. Après avoir déterminé les points de contact, D et D′, de T et T′, sur les diamètres passant en C et C′, les tangentes en A et B s'obtiennent par leurs sous-tangentes. Donc la construction d'une parabole, dont on donne deux points et deux tangentes, est ramenée à celle d'une parabole dont on connaît quatre tangentes, ou bien deux tangentes et leurs points de contact. Quatre solutions, en associant de toutes les manières possibles les deux points C et les deux points C′, donnés par la relation segmentaire.

De même la construction des quatre paraboles passant par trois points A, B, C et tangentes à une droite T se ramène également à quatre problèmes du premier degré. On détermine le point de contact de T par les points, sur les côtés du triangle ABC, du diamètre de contact.

Bourget (*J.*). — Variation de la fraction du second degré. (438-442).

Ocagne (*M. d'*). — Remarques sur les figures homothétiques et les figures inverses. (449-451).

Geoffroy (*L.*). — Construction graphique directe de deux surfaces de révolution du second degré dont les axes ne se rencontrent pas. (452-454).

Le plan vertical sera choisi parallèle aux axes, et le plan horizontal perpendiculaire à l'un d'eux. On inscrit dans l'une des surfaces une sphère fixe, dans l'autre une sphère variable, et l'on considère l'un des cônes circonscrits aux deux sphères. Il coupe chacune des surfaces suivant deux courbes planes, dont les plans s'obtiendront par la rotation de la figure autour de l'axe vertical de manière à ramener le second axe à être parallèle au plan vertical. Les intersections des plans des sections de l'une et l'autre surface avec le cône sont des droites qui percent le cône en des points communs aux deux surfaces.

Bourget (*J.*). — Maxima et minima de la fraction rationnelle du second degré. (481-486).

Chrétien. — Problème de Géométrie. (491-492).

Étant donnés deux cercles qui se coupent en A, mener un cercle, de centre B, dont deux des intersections C et D avec l'un et l'autre cercle O et O′ soient en ligne droite avec le point A. Joignant B au point A′, symétrique de A par rapport au milieu H de la ligne des centres OO′, la droite BA′ est un peu détournée; la construction est évidente, H étant sur la perpendiculaire au milieu de AI; car QI = AQ′, Q et Q′ étant les projections de O et O′ sur CD. Lorsque le point B se meut sur la circonférence O, la parallèle menée de ce point mobile à la corde CD enveloppe une conique, dont les foyers sont A′ et son symétrique L par rapport à O, et doublement tangente au cercle O.

Tinel. — Solution géométrique de la question : *Construire un triangle connaissant les sommets des trois triangles équilatéraux construits sur les côtés.* (497-498).

Les sommets cherchés sont les milieux des droites joignant respectivement l'un des sommets donnés au sommet opposé dans le triangle équilatéral construit sur la base formée par les deux autres sommets donnés.

Braun (*J.*). — Concours de 1879 à l'École Normale supérieure. (503-511).

Un tétraèdre OABCD est défini par l'angle solide O et les longueurs $4a$, $4b$, $4c$ des arêtes. Les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées se coupent en un point ω. L'ellipsoïde dont ces droites sont des diamètres conjugués est tangent aux six arêtes du tétraèdre. Chercher son intersection avec l'hyperboloïde engendré par la droite qui s'appuie constamment sur les directrices parallèles aux arêtes du tétraèdre menées parallèlement à l'arête suivante. Une génératrice HK de cet hyperboloïde perce l'ellipsoïde en deux points par chacun desquels on mène le plan parallèle au plan tangent à l'ellipsoïde en l'autre point. Trouver le lieu d'intersection de ces plans, qui passent par le centre de l'ellipsoïde.

1° Soient α, β, γ les milieux de OA, OB, OC, et α', β', γ' leurs symétriques par rapport à ω. L'arête BC, parallèle à $\beta\gamma$, est contenue dans le plan tangent en α', lequel est parallèle au plan $\beta\gamma\omega$.

2° Le plan ABC coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse Σ passant en $\alpha'\beta'\gamma'$ et tangente à BC, CA, AB. La conique Σ', suivant laquelle il coupe l'hyperboloïde, passe aux mêmes points. Sa tangente en α' est dans le plan tangent conduit par les génératrices B' et A', c'est-à-dire le plan OBC. La tangente est donc BC, et Σ' coïncide avec Σ. L'intersection se compose donc de Σ et de sa symétrique par rapport à ω.

3° Le lieu est le cône de sommet ω, ayant Σ pour base.

Morel (*A.*). — Maxima et minima de la fraction du second degré. (529-537).

Bourget (*J.*). — Sur la classification des permutations de *n* objets. (541-547).

Les P_n arrangements de n objets (chiffres) sont d'abord classés en n groupes, spécifiés par le chiffre inscrit le premier. Dans chaque groupe on distingue $(n-1)$ groupes secondaires par la valeur du second chiffre, et ainsi de suite; on classe tous ces groupes en inscrivant d'abord les chiffres moindres, et ensuite les chiffres croissants.

1° Trouver la permutation de rang donné ρ. Chaque groupe contenant P_{n-1} arrangements, le premier chiffre de la permutation cherchée $(q+1)$ s'obtiendra par la division de ρ par P_{n-1}. Soit $\rho = q.P_{n-1+r}$. Le second chiffre $(q'+1)$ résultera de même de $r = q'P_{n-2}$, et ainsi de suite.

2° Rang d'une permutation donnée

$$\rho = 1 + q^{(n-2)}P_1 + q^{(n-3)}P_2 + \ldots + qP_{n-1};$$

3° Nombre de dérangements d'une permutation donnée $\Delta = \Sigma q$.

Lemoine. — Couper un triangle par une transversale de manière que trois segments non consécutifs soient égaux. (548).

Soit H l'intersection de la médiane de AC et de la bissectrice intérieure de l'angle A; K celle de la médiane de CB et de la bissectrice extérieure de l'angle C; M et N les intersections de AC par le segment capable de $\frac{B}{2}$, décrit sur HK; ils appartiennent chacun à deux des droites cherchées, au nombre de douze. La ligne KC coupant le segment en J, et KJ rencontrant AC en I, on a CI = CB. Le cercle passant en H, K et au centre du cercle exinscrit tangent au côté BC est le symétrique, par rapport à AK, du cercle HKMN.

Le Pont (*H.*). — Sur les courbes $y^m = mpx^n$. (555-557).

Les points de contact des tangentes issues d'un point M sont sur une hyperbole passant à l'origine et au point M; cette hyperbole, indépendante du paramètre p, enveloppe une courbe semblable à celle du point M, lorsque celui-ci se déplace en décrivant une courbe du genre considéré. Si M reste fixe, ainsi que la différence $(m-n)$, le lieu du centre de l'hyperbole est une droite. L'enveloppe de cette droite, quand M décrit une courbe étudiée, est une courbe semblable.

Surfaces $\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^p = 0$. Si par un point P on mène les normales aux cônes du second degré de même sommet et d'axes de même direction, leurs pieds seront sur la sphère de diamètre OP. Si par P on mène les normales aux paraboloïdes de sommet O et d'axe OH, leurs pieds sont sur un ellipsoïde de révolution, dont l'axe de révolution est parallèle à OH, ayant OP pour un de ses diamètres.

NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE (1).

Tome VII; 1880.

Heringa (Dr *P.-M.*). — Considérations sur l'application de l'Analyse aux sciences physiques. (1-32).

Van Heulen (*J.*). — Étude mécanique de quelques courbes. (33-58).

L'auteur étudie d'un point de vue mécanique la cycloïde, l'épicycloïde, l'hypocycloïde, la spirale d'Archimède, la développante du cercle, l'ellipse, la parabole et quelques courbes remarquables situées sur un cylindre de révolution; il engendre ces courbes par la composition de deux mouvements simples, par exemple l'ellipse par la composition de deux vibrations rectangulaires de même durée et de même amplitude. Il termine par des considérations théoriques sur les rayures des armes à feu.

Hollman (*P.-J.*). — Quelques applications géométriques de la théorie des solutions singulières des équations différentielles du premier ordre. (59-77).

Déduction de la solution singulière de l'intégrale générale et de l'équation différentielle; cinq problèmes où il s'agit de trouver des courbes, dont les normales satisfont à des conditions données. (*A suivre.*)

Van den Berg (*F.-J.*). — Sur deux systèmes de trois cercles situés symétriquement par rapport à un triangle et sur deux systèmes de trois droites qui jouissent de la même propriété. (78-90).

La solution d'une question d'équilibre (2), l'équilibre d'un triangle donné

(1) Voir *Bulletin*, IV_2, 172.
(2) Voir *Bulletin*, IV_2, 172.

dont les sommets s'appuient sur les faces d'un angle trièdre donné, engage l'auteur à étudier deux cas particuliers de la transformation birationnelle par l'analyse en se servant des coordonnées trilinéaires. (Comparez *Bulletin*, t. VI, p. 153).

Janse (*L.-Bx.*). — La navigation suivant un arc de grand cercle. (91-101).

A l'aide d'une nouvelle Table des différences en azimut de la loxodromie et du grand cercle, l'auteur développe une neuvième méthode approximative de la navigation suivant un arc de grand cercle; après avoir donné les déviations journalières pour la route de cap Clear à Saint-John's New-Foundland, il étudie quelques formules trigonométriques, qui lui ont servi de base dans le calcul de la Table en question.

Schäfer (*J.-H.*). — Réduction des formules qui déterminent, dans la question des inondations. la quantité d'eau qui entre, à d'autres qui font connaître en peu de temps le temps nécessaire à l'inondation totale pour le cas où l'eau est affectée par le flux et le reflux (*suite*) (¹). (102-109).

III. Formules pour le cas où la hauteur d'entrée est divisée en cinq ou dix parties. — IV. Application des formules au cas de l'inondation d'un polder déterminé. — V. Examen comparatif de deux séries de formules.

Rasch (*J.-W.*). — La cubature d'un cylindre. (117-149).

L'auteur cherche, au point de vue de l'étalonnage, la méthode la plus exacte pour la détermination de la capacité d'un corps dont la forme est sensiblement celle d'un cylindre droit. Il s'occupe successivement de la mensuration d'une section perpendiculaire à l'axe, d'une section par l'axe en mesurant un nombre pair ou un nombre impair d'ordonnées, de la détermination de la hauteur moyenne, du rapport rationnel des diamètres et des hauteurs mesurées, etc.

Hollman (*P.-J.*). — Quelques applications géométriques de la théorie des solutions singulières des équations différentielles du premier ordre (*suite*). (150-163).

Solution de quelques problèmes qui, pour la plupart, se rapportent à la recherche de la première podaire positive ou négative d'une courbe donnée.

Van Geer (*P.*). — Sur le mouvement de systèmes liés à des conditions qui dépendent du temps. (164-206).

I. Littérature (Bernoulli, 1742; Clairaut, Euler, 1746; Ampère, 1830; Vieille, 1849; Resal, 1872; Mischer, 1876). — II. Le théorème du mouvement du centre de gravité et le théorème des aires restent intacts, tandis que le théorème des forces vives et le principe de la moindre action dans sa forme originale ne sont

---

(¹) Voir *Bulletin*, IV_2, 173.

plus applicables. — III. Cependant, le dernier principe reste de rigueur dans sa forme amplifiée donnée par Hamilton; déduction des équations différentielles du mouvement dans la forme donnée par Hamilton pour ce cas exclu par lui; déduction de la fonction caractéristique d'Hamilton au moyen de la seconde forme des équations du mouvement donnée par Lagrange. — IV. Critique d'un travail de M. Grinwis, *Sur une détermination simple de la fonction caractéristique* [1]. — V. Quelques exemples élémentaires. — VI. Mouvement d'un point sur une droite qui se meut d'une manière quelconque dans l'espace. (*A suivre.*)

Krantz (*H.-J.*). — Évaluation d'une intégrale définie. (207-212).

En suivant la route connue frayée par Poisson pour l'évaluation de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx,$$

l'auteur trouve

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi\sqrt{\cos\varphi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}}=\pi;$$

ensuite il détermine la même intégrale au moyen de la théorie des intégrales elliptiques et encore au moyen d'une formule de réduction donnée par Euler.

Van Leeuwen (*J.-H.*). — Division de l'angle en un nombre quelconque de parties égales. (213).

L'auteur donne une solution de cette question à l'aide d'une épicycloïde déterminée.

Landré (*C.-L.*). — Sur la fonction Φ de la méthode des moindres carrés. (214-219).

Liste par ordre de matières des articles de quelques journaux mathématiques. (110-116 et 220-230).

Tome VIII; 1881.

Van Geer (*P.*). — Sur le mouvement de systèmes liés à des conditions qui dépendent du temps (*suite*) [2]. (1-22).

VII. Mouvement d'un point sur la surface d'une sphère dont le centre est fixe, tandis que le rayon varie avec le temps. — VIII. Considération de quelques cas spéciaux du mouvement d'un système.

Hollman (*P.-J.*). — Quelques applications géométriques de la

(1) *Comptes rendus de l'Académie royale d'Amsterdam*, section de Physique, 2e série, t. XIII.

(2) *Voir* le Tome précédent.

théorie des solutions singulières des équations différentielles du second ordre. (23-56).

Définition des solutions simplement singulières et des solutions doublement singulières; trois méthodes pour la déduction des solutions singulières des équations différentielles du second ordre; quelques problèmes où il s'agit de trouver une courbe dont les coordonnées du centre de courbure satisfont à une relation donnée; recherche de la développante; étude sur le problème indéterminé de la détermination de l'équation différentielle du second ordre, la solution simplement singulière étant donnée.

Michaëlis (Dr *G.-J.*). — Du mouvement des liquides sous l'influence du frottement. (57).

L'auteur étudie l'influence du frottement sur des tourbillons de liquide dans la supposition qu'ils se trouvent sous l'action de forces qui admettent un potentiel. Il termine par le mouvement stationnaire d'un ellipsoïde de révolution qui se meut dans la direction de son axe de révolution.

Legebeke (Dr *G.-J.*). — Sur une propriété des racines d'une équation dérivée. (75-80).

Extension du théorème de Rolle sur le plan [1].

Mounier (*G.-J.-D.*). — Une propriété particulière des quaternions. (81-88).

Schols (*Ch.-M.*). — Étude des projections des Cartes géographiques. (113-223) [2].

« Parmi les paraboles de même foyer et de même axe dans un plan, celles qui tournent leur sommet vers le même côté sont coupées à angle droit par les autres qui tournent leur sommet vers l'autre côté. On demande si cette propriété peut servir de base à la composition de Cartes géographiques où les méridiens et les parallèles sont des arcs de parabole. »

L'auteur résout de la manière la plus satisfaisante cette question, posée par la Société de Mathématiques hollandaise. Il montre que la propriété énoncée peut servir de base à la représentation plane d'une petite partie de la surface terrestre, mais qu'il y a d'autres méthodes plus excellentes sous plus d'un point de vue. Posant les conditions : 1° qu'il y a conformité absolue des parties infinitésimales; 2° que les variations de l'échelle sont aussi peu considérables que possible, et 3° que les formules pour le calcul des coordonnées rectangulaires des points donnés par la longitude et la latitude sont simples et ne s'opposent pas à une évaluation exacte, il étudie, dans la supposition générale d'une Terre de révolution à méridien quelconque, encore quatre autres manières de représentation, la projection circulaire de Lagrange, une projection où les méridiens

(1) Une traduction française de cette étude est insérée dans les *Archives néerlandaises*, t. XVI.

(2) Sujet de prix proposé par la Société (1880, n° 3).

et les parallèles sont des ellipses et des hyperboles homofocales, une projection déduite de la projection parabolique à l'aide de l'introduction d'un paramètre nouveau dans les formules, qui permet d'adapter d'avantage la carte au terrain et une projection non symétrique à déviation minimum. De plus, l'auteur s'est donné la peine d'appliquer ses théories à la composition d'une carte des Pays-Bas au moyen de nombreuses Tables.

Liste par ordre de matières des articles de quelques journaux mathématiques. (89-112).

Tome IX; 1882.

Van den Berg (*F.-J.*). — Sur la relation entre les racines d'une équation et celles de l'équation dérivée. (1-14).

Démonstration géométrique et statique du théorème de Rolle étendu sur le plan ([1]).

Van den Berg (*F.-J.*). — Sur la différence azimutale entre l'arc du grand cercle et la loxodromie entre deux lieux voisins de la Terre sphérique au point de départ. (15-31).

Critique du travail de M. Janse ([2]), *La navigation suivant un arc de grand cercle*, par rapport à quelques formules approximatives.

Van den Berg (*F.-J.*). — Sur un problème géométrique de la théorie des probabilités. (32-59).

L'auteur s'occupe du problème : « Quelle est la probabilité qu'une droite qui coupe un cercle donné coupe encore un autre cercle donné dans le même plan ? » posé et résolu par M. Schoute ([3]). Il démontre que ce problème — de même qu'une quantité considérable de problèmes analogues — admet deux points de vue différents par rapport à la distribution des droites dans le plan : ou bien cette distribution ne dépend nullement de la première courbe, ou bien il y a un rapport intime entre la distribution des droites dans le plan et cette première courbe. Il fait voir qu'il n'est pas permis d'égaliser deux résultats obtenus dans ces suppositions différentes, comme l'a fait M. Schoute. En divisant de trois manières différentes le nombre doublement infini des droites du plan dans un nombre infini de systèmes simplement infini — manières qu'il caractérise par les noms *radiale, parallèle* et *concentrique* — l'auteur obtient, dans la dernière des deux suppositions, trois intégrales définies dont il démontre l'égalité au moyen de leurs dérivées.

Van den Berg (*F.-J.*). — Remarque par rapport à la relation

([1]) *Voir* le tome précédent.
([2]) Voir le tome précédent.
([3]) Voir *Bulletin*, VI_2, 180.

entre les racines d'une équation et celle de l'équation dérivée. (60).

Question de priorité.

Janse (*L.-Bx.*). — Sur le système de distribution de la vapeur des frères Sulzer de Winterthur. (61-86).

Étude de la courbe cordiforme décrite par le point régulateur de l'action des soupapes.

Paraira (Dr *M.-C.*). — Sur la figure qu'on obtient par la description de parallélogrammes sur les côtés d'un triangle. (87-96).

Paraira (Dr *M.-C.*). — Théorème de Stéréométrie analogue au théorème de Pappus. (97).

Stieltjes (*F.-J.-Jr.*). — Quelques théorèmes sur les séries. (98-106).

L'auteur généralise un théorème de M. Frobenius (*Journal de Borchardt*, t. LXXXIX, p. 242-244) et en démontre l'utilité dans les applications.

Stieltjes (*F.-J.-Jr.*). — Remarques sur les dérivées d'une fonction à une seule variable. (107-111).

Stieltjes (*F.-J.-Jr.*) — Sur la transformation de la fonction périodique $A_0 + A_1 \cos\varphi + B_1 \sin\varphi + \ldots + A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$. (111-116).

Schoute (*P.-H.*). — Sur deux cas particuliers de la transformation birationnelle. (117-140).

Une traduction de ce travail a paru dans le *Bulletin* (1).

Janse (*L.-Bx.*). — Sur la partie de la surface sphérique du Soleil couverte par la Lune à l'occasion d'une éclipse. (*A suivre*) (2). (141-179).

Stieltjes (*F.-J.-Jr.*). — Sur le caractère du nombre 2 envisagé comme reste quadratique. (193-195).

Stieltjes (*F.-J.-Jr.*). — Démonstration du théorème que chaque fonction rationnelle entière a une racine. (196-197).

---

(1) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 153.

(2) Sujet de prix proposé par la Société.

Simplification de la troisième démonstration du théorème par Gauss.

Stieltjes (F.-J.-Jr.). — Sur un algorithme pour le moyen géométrique. (198-211).

Démonstration de quelques théorèmes donnés par l'auteur dans une annotation qui se trouve dans un Mémoire inséré par lui dans le *Journal de Borchardt*. (T. LXXXIX, p. 343).

Liste par ordre de matières des articles de quelques journaux mathématiques. (212-228).

Communications faites aux jours de séances de la Société. (189-192.)

JORNAL DE SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS, publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira, professor de Mathematica na Universidade de Coimbra, Socio correspondente da Academia real das Sciencias de Lisboa e da Sociedade de Sciencias physicas naturaes de Bordeaux [1]. Volume IV. — Coimbra, imprenza da Universidade, 1882-1883.

Martins da Silva (J.-A.). — Sur quelques formules nouvelles relatives aux racines des équations algébriques. (3-38).

Le savant mathématicien portugais a écrit en français l'important Mémoire indiqué dans les deux lignes qui précèdent. Il l'a divisé en quatre parties. Dans la première, il donne « une formule intégrale relative à une des racines imaginaires des équations algébriques ». Dans la seconde, il donne d'autres « formules intégrales relatives à la somme des puissances semblables des racines et au logarithme de la racine imaginaire d'une équation algébrique ». Dans la troisième, il traite de la « formule qui donne une des racines imaginaires de l'équation algébrique ». Enfin, dans la quatrième, il fait voir « comment on détermine les autres racines imaginaires de l'équation algébrique proposée ».

L'auteur a fait précéder son travail d'un rapide aperçu historique de la résolution des équations de degrés supérieurs au quatrième, dans lequel il cite Newton, Waring, Tschirnhaus, Euler, Lagrange, Bézout, Vandermonde, Gauss, Abel, Wantzel, E. Galois, Steiner, Hesse, Kronecker et Hermite.

Schiappa Monteiro (A.). — Sur la division en parties égales de la distance entre deux points et de la circonférence, à l'aide du compas ordinaire. (39-52).

De la question ainsi énoncée : « Étant donnés deux points a et b, déterminer avec le compas ordinaire le point milieu m de la distance qui les sépare »,

---

[1] Voir *Bulletin*, V_2, 110.

M. Schiappa Monteiro n'a pas donné moins de quatre solutions distinctes. Puis il a résolu la question plus générale qui suit : « Étant donnés deux points a et b, diviser en un nombre quelconque de parties égales la distance qui les sépare, en employant le compas ordinaire ». Enfin, passant à la circonférence du cercle, il a résolu ce problème : « Étant donnée une circonférence de cercle, la diviser en quatre, cinq, huit, dix, douze, etc., parties égales, en employant simplement le compas ordinaire ».

Birger Hansted (*M.*). — Généralisation de la fonction X_n de Legendre. (53-61).

Gomes Teixeira (*F.*). — Bibliographie. — Mélanges de Calcul intégral, par Joaquim Gomes da Silva; Leipzig, 1882. (62-64).

Ponte Horta (*F. da*). — Quelques propriétés des coniques. (65-86).

Ce travail contient l'exposé et la démonstration de douze théorèmes, avec figures dans le texte et planches; il se termine par une Note étendue relative au sixième de ces théorèmes. Il a pour but de donner une idée générale d'une étude publiée précédemment dans le *Journal des Sciences mathématiques, physiques et naturelles* de l'Académie royale des Sciences de Lisbonne, sous le titre « Quelques propriétés des coniques, déduites de leur génération parallélogrammique ».

Leite Pereira da Silva (*Duarte*). — Sur quelques intégrales indéfinies. (87-90).

Les intégrales dont M. Edouard Leite Pereira da Silva s'occupe dans ce Mémoire sont celles qui sont indiquées à la p. 260 du *Cours d'Analyse* de M. Hermite, dont les Ouvrages sont fort goûtés en Portugal.

Gomes Teixeira (*F.*). — Bibliographie. — 1° *E.-N. Legnazzi* : Commemorazione del conte Giusto Bellavitis. — 2° *E.-N. Legnazzi* : Aggiunte illustrative alla commemorazione del prof. conte G. Bellavitis; Padova. — 3° A sommadora *Mesnier*; Porto, 1881. — 4° *R. Mesnier*, O Arithmotechnico; Porto, 1882. — 5° *C. Stephanos*, Sur quelques propriétés du système de trois figures égales situées dans un même plan. (91-94).

1° *L'Éloge du comte Juste Bellavitis* contient le discours que le professeur Legnazzi, de Padoue, prononça, le 6 décembre 1880, pour célébrer les éminentes qualités de Bellavitis. Ce discours éloquent est suivi de cinquante-deux notes remplies de particularités intéressantes sur la vie d'un homme qui fut, comme le dit Gomes Teixeira, tout à la fois grand mathématicien, grand physicien, grand professeur et grand citoyen. Dans les dernières années de sa vie, Bellavitis entretint une correspondance scientifique avec le directeur du *Journal des Sciences mathématiques et astronomiques* de Coïmbre, et celui-ci, tout naturellement, fut des premiers à lire l'Éloge prononcé par Legnazzi. Il l'a lu et relu plus d'une fois, toujours avec le plus vif intérêt, et il engage à suivre son exemple tous ceux qui ne l'ont pas encore fait.

2° Legnazzi a donné un Supplément à son Éloge du professeur comte Bellavitis. Dans ce Livre important, publié à Padoue en 1881, Legnazzi expose, d'une manière tout à fait simple et élémentaire, les principales découvertes de Bellavitis et les range méthodiquement sous cinq Chapitres, savoir : Chap. I, Equipollences. — Chap. II, Imaginaires. — Chap. III, Résolution des équations. — Chap. IV, Quaternions. — Chap. V, Logismographie (ou Calculographie) [1].

3° *L'additionneuse Mesnier;* Porto, 1881. Comme son titre l'indique, cette brochure de M. Raoul Mesnier donne la description d'un appareil ingénieux de son invention, pour additionner ou sommer les nombres. M. Gomes Teixeira reconnaît que l'emploi de cet instrument est simple et commode, et qu'ainsi il peut être très utile dans les maisons de commerce où l'on a souvent à faire de grandes additions de nombre.

4° *Raoul Mesnier : l'Arithmotechnicien;* Porto, 1882. Dans cette seconde brochure, M. Raoul Mesnier décrit l'instrument qu'il a imaginé pour faire, non plus seulement l'addition, mais toutes les opérations arithmétiques. M. Gomes Teixeira fait des vœux pour que cette machine soit promptement réalisée dans la pratique.

5° *Stephanos.* Sur quelques propriétés du système de trois figures égales situées dans un même plan. Cette Note importante de Géométrie a été publiée dans le *Bulletin de la Société philomathique de Paris.*

Schiappa Monteiro (*A.*). — Note sur la génération d'une conique au moyen du cercle ou d'une autre conique, et sur d'autres études géométriques. (95-108).

M. Schiappa Monteiro a écrit son Mémoire en français et l'a divisé en deux parties. Après s'être occupé de la génération des coniques, il revient, vers la fin de la seconde partie, sur un problème qui avait été proposé (t. I, p. 80 du Journal de M. Gomes Teixeira) dans les termes suivants : « Mener par un point O, donné dans le plan d'un cercle, une transversale Omn, telle que les distances de ce point à ceux d'intersection m et n avec le cercle soient dans un rapport donné $\frac{m}{n}$ ». M. Zeferino Candido en a donné une solution qui a été publiée, t. I, p. 84, du Journal de M. Gomes Teixeira, mais M. Schiappa Monteiro en donne, à son tour, une autre solution qui est très élégante.

Leite Pereira da Silva (*Duarte*). — Dérivées d'ordre quelconque de y par rapport à x, quand on a $f(x,y)=0$. (109-118).

Étant donnée une fonction implicite à deux variables $f(x, y) = 0$, les formules déduites par Gomes Teixeira ont fait connaître la valeur de $y^{(n)}$ en fonction de $y^{(n-1)}$, ... [2], M. Édouard Leite Pereira da Silva en déduit, à son tour, une formule qui nous donne la valeur de $y^{(n)}$ directement en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, ...

---

[1] En portugais, *logismo* signifie : calcul, supputation.

[2] Voir *Giornale di Matematiche* de Battaglini, vol. XVIII.

Gomes Teixeira (*F.*). — Bibliographie : 1° *H.-F. Barros*, Elementos de Trigonometria rectilinea; Lisboa, 1882. 2° *F.-A. de Brito Limpo*, Algumas palavras sobre a necessidade da determinação directa da longitude geographica de um dos nossos observatorios pelos processos electricos; Lisboa, 1882. 3° *Marcus Baker*, Alhazen's problem.

1° Les *Éléments de Trigonométrie rectiligne*, par Barros, sont, au jugement de M. Gomes Teixeira, qui les recommande à tous les professeurs de Mathématiques élémentaires, un excellent livre, écrit avec beaucoup d'ordre et de clarté en faveur des jeunes gens qui fréquentent les établissements d'instruction secondaire.

2° M. de Brito Limpo, bien connu en Portugal par ses travaux sur la Géodésie, a publié récemment un opuscule qu'il a intitulé : *Quelques mots sur la nécessité de déterminer directement, par les procédés électriques, la longitude géographique de l'un de nos observatoires.* Le savant géodésien montre que la longitude des observatoires portugais relativement aux principaux observatoires de l'Europe n'est pas encore connue avec toute la rigueur que la Science moderne exige; il expose les tentatives faites pour résoudre cet important problème, et insiste pour que les astronomes portugais le résolvent, en déterminant par les procédés électriques la différence de longitude entre l'observatoire de Tapada d'Ajuda et celui de Madrid.

3° M. Marcus Baker a publié, dans le quatrième volume de l'*American Journal of Mathematics*, un article qu'il a intitulé : *Alhazen's problem* (le Problème d'Al Hazen), du nom du célèbre mathématicien arabe, auteur d'un Traité d'optique bien connu.

Dans cet article, M. Baker expose d'abord la liste des travaux qui ont été publiés sur cet important problème d'Al Hazen, dont voici l'énoncé :

De deux points placés dans le plan d'un cercle, tirer des lignes droites qui se rencontrent en un même point de la circonférence et fassent des angles égaux avec la tangente qui passe en ce point.

Ensuite il étend ce problème au cas où le cercle est placé sur une sphère, et où il s'agit, par deux points de la sphère, de tracer des arcs de grand cercle qui fassent des angles égaux avec le cercle donné.

Rodrigues (*J.-M.*). — Sur la formule de Lagrange. (121-176).

Après avoir exposé rapidement les travaux les plus importants de Laplace, Burmann, Wronski, Cauchy, Gomes Teixeira, Rouché sur cette formule de Lagrange qui constitue un théorème fondamental de la théorie générale des fonctions, le jeune sous-lieutenant d'artillerie expose son Mémoire dont l'objet est de généraliser la formule de Lagrange, en donnant le développement en série d'une fonction Fx d'une variable x, définie par l'équation $fx \pm \alpha.\varphi x = 0$, et, comme conséquence immédiate, d'exprimer par des intégrales définies la génération des racines des équations algébriques ou transcendantes.

O'Neil de Medeiros (*J.-C.*). — Sur un problème d'Algèbre élémentaire. (177-184).

Étant donnée entre x et z la relation $z = x^1 + x^{-1}$, il s'agit d'en déduire le développement de $x^m + x^{-m}$.

Gomes Teixeira (*J.*). — Bibliographie : 1° *M. da Terra Pereira Vianna,* Influence des charges en mouvement sur les poutres droites. — 2° *Ch. Hermite,* Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris pendant le 2e semestre de 1881 à 1882; rédigé par M. Andoyer; librairie A. Hermann, 1882. — 3° *H. Brocard,* Étude d'un nouveau cercle du plan du triangle. — 4° *J. Frenet,* Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal, 4e édition; Paris, 1882. — 5° *P. Mansion,* Introduction à la théorie des déterminants, 2e édition; Gand, 1882. (185-189).

1° La question traitée par M. da Terra Pereira Vianna est importante à cause des applications qu'elle a dans la construction des ponts métalliques; elle fut écrite par l'auteur lors du concours pour l'obtention d'une chaire à l'École Polytechnique de Porto, chaire qu'il occupe aujourd'hui. Notons en passant que, dans le cours de son Mémoire, M. da Terra Pereira Vianna a relevé une erreur commise par MM. Philipps et Renaudot, deux de nos ingénieurs les plus distingués.

2° Dès le début de son article bibliographique, l'éminent professeur de l'Université de Coïmbre rend un éclatant et légitime hommage au travail du professeur de la Sorbonne : « M. Andoyer », dit-il, « rend un grand service à la Science en recueillant les savantes leçons de M. Hermite à la Faculté des Sciences de Paris. Ceux qui n'ont pas le bonheur d'entendre ce grand mathématicien pourront du moins, par la lecture de cet Ouvrage, se faire une idée de la hauteur de l'enseignement de l'illustre professeur. »

3° L'*Etude d'un nouveau cercle du plan d'un triangle*, par M. H. Brocard, est une étude intéressante qui a été publiée dans les *Actes de l'Association française pour l'avancement des Sciences*, congrès d'Alger.

4° Le *Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal* de M. J. Frenet est un livre très recommandable, dit Gomes Teixeira, non seulement par l'élégance de la majeure partie des solutions, mais encore par les renseignements précieux qu'il fournit à propos de certaines questions demeurées fameuses.

5° L'*Introduction à la théorie des déterminants* a été écrite par M. Paul Mansion pour servir aux établissements d'instruction secondaire de la Belgique et pour préparer les élèves à comprendre la théorie générale des déterminants. Ce livre est divisé en trois Chapitres : Chap. I, Définitions et propriétés; Chap. II, Calcul des déterminants; Chap. III, Applications. M. Paul Mansion, professeur de Mathématiques à l'Université royale de Gand, vient d'être élu membre correspondant de l'Académie des Sciences, des Lettres et des Arts de Belgique.

Martins da Silva. — Solution de la question proposée n° 21. (190-191).

L'énoncé de cette question n° 21 est le suivant : « Trouver les solutions entières de l'équation $x^y = y^x$ sans avoir recours aux logarithmes.

QUESTIONS PROPOSÉES, nos 22, 23, 24. (191).

Ces trois questions, nos 22, 23, 24, sont proposées : la première, par M. Schiappa Monteiro ; la seconde, par M. Gomes Teixeira ; la troisième, par M. Birger Hansted, de Copenhague. Voici les énoncés de ces trois questions :

1° Prouver synthétiquement que les surfaces courbes, engendrées par une droite qui se meut en s'appuyant sur trois directrices rectilignes, sont du second ordre, et déduire les propriétés principales de ces surfaces, spécialement au point de vue de ce mode de génération.

2° Sommer la série

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{2^i x}{e^{2^i . x}+1}.$$

3° Prouver qu'il y a un nombre infini de manières de développer une fraction périodique simple en une série de la forme

$$a\,10^{-b}+ma\,10^{-2b}+m^2a\,10^{-3b}+m^3a\,10^{-4b}+\ldots.$$

AR. M.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von L. KRONECKER und K. WEIERSTRASS (¹).

Tome XCI; 1881.

Stahl (Wilhelm). — Le système de rayons de troisième ordre et de deuxième classe. (1-22).

Dans son Mémoire fondamental *Sur les systèmes algébriques de rayons* (*Mémoires de l'Acad. de Berlin,* 1866), M. Kummer a le premier démontré l'existence de sept systèmes essentiellement différents de rayons du second ordre sans courbes focales, et en même temps il y a développé les plus importantes des relations qu'ils ont avec leurs surfaces focales. Plus tard (*Journal,* t. LXXXVI ; *Bulletin,* 2e série, IV_2, p. 41), M. Reye a enseigné à construire, par un procédé de la Géométrie synthétique, les systèmes de la seconde classe, réciproques de ceux qu'a étudiés M. Kummer. Actuellement M. W. Stahl donne une nouvelle construction simple d'un des systèmes de rayons établis par la recherche de M. Kummer, et sa méthode fait ressortir aussi bien la relation où sont entre eux les systèmes de rayons du troisième ordre et de deuxième classe qui touchent une surface focale commune, que la construction des points et plans de la surface focale. Voici cette construction :

Soient donnés dans un plan (01) deux systèmes plans réciproques (0) et (1), tels qu'une droite l_0 corresponde à un point quelconque L_1 et réciproquement ; de plus soient donnés dans les plans α et β deux faisceaux projectifs de rayons A et B qui ont un rayon commun (partant la droite qui joint leurs centres coïncide avec la droite, intersection de leurs plans). Eh bien, une droite quelconque l_0 du plan (01) percera les deux plans α et β, et rencontrera donc un rayon de chacun des deux faisceaux ($A\alpha$) et ($B\beta$) : construisons le rayon $l^{(0)}$ qui passe par le point L_1, élément de (01) et réciproque de $l_{(0)}$, et qui rencontre les mêmes deux rayons de ($A\alpha$) et de ($B\beta$) que $l_{(0)}$: l'ensemble de tous les rayons $l^{(0)}$ forme un système Σ_0 de rayons de troisième ordre et de deuxième classe.

§ 1. Construction du système de rayons. — § 2. Les points et plans singuliers de Σ_0. — § 3. Le système de rayons Σ_1. — § 4. Les quatre systèmes de rayons Σ_2, Σ_3, Σ_5, Σ_7. — § 5. La surface focale des systèmes de rayons. — § 6. La construction de M. Reye. (Les théorèmes de M. Reye sont complétés). — § 7. Cas particuliers. (Un système particulier qui est d'importance dans la théorie des polaires des complexes du second ordre).

Mangoldt (*Hans von*). — Sur les points situés sur des surfaces à courbure positive, et tels que les lignes géodésiques partant de ces points ne cessent jamais d'être des lignes de longueur minimum. (23-53).

Le Mémoire prend pour point de départ ce passage des *Leçons de Dynamique* de Jacobi :

« Si, à partir d'un point d'une surface, on trace des lignes de longueur minimum, il peut se présenter ces deux cas : ou deux plus courtes lignes, infiniment voisines, continuent à marcher l'une à côté de l'autre sans se couper, ou elles se rencontrent de nouveau, et alors la continuité de tous les points d'intersection en forme l'enveloppe. Dans le premier cas, les plus courtes lignes ne cessent jamais d'être de longueur minimum ; dans le second, elles ne le sont que jusqu'au point de contact avec l'enveloppe.

» Le premier se présente, comme cela s'entend, sur toutes les surfaces développables; car dans le plan les droites issues d'un point ne se coupent point une seconde fois; de plus, j'ai trouvé qu'il a lieu sur toutes les surfaces concavo-convexes, c'est-à-dire sur celles où deux sections normales, perpendiculaires l'une à l'autre, ont leurs rayons de courbure de deux côtés opposés, par exemple, sur l'hyperbole à une nappe et sur le paraboloïde hyperbolique. Cependant cela ne veut pas dire qu'il ne puisse pas y avoir de surfaces concavo-concaves qui appartiennent à cette catégorie; du moins l'impossibilité n'en a-t-elle pas été démontrée. Un exemple de la seconde espèce est fourni par l'ellipsoïde de rotation. »

La question que Jacobi a laissée indécise a donné lieu à plusieurs recherches; nous n'en citerons ici que la dissertation inaugurale de M. A. von Braunmühl, *Ueber geodätische Linien auf Rotationsflächen und jene Einhüllenden derselben, welche von allen durch einen Punkt gehenden kürzesten Linien gebildet werden;* München, 1878. Un extrait de cette thèse se trouve dans les *Mathematische Annalen,* t. XIV (*Bulletin,* 2e série, IV_2, p. 222).

M. von Mangoldt s'occupe surtout des surfaces à courbure positive pour lesquelles la question n'a pas encore été étudiée assez complètement. D'après ce géomètre il faut distinguer deux sortes de points : 1° des points tels que, parmi toutes les lignes géodésiques partant d'eux, il n'y ait pas deux lignes infiniment voisines qui se coupent; et 2° des points tels que, parmi les lignes géodésiques partant d'eux, il y en ait du moins quelques-unes qui soient coupées par les lignes infiniment voisines. Ces points sont nommés points de *première* et de *seconde espèce.*

Si l'on borne l'étude aux surfaces qui sont dépourvues de singularités, on trouve d'abord qu'une surface à *curvatura integra* ne peut contenir des points de première espèce que lorsque sa *curvatura integra* n'est pas supérieure à la moitié de la sphère servant d'unité, c'est-à-dire, lorsque la surface est ouverte, comme, par exemple, un paraboloïde elliptique ou l'une des nappes d'un hyperboloïde à deux nappes. Mais, quand même cette condition serait remplie, il est impossible que tous les points soient de la première espèce; tout au rebours, les points de première espèce ne remplissent qu'une partie *finie* de la surface qui peut se composer d'une ou de plusieurs parties contiguës, tandis que le reste ne contient que des points de seconde espèce. Enfin l'auteur étudie en particulier, pour les surfaces respectives du second ordre, la figure de la courbe qui sépare le domaine des points de première et de seconde espèce.

I. Démonstration du théorème de Jacobi pour les surfaces à courbure négative. — II. Étude des surfaces à courbure positive. — III. Domaine des points de première espèce sur l'hyperboloïde de rotation à deux nappes. — IV. Points de première espèce sur le paraboloïde de rotation. (Dans ce paragraphe, M. v. Mangoldt signale une erreur qui s'est glissée dans les publications de M. v. Braunmühl.) — V. Points de première espèce sur l'hyperboloïde à trois axes inégaux.

Hermite (*Ch.*). — Sur quelques points de la théorie des fonctions. (Extrait d'une lettre à M. Mittag-Leffler.). (54-78).

Ce Mémoire, qui a été publié d'abord à Helsingfors dans les *Acta Societatis Scientiarum Fennicae,* et que M. Hermite a enrichi, à l'occasion de la réimpression, de quelques additions importantes, se trouve analysé dans le *Bulletin,* V_2, p. 312-320.

Thomé (*L.-W.*). — Contribution à la théorie des équations différentielles linéaires. (Suite, *voir* t. LXXXVII de ce *Journal.*). (79-198).

La recherche des équations différentielles linéaires homogènes, où l'expression différentielle est représentée par un système d'expressions différentielles normales (*voir* le Mémoire, t. LXXXIII de ce Journal, *Bulletin,* 2e sér., II_2, p. 224), est continuée dans ce travail, et l'intégration de la plupart des équations différentielles de cette sorte se trouve maintenant effectuée. En reprenant le fil des idées du Mémoire, t. LXXXVII (*Bull.*, IV_2, p. 245), M. Thomé gagne la représentation des intégrales de ces équations différentielles dans le domaine d'un point singulier par l'expédient suivant : l'intégrale indéfinie

$$\int (x-a)^r \psi(x-a)\, dx,$$

où r est non entier, $\psi(x-a)$ une série procédant suivant des puissances à exposants entiers positifs et négatifs, se prête à être représentée par l'intégrale définie $\dfrac{(x-a)^{r+1}}{e^{r2\pi i}-1}\displaystyle\int_1^{\prime} \psi[(x-a)\alpha]\,\alpha^r\, d\alpha$, où le chemin d'intégration de la variable α est fourni par la circonférence qui a l'origine pour centre et l'unité pour rayon.

L'intégrale définie renferme la même fonction ψ que l'intégrale indéfinie, et cette fonction peut être représentée là dedans sous une autre forme que sous celle d'un développement en série. La chose en est semblable avec les intégrales multiples. La fonction ψ est de la forme $e^w Q(x-a)$, où $w = \Sigma_1^n c(x-a)^{-1}$; ainsi ψ se met sous la forme PQ, où P et Q sont des séries procédant suivant des puissances de $x-a$, la première à exposants entiers négatifs, la seconde à exposants entiers positifs. Maintenant M. Thomé fait $P = P' + P''$, $Q = Q' + Q''$, P' et Q' contenant un nombre fini de termes : donc il s'agit seulement de rendre le module du reste $P'Q'' + P''Q' + P''Q''$ plus petit qu'une quantité quelconque donnée. Cette recherche met à profit les théorèmes sur les séries procédant suivant des puissances et qui satisfont à une équation différentielle à coefficients rationnels; en particulier, l'auteur utilise les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels qu'il a construites (t. LXXXVII, n° 7) pour les fonctions qui sont les facteurs des logarithmes dans la représentation générale des intégrales dans le voisinage des points singuliers. En même temps, il a simplifié dans ce Mémoire le procédé qui tend à représenter l'expression différentielle primitive par un système d'expressions différentielles normales, procédé qu'il a développé amplement dans le tome LXXXIII. On voit maintenant que cette représentation dépend principalement de la résolution d'équations algébriques dont les coefficients sont liés algébriquement avec les coefficients de l'équation différentielle et dont les racines déterminent les exposants dans le développement des intégrales dans le voisinage des points singuliers.

Konigsberger (L.). — Sur des relations algébriques entre des intégrales de différentes équations différentielles et leurs quotients différentiels. (199-214).

Dans un Mémoire du tome XC (*Remarques générales sur le théorème d'Abel*), M. Königsberger a développé un théorème très général sur les relations mentionnées dans le titre de ce nouveau travail. Bornons-nous à citer le cas de deux équations différentielles : une relation algébrique entre une intégrale particulière d'une équation différentielle quelconque et une intégrale particulière d'une autre équation différentielle, mais qui est irréductible, subsiste encore quand on substitue dans elle une autre intégrale particulière quelconque de l'équation différentielle irréductible et une autre intégrale correspondante de la première équation différentielle. Dans le travail du tome XC, l'auteur a fait l'application de ce théorème à l'établissement du théorème d'Abel pour des intégrales d'équations différentielles, à la recherche de l'irréductibilité d'équations différentielles et à la détermination de la forme des intégrales algébriques et logarithmiques d'équations différentielles linéaires.

C'est une recherche concernant l'expressibilité algébrique de l'intégrale générale d'une équation différentielle par des intégrales particulières qui a porté M. Königsberger à généraliser le théorème cité; cette généralisation se rapporte à la conservation de la forme d'une relation algébrique qui a lieu entre des intégrales particulières de différentes équations différentielles et de leurs quotients différentiels. L'extension de la proposition dans ce sens et quelques applications du théorème démontré antérieurement font le sujet du nouveau Mémoire. Voici le théorème dans sa nouvelle forme :

S'il existe une relation algébrique entre une intégrale particulière d'une équation différentielle quelconque et d'une suite des dérivées de l'intégrale et entre une intégrale particulière d'une équation différentielle irréductible et d'un nombre de ses dérivées, cette relation subsistera encore quand l'intégrale de l'équation irréductible est remplacée par une autre intégrale particulière quelconque, pourvu que l'intégrale de l'autre équation différentielle soit remplacée par une certaine autre.

Gundelfinger (*S.*). — Sur des intégrales multiples qui ne changent pas de forme par une transformation des variables. (215-220).

Supposons qu'il existe entre m variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ une équation homogène du second degré et $m-2$ équations homogènes linéaires

$$(1) \qquad \mathfrak{f} \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{mm}x_m^2 = 0,$$

$$(1^a) \qquad \begin{cases} v \equiv v_1x_1 + v_2x_2 + \ldots + v_mx_m = 0, \\ w \equiv w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_mx_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t \equiv t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_mx_m = 0; \end{cases}$$

que dans $m-2$ quelconques de ces relations les coefficients $a_{ik}, v_k, \ldots, t_k$ soient des fonctions homogènes de premier degré, dans la $(m-1)^{\text{ième}}$ des fonctions homogènes de second degré, de m autres variables $y_1, y_2, \ldots, y_m$; ainsi que les équations (1) et (1^a), arrangées convenablement et ordonnées suivant les puissances des y_k, puissent être mises sous cette forme

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathfrak{v}_1y_1 + \mathfrak{v}_2y_2 + \ldots + \mathfrak{v}_my_m = 0, \\ \mathfrak{w}_1y_1 + \mathfrak{w}_2y_2 + \ldots + \mathfrak{w}_my_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathfrak{t}_1y_1 + \mathfrak{t}_2y_2 + \ldots + \mathfrak{t}_my_m = 0, \\ \mathfrak{a}_{11}y_2^1 + \mathfrak{a}_{22}y_1y_2 + \ldots + \mathfrak{a}_{mm}y_m^2 = 0. \end{cases}$$

Qu'on introduise, en outre, entre les variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de même que entre $y_1, y_2, \ldots, y_n$, deux relations arbitraires

$$(3) \qquad \mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \quad \mathfrak{P}(y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0,$$

telles que $\mu P + 1$ (respectivement $\nu \mathfrak{P} + 1$) représente une fonction homogène de $\mu^{\text{ième}}$ (resp. $\nu^{\text{ième}}$) degré des $y_1, y_2, \ldots, y_m$ (resp. $x_1, x_2, \ldots, x_m$). Enfin posons, pour abréger,

$$(4) \qquad \begin{cases} A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & v_1 & \ldots & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & v_2 & \ldots & t_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} & v_m & \ldots & t_m \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_m & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_m & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}, \\[2ex] \mathfrak{A} = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{11} & \mathfrak{a}_{12} & \ldots & \mathfrak{a}_{1m} & \mathfrak{v}_1 & \ldots & \mathfrak{t}_1 \\ \mathfrak{a}_{21} & \mathfrak{a}_{22} & \ldots & \mathfrak{a}_{2m} & \mathfrak{v}_2 & \ldots & \mathfrak{t}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{a}_{m1} & \mathfrak{a}_{m2} & \ldots & \mathfrak{a}_{mm} & \mathfrak{v}_m & \ldots & \mathfrak{t}_m \\ \mathfrak{v}_1 & \mathfrak{v}_2 & \ldots & \mathfrak{v}_m & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{t}_1 & \mathfrak{t}_1 & \ldots & \mathfrak{t}_m & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Cela étant, pour une fonction quelconque U des variables d'intégration, l'intégrale $(m-1)^{-\text{uple}}$

$$(4^a) \qquad J = \int\int\ldots\int \frac{U\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{m-1}}{\mathfrak{P}'(y_m)\sqrt{\mathfrak{A}}},$$

sera transformée par les relations (1) à (3), en

$$(4^b)\qquad J = \iint \cdots \int \frac{U\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{m-1}}{\psi'(x_m)\sqrt{A}}.$$

Gundelfinger (*S.*). — Sur la transformation, en somme de carrés, d'une forme quadratique. (221-237).

La réduction en somme de carrés, d'une forme quadratique, nécessaire dans presque toutes les disciplines des Mathématiques, a été étudiée depuis Lagrange par bien des géomètres, et la transformation de Lagrange a encore suggéré à Jacobi l'idée d'une investigation profonde théorique. M. Gundelfinger croit qu'une autre représentation de la réduction en question, indiquée par Plücker (t. XXIV du Journal, p. 297) n'est guère connue, quoiqu'elle l'emporte, dans plusieurs points essentiels, sur celle de Jacobi, qu'elle ait la même portée que celle-ci et qu'elle enseigne à exprimer d'une manière directe les variables primitives x_k par les transformées. Tout en poursuivant l'idée fondamentale de Plücker, l'auteur entre dans une recherche qui s'étend à toutes les particularités du sujet, et il discute notamment le cas où il subsiste des relations linéaires entre les variables x_k.

Hazzidakis (*J.-N.*). — Sur une propriété des déterminants mineurs d'un déterminant symétrique. (238-247).

Soit $\Delta = | a_{11} a_{22} \ldots a_{nn} |$ un déterminant symétrique où $a_{ik} = a_{ki}$; supposons que les a_{ik} soient des fonctions entières d'une variable ω à coefficients réels; désignons par Δ_{11} le coefficient de a_{11} dans Δ, par $\Delta_{11.22}$ celui de a_{22} dans Δ_{11}, par $\Delta_{11.22.33}$ celui de a_{33} dans $\Delta_{11.22}$, etc. : alors la suite des déterminants symétriques

$$(1)\qquad \Delta_{11},\quad \Delta_{11.22},\quad \Delta_{11.22.33},\quad \ldots,\quad \Delta_{11.22.33\ldots nn}$$

sera une suite de Sturm pour l'équation $\Delta = 0$ et pour l'intervalle de $\omega = a$ à $\omega = b$ sous ces conditions : 1° aucune des fonctions (1) ne doit s'évanouir identiquement, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de ω; 2° la somme

$$(2)\qquad \sum_{\mu,\nu} a'_{\mu\nu} \Delta_{1\mu} \Delta_{1\nu} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, 3, \ldots, n \\ \nu = 1, 2, 3, \ldots, n \end{pmatrix}$$

ne doit pas s'évanouir dans l'intervalle $a \ldots b$. Les fonctions (1) conservent leur propriété quand on remplace la seconde condition par celle-ci : La forme quadratique

$$\sum_{\mu,\nu} a'_{\mu\nu} x_\mu x_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n),$$

dont les coefficients dépendent de ω, doit être définie pour toutes les valeurs de ω situées dans l'intervalle $a \ldots b$, et ne doit s'évanouir que lorsque toutes les variables deviennent égales à zéro.

Hunyady (*Eugen*). — Sur un critère de Steiner dans la théorie des sections coniques. (248-253).

Démonstration analytique d'une proposition de Steiner.

Matthiessen (*Ludwig*). — Sur le soi-disant problème des restes dans les Ouvrages chinois Swan-king de Sun-tsze et Tayenlei-schu de Yih-hing. (254-261).

Dans les Ouvrages cités des Chinois on trouve une méthode servant à résoudre certains problèmes de la théorie des nombres. L'auteur a déjà démontré, en 1874, que cette méthode Tayen (grande extension) des Chinois est identique à la méthode des congruences de Gauss.

La méthode généralisée Tayen de Yih-hing ne se trouve, sous sa forme particulière, dans aucun Ouvrage moderne. L'explication de cette méthode généralisée et l'établissement du théorème qui lui sert de base font le sujet de cette Note.

Gräfe. — Intégrales de quelques équations différentielles linéaires. (262-264).

Königsberger (*L.*). — Sur la liaison entre l'intégrale générale et les intégrales particulières des équations différentielles. (265-300).

Le théorème fondamental de la théorie des équations différentielles linéaires homogènes en fournit l'intégrale générale comme aggrégat additif d'intégrales particulières multipliées par des constantes arbitraires, et c'est sur ce théorème que s'appuie la possibilité de la discussion des intégrales d'équations différentielles linéaires. Demander la relation qui lie l'intégrale générale aux intégrales particulières pour des équations différentielles algébriques quelconques, ou plutôt demander les conditions pour l'existence d'une telle relation, voilà en effet une question importante et inévitable pour le développement de la théorie des équations différentielles générales, question dont la réponse pouvait être abordée au moyen des recherches et propositions que M. Königsberger avait récemment publiées sur l'extension du théorème d'Abel à des équations différentielles quelconques et sur les intégrales algébriquement logarithmiques d'équations différentielles linéaires non homogènes.

Le problème général peut s'énoncer sous cette forme :

Caractériser toutes les équations différentielles algébriques d'ordre m qui ont la propriété que leur intégrale générale puisse être exprimée comme fonction algébrique de la variable indépendante, d'un nombre déterminé d'intégrales particulières et de m constantes arbitraires, et préciser la forme de cette fonction algébrique elle-même.

Après avoir résumé quelques propositions tirées de ses études antérieures sur les équations différentielles, M. Königsberger applique ces principes généraux à la discussion des équations différentielles algébriques du premier ordre, et déjà dans cette étude spéciale il utilise les différentes méthodes dont il se sert pour les équations différentielles d'ordres supérieurs. Cependant il n'est pas possible d'ébaucher une esquisse légère des propositions intéressantes qu'il fait ressortir de son analyse détaillée. Bornons-nous à signaler ce théorème général, qui fait conclusion à son travail :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation différentielle

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ soit telle que son intégrale générale soit une fonction algébrique d'une intégrale particulière et d'une constante arbitraire consiste dans l'équation $f(x, y) = \mu(x).\lambda(y)$, où $\mu(x)$ est une fonction algébrique arbitraire de x et $\lambda(y)$ une fonction algébrique de y telle que $\frac{dy}{\lambda(y)}$ soit une différentielle de première espèce de rang 1.

Kronecker (*L.*). — Sur le discriminant de fonctions algébriques d'une variable. (301-334).

La publication de M. Kronecker forme la première partie d'un travail qui a été communiqué à l'Académie des Sciences de Berlin, dans la séance du 16 janvier 1862, sans avoir été inséré aux Mémoires de cette savante Société. Un ample Mémoire, de MM. Weber et Dedekind, présenté à la rédaction du *Journal* et publié dans le tome XCII, détermina M. Kronecker à le faire précéder d'un travail dont la conception est antérieure à ce nouveau Mémoire de presque vingt années. Comme il est difficile de développer, dans un résumé, la richesse des points de vue et idées de l'auteur, nous empruntons à l'Introduction ce passage, qui nous semble le mieux révéler les idées générales qui ont présidé à la naissance des notions nouvelles :

« Le principe qui sert de base aux développements suivants m'a été suggéré en 1857 par des recherches générales concernant les théories de nombres complexes. La généralité des recherches amena immédiatement la notion des nombres entiers algébriques comme racines d'équations $F(x) = 0$ à coefficients entiers, c'est-à-dire d'équations où le coefficient de la plus haute puissance de x est égal à l'unité et où les autres coefficients sont des nombres entiers; ce fut d'abord l'étude de théories spéciales de nombres complexes qui les fit concevoir comme fonctions entières à coefficients entiers d'un nombre entier algébrique déterminé. Mais il surgit alors certaines difficultés : elles se rapportaient cependant uniquement à la détermination des facteurs complexes du discriminant et ne se présentaient que lorsque les nombres complexes spéciaux dont il s'agissait montraient une propriété particulière : c'est que des nombres algébriques entiers pouvaient affecter la forme de nombres complexes fractionnaires, c'est-à-dire de fonctions entières du nombre algébrique pris pour base, à coefficients numériques fractionnaires. Après quelques réflexions, ces difficultés me portèrent à comprendre, dans cette année-là, que c'est une restriction aussi utile que nuisible que de représenter les fonctions rationnelles d'une grandeur x, définie par une équation algébrique, uniquement sous la forme de fonctions entières de x, c'est-à-dire, n dénotant le degré de l'équation, comme fonctions linéaires homogènes des n grandeurs $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$; que, tout au contraire, le caractère propre de la question exige leur représentation plus générale par des formes linéaires homogènes de n fonctions rationnelles quelconques de x, linéairement indépendantes les unes des autres. Cela donne la possibilité d'établir des formes de nombres complexes où chaque nombre algébrique entier se présente aussi comme entier, et d'enlever ainsi les difficultés signalées ci-dessus. Les travaux de M. Kummer sur les nombres complexes formés des périodes de racines de l'unité avaient déjà fait voir combien de telles formes sont convenables au but, et en même temps il avait fait aussi paraître ce Tableau des coefficients déterminants qui s'ensuit de la condition que la multiplication de formes linéaires de n éléments à coefficients entiers fasse résulter une forme de même nature. Cette condition détermine immédiatement les éléments comme nombres entiers algébriques et tels que tous sont exprimables rationnellement par un d'entre eux, qu'ils appartiennent donc à un même genre. »

Rausenberger (Otto). — Contribution à la transformation linéaire des fonctions elliptiques. (335-340).

Pour effectuer la transformation $\vartheta_3(\tau, w)$ par la substitution $\tau' = -\frac{1}{\tau}$, l'auteur se propose de déterminer le quotient $\dfrac{\vartheta\left(-\frac{1}{\tau}, w\right)}{\vartheta_3(\tau, \tau w)}$. Posant

$$\psi(\tau) = \frac{\vartheta_3\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{1}{2}\right)}{\vartheta_3\left(\tau, \frac{1}{2}\tau\right)} = \frac{\vartheta_3\left(-\frac{1}{\tau}, 0\right)}{\vartheta_3(\tau, 0)} \quad \text{et} \quad f(\tau) = \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{\tau}},$$

il développe ces équations fonctionnelles

$$f(2\tau) = f(\tau), \quad f(9\tau) = f(\tau), \quad f(2^r 9^s \tau) = f(\tau),$$

d'où il conclut $2^r 9^s = 1 + \delta$, δ étant indéfiniment petit, et enfin par une analyse facile

$$\psi(\tau) = \sqrt{i\tau}, \quad \vartheta_3\left(-\frac{1}{\tau}, w\right) = \sqrt{i\tau}\, e^{\pi i \tau w^2} \vartheta_3(\tau, \tau w).$$

Thomé (L.-W.). — Sur la théorie des équations différentielles linéaires. (341-346).

Addition au Mémoire, p. 79 du même Tome, avec une Note où l'auteur défend son travail du Tome LXXXVII contre une critique contenue dans le *Jahrbuch uber die Fortschritte der Mathematik*, 1879.

Schellbach (K.-H.). — Une représentation géométrique de la substitution de Landen. (347-348).

Le triangle sphérique rectangle est propre à représenter cette substitution.

Pasch. — Démonstration d'un théorème sur des séries ponctuelles projectives. (349-351). E. Lampe.

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, publié par le Conseil d'instruction de cet établissement (1).

XLIX^e Cahier. — Tome XXX, 1881.

Phillips. — Du spiral réglant conique des chronomètres et de divers autres spiraux. (1-46).

---

(1) Voir *Bulletin*, VI_2, 275.

L'auteur traite d'abord avec détail du spiral réglant conique; il calcule les éléments les plus favorables à l'application et montre, en particulier, l'utilité qu'il y a à munir le spiral de deux courbes terminales théoriques, situées dans deux plans perpendiculaires à l'axe du cône, afin de satisfaire à la condition si importante que le centre de gravité du spiral entier soit aussi près que possible de l'axe du balancier; il étudie ensuite divers types dérivés : le spiral cylindrique, le spiral plat sans courbes terminales ou muni d'une ou deux courbes terminales théoriques, le spiral formé de deux spirales coniques égales situées respectivement sur deux cônes égaux adossés suivant leur base, les deux spirales étant d'ailleurs dans le prolongement l'une de l'autre. M. Phillips montre que, pour les types à deux courbes terminales théoriques qu'il examine, la distance du centre de gravité du spiral à l'axe est du premier ordre de petitesse, c'est-à-dire que son terme le plus important est proportionnel au pas λ. Dans le spiral plat à une seule courbe terminale théorique, cette distance peut être rendue aussi très petite; dans le spiral cylindrique, le terme principal de cette distance est proportionnel à λ^2; tout ceci suppose d'ailleurs expressément que l'axe du spiral coïncide avec l'axe du balancier.

La propriété qu'on vient de mentionner pour le spiral cylindre ne lui est pas particulière; M. Phillips l'avait déjà rencontrée pour le spiral sphérique (*Comptes rendus*, 9 et 16 juin 1879); il montre que cette propriété subsiste pour un grand nombre de types de spiraux, obtenus en considérant des spirales à pas constant enroulées sur une surface de révolution admettant un plan de symétrie; la courbe se termine à des distances égales de ce plan et le spiral est muni de deux courbes terminales théoriques, situées dans deux plans perpendiculaires à l'axe; leurs projections sur le plan de l'équateur sont symétriques par rapport au méridien moyen; en disposant convenablement des données, on peut faire que la distance du centre de gravité du spiral à l'axe soit comparable à λ^2. M. Phillips retrouve ainsi les résultats déjà signalés pour le spiral cylindrique et le spiral sphérique. Il étudie ensuite le spiral en tonneau.

Badoureau. — Mémoire sur les figures isoscèles. (47-172).

L'auteur commence par rappeler les travaux analogues de Gergonne et de M. Catalan. Le Mémoire de M. Catalan, inséré en 1865 dans le XLI[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, est relatif aux polyèdres semi-réguliers du premier et du second genre. Un polyèdre semi-régulier au premier genre est celui dont les faces sont des polygones réguliers et dont les angles polyèdres sont égaux ou symétriques et un polyèdre semi-régulier du second genre est celui dont les faces sont égales et dont les angles polyèdres sont réguliers. M. Catalan a énuméré et décrit les quinze types possibles de polyèdres semi-réguliers du premier genre.

M. Badoureau a cherché quels étaient tous les polyèdres que l'on pouvait construire en assemblant des polygones réguliers convexes ou étoilés, de façon que tous les angles solides fussent égaux ou symétriques. Il établit d'abord qu'il n'existait que quinze polyèdres convexes jouissant de cette propriété. et cela par des raisonnements différents de ceux de M. Catalan; l'application des méthodes cristallographiques de Bravais lui fournit ensuite, pour la construction de ces polyèdres, des procédés également différents de ceux de M. Catalan. M. Badoureau étudie aussi toutes les manières possibles de découper un plan indéfini en polygones convexes réguliers sans vide ni duplicature et de façon qu'on puisse superposer la figure à elle-même en plaçant un sommet sur n'importe quel autre; outre les trois assemblages réguliers et les trois assemblages semi-réguliers de Gergonne, il trouve sept nouvelles solutions.

Il procède ensuite à l'examen des polyèdres étoilés qui se rattachent aux solides d'Archimède à peu près de la même manière que les polyèdres de Poinsot se rattachent aux polyèdres réguliers classiques. M. Bertrand a indiqué, pour construire les polyèdres de Poinsot, une méthode que M. Badoureau applique avec de légères modifications. Il détermine l'espèce des polyèdres étoilés au moyen d'une formule analogue, à l'aide de laquelle MM. Rouché et de Comberousse ont pu signaler et corriger l'inexactitude des résultats de Poinsot relativement à l'espèce de ces polyèdres.

Enfin il étudie les figures qu'on peut former en recouvrant un plan par des polygones convexes ou étoilés, de telle sorte qu'on puisse superposer la figure elle-même en plaçant un sommet sur un autre sommet quelconque. Voici, au surplus, la Table des matières du Mémoire de M. Badoureau.

Mathieu. — Mémoire sur l'équilibre d'élasticité d'un prisme rectangle. (173-196).

Lamé, dans la douzième de ses Leçons sur la Théorie mathématique de l'élasticité, examine l'équilibre d'élasticité d'un parallélépipède rectangle dont il suppose les six faces soumises à des forces normales données; en outre, il suppose les forces disposées symétriquement par rapport aux trois plans menés à égale distance de deux faces parallèles; il n'a pu résoudre ce problème difficile que dans des cas fort simples.

M. Mathieu réduisant, en quelque sorte, le problème de Lamé à deux dimensions, traite la question suivante :

« Un prisme rectangle homogène a ses deux bases appuyées contre deux parois parallèles et fixes; des pressions normales données sont exercées dans toute l'étendue des quatre faces latérales de ce prisme. Les pressions sont les mêmes sur une même face tout le long d'une ligne parallèle aux quatre arêtes latérales; de plus, ces pressions sont disposées symétriquement sur des faces latérales opposées. On demande de déterminer toutes les circonstances de la déformation du prisme et la résistance que devront opposer les deux parois sur les bases de cette poutre. »

Le problème dépend des équations suivantes :

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} + \varepsilon\Delta u = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} + \varepsilon\Delta v = 0, \tag{1}$$

où u, v sont les composantes du déplacement d'un point x, y, z, où θ est la dilatation cubique $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$, où ε est mis à la place de $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$, λ et μ étant les deux constantes d'élasticité, où enfin le symbole Δ désigne l'opération $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Les conditions à la limite sont de la forme

$$\left\{\begin{aligned} N_1 &= f_1(y),\ T_2 = 0, \quad \text{pour } x = \pm\frac{a}{2}, \\ N_2 &= f_2(x),\ T_3 = 0, \quad \text{pour } y = \pm\frac{b}{2}, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

en désignant par N_1, T_2, T_3 les composantes de la force élastique rapportée à l'unité de surface et exercée en un point quelconque (x, y, z) sur un élément plan parallèle au plan des yz, et en employant des notations analogues pour les éléments plans parallèles aux plans des zx et des xy; ces forces sont données par les formules

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad N_2 = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial x}, \quad N_3 = \lambda\theta,$$

$$T_1 = 0, \quad T_2 = \theta, \quad T_3 = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right);$$

les fonctions f sont paires.

Si les quantités u, v ont été calculées au moyen des équations différentielles, on en conclura θ et l'équation $N_3 = \lambda\theta$ donnera la pression normale qu'il faudra exercer en chacun des points des bases $z = \pm\frac{e}{2}$ du prisme pour que l'état d'équilibre soit possible; on aura ainsi la solution de ce problème : « Trouver les déplacements moléculaires d'un prisme rectangle dont les deux bases sont au contact de deux parois parallèles et fixes quand les faces latérales sont soumises à des pressions normales données suivant ce qui vient d'être indiqué, et déterminer les pressions normales que doivent exercer les deux parois en tous les points des bases de ce prisme. »

M. Mathieu montre comment on peut satisfaire aux équations (1), prenant pour θ la série suivante :

$$\theta = \Sigma\,\mathcal{A}_m E(my)\cos mx + \Sigma B_m E(nx)\cos ny,$$

où E désigne un cosinus hyperbolique et où l'on suppose

$$m = \frac{2p\pi}{a}, \quad n = \frac{2q\pi}{b},$$

p et q étant des entiers non négatifs et le signe sommatoire Σ s'étendant à toutes les valeurs de p et de q. Les quantités $\mathcal{A}_m$ et B_m sont elles-mêmes données au moyen de séries infinies dont M. Mathieu démontre avec soin la convergence; une application numérique termine son travail. Il annonce enfin que les mêmes considérations paraissent conduire à la solution du problème de Lamé; toutefois, les calculs et les formules se compliquent singulièrement.

Callandreau (*O.*). — Contribution à la théorie du mouvement elliptique et parabolique. (197-204).

Étude des questions suivantes qui ont un grand intérêt pour la théorie du mouvement des planètes et des comètes :

Soit
$$u - u_0 - l(\sin u - \sin u_0) = n(t - t_0),$$

et supposons qu'on développe la différence $u - u_0$ suivant les puissances de $t - t_0$, entre quelles limites le développement sera-t-il convergent?

Soit de même, dans le cas des orbites paraboliques,

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\operatorname{tang}^3\frac{1}{2}v - \left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}v_0 + \frac{1}{2}\operatorname{tang}^3\frac{1}{2}v_0\right) = h(t - t_0),$$

entre quelles limites le développement de $v - v_0$, suivant les puissances de $t - t_0$, subsistera-t-il?

M. Callandreau donne un Tableau qui permet de s'assurer, dans un cas donné, si l'on est dans les limites de convergence; les limites peuvent se trouver assez étendues pour qu'on puisse tirer parti d'observations qui ne sont pas aussi rapprochées qu'on le suppose d'ordinaire.

Le cas où le mouvement héliocentrique d'une comète est assez considérable pour que l'anomalie vraie soit voisine de 180° offre un intérêt particulier, et l'on doit recourir à des modes particuliers de développement indiqués par Bessel et Le Verrier; en posant $v' = 180 - v$, l'équation

$$\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}v'} + \frac{1}{2\operatorname{tang}^3\frac{1}{2}v'} = ht$$

admet, pour de grandes valeurs de ht, trois déterminations, en adoptant la détermination

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}v' = (3ht)^{-\frac{1}{3}};$$

on peut développer v', suivant les puissances de $\dfrac{1}{(3ht)^{\frac{1}{3}}}$, en partant de l'équation

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}v'}{\sqrt{1 + 3\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}v'}} = \frac{1}{(3ht)^{\frac{1}{3}}}$$

et cela tant que le premier membre de cette équation est plus petit que $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Lecornu (*L.*). — Sur les polygones générateurs d'une relation entre plusieurs variables imaginaires. (205-228).

Étant donnée une relation

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$$

entre n variables imaginaires $z_1, z_2, \ldots, z_n$, à chaque système de solutions correspondra un polygone dont les sommets seront les points $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Ce polygone est dit *générateur*, par M. Lecornu. L'auteur étudie comment on peut déplacer et déformer ce polygone, en supposant la fonction f holomorphe. Il existe, en général, pour chaque polygone générateur un centre instantané de rotation dont l'affixe est donnée par la formule

$$Z = \frac{\Sigma p z}{P};$$

les p sont les dérivées partielles de la fonction f et $P = \Sigma p$; le polygone peut ainsi se déplacer sans déformation. En partant d'un polygone générateur quelconque, on peut considérer deux familles de courbes décrites par les sommets : les unes sont les trajectoires (du *premier genre*) correspondant à un mouvement de déplacement sans déformation; les autres sont les trajectoires (du *second genre*) correspondant à une variation de longueur des côtés sans changement de leurs directions ni de leurs rapports. Les deux espèces de courbes sont orthogonales; pour chaque sommet, les trajectoires de chaque genre forment un système isotherme dont le paramètre différentiel est, en chaque point, égal à l'inverse du rayon vecteur issu du centre instantané; l'auteur introduit aussi un système de forces q liées simplement aux dérivées partielles p qui le conduisent à quelques propositions qui s'énoncent élégamment dans le langage de la Statique. Enfin il étudie quelques-unes des singularités les plus simples.

L^e cahier. — Tome XXXI, 1881.

Léauté (*H.*). — Théorie générale des transmissions par câbles métalliques. Règles pratiques. (1-198).

Les câbles métalliques destinés à transmettre le mouvement d'un arbre à un autre, lorsque la portée est trop forte pour permettre l'emploi des courroies, ont été imaginés, en 1856, par M. Hirn; depuis lors, ces transmissions sont entrées de plus en plus dans la pratique; M. Léauté cite les travaux suivants dont les câbles métalliques ont été l'objet : Resal, *Traité de Mécanique générale*, t. I, p. 321; t. III, p. 271. Reuleaux, *Le Constructeur,* traduction Debize, p. 389. Achard, *Annales des Mines,* 7^e série, t. VI, VII, VIII (*De la transmission et de la distribution des forces motrices à de grandes distances*). Vigreux, *Annales du Génie civil,* mars, avril, mai 1876; enfin les leçons de M. Callon à l'École des Mines.

Toutefois, jusqu'ici, les câbles télédynamiques n'ont pas été l'objet d'une étude rationnelle au point de vue pratique. Les règles admises pour les établir ne permettent pas d'obtenir, dans tous les cas, une transmission fonctionnant d'une manière satisfaisante. On se contente, en effet, de déterminer la section du câble à employer et le nombre de fils qui doivent le former, par cette double condition que le glissement sur les poulies ne puisse se produire et que le câble soit capable, *à l'état statique*, de résister à la tension qu'il supporte, et l'on suppose, pour faire ce calcul, que la longueur de ce câble ne change pas et que la résistance à vaincre est constante.

Ces hypothèses s'éloignent de la réalité : les câbles, en effet, sont animés d'une vitesse considérable et la force centrifuge n'est pas négligeable; en outre, ils ne conservent pas, d'un moment à l'autre, la même longueur : ils sont très sensibles aux variations de température et surtout d'humidité; de plus, s'ils n'ont pas été préalablement étirés, ils subissent, par l'emploi, des allongements relativement considérables qui se continuent au fur et à mesure de leur service.

Enfin, l'effort à vaincre n'est jamais rigoureusement constant et ses variations acquièrent une grande importance, depuis que, l'emploi des câbles s'étant généralisé, on leur a fait commander directement des appareils isolés. Une transmission télédynamique, installée pour transmettre un effort donné, peut ne plus fonctionner du tout s'il se produit dans la résistance à vaincre des oscillations atteignant certaines limites.

Le problème à traiter consiste à rechercher de quelle manière un câble s'enroulant sur deux poulies transmet le mouvement de l'une à l'autre, dans le cas général d'une puissance et d'une résistance variables. Pour le résoudre, il faut trouver, en fonction des éléments de la transmission, la relation qui existe entre les efforts qu'exerce un câble à ses deux extrémités et le déplacement relatif qu'elles peuvent éprouver. Le rapport de l'accroissement de tension au déplacement relatif des extrémités joue un rôle capital; il doit être maintenu entre certaines limites et peut être pris comme le *coefficient* de régularité de la transmission.

« La méthode suivie dans ce travail », dit l'auteur, « est la suivante :

» Nous examinons, en premier lieu, le cas du mouvement permanent, c'est-à-dire celui où, la puissance étant constamment égale à la résistance, les poulies ont la même vitesse.

» C'est ensuite à ce mouvement idéal que nous rapportons le mouvement réel, de manière à mettre en évidence les variations de vitesse et de tension, éléments principaux à considérer.

» Nous obtenons de la sorte les équations qui lient ces deux éléments et nous pouvons ainsi déterminer le coefficient de régularité.

» Cette manière d'opérer nous conduit tout d'abord à étudier la forme prise par une corde inextensible en mouvement permanent, sous l'action de forces indépendantes du temps, et à montrer que cette forme est identique avec celle de l'équilibre au repos sous l'action des mêmes forces, ce qui constitue une généralisation d'un théorème dû à M. Resal. Elle nous amène ensuite à trouver les équations générales des petites oscillations de cette corde écartée de sa position de repos apparent et à prouver que, dans le cas où la figure permanente est plane, ce qui est le cas des câbles, les oscillations perpendiculaires au plan de la corde n'altèrent pas les tensions. Elle nous permet enfin de calculer les tensions moyennes développées aux extrémités d'une transmission télédynamique par un déplacement relatif des poulies et de montrer que le coefficient de régularité est proportionnel au poids du câble, à la portée et à la somme des inverses des cubes des deux flèches.

» Ces résultats une fois établis et l'importance de la considération des flèches mise ainsi en lumière, nous remarquons que, s'il y a intérêt, au point de vue de la régularité, à diminuer les flèches, il est nécessaire cependant de ne pas les réduire outre mesure, d'une part, afin d'éviter que, cette régularité étant trop grande, les variations du travail résistant ne donnent lieu à des secousses trop brusques et, d'autre part, afin que, sous l'influence des raccourcissements accidentels que peut subir le câble, il ne se produise pas des efforts dangereux pour le mécanisme.

» Nous déterminons alors, en nous appuyant sur les résultats de l'expérience, les limites entre lesquelles il convient de maintenir la flèche relative au repos pour éviter ces divers inconvénients. Ces limites, une fois fixées, nous permettent de calculer un câble convenable dans un cas quelconque.

» Nous arrivons ainsi à former des Tableaux numériques fournissant, selon la valeur de la portée et du travail à transmettre, le poids du câble par mètre courant, le diamètre des fils qui le forment, celui des poulies à employer, Tableaux dans lesquels il a été tenu compte à la fois de tous les éléments du problème, c'est-à-dire : 1° des conditions de résistance et d'adhérence, ainsi que du mouvement propre du câble qui les modifie; 2° de la régularité relative au coefficient du fonctionnement que l'on veut atteindre; 3° des variations de longueur accidentelles ou permanentes auxquelles le câble est exposé. »

Poincaré. — Sur les formes cubiques ternaires et quaternaires. (199-253).

Le but de l'auteur est d'étendre aux formes homogènes de degré supérieur les belles recherches arithmétiques de M. Hermite relatives aux formes quadratiques. Ce premier Mémoire est consacré à l'étude algébrique des formes cubiques ternaires et quaternaires; l'étude des formes ternaires est faite d'une façon approfondie, les résultats obtenus s'étendent facilement, avec les indications de l'auteur, aux formes quaternaires et sont d'ailleurs susceptibles d'une généralisation plus large.

M. Poincaré classe comme il suit les substitutions et les formes :

Étant donnée une substitution

$$T = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix},$$

elle appartiendra à la première, à la deuxième, à la troisième ou à la quatrième catégorie, suivant les cas.

Si l'équation en λ obtenue en retranchant λ des éléments de la diagonale principale du Tableau précédent et égalant à zéro le déterminant ainsi formé à ses racines distinctes, ainsi que les $m^{\text{ièmes}}$ puissances de ses racines, T est de la première catégorie; si les racines sont distinctes, mais non les puissances $m^{\text{ièmes}}$, T est de la deuxième catégorie; T est de la troisième catégorie si les racines ne sont pas distinctes, mais si la substitution T peut être regardée comme une puissance entière d'une substitution de la première catégorie; enfin, dans le cas qui reste, T est de la quatrième catégorie.

Si T appartient à l'une des trois premières catégories, il existe une substitution Σ, telle que la substitution

$$\Sigma^{-1} T \Sigma$$

soit canonique, c'est-à-dire ait tous ses éléments nuls, sauf ceux de la diagonale principale.

L'auteur traite ensuite la question suivante qu'il discute en détail pour les transformations ternaires : en donnant aux variables le sens de coordonnées, quels sont les points, les droites, les plans que reproduit la substitution T?

Les formes cubiques ternaires se divisent en sept familles ;

Les quatre premières familles comprennent les formes non décomposables.

Les deux premières familles comprennent les formes à discriminant non nul; elles peuvent s'écrire

$$\alpha xyz + x^3 + y^3 + z^3,$$

ou être ramenées à cette forme par une substitution réelle.

Les formes de la première famille sont décomposables en une somme de trois cubes, les formes de la seconde famille ne le sont point.

Les formes de la troisième famille sont algébriquement équivalentes à l'une des formes

$$6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3).$$

Les formes de la quatrième famille ont tous leurs invariants nuls; elles représentent des courbes à point de rebroussement; elles peuvent être ramenées par une substitution réelle à la forme

$$z^3 + xy^2.$$

Les formes de la cinquième famille représentent une conique et une droite non tangentes entre elles; elles sont algébriquement équivalentes à la forme

$$\beta z^3 + \alpha 6xyz.$$

Les formes de la sixième famille représentent une conique et une droite tangentes entre elles; elles peuvent être ramenées, par une substitution réelle, au type

$$3\alpha yz^2 + 3\beta xy^2.$$

Enfin la septième famille, étudiée déjà par M. Hermite, comprend les formes décomposables en facteurs linéaires.

Ajoutons que M. Poincaré est amené à considérer, dans les diverses catégories de substitutions, des sous-groupes plus particuliers; de même aussi certaines familles de formes doivent être décomposées, si l'on veut avoir un Tableau complet de formes *canoniques*, tel qu'une forme cubique ternaire quelconque à coefficients réels puisse être ramenée à l'une de ces formes canoniques au moyen d'une substitution réelle.

Ce Tableau formé, l'auteur calcule, pour chaque forme canonique, le discriminant et les invariants S et T d'Aronhold; il résout ensuite la question suivante : « Étant donnée une transformation linéaire, trouver les formes qu'elle reproduit. » Il construit le Tableau des formes cubiques binaires, ternaires et quaternaires reproduisibles par une transformation canonique réelle de la première catégorie, comme aussi le Tableau des formes cubiques quaternaires reproductibles par deux transformations canoniques; les problèmes analogues sont traités avec détail pour les diverses catégories de substitutions et les diverses familles de formes cubiques ternaires. Enfin M. Poincaré termine ce travail en étudiant la reproduction simultanée d'une forme cubique quaternaire au moyen de deux substitutions, de la première ou de la troisième catégorie, dont l'une est canonique; la possibilité de cette double reproduction entraîne la simultanéité de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre, d'où l'on peut, par un mécanisme bien connu, déduire d'autres équations aux dérivées partielles qui doivent être vérifiées en même temps, et qui, d'ailleurs, fournissent de nouvelles transformations qui reproduisent la forme donnée.

Une discussion approfondie de ces équations conduit l'auteur au Tableau des formes cubiques quaternaires qui sont ainsi reproductibles par deux transformations. Le problème analogue, pour les formes cubiques ternaires, se résout aisément au moyen de quelques considérations géométriques.

IIe Cahier. — Tome XXXII, 1881.

Jordan (*C.*). — Sur la théorie arithmétique des formes quadratiques. (1-43).

M. Jordan traite les deux questions suivantes :

1° Étant données deux formes quadratiques F et G à n variables et à coefficients entiers complexes de la forme $a+bi$, reconnaître si F contient G, et déterminer, s'il y a lieu, les substitutions à coefficients entiers qui transforment F en G.

2° Trouver les representations d'un entier complexe, ou plus généralement d'une forme G à moins de n variables, par une forme F à n variables.

Le premier problème a été traité par M. Hermite pour les formes ternaires à coefficients réels; c'est d'ailleurs en s'appuyant sur les résultats obtenus par M. Hermite et en les complétant au besoin que M. Jordan parvient à la solution complète.

L'auteur montre tout d'abord que le problème de la transformation d'une forme quadratique en une autre se ramène au cas où la substitution transformante a l'unité pour déterminant. La solution du problème dépend alors de la considération des formes bilinéaires de M. Hermite :

$$\varphi = \mathrm{N}(\alpha_{11}x_1+\ldots+\alpha_{1n}x_n)+\ldots+\mathrm{N}(\alpha_{n1}x_1+\ldots+\alpha_{nn}x_n)$$

où $\mathrm{N}(x)$ désigne la norme de x.

M. Jordan rappelle sous quelles conditions une telle forme φ est réduite et l'étude qu'il a faite lui-même de ces formes et de leurs transformations (*Journal de l'Ecole Polytechnique*, XLVIIIe Cahier).

Une substitution *réduite* est telle que la forme φ correspondante soit elle-même réduite; enfin une forme G est réduite par rapport à une autre forme F, si l'on a

$$\mathrm{FS} = \mathrm{G},$$

S étant une substitution réduite; M. Jordan est amené à distinguer deux espèces de formes G réduites par rapport à la forme F : les unes, les réduites ordinaires, ont leurs coefficients limités : elles sont donc en nombre fini; les autres, les réduites singulières, sont en nombre illimité; toutefois elles sont équivalentes à des formes à coefficients limités. Comme conclusion de cette discussion, on parvient à ce théorème :

Les formes de discriminants Δ et à coefficients entiers se répartissent en un nombre de classes limité.

L'auteur établit ensuite que toute substitution de déterminant 1 et à coefficients entiers qui transforme F en G est un produit de substitutions partielles de déterminant 1, à coefficients entiers et limités, dont la première transforme F en G, chacune des suivantes transformant G en elle-même.

Relativement au second problème, la représentation d'une forme quadratique F à moins de n variables par une forme f à n variables, M. Jordan montre qu'il se ramene au problème de l'équivalence des formes et de leurs transformations en elles-mêmes; il apprend à former un système de réduites R, à coefficients limités, équivalentes à F; il faut que f contienne une de ces réduites; s'il en est ainsi, on pourra former les transformations de f en ces diverses réduites : à chacune de ces transformations correspondra une représentation de F par f. Enfin M. Jordan termine en montrant comment on peut faire rentrer dans son analyse les formes de discriminant nul.

Poincaré (*H.*). — Sur les formes cubiques ternaires et quaternaires. (46-91).

Dans le Mémoire, publié sous le même titre dont nous avons précédemment rendu compte, M. Poincaré avait complètement préparé l'étude arithmétique des formes cubiques ternaires; c'est cette étude qu'il fait dans le Mémoire actuel où il résout les trois questions suivantes : 1° reconnaître si deux formes données sont équivalentes; 2° distribuer les formes en classes, en genres et en ordres; 3° trouver les transformations à coefficients entiers qui reproduisent une forme donnée.

La méthode suivie par l'auteur appartient à M. Hermite. Pour que deux formes soit arithmétiquement équivalentes, il faut d'abord qu'elles soient algébriquement équivalentes; si F et F′ sont deux formes telles qu'on puisse passer de l'une à l'autre par une substitution réelle pour reconnaître si elles sont arithmétiquement équivalentes, il est nécessaire de définir des formes *réduites* qui jouent, par rapport aux formes F et F′, le rôle des réduites par rapport aux formes quadratiques.

Admettant la notion de formes quadratiques réduites et, en particulier, la définition donnée par MM. Korkine et Zolotaref (*Mathematische Annalen*, t. VI), on en tire la notion de substitution réduite; puis, les formes réduites dérivées de la forme canonique H seront celles que l'on peut tirer de H par une substitution réduite.

On peut trouver toutes les formes réduites arithmétiquement équivalentes à une forme F qui est elle-même réellement équivalente à la canonique H. Si H n'est pas reproductible par aucune substitution, il y aura, en général, une seule forme équivalente à F; si H est reproductible par différentes substitutions, il y aura un nombre fini ou infini de réduites équivalentes F. Pour que deux formes soient équivalentes, il faut et il suffit que le système des réduites de l'une soit identique au système des réduites de l'autre; enfin la même méthode permet de trouver toutes les substitutions entières qui reproduisent F.

Avant d'appliquer cette méthode aux différents cas qui peuvent se présenter, M. Poincaré établit une proposition importante due à M. Jordan (*Comptes rendus*, 5 mai 1879), à savoir que les formes à coefficients entiers algébriquement équivalentes à une forme donnée se répartissent en un nombre limité de classes, pourvu que le discriminant ne soit pas nul. Il passe ensuite à l'examen des différentes familles de formes cubiques ternaires. Les résultats sont très différents suivant les cas; ainsi, dans la première et la deuxième famille, il y a un nombre fini de réduites, un nombre fini de classes et, en général, une seule réduite par chaque classe; dans la quatrième famille, il y a un nombre infini de classes; chaque classe contient une réduite principale et un nombre fini de réduites secondaires, se disposant en une chaîne limitée de réduites contiguës. La cinquième famille, avec des points doubles imaginaires, donne un nombre fini de classes; chacune contient un nombre fini de réduites formant une chaîne indéfinie où elles se reproduisent périodiquement, comme dans le cas des formes quadratiques, binaires, indéfinies, etc.

Autonne (*L.*). — Recherche sur les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels. (93-176).

On doit à M. Jordan le théorème suivant obtenu précédemment par M. Fuchs dans le second ordre : « Si une équation différentielle linéaire d'ordre p a toutes ses intégrales algébriques, ces intégrales s'expriment linéairement par les racines d'équations binômes, dont les seconds membres sont des fonctions monodromes de la variable et des racines d'une équation auxiliaire $\chi = 0$; le degré de $\chi = 0$ est inférieur à une limite fixe, qui ne dépend que de la valeur numérique de p. »

Ceci rappelé, voici le problème que M. Autonne se propose de résoudre : « Une équation différentielle linéaire Y, dit-il, d'ordre p et à coefficients rationnels, admet un système fondamental d'intégrales dont tous les termes sont des racines d'une équation algébrique irréductible H de degré $m = p + n$ et à coefficients rationnels. Puisque toutes les m racines de H sont des intégrales de Y et que Y ne peut avoir plus de p intégrales linéairement indépendantes, il existe entre les m racines n équations linéaires, homogènes, à coefficients constants. Je me propose d'étudier les conséquences qu'entraîne, tant pour la forme de l'équation algébrique H que pour la nature des intégrales de Y, l'existence de ce système de n équations linéaires, homogènes, à coefficients constants.

» Ce travail se divise en quatre Parties :

» Dans la première, j'examine le cas où $n = 1$. Si le degré m est un nombre premier et si le coefficient du terme de degré $m - 1$ dans l'équation H n'est pas nul, l'équation est abélienne et toutes les racines s'expriment rationnellement en fonction de la variable et de l'une quelconque d'entre elles. L'équation différentielle Y possède un système fondamental d'intégrales dont l'une est rationnelle et les $p - 1 = m - 2$ autres racines $m^{\text{ièmes}}$ de fonctions rationnelles. Dans ce cas, l'équation auxiliaire $\chi = 0$, de M. Jordan, est du premier degré.

» Dans la deuxième Partie, j'étudie le cas de $n = 2$. Si m est un nombre premier et si le terme du degré $m - 1$ ne manque pas dans l'équation H, H peut encore être une équation abélienne et l'équation différentielle admet un système fondamental pareil à celui qui a été défini dans la première Partie. Mais, de plus, H peut être telle que toutes les racines s'expriment rationnellement en fonction de la variable et de deux d'entre elles. L'équation différentielle admet alors un système fondamental, dont une intégrale est rationnelle et dont les $p - 1 = m - 3$ autres sont de la forme $\sqrt[m]{\psi(u)}$, où ψ désigne une fonction rationnelle de la variable et d'une racine u d'une équation du second degré à coefficients rationnels.

» L'équation auxiliaire $\chi = 0$ de M. Jordan est du second degré, et les diverses équations binômes sont toutes du degré m.

» La troisième Partie traite du cas $n = 3$. Le degré m est encore un nombre premier et le terme du degré $m - 1$ existe dans l'équation H. Après avoir donné un certain nombre de propositions générales, je suis forcé, pour traiter complètement la question, de me restreindre aux degrés premiers inférieurs à 20. J'énonce, dans ce dernier cas, deux théorèmes :

» 1° Si $p - 1 = m - 4$ est un multiple de 3, l'équation H est telle que toutes les racines s'expriment rationnellement en fonction de la variable et de deux quelconques d'entre elles. L'équation différentielle possède un système fondamental dont une intégrale est rationnelle et les $p-1=m-4$ autres sont de le forme $\sqrt[m]{\psi(u,x)}$, où ψ désigne une fonction rationnelle, x la variable, u une racine d'une équation abélienne du troisième degré à coefficients rationnels. »

» L'équation auxiliaire de M. Jordan est une équation abélienne du troisième degré.

» Si $p-1=m-n$ n'est pas un multiple de 3, les résultats ne diffèrent en rien de ceux de la première Partie.

» Dans la quatrième Partie, je me borne à indiquer la marche à suivre, si l'on voulait réellement appliquer la méthode à l'intégration d'une équation différentielle donnée. »

Mathieu (*É.*). — Mémoire sur le mouvement vibratoire des cloches. (177-247).

L'auteur établit d'abord la théorie du mouvement vibratoire des lames courbes.

Relativement aux cloches, il suppose l'épaisseur variable, le long d'un même méridien.

Dans une cloche, contrairement à ce qui a lieu pour les plaques planes, le mouvement tangentiel et le mouvement normal sont fournis par trois équations non indépendantes. La hauteur des sons d'une cloche ne varie pas quand son épaisseur varie partout dans un même rapport.

On ne peut pas choisir le méridien et la variation de l'épaisseur de façon qu'une cloche ne vibre que normalement.

Étant donnée une cloche, on peut, en frottant le bord, développer un mouvement vibratoire tournant que l'auteur apprend à calculer.

Il n'y a que les cloches sphériques d'épaisseur constante auxquelles on puisse communiquer un mouvement vibratoire purement tangentiel, sans être tournant.

M. Mathieu intègre les équations différentielles du mouvement vibratoire le plus général d'une cloche sphérique, équations qui sont fort compliquées.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. GERONO et CH. BRISSE (¹). — 3ᵉ série.

Tome I; 1882, 2ᵉ semestre.

Resal (*H.*). — Sur la courbe synchrone de la cycloïde. (289-295).

La courbe synchrone de cycloïdes ayant leurs bases horizontales et un point de départ commun est représentée par une équation très compliquée; cette courbe est une trajectoire orthogonale des cycloïdes; c'est cette dernière pro-

(¹) Voir *Bulletin*, VII_2, 18.

priété que M. Resal établit en partie par le calcul, en partie géométriquement; il donne aussi de nombreuses propriétés de la courbe. Bernoulli (*Acta Erud.*, 1697) et Euler (*Mech.*, t. II) se sont aussi occupés de ce problème.

Halphen. — Sur la théorie du déplacement. (296-299).

Trois positions quelconques d'une même figure dans l'espace sont les symétriques d'une seule et même figure, prises respectivement par rapport à trois droites.

Chaque axe de symétrie est la perpendiculaire commune aux axes de deux des déplacements hélicoïdaux qui amènent les figures données les unes sur les autres.

Ces propositions généralisent un théorème intéressant de M. C. Stephanos sur le déplacement des figures planes (*Bulletin de la Soc. Philom.*, VI_7, 13).

Liguine (V.). — Sur quelques propriétés géométriques du mouvement d'un point. (300-306).

Nouvelle démonstration d'une propriété due à M. d'Ocagne (*Nouv. Ann.*, même Tome, p. 44). M. Liguine considère la courbe qui décrit l'extrémité V de la vitesse, dans le mouvement d'un point, et il applique à cette étude la notion si féconde des quantités géométriques. Rapprocher de cette Note les travaux si remarquables de Sourof sur les questions de Cinématique.

De Saint-Germain (A.). — Sur les équations de l'équilibre astatique. (306-311).

L'auteur ramène le cas général à celui des forces parallèles; et cette réduction lui fournit un moyen des plus faciles pour obtenir les douze équations de l'équilibre astatique.

Orlof (G.). — Sur une intégrale double. (311-318).

Il s'agit de l'intégrale double suivante, étudiée par Didon (*Ann. de l'École Norm. sup.*, t. VII, 1870) :

$$\iint (1-x^2-y^2)^{\frac{\mu}{2}-1}(1-2ax+a^2)^{-\frac{\mu}{2}}(1-2by+b^2)^{-\frac{\mu}{2}}dx\,dy.$$

Si $x^2+y^2 \leq$, si $a<1$, $b<1$, et si μ est un entier positif, la valeur de l'intégrale ne dépend que de ab. L'auteur étend cette propriété au cas de μ fractionnaire positif; il donne quelques autres résultats intéressants.

Brassinne (E.). — Généralisation du théorème de Brianchon et de l'hexagone de Pascal. (318-319).

Extension à des polygones de $2n$ côtés, circonscrits ou inscrits à une conique.

Brassinne (E.). — Manière directe de ramener la composition des forces concourantes à la théorie du levier. (320-321).

Démonstration intéressante, mais qui nous semble plus nouvelle dans la forme que dans le fond.

Hoffmann (*F.*). — Théorème relatif à un certain réseau de quatre sections coniques. (321-324).

Voici l'énoncé de la propriété dont il s'agit : Soient trois droites A, B, C, un point S et une conique K_3, de foyer S, et touchant A, B, en α_3, β_3; si D est une tangente mobile à K_3 et si K_1, K_2 sont des coniques, de foyer S, telles que

$$K_1 \text{ touche } B, C, D \text{ en } \beta_1, \gamma_1, \delta_1,$$
$$K_2 \text{ touche } A, C, D \text{ en } \alpha_2, \gamma_2\ \delta_2,$$

la distance $\delta_1\delta_2$ est toujours vue sous le même angle du point S.

Rouché (*E.*). — Sur la méthode des isopérimètres. (325-329).

L'auteur, tirant parti de deux propriétés nouvelles des apothèmes et des rayons, dues à M. Désiré André, perfectionna notablement la méthode des isopérimètres. Au lieu de prendre a_k et r_k, dans la suite de Schwab,

$$a_1,\ r_1,\ a_2,\ r_2,\ \ldots$$

pour valeurs approchées de $\frac{1}{\pi}$, il prend $r_k - \frac{1}{3}(r_{k-1} - r_k)$, $a_k + \frac{1}{3}(a_k - a_{k-1})$. L'avantage qui en résulte est considérable.

Correspondance. — *G. Barrone :* Les perpendiculaires abaissées d'un point sur les côtés $a, a', \ldots$ d'un polygone plan déterminant les segments $p, p_1, p', p'_1, \ldots$, on a

$$ap + a'p' + \ldots = ap_1 + a'p'_1 + \ldots.$$

— *P.-V. Schaewen :* Propriété du quadrilatère inscriptible et circonscriptible à un cercle. — *J.-B. Pomey :* Sur l'aire d'une certaine roulette. (330-332).

Bibliographie. — Introduction à la méthode des Quaternions, par C.-A. Laisant, député, docteur ès sciences, ancien élève de l'École Polytechnique; Paris, 1881, 1 vol. in-8°. Compte rendu par M. *H. Brocard.* (332-335).

Questions proposées. — 1404 à 1410. (335-336).

Resal (*H.*). — Développements sur la question relative à l'influence de la rotation de la Terre sur le mouvement du pendule. (337-343).

Dans cette étude, l'auteur, comme il l'annonce lui-même, a cherché à pousser plus loin l'approximation qu'on ne le fait d'habitude, et à tenir compte de la composante de la rotation de la Terre, estimée suivant le rayon parallèle à la méridienne.

Realis (*S.*). — Sur quelques intégrales indéfinies. (343-351).

Conséquences, obtenues par voie de substitution, au moyen de la formule

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \text{arc tang}\, y + \text{const.}$$

Parmi les intégrales qu'obtient ainsi M. Realis, il est intéressant de noter les suivantes :

$$\int \frac{(qn+1)x \mp 1}{x^2-1} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(x\pm 1)(x^2-1)^n - 1}}, \quad \int \frac{(n+2)x \mp n}{x^2-1} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(x\pm 1)^n - 1}},$$

$$\int \frac{1 \pm x^n}{1 \mp x^n} \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \beta x^3 + \alpha x^4}}.$$

On intègre donc par les procédés ordinaires des expressions qui sembleraient au premier abord rentrer dans les intégrales elliptiques.

Un ancien élève de Mathématiques spéciales. — Composition mathématique pour l'admission à l'École Polytechnique en 1882. Solution géométrique. (351-356).

Propriétés d'une conique passant par les points d'intersections de deux circonférences et tangentes à ces circonférences.

Moret-Blanc. — Démonstration des propositions de M. Lionnet, énoncées t. XX_2, p. 514. (357-365).

Sur les nombres triangulaires 1 et 10; propriétés des nombres 1 et 5; sur les propriétés de plusieurs nombres impairs consécutifs.

Concours d'admission a l'École Centrale en 1881; seconde session. — Géométrie analytique; Trigonométrie; Physique et Chimie; Épure. (365-368).

Moret-Blanc. — Solution de la question **1367**. (368-371).

Propriétés d'équations algébriques.

Pisani (F.). — Solution de la question **1368**. (371-373).

Formules relatives aux projections de trois points sur un certain plan.

Choudadov. — Solution de la question **1375**. (374-376).

Volumes engendrés par certaines figures tournantes.

Borletti (F.). — Solution de la question **1377**. (376-377).

Intégration de

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)}}$$

et de

$$\int \frac{3x-1}{x^2-1} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x^2-x-2}}.$$

Borletti (*F.*). — Solution de la question 1379. (377-379).

Propriété du triangle ayant pour côtés 15, 26, 37.

Leblond (*A.*). — Solution de la question 1380. (379-380).

Sur une tangente commune à deux circonférences qui se coupent.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1386. (380-381).

Propriété de l'hyperbole équilatère.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1397. (382).

Sur une conique inscrite dans un triangle.

Questions proposées. — 1411 à 1417. (382-384).

Mannheim (*A.*). — Premiers éléments de la Géométrie descriptive. (385-400, 433-450).

Excellente introduction à l'étude de la Géométrie descriptive, dans laquelle l'auteur a introduit les modifications qui lui ont été suggérées par une longue pratique de l'enseignement.

Avant d'essayer une analyse sommaire de ces deux articles, indiquons les divisions principales :

Lignes droites et plans en projections orthogonales. — Représentations d'un corps en projections orthogonales. — Problèmes descriptifs. — Problèmes métriques.

La modification essentielle qu'introduit M. Mannheim consiste dans la suppression de la ligne de terre. Il n'y a plus ainsi de points derrière le plan vertical ni au-dessous du plan horizontal. Une épure n'est plus considérée comme résultant nécessairement du rabattement du plan vertical. C'est tout aussi bien le plan horizontal qu'on peut supposer rabattu sur un tableau vertical.

Les problèmes élémentaires ne sont pas compliqués par cette modification; et l'exposé de ces problèmes est éclairci par des applications pratiques dont le choix est très heureux. Il serait à désirer que cette nouvelle méthode d'enseignement vînt à prendre faveur. M. Charles Brisse, de son côté, en avait, paraît-il, pris l'initiative dans son *Cours*, publié en novembre 1881.

Walecki. — Équation en s de degré m et décomposition d'une forme quadratique en carrés. (401-409, 556-560).

Étude intéressante sur la généralisation de l'équation en s qu'on rencontre dans la théorie des surfaces du second ordre. Soient : D_1 un déterminant de degré m, à éléments réels, et symétrique; D ce qu'il devient quand on diminue de S les éléments de sa diagonale principale. L'équation $D = 0$ est celle qu'examine M. Walecki, et il en donne de nombreuses propriétés.

Ley (*H.*). — Concours d'admission à l'École spéciale militaire en 1881; solution de la question proposée. (410-413).

Section elliptique d'un cône de révolution.

Ce très intéressant article débute par le lemme suivant, qui est presque évident, mais qui n'a cependant pas, à notre connaissance, été énoncé jusqu'ici : on a

$$\int_{\mu}^{\mu_1} f(x)\,dx = \int_{\mu}^{\mu_1} f(\mu + \mu_1 - x)\,dx,$$

l'intégrale étant finie et déterminée.

En partant de cette très simple remarque, M. Marchand arrive à une très curieuse généralisation des formules de Maclaurin et de Taylor. Voici la dernière de ces formules :

$$\begin{aligned} f(a+x) - f(a+x_0) = {} & \frac{x}{1} f'(a+x_0) - \frac{x_0}{1} f'(a+x) \\ & + \frac{x^2}{1.2} f''(a+x_0) - \frac{x_0^2}{1.2} f''(a+x) \\ & + \ldots + R_n^a. \end{aligned}$$

L'auteur donne en outre la forme du reste R_n^a. Il étend ensuite ces formules au cas de plusieurs variables indépendantes.

Habich (*E.*). — Théorème de Cinématique. (458-462).

Ce théorème est relatif au mouvement d'une figure plane dans son plan.

Antomari (*X.*). — Relation entre les distances mutuelles : 1° de quatre points situés sur un même cercle ; 2° de cinq points situés sur une même sphère. (462-464).

Démonstration nouvelle de ces relations, données dans le *Traite de Géometrie* de MM. Rouché et de Comberousse.

COMPOSITIONS données aux examens de licence dans les différentes Facultés de France, en 1880. Énoncés des Facultés de Bordeaux, Caen, Grenoble, Lyon, Montpellier, Nancy, Toulouse, Rennes, Clermont, Lille. (465-472, 516-519).

CORRESPONDANCE : M. *H. Faure :* à propos de la question **1414** et d'une propriété de deux sphères. (472-473).

Fauquembergue (*E.*). — Solution de la question **1337**. (473-475).

Problème sur la cissoïde.

Moret-Blanc. — Solution de la question **1404**. (475-476).

$At^3 + Bu^2 + C$ peut toujours être rendu divisible par 7, A, B, C étant entiers, positifs ou négatifs, et non divisibles par 7.

Lionnet. — Solution de la question **1408**. (476-478).

Problème sur la partition des nombres.

Bénezech (*E.*). — Solution de la question **1409**. (478-479).

Problème sur le triangle isoscèle.

QUESTIONS PROPOSÉES. — **1423** à **1426**. (479-480).

Resal (*H.*). — Sur les propriétés mécaniques de la lemniscate. (481-490).

Après avoir sommairement rappelé les propriétés géométriques principales de la lemniscate, l'auteur démontre par l'analyse le théorème de Saladini, et celui de M. O. Bonnet. Il donne aussi une démonstration géométrique de ce dernier théorème.

Collignon (*E.*). — Note sur la résolution, au moyen de tableaux graphiques, de certains problèmes de Cosmographie. (490-508).

Ce très intéressant article fait suite, en quelque sorte, à une Note précédente, publiée dans le même Recueil, sur un Tableau graphique donnant les heures du lever et du coucher du Soleil. Ici, l'auteur montre comment ce Tableau peut fournir l'heure du passage du Soleil dans le plan vertical est-ouest, et comment on peut tenir compte de la durée du crépuscule. Ce travail porte l'empreinte de la netteté et de l'originalité qui caractérisent l'esprit de M. Collignon.

Gambey. — Solution d'une question de Mécanique proposée au Concours d'agrégation en 1879. (508-515).

Mouvement d'un point pesant sur la surface d'un cône vertical de révolution, ce point étant attiré par le sommet.

Correspondance. — *H. Resal:* Sur la chaînette. (515-516).

Concours général de 1882. — Mathématiques spéciales; énoncé de la Composition. (519).

Catalan (*E.*). — Notes diverses. (519-521).

Isopérimètres; propriétés des nombres; propriété du pentagone inscrit.

Un anonyme. — Solution de la question **1412**. (522-523).

Propriété du triangle.

Un anonyme. — Solution de la question **1414**. (523-526).

Sur deux circonférences dans deux plans rectangulaires.

H.-B. D. — Solution de la question **1415**. (526-527).

Intégration de $\int \frac{\alpha x + 3\beta}{x} \frac{dx}{\sqrt{x^3 \mp (\alpha x + \beta)^2}}$

Questions proposées. — **1427** à **1429**. (527-528).

Biehler (*C.*). — Sur l'élimination. (529-542).

Ce Mémoire renferme d'assez nombreuses propositions, dans lesquelles il est fait grand usage des déterminants.

Laguerre. — Transformation par semi-droites réciproques. (542-556).

M. Laguerre donne ici un intéressant résumé et des applications de sa théorie des *cycles;* un cycle est une circonférence parcourue dans un sens déterminé. Une *semi-droite* est la figure décrite sur une droite par un point mobile, également dans un sens déterminé. Après avoir établi quelques propriétés générales, l'auteur étudie cette transformation spéciale qu'il appelle *par semi-droites réciproques,* et qui donne naissance à d'assez curieuses applications.

Laquière. — Constructions géométriques de la tangente et du rayon de courbure des sections planes du tore. (561-565).

Ces élégantes constructions sont obtenues par M. Laquière en considérant le tore comme l'enveloppe d'une sphère de rayon constant.

A. L.

ANNALES DES PONTS ET CHAUSSÉES ([1]).

6e série. — Tome V. — 1er semestre 1883.

Fortet (D.). — Calcul et tracé des panneaux des voûtes biaises. (26-33; 1 pl.).

Description d'une méthode permettant d'obtenir facilement les panneaux des voussoirs d'une voûte biaise. On ne s'occupe que des appareils ayant leurs lits engendrés par des droites parallèles aux têtes.

Les quatre relations trigonométriques obtenues s'appliquent à tous les appareils de ce genre, et notamment à l'appareil hélicoïdal et à l'appareil orthogonal, avec de grandes simplifications dans ce dernier cas.

La détermination des angles qui résulteraient de ces relations peut se faire très commodément au moyen de constructions graphiques.

Les rayons de courbure possèdent également des relations très simples avec les lignes trigonométriques des angles considérés.

Bazaine. — Influence des irrigations sur l'altitude d'une nappe souterraine. (34-60; 3 fig., 1 pl.).

La Ville de Paris s'est trouvée engagée, pendant plusieurs années, dans une série de procès pour dommages de diverses natures attribués aux irrigations de la plaine de Gennevilliers au moyen des eaux d'égout, procès dans lesquels certains réclamants ont demandé des indemnités considérables. D'autre part, de nombreux et importants projets d'irrigation sont aujourd'hui à l'étude, et les circonstances qui se sont produites à Gennevilliers se présenteront très probablement dans plusieurs localités placées dans des conditions analogues. Bien qu'il soit fort difficile de déterminer d'une manière exacte la part incombant aux irrigations dans la surélévation d'une nappe souterraine, il peut néanmoins être utile d'établir certaines bases bien précises, susceptibles d'éclairer la pratique ou la réglementation des arrosages, et de guider, en cas de procès, les experts chargés d'apprécier les réclamations produites.

L'auteur divise son étude en trois Parties :

1° Théorie mathématique de quelques cas particuliers du mouvement des eaux à travers un sol perméable. Mouvement vertical de filtration; mouvement de l'eau après qu'elle a remonté une surface imperméable sensiblement horizontale. Mouvement parabolique de la masse.

2° Application de cette théorie à quelques exemples, tirés de la pratique des irrigations à Gennevilliers. Détermination des données.

3° Comparaison des résultats de la théorie avec les faits observés dans la plaine de Gennevilliers.

Séjourné. — Fondations à l'air comprimé d'un pont sur la Garonne, à Marmande. (92-204; 6 fig., 5 pl.).

Ce Mémoire, surtout descriptif, renferme des données mathématiques sur les quantités de travail à développer pour comprimer à une pression p un poids ou un volume donné d'air ou pour mettre à sec, en une heure, à l'air comprimé et par épuisements, la fouille correspondant à une surface S de massif de fondation.

Lagrené (*H. de*). — Mesure des vitesses et des débits dans un cours d'eau rapide et profond. (219-246; 12 fig., 2 pl.).

Description des procédés et des appareils employés pour mesurer, au moyen du moulinet, les vitesses de l'Elbe, du Danube et d'autres cours d'eau importants de l'Autriche. Analyse abrégée de l'Ouvrage publié en allemand par M. Harlacher, professeur à l'École Polytechnique de Prague et chef des travaux hydrométriques de la Bohême.

Resal. — Effets des charges roulantes sur les ponts métalliques. (277-299).

Dans un premier Mémoire (voir *Bulletin*, VII_2, p. 116), l'auteur a indiqué une formule permettant de déterminer l'effet d'une charge roulante sur un pont métallique. Cette formule, qui repose sur plusieurs hypothèses plus ou moins admissibles, lui a paru, malgré l'incertitude de son point de départ, s'accorder assez bien aux divers faits d'expériences. Les conséquences qu'il en déduit, par des calculs fort simples, dans ce nouveau travail, pourront être également soumises au contrôle expérimental, afin de décider le degré de confiance qu'elles méritent.

Guibal. — Marche des bateaux à vapeur en courbe. (346-377; 1 pl.).

L'auteur a été conduit à étudier cette question avec assez de détails, à cause des formes et des dimensions exceptionnelles des bateaux à vapeur qui devaient fréquenter un canal de grande navigation du Rhône au port de Cette. Ces bateaux, que l'on ne rencontre guère que sur le Rhône et la Saône, ne peuvent mieux être définis qu'en les comparant à de longues aiguilles de 130^m à 140^m de longueur pour lesquelles les canaux ordinaires, tels qu'ils sont établis, ne seraient pas accessibles.

Durand-Claye (*L.*). — Sur l'évaluation des surfaces de déblai et de remblai. (402-404; 2 fig.).

Perfectionnement important imaginé par M. d'Ocagne, et destiné à rendre absolument pratique le profilomètre de M. Siégler.

Allard (*E.*). — Portée des sons et caractères à attribuer aux signaux sonores. (567-621; 9 fig.).

Les expériences sur la portée des sons ne sont pas nombreuses et offrent certaines difficultés. Les expériences discutées dans ce Mémoire ont été faites en 1861-1862 à Boulogne-sur-Mer; à Douvres, en 1873; aux environs de New-York, en 1874-1875, et à l'embouchure de l'Elbe, en 1880. Elles ont porté sur des cloches, des trompettes et des sifflets à vapeur et sur des cornets de brouillard.

Influence du vent sur la portée. Formule de la portée des sons. Conséquences de cette formule. Travail nécessaire pour obtenir différentes portées.

Caractères des signaux sonores. Signaux à un ou deux sons égaux ou inégaux.

Lavollée. — Ouvrages mobiles des barrages de la haute Seine. (622-649; 2 fig., 2 pl.).

Résistance et stabilité des mécanismes. Vannes-pavillons. H. B.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (1).

N° 14; 2 octobre.

Dumas. — Passage de Vénus sur le Soleil. (573).

Resal. — Sur le choc des corps imparfaitement élastiques. (578).

Perte de force vive résultant du choc de deux corps, considéré au point de vue le plus général. De l'effet d'un coup de queue horizontal sur une bille de billard.

S. M. l'Empereur du Brésil. — Dépêche relative à une comète observée par M. *Cruls* à l'Observatoire de Rio de Janeiro. (593).

André (C.). — Observations des comètes Barnard et Common (1882) à l'Observatoire de Lyon. (593).

Picard (E.). — Sur une classe de fonctions uniformes de deux variables indépendantes. (594).

M. Poincaré a établi que toute fonction fuchsienne pouvait être obtenue par l'inversion du quotient de deux intégrales d'une équation linéaire du second ordre à coefficients algébriques.

M. Picard a montré dans une Communication précédente comment ce point de vue pouvait être étendu au cas de deux variables; si l'on considère les équations linéaires simultanées aux dérivées partielles

$$s = ap + bq + cz, \quad r = a_1 p + b_1 q + c_1 z,$$

(1) Voir *Bulletin*, VII_2, 94.

où les coefficients sont fonctions algébriques des variables x et y, si l'on suppose que ces équations aient trois solutions communes ω_1, ω_2, ω_3, linéairement indépendantes, si enfin les équations

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u, \quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = v$$

donnent pour x et y des fonctions uniformes de u et de v, on sera parvenu à des fonctions de deux variables entièrement analogues aux fonctions fuchsiennes.

Ces circonstances se présentent pour les équations

$$\begin{aligned} 3(x-y)s &= p-q, \\ qx(x-1)(x-y)r &+ (5x^2-4xy-3x-2y)3p \\ &+ 3y(1-y)q-(x-y)z = 0, \end{aligned}$$

qui admettent les trois solutions communes, linéairement indépendantes,

$$\int_0^g \frac{du}{v},$$

où

$$v^3 = u(u-1)(u-x)(u-y),$$

g désignant successivement x, y et l'unité; M. Picard développe cet exemple et parvient ainsi à des fonctions uniformes de deux variables indépendantes, définies seulement pour des valeurs de ces variables qui satisfont à une condition d'inégalité et qui se reproduisent pour un groupe de substitutions linéaires. Se plaçant ensuite à un point de vue différent, il considère le groupe

$$(1) \qquad \left(u, v, \frac{A_3 + B_3 v + C_3 u}{A_1 + B_1 v + C_1 u}, \frac{A_2 + B_2 v + C_2 u}{A_1 + B_1 v + C_1 u}\right),$$

où les A, B, C satisfont aux relations

$$\begin{aligned} C_1\gamma_2 + C_2\gamma_1 + C_3\gamma_3 = A_1\beta_2 + A_2\beta_1 + A_3\beta_3 &= 1, \\ A_1\alpha_2 + A_2\alpha_1 + A_3\alpha_3 &= 0, \\ B_1\beta_2 + B_2\beta_1 + B_3\beta_3 &= 0, \\ C_1\alpha_2 + C_2\alpha_1 + C_3\alpha_3 &= 0, \\ C_1\beta_2 + C_2\beta_1 + C_3\beta_3 &= 0, \end{aligned}$$

les lettres grecques étant les conjuguées des grandes lettres correspondantes et les A, B, C étant des entiers complexes formés avec les racines cubiques de l'unité; M. Picard a déjà étudié ce groupe au point de vue arithmétique; si l'on fait

$$u = \frac{U}{V+1}, \quad v = \frac{1}{2}\frac{V-1}{V+1},$$

au groupe (1) correspond le groupe

$$(2) \qquad \left(U, V, \frac{M_3 + P_3 V + R_3 U}{M_1 + P_1 V + R_1 U}, \frac{M_2 + P_2 V + R_2 U}{M_1 + P_1 V + R_1 U}\right).$$

Soit maintenant H(U, V) une fonction rationnelle de U et V restant continue pour tout système de valeurs de U et V telles que la somme des carrés de leurs modules soit inférieure à 1, la série

$$\sum H\left(\frac{M_3+P_3V+R_3U}{M_1+P_1V+R_1U}, \frac{M_2+P_2V+R_2U}{M_1+P_1V+R_1U}\right)\frac{1}{(M_1+P_1V+R_1U)^{3m}},$$

où m est un entier supérieur à deux, étendue à toutes les substitutions du groupe (2), est convergente et représente une fonction uniforme et continue de U et V définie seulement pour les valeurs de U et V qui satisfont à la condition précédemment énoncée.

Cette fonction jouit de la propriété

$$F\left(\frac{M_3+P_3V+R_1U}{M_1+P_1V+R_1U}, \frac{M_2+P_2V+R_2U}{M_1+P_1V+R_1U}\right) = (M_1+P_1V+R_1U)^{3m}F(U, V);$$

ainsi le quotient de deux telles fonctions restera inaltéré par les substitutions du groupe (2).

N° 15; 9 octobre.

Dumas. — Résultats des travaux du Comité international des Poids et Mesures, pendant sa session de 1882. (611).

Faye. — Sur une nouvelle théorie du Soleil, par M. *C.-W. Siemens.* (612).

Resal. — Du choc de deux sphères en ayant égard à leur degré d'élasticité et au frottement développé au contact. (615).

Borrelly. — Observations de la grande comète Cruls, faites à l'Observatoire de Marseille. (624).

Appell. — Théorèmes sur les fonctions d'un point analytique. (624).

Soit $F(x,y)=0$ une équation algébrique entre x et y et $Z(\xi, \eta)$ l'intégrale abélienne normale de seconde espèce qui a pour pôle le point analytique (ξ, η). Considérons la surface de Riemann correspondante et, sur l'un des feuillets, traçons une courbe fermée limite complète C qui ne comprenne dans son intérieur aucun point de ramification. La surface de Riemann est de cette façon séparée en deux parties : la première constituée par les points intérieurs, la seconde par les points extérieurs à cette courbe.

Soit $f(x, y)$ une fonction du point analytique (x, y) uniforme à l'extérieur de la courbe C et régulière en tous les points de la surface de Riemann situés en dehors de cette courbe.

Soient (x,y), (x_0, y_0) deux points analytiques situés en dehors de la courbe C, le point (x_0, y_0) étant la limite inférieure de l'intégrale $Z(\xi, \eta)$: on a la relation fondamentale

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_C Z(\xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi.$$

Si la courbe (C) est un cercle dont le centre se trouve au point analytique (a, b), on aura

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu Z^{(\nu)}(a, b);$$

$Z^\nu(a, b)$ étant ce que devient

$$\frac{d^\nu Z(\xi, \eta)}{d\xi^\nu},$$

pour $\xi = a$, $\eta = b$, et les A étant indépendants de x, y.

Poincaré. — Sur les fonctions fuchsiennes. (626).

M. Poincaré, dans l'étude des fonctions fuchsiennes, a eu à considérer des séries de la forme

$$(1) \qquad \sum H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m} = \Theta(z),$$

où H est l'algorithme d'une fonction rationnelle, où $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i + \delta_i}\right)$ sont les différentes substitutions du groupe fuchsien considéré et où m est un entier plus grand que 1. Le quotient de deux telles séries, pour une même valeur de m, est une fonction fuchsienne, ainsi que l'a prouvé l'auteur; il démontre dans la Communication dont nous rendons compte que toute fonction fuchsienne n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental peut être, et d'une infinité de façons, regardée comme le quotient de deux séries (1); pour cela, après avoir rappelé que toute série (1) pouvait être mise sous la forme

$$(2) \qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x, y),$$

où x et y sont deux fonctions fuchsiennes ayant le groupe considéré, liées par une équation algébrique et où $F(x, y)$ désigne une fonction rationnelle, il examine sous quelles conditions une expression de la forme (2) peut être mise sous la forme (1).

Halphen. — Sur une série pour développer les fonctions d'une variable. (629).

Il s'agit de la série

$$(1) \qquad A_1 + A_2 P_1\left(\frac{x}{2\beta}\right) + \cdots + A_n P_{n-1}\left(\frac{x}{n\beta}\right) + \cdots,$$

où

$$P_n(x) = \frac{e^x}{1.2\ldots n}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}),$$

où β est une arbitraire, où enfin les A sont indépendants de x; pour que cette série représente $f(x)$, on devra prendre

$$(2) \qquad A_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^\infty f(n\beta x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^n e^{-x})\,dx;$$

il faut et il suffit alors qu'il existe des nombres α rendant infiniment petit le produit $1.2.3\ldots m\alpha^n f^{(m)}(x)$ pour m infiniment grand; si α peut être pris au delà de toute limite, β est arbitraire; sinon, β doit être pris entre certaines limites : la série (1), où les A sont définis par l'égalité (2), présente cette singularité qu'elle est tres fréquemment convergente sans représenter $f(x)$.

N° 16; 16 octobre.

Resal. — Du choc de deux billes posées sur un tapis de billard. (635).

Examen des circonstances qu'entraîne la différence des diamètres et des masses des billes, ainsi que leur hétérogénéité.

Faye. — Sur le Catalogue des six cents tornados observés aux États-Unis dans le cours de ce siècle. (660).

Brioschi. — Sur les fonctions de sept lettres. (665).

M. Kronecker et M. Hermite ont mis en évidence l'existence de fonctions de sept lettres ayant seulement trente valeurs. Dans deux Communications successives M. Brioschi étudie ces fonctions; il les met sous la forme d'une somme de huit quantités qui, dans un cas particulier, sont les racines d'une équation du huitième degré, résoluble par les fonctions elliptiques.

Cruls. — Missions brésiliennes pour l'observation du passage de Vénus. (674).

Faye. — Observations relatives à la Communication précédente. (675).

Schulhof et *Bossert.* — Sur la comète 1812 (Pons) et sur son prochain retour. (675).

Stephanos. — Sur les propriétés métriques et cinématiques d'une sorte de quadrangles conjugués. (677).

Deux systèmes de quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 et B_1, B_2, B_3, B_4 forment deux quadrangles conjugués, lorsque, de quelque manière qu'on les place sur un même plan, sans changement de leurs dimensions respectives, leurs points correspondants (A_i, B_i) constituent quatre couples de points conjugués par rapport à un cercle; chacun des angles $\widehat{A_i A_j A_k}$ mesuré dans un sens déterminé est égal, à un multiple près de π, à l'angle $\widehat{B_i B_j B_k}$.

On peut déterminer une droite telle que la figure symétrique du second quadrangle par rapport à cette droite ait ses côtés respectivement parallèles aux côtés du premier quadrangle. M. Stephanos signale diverses propriétés des quadrangles conjugués parmi lesquelles la plus saillante est la suivante : toutes les fois que les sommets A_1, A_2, A_3 du quadrangle (A) tombent respectivement sur des cercles arbitraires ayant pour centres les points B_1, B_2, B_3, le quatrième sommet A_4 de A vient tomber sur un quatrième cercle ayant pour centre le point B_4. Cette proposition est une généralisation d'un théorème donné récemment par M. Tchebychef dans son Mémoire *Sur les plus simples systèmes articulés qui fournissent un mouvement rectiligne approximatif au quatrième et au cinquième ordre* (*Mémoires scientifiques de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, 1881).

N° 17; 23 octobre.

Resal. — De l'effet d'un coup de queue incliné sur une bille. (700).

Borrelly. — Observations de la grande comète (Cruls), faites à l'Observatoire de Marseille. (712).

Thollon et *Gouy.* — Observations spectroscopiques sur la grande comète (Cruls).

Appell. — Relations entre les résidus d'une fonction d'un point analytique (x, y) qui se reproduit multipliée par une constante, quand le point (x, y) décrit un cycle. (714).

Soit $\Phi(x, y)$ une telle fonction du point analytique (x, y) sans points singuliers essentiels et admettant $2p$ multiplicateurs correspondant aux $2p$ cycles normaux; l'auteur montre qu'il y a en général $p-1$ relations entre les résidus de la fonction et les pôles correspondants, supposés simples.

Goursat. — Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables. (717).

La fonction de M. Appell

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha.m+n)(\beta.m)(\beta.n)}{(\gamma.m+n)(1.m)(1.n)} x^m y^n,$$

où

$$(\lambda, k) = \lambda.(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1),$$

vérifie, comme on sait, les équations

$$(x-y)s - \beta' p + \beta q = 0,$$
$$x(1-x)r + y(1-x)s + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p + \beta\gamma q - \alpha\beta z = 0.$$

M. Goursat montre que ces équations admettent en général *soixante* intégrales communes qui s'expriment par des produits tels que

$$x^l(1-x)^m y^{l'}(1-y)^{m'}(x-y)^n F_1(\lambda, \mu, \mu', \nu, t, t'),$$

λ, μ, μ', ν étant liés simplement à α, β, β', γ, et les variables t, t' étant des fonctions rationnelles et du premier degré de x et de y. On obtient ces soixante intégrales par une méthode semblable à celle employée par Jacobi pour les séries hypergéométriques ordinaires, en partant des dix intégrales définies considérées par M. Picard (*Annales de l'École Normale*, 1881) et en observant qu'il y a cinq changements de variables qui n'altèrent pas la forme de ces intégrales définies.

Lemoine. — Décomposition d'un nombre entier N en ses puissances $n^{\text{ièmes}}$ maxima. (719).

Supposant $N = a_1^n + a_2^n + \ldots + a_p^n$, l'auteur dit que N est décomposé en ses puissances $n^{\text{ièmes}}$ maxima, si, en général, a_j est la racine $n^{\text{ième}}$ à une unité près par défaut de $a_j^n + a_{j+1}^n + \ldots + a_p^n$; il donne divers théorèmes relatifs à cette décomposition.

Quet. — Induction binaire et ses périodes. (722).

N° 18; 30 octobre.

Resal. — Remarques sur la théorie des chocs. (745).

Picard. — Sur certaines formes quadratiques et sur quelques groupes discontinus. (763).

En employant un procédé dû à M. Hermite, on peut généraliser la théorie des formes quadratiques ternaires en considérant la forme

$$\begin{aligned} &A x x_0 + A' y y_0 + A'' z z_0 + B y z_0 + B_0 y_0 z \\ &+ B' z x_0 + B'_0 z_0 x + B'' x y_0 + B''_0 x_0 y, \end{aligned}$$

où x et y sont deux variables complexes, dont x_0 et y_0 sont les conjugués; de même les coefficients B affectés d'indices sont les conjugués des coefficients B sans indices; les coefficients A sont réels. En effectuant une substitution convenable sur x, y, z et la substitution à coefficients conjugués sur x_0, y_0, z_0, on ramènera la forme considérée à l'une des formes

$$\begin{aligned} &\pm (UU_0 + VV_0 + WW_0), \\ &\pm (UU_0 + VV_0 - WW_0); \end{aligned}$$

on voit par là ces formes se distinguer en formes définies et en formes indéfinies. Si l'on considère une forme indéfinie à coefficients entiers, il existera un groupe d'une infinité de substitutions linéaires à coefficients entiers (1) qui changent la forme en elle-même; si l'on met maintenant celle-ci sous la forme réduite

$$\pm (UU_0 + VV_0 - WW_0),$$

au groupe (1) correspondra un groupe (2)

$$\begin{aligned} U &= A_3 u + B_3 v + C_3 w, \\ V &= A_2 u + B_2 v + C_2 w, \\ W &= A_1 u + B_1 v + C_1 w, \end{aligned}$$

et le groupe de substitutions relatives aux variables α et β

$$\left(\alpha,\ \beta,\ \frac{A_3\alpha + B_3\beta + C_3}{A_1\alpha + B_1\beta + C_1},\ \frac{A_2\alpha + B_2\beta + C_2}{A_1\alpha + B_1\beta + C_1}\right)$$

est un groupe discontinu qui contient comme cas particulier le groupe discontinu considéré précédemment par l'auteur (Communication du 2 octobre). Cette substitution n'altère pas la somme des carrés des modules des variables.

Poincaré. — Sur les séries trigonométriques. (766).

Soit

$$\varphi(t) = \Sigma A_p \sin \alpha_p t,$$

où les A et les a sont des nombres positifs tels que $\frac{1}{A_p}$ et a_p aient, pour p infini, la limite de zéro. Le module de $\varphi(t)$ peut devenir aussi grand qu'on le veut.

Siemens. — Réponse aux objections présentées par M. *Faye* sur la théorie du Soleil de M. *C.-W. Siemens.* (769).

Lévy (M.). — Sur une extension du principe des aires et du mouvement du centre de gravité. (772).

Soient n points matériels libres soumis uniquement à leurs actions mutuelles, ces actions dérivant d'un potentiel Π qui contienne non seulement les coordonnées x_i, y_i, z_i, mais les composantes x'_i, y'_i, z'_i de leurs vitesses; les équations du mouvement sont

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - \frac{d \frac{\partial \Pi}{\partial x'_i}}{dt}, \qquad (i = 1, \ldots, n);$$

elles admettent, comme on sait, l'intégrale des forces vives, mais non les six intégrales qui correspondent aux principes des aires et du mouvement du centre de gravité. Toutefois, on peut trouver six intégrales qui jouent le même rôle; il suffit de former les combinaisons exprimées par les équations

$$\frac{d}{dt} \sum \left(m_i x_i + \frac{\partial \Pi}{\partial x'_i} \right) = \sum \frac{\partial \Pi}{\partial x_i},$$

$$\frac{d}{dt} \sum \left[m_i (y_i z'_i - z_i y'_i) + y_i \frac{\partial \Pi}{\partial z'_i} - z_i \frac{\partial \Pi}{\partial y'_i} \right]$$
$$= \sum \left(y_i \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} + y'_i \frac{\partial \Pi}{\partial z'_i} - z'_i \frac{\partial \Pi}{\partial x'_i} \right);$$

or, dans ces deux équations, les deux seconds membres sont nuls, en raison de la nature même du potentiel : le premier parce que le potentiel ne doit pas changer par une translation des axes, le second parce que le potentiel ne doit pas changer par une rotation des axes. On voit maintenant apparaître les six intégrales de M. Lévy, qui s'interprètent d'ailleurs facilement.

Sébert et *Hugoniot.* — Sur les vibrations longitudinales des verges élastiques et le mouvement d'une tige portant à son extrémité une tige additionnelle. (775).

N° 19; 6 novembre.

Brioschi. — Sur les fonctions de sept lettres. (814).

Voir plus haut.

De Bernardières. — Sur la comète observée au Chili dans le mois de septembre. (823).

Gonnessiat. — Observations de la grande comète Cruls, faites à l'Observatoire de Lyon. (824).

Cruls. — Sur la grande comète australe, observée à l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro. (825).

Laguerre. — Sur les fonctions du genre zéro et du genre 1. (828).

Soit

$$\Phi(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n$$

un polynôme entier en x dans lequel les coefficients sont des fonctions de n et supposons que, n croissant indéfiniment, $\Phi(x)$ ait pour limite une série toujours convergente $E(x)$; si l'équation $\Phi(x) = 0$ a toutes ses racines réelles et de même signe, $F(x)$ est égale au produit d'une fonction entière du genre zéro par une exponentielle de la forme e^{ax+b}.

Si $\Phi(x) = 0$ a, quel que soit n, toutes ses racines réelles, $E(x)$ est égale au produit d'une fonction entière de genre un par une exponentielle de la forme e^{ax^2+bx+c}.

Mac-Mahon (P.-A.). — Sur un résultat de calcul obtenu par M. Allégret. (831).

Lévy (M.). — Sur la relation entre la force électromotrice d'une machine dynamo-électrique et sa vitesse de rotation. (832).

Janssen. — Rapport au Bureau des Longitudes sur la prochaine éclipse du 6 mai 1883. (881).

N° 20; 13 novembre.

Sur les avantages que l'étude de cette éclipse, d'une longue durée, peut présenter pour l'étude de la constitution du Soleil et pour reconnaître l'existence de planètes circumsolaires; sur l'utilité d'envoyer une expédition à l'île Flint et aux îles Carolines.

Tacchini. — Observations faites pendant l'éclipse totale de Soleil du 17 mai 1882. (896).

Picard. — Sur les équations différentielles abéliennes dans le cas de la réduction du nombre des périodes. (898).

Soit donnée une relation algébrique du genre p

$$f(x, y) = 0,$$

et supposons que, parmi les p intégrales correspondantes de première espèce, il y en ait q

$$\int_{x_0}^{x} \frac{F_i(x, y)}{f'_y(x, y)}\, dx \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

ayant seulement $2q$ périodes distantes, et cela de telle manière que

$$\begin{matrix} \Omega_{1,1}, & \Omega_{1,2}, & \ldots, & \Omega_{1,2q}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ \Omega_{q,1}, & \Omega_{q,2}, & \ldots, & \Omega_{q,2q} \end{matrix}$$

désignant ces $2q$ systèmes de périodes correspondantes, tout autre système de périodes correspondantes soit de la forme

$$m_1\Omega_{i,1} + m_2\Omega_{i,2} + \ldots + m_{2q}\Omega_{i,2q} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

où les m sont des entiers.

Considérons le système des équations

$$\left. \begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_1} \frac{F_i\, dx}{f'_y} + \int_{x_0}^{x_2} \frac{F_i\, dx}{f'_y} + \ldots \\ &+ \int_{x_0} \frac{F_i\, dz}{f'_y} = u_i + h_i, \end{aligned} \right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

où les h sont des constantes.

L'auteur montre que $x_1, x_2, \ldots, x_y$ sont racines d'équations algébriques dont les coefficients sont des fonctions uniformes de $u_1, u_2, \ldots, u_q$ avec $2q$ systèmes de périodes; de plus ces fonctions périodiques peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions Θ de q variables indépendantes.

Stieltjes. — Sur un théorème de M. Tisserand. (901).

Goursat. — Extension du problème de Riemann à des fonctions hypergéométriques de deux variables. (903).

L'auteur consacre deux Communications à ce sujet (p. 903 et 1044).

Le problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques a été étendu par M. Picard à certaines fonctions de deux variables; M. Picard a ainsi retrouvé la fonction $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$ de M. Appell; les fonctions F_2 et F_3 de M. Appell sont aussi susceptibles d'une définition analogue. Pour y parvenir, M. Goursat définit une fonction par ces conditions : entre cinq déterminations de la fonction il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants, dans le voisinage de tout système de valeurs (a, b) de (x, y) dont ne font partie aucun des points $0, 1, \infty$, et telles que l'on n'ait pas $ab = a + b$. Chaque branche de la fonction est holomorphe par rapport à x et par rapport à y; enfin, dans le voisinage des valeurs singulières, on a quatre déterminations linéairement indépendantes, d'une nature particulière que précise l'auteur. Dans ces conditions, M. Goursat établit que la fonction considérée z doit vérifier deux équations linéaires du quatrième ordre, ne contenant chacune que les dérivées de z par rapport à l'une des variables et dont les coefficients ne renferment aucun paramètre arbitraire; pour les formes, M. Goursat est amené à généraliser l'une des propositions fondamentales de M. Fuchs.

Ces équations sont vérifiées par toute intégrale commune aux deux équations simultanées aux dérivées partielles considérées par M. Appell,

$$(x - x^2) r + ys + [\gamma - (\alpha + \beta + 1) x] p - \alpha \beta z = 0,$$
$$(y - y^2) t + xs + [\gamma - (\alpha' + \beta' + 1) x] q - \alpha' \beta' z = 0.$$

Inversement les deux équations linéaires du quatrième ordre de M. Goursat n'admettent pas d'autre intégrale commune que les intégrales communes aux équations linéaires aux dérivées partielles de M. Appell.

Hugoniot. — Sur le développement des fonctions en séries d'autres fonctions. (907).

Soit $\varphi(x)$ une fonction dont les valeurs sont données entre α et β. Soient $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$ $n+1$ fonctions de x telles que

$$\int_\alpha^\beta Z_k Z_{k'}\, dx = 0 \qquad (k \gtrless k'),$$

et soit enfin

$$B_p = \int_\alpha^\beta Z_p^2\, dx;$$

on peut se proposer de déterminer les coefficients numériques $A_0, A_1, \ldots, A_n$ de façon que le carré moyen de la différence

$$\varepsilon = \varphi(x) - (A_0 Z_0 + A_1 Z_1 + \ldots + A_n Z_n),$$

c'est-à-dire l'intégrale

$$S = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta \varepsilon^2\, dx,$$

ait la moindre valeur possible; on trouve

$$A_k = \frac{1}{B_k} \int_\alpha^\beta Z_k \varphi(x)\, dx;$$

il est à remarquer que ces valeurs sont indépendantes les unes des autres; en prenant pour les A_k ces valeurs, on trouve

$$(\beta - \alpha) S = \int_\alpha^\beta [\varphi(x)]^2\, dx - B_0 A_0^2 - B_1 A_1^2 - \ldots - B_n A_n^2.$$

Si l'on suppose que l'entier n croisse au delà de toute limite, on observera que S va nécessairement en diminuant avec $\frac{1}{n}$, que la série à termes positifs

$$B_0 A_0^2 + B_1 A_1^2 + \ldots$$

est essentiellement convergente et que sa somme est au plus égale à

$$\int_\alpha^\beta [\varphi(x)]^2,$$

que la série

$$A_0 Z_0 + A_1 Z_1 + \ldots,$$

d'ailleurs convergente entre α et β, représentera ou non $\varphi(x)$ selon que la série

$$B_0 A_0^2 + B_1 A_1^2 + \ldots$$

a ou non pour somme la quantité

$$\int_\alpha^\beta [\varphi(x)]^2.$$

Relativement aux quantités Z satisfaisant aux conditions

$$\int_\alpha^\beta Z_k Z_{k'}\, dx = 0 \qquad (k \gtrless k'),$$

on observera que, étant données les quantités $Z_0, \ldots, Z_{n-1}$, on peut en donner l'expression *indefinie* de Z_n, pourvu que celle-ci renferme n constantes arbitraires distinctes, indépendamment d'un facteur constant; on peut prendre en particulier

$$Z_n = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + \ldots + a_n f_n(x),$$

et supposer que Z_0 ne contienne que $f_0(x)$; que Z_1 contienne

$$f_0(x) \quad \text{et} \quad f_1(x), \quad \ldots.$$

Si maintenant $\varphi(x)$ est une fonction donnée entre α et β et qu'on forme comme précédemment la série

$$A_0 Z_0 + A_1 Z_1 + \ldots,$$

cette série représentera $\varphi(x)$ sous la condition

$$\sum_0^\infty B_n A_n^2 = \int_\alpha^\beta [\varphi(x)]^2\, dx;$$

les $(n+1)$ premiers termes de cette série forment une combinaison linéaire de $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$ telle que, entre les limites α et β, le carré moyen de la différence avec $\varphi(x)$ soit moindre que pour toutes les autres combinaisons linéaires des mêmes fonctions. C'est la généralisation d'une propriété bien connue des polynômes de Legendre.

N° 21; 21 novembre.

Hatt. — Sur le rapport de l'action lunaire à l'action solaire dans le phénomène des marées. (960).

Wolf. — Sur deux étalons de l'aune et du pied-de-roi, récemment retrouvés. (977).

Bigourdan. — Observations de la planète (216) Cléopâtre et de la grande comète de 1882, faites à l'Observatoire de Paris. (978).

Trépied. — Observations de la grande comète de 1882, faites à l'Observatoire d'Alger. (979).

Jaubert. — Sur la grande comète de 1882. (982).

Rey de Morande. — Sur l'énergie solaire. (980).

Veth. — Sur les travaux de Frédéric Houtman. (982).

Hugoniot. — Sur les fonctions d'une seule variable analogues aux polynômes de Legendre. (983).

Voir plus haut.

Lévy (*M.*). — Sur le mouvement d'un système de deux particules de matière pondérable électrisées et sur l'intégration d'une classe d'équations à dérivées partielles. (988).

L'auteur applique les principes qu'il a fait connaître dans une Communication antérieure (30 octobre), et traite le problème énoncé en prenant pour le potentiel une fonction des points et de leurs vitesses qui comprend comme cas particuliers les lois de Weber, de Riemann et de Clausius : il ramène le problème à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles, pour laquelle les six intégrales dont il a expliqué antérieurement la formation lui fournissent quatre intégrales en involution (telles que les *crochets* formés avec deux d'entre elles soient identiquement nuls).

Le problème est ainsi, en général, ramené à l'intégration d'une équation à deux variables. En supposant les masses égales, l'intégration s'achève.

N° 22; 27 novembre.

Mouchez. — Observations des petites planètes, faites au grand instrument méridien de l'Observatoire de Paris pendant le troisième trimestre de l'année 1882. (1017).

Siemens (*C.-W.*). — Sur la conservation de l'énergie solaire. (1037).

Stieltjes. — Sur un théorème de M. Tisserand. (1043).

Goursat. — Extension du problème de Riemann à des fonctions hypergéométriques de deux variables. (1044).

Voir plus haut.

Abdank-Abakanowicz. — Sur un nouvel intégromètre. (1047).

Vaneček. — Sur un mode de transformation des figures dans l'espace. (1049).

Suite de l'étude du mode de transformation défini dans une Communication du 12 juin 1882.

Boussinesq. — Équilibre d'élasticité d'un solide limité par un plan. (1052).

L'auteur a traité de ce problème dans les *Comptes rendus* pour l'année 1878 : depuis il a été repris à un autre point de vue par M. Cerruti (*Accad. dei Lincei,* 1882). M. Cerruti a retrouvé la solution de M. Boussinesq et développé divers cas dont ce dernier ne s'était pas occupé ; M. Boussinesq montre que les principes qu'il avait posés dans ses Communications de l'année 1878 suffisent à établir les conclusions nouvelles obtenues par M. Cerruti.

N° 23 ; 4 décembre.

Faye. — Sur une lettre de M. Spörer relative à une particularité de la Mécanique solaire. (1110).

Lœwy et *Tresca*. — Notice sur un nouvel appareil optique propre à l'étude de la flexion. (1114).

Lipschitz. — Sur le pendule. (1141).

θ désignant l'angle de rotation, l'auteur considère simultanément les deux mouvements pour lesquels les valeurs maxima de θ sont supplémentaires et il établit une relation remarquable entre les durées des oscillations et les forces vives accumulées pendant une oscillation dans les deux mouvements.

Jonquières (*de*). — Formule pour déterminer combien il y a de nombres premiers n'excédant pas un nombre donné. (1144).

Vaněček (*MM.*). — Sur un mode de transformation des figures dans l'espace. (1146).

Boussinesq (*J.*). — Sur la transmission d'une pression oblique de la surface à l'intérieur dans un solide isotrope et homogène en équilibre. (1149).

Quet. — Sur l'induction terrestre des planètes et en particulier sur celle de Jupiter. (1155).

N° 24 ; 11 décembre.

Mouchez. — Observation du passage de Vénus dans la République Argentine. (1182).

Tisserand. — Installation et opérations préliminaires de la mission pour l'observation du passage de Vénus, à Fort-de-France. (1184).

Stéphan. — Observations du passage de Vénus sur le Soleil, faites à l'Observatoire de Marseille le 6 décembre 1882. (1185).

Hirn (*G.-A.*). — Sur la conservation de l'énergie solaire. Réponse à la Note critique de M. C.-W. Siemens. (1195).

Lescarbault. — Observation du passage de Vénus faite à Châteaudun. (1208).

Tacchini. — Observations du passage de Vénus à l'Observatoire Royal du Collège Romain. (1209).

Tacchini. — Observations de taches et de facules solaires, faites à l'Observatoire Royal du Collège Romain pendant le troisième trimestre de 1882. (1221).

Tacchini. — Sur la grande tache solaire de novembre 1882 et sur les perturbations magnétiques qui en ont accompagné l'apparition. (1212).

Jacquet (*L.*). — Observations de la grande Comète australe. (1215).

Halphen. — Sur la série de Fourier. (1217).

Soit une fonction $f(x)$ susceptible d'intégration dont on veuille étudier le développement en série trigonométrique dans un intervalle donné. Les termes de la série se calculent suivant la formule de Fourier; mais le développement n'est pas toujours possible. Comme première condition nécessaire, il faut que les termes calculés tendent vers zéro. C'est à ce sujet que M. Halphen démontre la proposition suivante :

Les termes de la série trigonométrique tendent vers zéro si l'intégrale de $f(x)^2$ est fixée dans l'intervalle considéré.

Léauté (*H.*). — Sur les solides d'égale résistance. (1219).

Lévy (*M.*). — Sur une Communication de M. Marcel Deprez relative au transport de la force. (1220).

N° 25; 18 décembre.

Faye. — Sur un récent Mémoire de M. *R. Wolf,* de Zurich, au sujet de la périodicité des taches du Soleil. (1245).

Brioschi (*F.*). — Sur les fonctions de sept lettres. (1254).

Trépied. — Observations faites pendant le passage de Vénus à l'Observatoire d'Alger. (1267).

Millosevich (*E.*). — Sur le passage de Vénus du 6 décembre 1882 observé à Rome. (1269).

Cruls (*L.*). — Sur la grande Comète australe observée à l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro. (1270).

N° 26; 26 décembre.

Mouchez. — Observation du passage de Vénus, à l'Observatoire de la Marine de Toulon. (1309).

Faye. — Sur deux objections de M. le professeur Young, de New-Jersey, à la théorie cyclonique des taches du Soleil. (1310).

Villarceau (*Y.*). — De la nécessité d'introduire certaines modifications dans l'enseignement de la Mécanique et d'en bannir certains problèmes, par exemple le mouvement du corps solide des géomètres. (1321).

Ledieu. — Considérations sur la théorie générale des unités. (1328).

Michaud. — Observation du passage de Vénus à l'Observatoire de Nice. (1339).

Thollon. — Observation du passage de Vénus à Avila (Espagne). (1340).

Gill (*D.*). — Photographies de la grande Comète de 1882, faites à l'Observatoire du cap de Bonne-Espérance. (1342).

Jonquières (*de*). — Sur la formule récemment communiquée à l'Académie au sujet des nombres premiers. (1343).

Lipschitz (*R.*). — Sur une Communication de M. de Jonquières relative aux nombres premiers. (1344).

Tome XCVI; 1883.

N° 1; 2 janvier.

Siemens. — Réponse aux objections présentées à la théorie de l'énergie solaire, par MM. Faye et Hirn. (43).

Huggins (*W.*). — Sur une méthode pour photographier la couronne dans une éclipse de Soleil. (51).

Darboux. — Sur les cercles géodésiques. (54).

Le *cercle géodésique* sur une surface quelconque est la courbe (à courbure géodésique constante) à périmètre minimum et qui limite, sur la surface, une aire donnée; M. Darboux montre comment on peut appliquer à l'étude de l'équation différentielle des cercles géodésiques, équation qui est du second ordre, la méthode employée par Jacobi pour la détermination des lignes géodésiques. Supposons que sur une surface l'élément linéaire ds soit donné par la formule

$$dS^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2;$$

si l'on forme l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial u} - k\theta\right)^2}{A^2} + \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial v} - k\sigma\right)^2}{B^2} = 1,$$

où k est une constante arbitraire, et où θ et σ désignent deux fonctions quelconques de u, v, vérifiant l'équation

$$\frac{\partial\theta}{\partial v} - \frac{\partial\sigma}{du} = AC,$$

si enfin on connaît une solution quelconque V de l'équation aux dérivées partielles en V, qui contienne une constante arbitraire α, l'équation finie des cercles géodésiques sera

$$\frac{\partial V}{\partial\alpha} = \beta,$$

β étant une autre constante arbitraire.

En outre, la tangente en chaque point du cercle géodésique sera définie par les deux équations

$$A^2 \frac{du}{ds} = k\theta + \frac{\partial v}{\partial u},$$

$$C^2 \frac{dv}{ds} = k\sigma + \frac{\partial V}{\partial v}.$$

L'auteur applique ces résultats aux surfaces de révolution et à un autre type de surfaces étudiées par M. Maurice Lévy.

Autonne. — Sur les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels. (56).

L'auteur s'est occupé, dans un Mémoire inséré dans le *Journal de l'École Polytechnique*, XLVIII^e Cahier, Mémoire dont il a été rendu compte dans le *Bulletin*, des équations différentielles linéaires d'ordre p, admettant un système fondamental d'intégrales qui soient racines d'une équation algébrique d'ordre $m > p$; dans ce Mémoire, le nombre m était supposé premier; dans le même ordre d'idées, il communique divers résultats relatifs au cas où m est un nombre composé.

Lipschitz. — Sur une Communication de M. de Jonquières relative aux nombres premiers. (60).

La Note de M. de Jonquières, sur une proposition de Legendre, proposition qu'il avait retrouvée directement et dont il a fait ressortir l'utilité, a été l'objet de quatre Communications de M. Lipschitz : l'une du 26 décembre 1882 (t. XCV, p. 1344), les autres appartenant à l'année 1883 (t. XCVI, p. 60, 114 et 327). Dans ces Communications, il montre le lien étroit de la règle de Legendre avec divers théorèmes qu'il avait fait connaître à l'Académie en 1879 (t. LXXIX, p. 948) et que l'on retrouvera dans le *Bulletin*, 2e série, t. IV; 2e Partie, p. 12 et 13; le premier de ces théorèmes (nous renvoyons au lieu cité pour les notations) s'exprime par l'égalité

$$\left(\frac{n}{1}\right)-\left(\frac{n}{2}\right)-\left(\frac{n}{3}\right)-\left(\frac{n}{5}\right)=\left(\frac{n}{6}\right)+\ldots=1.$$

Si l'on divise les nombres premiers contenus dans la suite 1, 2, 3, ..., n, en deux parties, dont l'une comprendra les nombres a, b, c, ..., f qui ne dépassent pas $\sqrt{n}$, dont l'autre comprendra les nombres p, q, ..., s supérieurs à $\sqrt{n}$, nombres premiers dont on désigne le nombre par $L(n)$, le théorème en question conduit à l'égalité suivante :

$$\left[\left(\frac{n}{1}\right)-\left(\frac{n}{2}\right)-\left(\frac{n}{3}\right)-\ldots\right]_{abc\ldots f}=1+L(n),$$

où, dans le premier membre, on suppose que toutes les combinaisons possibles sans répétition des quantités a, b, c, ..., f figurent en dénominateur; cette égalité est l'expression de la règle de M. de Jonquières. Les trois autres théorèmes donnés par M. Lipschitz, en 1879, et qui concernent trois fonctions arithmétiques introduites par Lejeune-Dirichlet, sont susceptibles de conséquences analogues; dans ces diverses conséquences, on voit toujours figurer dans un membre des fonctions numériques qui ne dépendent que des nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$ et, dans l'autre, des fonctions numériques qui ne dépendent que des nombres premiers supérieurs à $\sqrt{n}$. M. Lipschitz montre, en outre, comment ces conséquences elles-mêmes sont susceptibles d'être généralisées.

Bois-Reymond (P. du). — Remarques au sujet d'une Note de M. Hugoniot sur le développement des fonctions en séries d'autres fonctions. (81).

Inexactitude d'un critérium de convergence indiqué par M. Hugoniot (t. XCV, p. 907).

N° 2; 8 janvier.

Faye. — Observations relatives à la dernière Communication de M. Siemens, concernant la théorie de l'énergie solaire. (79).

Kronecker. — Sur les unités complexes. (93).

Dans une suite de Communications (8, 15 et 22 janvier), l'illustre géomètre résume une partie de l'enseignement donné par lui à l'Université de Berlin pendant l'hiver de 1882 : le but qu'il poursuit dans ses leçons est, d'une part, une classification des nombres et fonctions algébriques; de l'autre, une étude de leurs propriétés qui permette de prolonger, en quelque sorte, et de développer les résultats de la théorie élémentaire des nombres dans une arithmétique supérieure, la plus générale possible, dont les *données* seraient, non seulement les nombres rationnels, mais encore les fonctions rationnelles, à coefficients entiers, d'un nombre fini quelconque de variables, et les fonctions rationnelles d'un nombre fini quelconque de fonctions algébriques, les coefficients étant toujours supposés entiers.

Les Communications de M. Kronecker développent et éclairent diverses Notes concises de Lejeune-Dirichlet (*Comptes rendus*, 1840, t. X, p. 285; *Monatsberichte*, octobre 1841, avril 1842, mars 1846); ce sont particulièrement les idées contenues dans la Note de 1842 : *Généralisation d'un théorème concernant les fractions continues et applications à la théorie des nombres*, dont M. Kronecker montre la portée considérable et par le développement desquelles il a été conduit à une démonstration nouvelle de la proposition fondamentale indiquée par Lejeune-Dirichlet, en 1846, à savoir que, « si les valeurs absolues différentes des racines de l'équation fondamentale sont en nombre h, on peut trouver $(h-1)$ unités fondamentales ».

Dans le courant de sa démonstration, l'auteur résout complètement une question qui avait été tranchée par M. Liouville dans un cas particulier (*Journal de Mathématiques*, t. XVI, p. 133) et qui concerne la réduction approximative des équations irréductibles; il est intéressant de noter que l'ordre de la réduction approximative auquel on parvient ainsi dépend du degré de l'équation *réduite*, tandis que la *limite* de l'ordre d'une réduction approximative quelconque dépend du degré de l'équation à *réduire*.

Finalement, M. Kronecker établit la proposition suivante :

Dans chaque espèce de nombres algébriques, il y a un nombre infini d'unités ayant chacune, en valeur absolue, toutes ses conjuguées, à l'exception de deux, comprises entre des limites finies.

En utilisant ensuite les considérations développées dans sa thèse (*De unitatibus complexi*), il déduit de cette proposition le théorème de Lejeune-Dirichlet qui a été énoncé plus haut.

Jordan. — Rapport sur un Mémoire de M. de Salvert sur les ombilics coniques. (105).

M. de Salvert a étudié la courbure des sections faites sur une surface, en un point singulier, par des plans passant par l'axe du cône lieu des tangentes et les génératrices de ce cône. Les ombilics coniques sont des points tels que le cône soit de révolution et que les branches de courbe qui correspondent à ces diverses génératrices aient toutes la même courbure.

Zenger (V.). — La périodicité des comètes. (110).

D'après M. Zenger, les époques des périhélies des diverses comètes admettraient une période égale à douze jours et demi environ : cette période ne différerait que de $\frac{8}{1000}$ de jours de la durée d'une demi-rotation du Soleil.

Lipschitz. — Addition à une Note sur les nombres premiers. (115).

N° 3; 15 janvier.

Faye. — Choix d'un premier méridien. (135).

Faye. — Sur la constitution mécanique et physique du Soleil. (136).

Chancourtois (*de*). — Observations au sujet de la circulaire du gouvernement des États-Unis, concernant l'adoption d'un méridien initial commun et d'une heure universelle. (182).

Goursat. — Sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur. (185).

Extension à ces fonctions du problème de Riemann. Formation de l'équation différentielle analogue à l'équation de Gauss, à laquelle satisfait une fonction d'ordre n; et cela en partant de la nature des déterminations de cette fonction aux environs des points 0, 1, ∞ ; représentation de ces fonctions au moyen d'intégrales définies multiples, analogue à l'intégrale définie d'Euler qui vérifie l'équation de Gauss.

Halphen. — Sur la série de Fourier. (188).

N° 4; 22 janvier.

Kronecker. — Sur les nombres complexes. (214).

Perrin. — Observation du passage de Vénus faite à Bragado. (227).

Leveau. — Note sur le prochain retour de la comète périodique de d'Arrest. (229).

Jonquières (*E. de*). — Addition à une Note sur les nombres premiers. (231).

Stephanos. — Sur les relations qui existent entre les covariants et les invariants de caractère pair d'une forme binaire du sixième ordre. (233).

Le système de ces covariants et invariants (non gauches) est constitué par douze formations (Clebsch, *Theorie der bin. alg. Formen*, p. 283-299). Entre *sept* quelconque existe une relation ou *syzygie*. M. Stephanos indique un procédé permettant d'obtenir des syzygies relativement simples, procédé qui peut d'ailleurs être employé dans d'autres questions de même nature.

Combescure (*E.*). — Sur les fonctions de plusieurs variables imaginaires. (235).

Sur les conditions immédiates que doit remplir une fonction analytique de plusieurs variables imaginaires, conditions analogues à celles qu'expriment les égalités

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0,$$

où l'on suppose

$$f(x+iy) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y).$$

Poincaré. — Sur les fonctions de deux variables. (238).

Indication de la marche à suivre pour établir cette proposition : « Une fonction de deux variables, méromorphe dans toute l'étendue du plan double qui permet de représenter les variables, est le quotient de deux fonctions entières. » On sait que cette proposition fondamentale n'a pas encore été démontrée rigoureusement. M. Poincaré énonce, en outre, le théorème suivant : « Si Y est une fonction quelconque de X, non uniforme, qui ne présente pas de point singulier essentiel à distance finie et qui ne puisse pas, pour une même valeur de X, prendre une infinité de valeurs finies infiniment voisines les unes des autres, elle pourra être considérée comme la solution d'une équation

$$G(X, Y) = 0,$$

où G est une fonction entière. »

Gruey. — Sur les courbes du sextant. (240).

Ces courbes sont les courbes décrites dans le champ de la vision par l'image doublement réfléchie d'un point, lorsqu'on *balance* ou qu'on fait tourner l'instrument autour de la ligne de visée directe, c'est-à-dire autour de l'axe optique, soit de la *lunette*, soit de la *pinnule* que les marins emploient suivant les cas. M. Gruey expose quelques propriétés élégantes de ces courbes.

Boussinesq. — Comment se répartit, entre les divers points de sa petite base d'appui, le poids d'un corps dur, à surface polie et convexe, posé sur un sol horizontal élastique. (245).

N° 5; 29 janvier.

Janssen. — Note sur l'observation du passage de la planète Vénus sur le Soleil. (288).

Faye. — Sur la constitution mécanique et physique du Soleil. (292).

Picard (E.). — Sur une classe de fonctions de deux variables indépendantes. (320).

L'auteur a déjà donné des exemples de fonctions de deux variables u, v, qui restent invariables quand on effectue sur u et v les substitutions en nombre infini d'un groupe linéaire discontinu. En général, si l'on considère un groupe discontinu pour tout point (u, v), c'est-à-dire pour tout système des valeurs u, v situé à l'intérieur du domaine D défini par l'inégalité

$$u'^2 + u''^2 + v'^2 + v''^2 < 1,$$

où

$$u = u' + u''i, \quad v = v' + v''i,$$

et si l'on suppose que toute substitution du groupe transforme chaque point de la limite de D en un point de cette même limite, il existe des fonctions $F(u, v)$ qui restent inaltérées par toute substitution du groupe.

Trois fonctions $x = F_1$, $y = F_2$, $z = F_3$ jouissant de cette propriété sont liées par une relation algébrique $f(x, y, z) = 0$; l'auteur étudie le résultat de la substitution des variables u, v aux variables x, y, z dans les intégrales

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z(x, y, z)},$$

où Q est un polynôme convenable d'ordre $m - L$; m étant le degré de f, intégrales qui sont l'analogue des intégrales abéliennes de première espèce; le double signe $\int$ porte alors sur une fonction $G(u, v)$ uniforme dans le domaine D. Les intégrales

$$\int_{u_0}^{U_0} \int_{v_0}^{V_0} G(u, v)\, du\, dv,$$

où

$$U_0 = \frac{M_1 u_0 + P_1 v_0 + R}{M_3 u_0 + P_3 v_0 + R_3 v_0}, \quad V_0 = \frac{M_2 u_0 + P_2 v_0 + R_1}{M_3 u_0 + P_3 v_0 + R_3},$$

(M, P, R) étant une substitution du groupe, constituent les analogues des périodes intégrales simples.

L'auteur considère aussi des fonctions de *seconde espèce* qui, par une substitution du groupe considéré, se reproduisent multipliées par une constante; ces fonctions satisfont à une équation différentielle

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

où f est un polynôme.

Goursat. — Sur l'intégration algébrique d'une classe d'équations linéaires. (323).

Ce problème : « Former l'ensemble des substitutions que subit un système fondamental d'intégrales d'une équation donnée correspondant aux divers contours fermés que l'on peut faire décrire à la variable », se résout complètement pour les équations différentielles linéaires, déjà étudiées par l'auteur, auxquelles satisfont les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur. M. Goursat traite du cas de l'équation du troisième ordre; son raisonnement est d'ailleurs général. M. Jordan ayant d'ailleurs montré comment on peut énumérer les divers groupes de substitutions d'ordre fini contenues dans le groupe linéaire à p variables, on peut, pour ces équations, résoudre complètement le problème de l'intégration algébrique. Dans le cas étudié, il y a au plus huit types qui s'intègrent algébriquement; ils correspondent aux huit groupes finis de substitutions contenus dans le groupe linéaire à trois variables.

Korkine. — Sur un théorème de M. Tchebychef. (326).

Soient $\varphi(x)$, $\psi(x)$ deux fonctions de x qui croissent simultanément ou décroissent simultanément quand x varie de o à 1; on a

$$\int_0^1 \varphi(x)\psi(x)\,dx > \int_0^1 \varphi(x)\,dx \times \int_0^1 \psi(x)\,dx.$$

Si l'une des fonctions croît et l'autre décroît, l'inégalité est renversée.

Ce théorème de M. Tchebychef résulte de l'identité

$$\frac{x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n}{n}$$
$$=\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\,\frac{y_1+\ldots+y_n}{n}+\frac{1}{n^2}\Sigma(x_i-x_k)(y_i-y_k).$$

Lipschitz. — Application d'une méthode donnée par Legendre. (327).

N° 6; 5 février.

Faye. — Sur la constitution physique et mécanique du Soleil. (355).

Darboux. — Sur la représentation sphérique des surfaces. (366).

Considérons la surface enveloppe des plans dont l'équation est

$$(x+y)X+(1-xy)Y+i(1+xy)Z-P=0;$$

x, y sont les variables de M. Bonnet. Soient p, q, r, s, t les dérivées partielles de P, du premier et du second ordre, par rapport à x, y; l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface est

$$dp\,dx-dq\,dy=0$$

ou

(1) $$r\,dx^2-t\,dy^2=0.$$

Si α, β sont les paramètres des lignes de courbure, on aura, en faisant $\lambda=\sqrt{\frac{t}{r}}$,

(2) $$\frac{\partial x}{\partial\alpha}=\lambda\frac{\partial y}{\partial\alpha},\quad \frac{\partial x}{\partial\beta}=-\lambda\frac{\partial y}{\partial\beta},$$

(3) $$\frac{\partial q}{\partial\alpha}=\lambda\frac{\partial p}{\partial\alpha},\quad \frac{\partial q}{\partial\beta}=-\lambda\frac{\partial p}{\partial\beta};$$

les équations supposées vérifiées, p et q sont les dérivées partielles d'une même fonction.

S'il s'agit de trouver les surfaces ayant une représentation sphérique donnée, x et y devront être regardées comme des fonctions données de α et de β;

les équations (2) fourniront la valeur de λ; pour déterminer P, c'est-à-dire la surface, on aura à résoudre les équations (3); les valeurs de p, q connues, on aura P par une quadrature.

L'intégration du système (3) se ramène à celle de l'équation

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{Z}{\sqrt{\lambda}}\frac{\partial^2(\sqrt{\lambda})}{\partial\alpha\,\partial\beta}, \tag{4}$$

et, Z étant une solution de cette équation, on aura

$$p = \frac{Z}{\sqrt{\lambda}}.$$

De l'étude faite par M. Moutard de l'équation (4), il résulte que :

On peut obtenir tous les cas dans lesquels le problème de la représentation sphérique est susceptible d'une solution en termes finis.

Toutes les fois que le problème de la représentation sphérique aura été résolu d'une manière quelconque pour un système de courbes orthogonales, on pourra déduire de la solution obtenue celle qui se rapporte à toute une suite illimitée de systèmes sphériques orthogonaux.

Appell. — Sur les fonctions satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$. (368).

Soit F une fonction réelle des variables réelles x, y, z vérifiant l'équation

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{dx^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0,$$

continue, admettant des dérivées en tous les points intérieurs à une surface fermée S, excepté en quelques points *singuliers* isolés.

Un tel point (a, b, c) sera dit un pôle d'ordre n, s'il existe une fonction ρ de la forme

$$\rho = \frac{V_0}{r} + \frac{V_1}{r^3} = \ldots + \frac{V_{n-1}}{r^{2n-1}},$$

telle que la différence $F - \rho$ soit continue au point (a, b, c).

Dans l'expression de ρ, on suppose

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2};$$

quant aux V, ce sont des polynômes homogènes en $x - a$, $y - b$, $z - c$ vérifiant l'équation

$$\Delta V = 0;$$

un point singulier qui n'est pas un pôle est un point singulier essentiel.

M. Appell étudie les fonctions F qui existent dans tout l'espace. A ces fonctions on peut étendre les propositions de MM. Weierstrass et Mittag-Leffler, les théorèmes indiqués par M. Appell pour les fonctions d'une variable imaginaire (1er mai 1882).

M. Appell forme l'expression générale des fonctions F qui n'ont que des pôles et qui vérifient l'équation

$$F(x+m, y+n, z+p) = F(x, y, z),$$

m, n, p étant des entiers quelconques.

Thollon et *Gouy*. — Sur le déplacement des raies du sodium, observé dans le spectre de la grande comète de 1882. (371).

N° 7; 12 février.

Sylvester. — Sur les nombres de fractions ordinaires inégales qu'on peut exprimer en se servant de chiffres qui n'excèdent pas un nombre donné. (409).

Soient x un nombre positif quelconque, $E(x)$ sa partie entière. M. Sylvester désigne par $I(x)$ une fonction arithmétique de x définie par l'égalité

$$I(x) = \Sigma\varphi(n),$$

où n est un entier positif, où φ est le nombre de nombres premiers à n et inférieurs à n, où la sommation enfin s'étend à tous les entiers n non supérieurs à $E(x)$.

On peut trouver une limite supérieure L et une limite inférieure Δ de $I(x)$, à savoir :

$$L = \left(\frac{3}{\pi^2} + \eta\right) x^2 - Ax + R(\log x),$$

$$\Lambda = \left(\frac{3}{\pi^2} - \eta'\right) x^2 - A'x + R'(\log x),$$

ε étant une quantité positive donnée aussi petite qu'on le veut; η et η' peuvent être pris plus petits que ε, R et R′ désignent des fonctions rationnelles et entières de $\log x$, d'un degré fini, dont les coefficients, ainsi que A et A′, restent toujours finis.

La probabilité pour que deux entiers dont la limite supérieure x est très grande soient premiers entre eux est $\frac{6}{\pi^2}$.

Dans une Communication postérieure (19 février), M. Sylvester annonce qu'il a calculé $I(n)$ pour toutes les valeurs entières de n inférieures à 500; il a toujours trouvé que $I(n)$ était compris entre $\frac{3}{\pi^2}n^2$ et $\frac{3}{\pi^2}(n+1)^2$.

Hirn. — Réfutation d'une seconde critique de M. Zeuner concernant les travaux des ingénieurs alsaciens sur la machine à vapeur (413).

Perrin. — Sur les relations qui existent entre les covariants et invariants des formes binaires. (426).

Soit donné un système composé d'autant de formes binaires indépendantes et de tel ordre qu'on voudra, de tous leurs invariants et covariants. Soit

$$U = Ax^n + nBx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1.2} Cx^{n-2}y^2 + \ldots$$

une quelconque des formes du système. Si l'on effectue la substitution

$$x = X - BY, \quad y = AY,$$

tous les coefficients, dans toutes les formes du système, deviendront des *pénin-variants*.

N° 8; 19 février.

Mouchez. — Observation des petites planètes, faites au grand instrument méridien de l'Observatoire de Paris pendant le quatrième trimestre de l'année 1882. (455).

Sylvester. — Note sur le théorème de Legendre. (463).

Le théorème cité par MM. de Jonquières et Lipschitz est une conséquence immédiate d'un théorème logique qui, mis sous forme sensible, équivaut à dire que si A, B, C, ... sont des corps ayant la faculté de s'entrecouper, contenus dans un vase d'eau, et si a, ab, abc, ... représentent symboliquement les volumes de A, de la partie commune à A et à C, de la partie commune à A, B, C,..., alors le volume du liquide déplacé par la totalité des corps sera

$$\Sigma a - \Sigma ab + \Sigma abc - \ldots.$$

Bigourdan. — Observations de la nouvelle planète (232) Palisa, faites à l'Observatoire de Paris. (473).

Baillaud. — Observations de la grande comète de 1882, faites à l'équatorial Brünner de l'Observatoire de Toulouse. (474).

Oliveira-Lacaille (de). — Sur une curieuse modification du noyau de la grande comète. (475).

Partition du noyau en quatre nébulosités. M. Baillaud en avait observé le dédoublement deux mois auparavant.

Todd. — Sur l'observation du passage de Vénus en 1882, faite à l'observatoire de Lick, au mont Hamilton (Californie). (476).

Picard. — Sur les fonctions uniformes d'une variable liée par une relation algébrique. (476).

Démonstration de ce théorème :

« Soient

$$x = \mathrm{P}(z), \quad y = \mathrm{Q}(z)$$

deux fonctions de z, uniformes dans tout le plan et ayant seulement un nombre fini de points singuliers essentiels a_1, a_2, ..., a_n; s'il existe entre ces fonctions une relation algébrique, le genre de cette relation doit être zéro ou l'unité. »

Perrin. — Sur les relations qui existent entre les covariants et invariants de la forme binaire du cinquième ordre. (479).

Au moyen du théorème cité plus haut, M. Perrin, dans deux Communications successives, donne le tableau de ces relations.

Combescure. — Sur les fonctions de plusieurs variables imaginaires. (483).

Polignac (C. de). — Sur une question de divisibilité. (483).

Observations sur les théorèmes d'Arithmétique de M. Mathieu Weill (19 décembre 1881) et de M. Désiré André (13 février 1882).

Schiff. — Sur l'équilibre du cylindre élastique. (487).

Trouver l'état d'équilibre d'un cylindre limité par des bases pleines et soumis à des forces normales, appliquées à sa surface latérale et à des forces normales et tangentielles appliquées à ces bases, ces forces-ci étant symétriques par rapport à l'axe.

N° 9; 26 février.

Janssen. — Note sur divers points de Physique céleste. (527).

Stephan. — Nébuleuses découvertes et observées à l'Observatoire de Marseille. (546).

Perrin. — Sur les relations qui existent entre les covariants et invariants de la forme binaire du cinquième ordre. (563).

Goursat. — Sur la théorie des fonctions uniformes. (565).

Si l'on comprend sous le nom de *singularités* les points singuliers, les coupures et les espaces lacunaires, on est conduit au résultat suivant : toute fonction uniforme qui a un nombre limité n de singularités est la somme de n fonctions dont chacune possède une seule singularité. Dans le cas où la fonction possède un nombre infini de singularités, on pourra les partager en deux classes : les unes sont telles que l'on peut trouver un contour fermé, ne renfermant à son intérieur que cette seule singularité; les autres ne jouissent pas de cette propriété. En désignant les premières par S, les secondes par S', les S' sont ce qu'on peut appeler les limites des S, suivant l'expression adoptée dans le cas des points singuliers. Ceci posé, on peut généraliser comme il suit le théorème de M. Mittag-Leffler :

« 1° Étant donnée une suite de singularités

$$S_0, S_1, S_2, \ldots, S_i, \ldots,$$

ayant pour limites d'autres singularités S' et une suite de fonctions uniformes

$$f_0(x), \quad f_1(x), \quad \ldots, \quad f_i(x), \quad \ldots,$$

telles que la fonction $f_i(x)$ admette la seule singularité S_i, il existe une fonction uniforme $F(x)$ n'admettant pas d'autres singularités que S et S', telles que la différence

$$F(x) - f_i(x)$$

soit finie et continue à l'intérieur d'un contour infiniment petit renfermant S_i.

» 2° La forme la plus générale d'une fonction $F(x)$ admettant les singularités

S et S′ est

$$F(x) = \sum_{i}^{\infty} f_i(x) + F_1(x),$$

où $f_i(x)$ admet la seule singularité S_i et où $F_1(x)$ n'admet d'autres singularités que S′. »

Jonquières (E. de). — Note sur un point de la théorie des fractions continues périodiques. (368).

Dans une suite de Communications (26 février, 12 mars, 9 avril, 16 avril, 25 avril, 7 mai, 14 mai, etc.), M. de Jonquières fait une étude intéressante et approfondie des lois qui concernent les périodes des fractions continues qui proviennent de l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier E; il donne à cet égard un très grand nombre de théorèmes, dont nous résumons ci-dessous quelques-uns, afin de faire connaître, non la totalité des résultats obtenus par l'auteur, mais la nature et l'esprit de ses recherches.

Soient a la racine carrée du plan carré contenu dans E, $d = E - a^2$, $b = +1$, $e = b^2 - E$.

Toutes les fois que d divise exactement $2a$, en sorte que $\frac{2a}{d} = f$, la période, qui commence toujours après le premier terme a, se compose de deux nombres seulement, f et $2a$.

Si e divise exactement $2b$, en sorte que $\frac{2b}{e} = g$, la période se compose de quatre termes et a pour expression générale

$$[1, (g-2), 1, 2a].$$

La longueur et la composition de la période dépendent principalement de la valeur du rapport $\frac{2a}{d}$. Si d ne divise pas $2a$, on peut supposer E de la forme $\overline{an}^2 + dn$, a et d étant les premiers entre eux.

Pour les nombres de la forme

$$E = \overline{an}^2 + 4n,$$

la période a huit termes ou dix termes, savoir :

$$\left[\left(\frac{a-1}{2}\right), 1, 1, \left(\frac{an}{2} - 1\right), 1, 1, \left(\frac{a-1}{2}\right), 2an\right]$$

ou

$$\left[\left(\frac{a-1}{2}\right), 1, 1, \left(\frac{an-1}{2}\right), 2a, \left(\frac{an-1}{2}\right), 1, 1, \frac{a-1}{2}, 2an\right],$$

selon que n est pair ou impair.

Si la fraction irréductible égale à $\frac{2a}{d}$ a son dénominateur plus grand que 2, tous les nombres composant la famille $E = \overline{an}^2 + dn$ ont des périodes dont la longueur et la composition varient avec n, bien que a et d demeurent constants. Mais, sauf quelques exceptions, relatives à quelques valeurs consécutives de n à partir de 1, le premier terme de la période et plusieurs de ceux qui le suivent immédiatement sont communs aux périodes de tous les nombres de la famille, quel que soit n. Ces mêmes termes se reproduisent dans l'ordre inverse à la fin de la période :

1° Dans toute famille de nombres $(E) = \overline{an}^2 + dn$, il existe $d+1$ groupes réguliers, où les périodes sont uniformes et de même longueur respectivement.

L'un de ces groupes (E_1) résulte directement des valeurs de n qui satisfont à la congruence $2an \equiv 2id \pmod{q^2}$, i variant de 1 à l'infini, et les d autres (E_d) de celles qui satisfont à l'équation $n = i'd + Kd^2$, i' et K étant deux nombres entiers variant l'un, i', de 0 à $d-1$, l'autre, K, de 1 à l'infini.

2° La famille (E) contient $d(d-1)$ autres groupes semi-réguliers $(E_{d'})$ déterminés par les valeurs $n = j + Kd^2$, j prenant toutes les valeurs entières de 1 à $d(d-1)$, à l'exception de celles qui sont égales à $i'd$, ces multiples de d étant déjà tous affectés aux groupes réguliers (E_d).

Dans les groupes $(E_{d'})$, les périodes ne sont pas uniformes, mais le nombre des termes qu'elles ont en commun croît de quelques unités, dans chaque groupe, chaque fois que K atteint une des valeurs résultant de l'expression de $K = ld^{2r}$ où l et r sont des entiers quelconques. Chaque groupe $(E_{d'})$ donne ainsi naissance à une infinité de sous-groupes, dans chacun desquels le nombre des termes communs à la branche initiale et à la branche finale de la période est constant et croît, sans limites, d'un sous-groupe à celui qui le suit dans la série ascendante.

3° Enfin, pour toutes les autres valeurs de n, les périodes n'ont en commun que les termes (trois au moins) dont il a été question au théorème précédent et qui se rencontrent aussi dans les groupes (E_1), (E_d), $(E_{d'})$ aux mêmes places par rapport aux termes extrêmes. Pour tout le reste, elles sont indépendantes les unes des autres.

Ce théorème se double d'un théorème analogue concernant les périodes des familles

$$(E) = \overline{bn}^2 - en.$$

M. de Jonquières développe aussi la loi de formation des réduites des nombres du type

$$E = an^2 + dn;$$

il montre, en particulier, comment les termes communs à chacune des deux branches des périodes des nombres E ne sont autres que les quotients obtenus en faisant l'opération du plus grand commun diviseur sur les nombres $2a$ et d.

Dans les théorèmes précédents on a supposé qu'on avait affaire aux fractions continues arithmétiques, mais les fractions de la forme

$$x = a + \cfrac{1}{\left(\frac{2a}{d}\right) + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{\left(\frac{2a}{d}\right) + \cfrac{1}{2a + \ddots}}}},$$

$$x = b - \cfrac{1}{\left(\frac{2b}{e}\right) - \cfrac{1}{2b - \cfrac{1}{\left(\frac{2b}{e}\right) - \cfrac{u}{2b - \ddots}}}},$$

jouent le plus grand rôle dans cette théorie; elles donnent d'ailleurs immédiatement la clef de quelques-uns des théorèmes précédents; M. de Jonquières montre, en outre, le parti qu'on peut en tirer dans le calcul numérique et étudie en détail la façon dont les réduites calculées au moyen de ces fractions se trouvent coïncider avec certaines des réduites calculées au moyen des fractions ordinaires.

N° 10; 5 mars.

Mouchez. — Observations des satellites de Saturne, d'Uranus et de Neptune, faites à l'équatorial de la tour de l'Est de l'observatoire de Paris, par MM. Paul et Prosper Henry. (607).

Stephan. — Nébuleuses découvertes et observées à l'observatoire de Marseille. (609).

Gaillot. — Sur les perturbations de Saturne, dues à l'action de Jupiter. (626).

Bigourdan. — Observations de la grande comète de septembre 1882 (II, 1883), faites à l'Observatoire de la mission du passage de Vénus à la Martinique. (629).

Bigourdan. — Observations de la nouvelle comète (Brooks et Swift), faites à l'Observatoire de Paris. (632).

Gonnessiat. — Observations de la comète Swift-Brooks, faites à l'Observatoire de Lyon. (683).

Halphen. — Sur l'approximation des sommes des fonctions numériques. (634).

L'auteur indique une méthode pour déterminer les valeurs asymptotiques de ces sommes; cette méthode repose sur la considération de l'intégrale

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_A \frac{x^z}{z} f(z)\,dz,$$

où x est une quantité réelle et positive, où la variable d'intégration z suit une ligne A n'entourant pas le point zéro et dont les extrémités sont $a + i\infty$, $a' + i\infty$, a et a' étant positifs. L'intervention de cette intégrale dans ce genre de questions tient à la propriété suivante.

Soit

$$f(z) = \frac{\lambda(1)}{1} + \frac{\lambda(2)}{2^z} + \frac{\lambda(3)}{3^z} + \cdots.$$

Si la ligne (A) est prise dans la région où vaut ce développement, on aura

$$F(x) = \lambda(1) + \lambda(2) + \ldots + \lambda(n),$$

n étant l'entier contenu dans x.

M. Halphen retrouve ainsi, en particulier, un résultat récemment communiqué par M. Sylvester.

Poincaré (*H.*). — Sur les séries des polynômes. (637).

L'auteur indique une méthode pour déterminer les régions de convergence des séries de la forme

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n + \ldots,$$

où les α sont des constantes, où P_n est un polynôme de degré n, lié aux polynômes précédents par une relation de la forme

$$Q_0 P_n + Q_1 P_{n-1} + Q_2 P_{n-2} + \ldots + Q_k P_{n-k} = 0,$$

relation où Q_i est un polynôme entier donné en x et en n, de degré i en x.

Léauté. — Sur les trajectoires des divers points d'une bielle en mouvement. (640).

N° 11; 12 mars.

Sylvester. — Sur le produit indéfini

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots.$$

(674).

Application d'une méthode graphique exposée par l'auteur dans le *Johns Hopkins Circular* de février, pour convertir en série un produit indéfini.

Sylvester. — Sur un théorème de partitions. (674).

Soient $s_1, s_2, \ldots, s_i$ des suites de nombres consécutifs, telles que le plus petit terme dans aucune d'elles n'excède pas de plus de l'unité le plus grand terme dans la suite qui précède. On peut envisager ce système de suites comme une partition de la somme des nombres contenus dans leur totalité; on a alors le théorème suivant :

Le nombre de systèmes de i suites de nombres consécutifs dont la somme est N *est le même que le nombre de partitions de* N *qu'on peut former avec les répétitions de i nombres impairs.*

Appell. — Réduction à la forme canonique des équations d'un fil flexible et inextensible. (688).

Poincaré. — Sur les groupes des équations linéaires. (691).

M. Fuchs a donné, dans le *Journal de Crelle,* t. LXXV, une méthode pour déterminer les coefficients du groupe d'une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels, avec telle approximation que l'on voudra, M. Poincaré indique, pour arriver au même résultat, deux méthodes, en considérant, mais seulement pour fixer le langage, l'équation particulière

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\left[\sum_{i=1}^{i=n}\frac{A_i}{(x-a_i)^2} + \sum_{i=1}^{i=n}\frac{B_i}{x-a_i}\right],$$

où

$$\Sigma B_i = 0.$$

Voici l'un de ces moyens: soient a_1 et a_2 deux points singuliers, C_1 et C_2 deux cercles ayant pour centres les points a_1 et a_2, n'enfermant pas d'autres points singuliers empiétant l'un sur l'autre dans une région P; on aura quatre intégrales

$$\begin{aligned} y_1 &= (x-a_1)^{\lambda_1}\mathfrak{P}_1(x-a_1),\\ y_2 &= (x-a_1)^{\lambda_2}\mathfrak{P}_2(x-a_1),\\ y_3 &= (x-a_2)^{\mu_1}\mathfrak{Q}(x-a_2),\\ y_4 &= (x-a_2)^{\mu_2}\mathfrak{Q}(x-a_2), \end{aligned}$$

et dans le domaine P des relations de la forme

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha y_3+\beta y_4, \quad \frac{dy_1}{dx}=\alpha\frac{dy_3}{dx}+\beta\frac{dy_4}{dx},\\ y_2 &= \gamma y_3+\delta y_4, \quad \frac{dy_2}{dx}=\gamma\frac{dy_3}{dx}+\delta\frac{dy_4}{dx}. \end{aligned}$$

Si l'on avait les valeurs de α, β, γ, δ pour toutes les combinaisons deux à deux des points singuliers, le groupe cherché serait déterminé; il est clair qu'au moyen des équations précédentes on peut avoir les α, β, γ, δ sous forme de séries procédant suivant les puissances des A, des B, de x_0-a_1, et de x_0-a_2.

Dans une Communication postérieure (30 avril), l'auteur montre comment on peut toujours ramener le problème au cas où l'on peut tracer deux cercles C_1, C_2 satisfaisant aux conditions énoncées; il montre aussi comment les résultats précédents s'étendent au cas des intégrales irrégulières et le lien intime qu'il y a entre ce dernier cas et divers problèmes de Mécanique céleste, relatifs à l'étude des variations séculaires des excentricités.

Jonquières (E. de). — Sur la composition des périodes des fonctions continues périodiques. (694).

N° 12; 19 mars.

Lœwy. — Description sommaire d'un nouveau système d'équatoriaux et de son installation à l'Observatoire de Paris. (785).

Ces équatoriaux sont plus stables que les équatoriaux ordinaires et rendent possible la mesure de grandes distances angulaires; l'observateur peut explorer le ciel tout entier et règle lui-même, sans se déranger, tous les mouvements de son appareil; enfin les équatoriaux permettent d'éviter l'emploi de coupoles monumentales.

Sylvester. — Preuve graphique du théorème d'Euler sur la partition des nombres pentagonaux. (743).

Démonstration, par la décomposition d'une *assemblée* régulière de points limitée par deux lignes droites en un carré et deux groupes supplémentaires, de l'identité

$$\begin{aligned} &(1+xa)(1+x^2a)(1+x^3a)\dots\\ &=1+\frac{1+ax^2}{1-x}xa+\frac{1+ax}{1-x}\,\frac{1+ax^4}{1-x^2}x^5a^2\\ &\quad+\frac{1+ax}{1-x}\,\frac{1+ax^2}{1-x^2}\,\frac{1+ax^6}{1-x^3}x^{12}a^3+\dots. \end{aligned}$$

De Bernardières. — Détermination de longitudes, effectuées au Chili, par la mission du passage de Vénus. (762).

Stieltjes. — Sur le nombre des diviseurs d'un nombre entier. (764).

Si $f(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n, on a

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{n}-\log n\right]=\text{A}$$
$$=1-2\Gamma'(1)=0,154431329803,\ \ldots.$$

Darboux (*G.*). — Sur les équations aux dérivées partielles. (766).

Considérons une équation quelconque aux dérivées partielles définissant une fonction z de plusieurs variables indépendantes. Si l'on y remplace z par $z+\varepsilon z'$, que l'on développe suivant les puissances de ε et que l'on égale à zéro le coefficient de ε, on obtiendra une équation linéaire aux dérivées partielles en z', à laquelle M. Darboux donne le nom d'*equation auxiliaire*. Il montre le parti qu'on peut tirer de la considération de cette équation dans diverses questions :

Chercher les surfaces infiniment voisines d'une surface Σ qui forment avec Σ un système triple orthogonal; ou bien, trouver les surfaces admettant la même représentation sphérique que la surface Σ; ou bien, trouver tous les cercles normaux à une famille de surfaces dont fait partie la surface Σ.

Rechercher les surfaces applicables sur une surface Σ et infiniment voisines de Σ.

Ce dernier problème revient à la transformation par orthogonalité des eléments, problème posé par M. Moutard.

Laguerre. — Sur l'application des intégrales elliptiques et ultra-elliptiques à la théorie des courbes unicursales. (769).

Si l'on considère une courbe unicursale comme enveloppe de la droite

$$xf(t)+y\varphi(t)+\theta(t),$$

où $f(t)$, $\varphi(t)$, $\theta(t)$ sont des polynômes, l'expression de la distance d'un point quelconque du plan à la tangente au point (t) contiendra le radical

$$\sqrt{[f(t)]^2+[\varphi(t)]^2}=\text{P}(t)\sqrt{\text{F}(t)},$$

en mettant en évidence, s'il y a lieu, la partie rationnelle $\text{P}(t)$. Si $\text{F}(t)$ n'est pas une constante, la courbe, d'après la terminologie de M. Laguerre, doit être regardée comme double; en chaque point on peut mener deux semi-droites opposées qui lui sont tangentes : tel est le cas des coniques. $\text{F}(t)$ est alors du quatrième degré; les coniques, regardées comme enveloppes de semi-droites, sont du genre un.

Une tangente étant donnée, en position et direction, il lui correspond une valeur de t et un signe déterminé du radical.

Si l'on détermine chaque tangente à la conique H par l'argument d'une fonction elliptique, la condition nécessaire et suffisante pour que quatre tangentes touchent un même cycle consiste en ce que la somme des arguments soit congrue à zéro, suivant les deux périodes de la fonction.

M. Laguerre, dans le même ordre d'idées, développe diverses propositions et étend les mêmes considérations aux intégrales ultra-elliptiques.

Walecki. — Démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques. (772).

Voici le nœud de la démonstration proposée par M. Walecki.

Soit $f(x) = 0$ une équation de degré $2p$, p étant impair, à coefficients réels; pour prouver qu'elle admet une racine, on met d'abord $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \varphi(z^2) + z\psi(z^2)$$

par la substitution $x = y + z$; le résultant des deux équations

$$\varphi(z^2) = 0, \quad \psi(z^2) = 0,$$

est du degré impair $p(2p-1)$, par rapport à y; ce résultant admet une racine réelle, en la substituant dans les équations précédentes, $\psi(z^2)$ seul peut devenir identiquement nul; alors $\varphi(z^2)$ étant de degré impair p en z^2, admet une racine réelle en z^2. Si ψ n'est pas identiquement nul φ et ψ ont un diviseur commun et $f(x)$ est décomposable en un produit de deux facteurs; où l'un de ces facteurs sera de degré impair, ou bien l'un de ces facteurs sera de degré impairement pair $2p'$, p' étant inférieur à p, etc.

Si le degré m de $f(x)$ est égal à $2^i p$, p étant impair, on fera la même transformation

$$f(x) = \varphi(z^2) + z\psi(z^2),$$

et l'on verra que le résultant de φ et de ψ est de degré $2^{i-1}p(2p-1)$ en y; la *parité* est en quelque sorte diminuée d'une unité; en admettant l'existence d'une racine pour une telle parité, on complétera sans difficulté la démonstration.

Charve. — Table des formes quadratiques quaternaires positives réduites dont le déterminant est égal ou inférieur à 20. (773).

La méthode employée pour la rédaction est celle que l'auteur a communiquée à l'Académie en 1881 et qui constitue une généralisation de la méthode de M. Selling pour les formes ternaires.

Aoust. — Méthode pour obtenir la formule donnant l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_n y = f(x),$$

(775).

L'auteur suppose que les A sont des constantes; il parvient à un résultat de la forme

$$y = M_1 x^{\alpha_1} + M_2 x^{\alpha_2} + \ldots + M_n x^{\alpha_n}$$
$$+ \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \int^1 da_n \int_0^1 da_{n-1} \int_0^1 da_{n-2} \cdots \int_0^1 f\left(a_n^{\frac{1}{\alpha_n}} a_{n-1}^{\frac{1}{\alpha_{n-1}}} \ldots a_1^{\frac{1}{\alpha_1}} x\right).$$

Faye. — Sur une objection de M. Tacchini, relative à la théorie du Soleil, dans les *Memorie dei Spettroscopisti italiani.* (811).

Resal. — Sur le mouvement et la déformation d'une bulle liquide qui s'élève dans une masse liquide d'une densité plus grande. (822).

De Jonquières. — Addition aux Communications précédentes sur les fractions continues périodiques. (832).

Weichold. — Caractère auquel on peut reconnaître si l'opération indiquée par

$$\sqrt[2m+1]{a\sqrt{v} \pm b\sqrt{w}\,i},$$

ou par

$$\sqrt[2m]{a \pm b\sqrt{vw}\,i},$$

peut être effectuée sous la forme

$$\alpha\sqrt{v} \pm \beta\sqrt{w}\,i,$$

m désignant un nombre entier positif, v et w des nombres rationnels positifs, et a et b, α et β des nombres rationnels quelconques; procédé pour effectuer cette opération. (835).

Il faut que $a^2 v + b^2 w$, et $a^2 + b^2 vw$ soient les puissances exactes

$$(2m+1)^{\text{ième}} \quad \text{et} \quad 2m^{\text{ième}}$$

des nombres rationnels positifs k et k'.

BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, pubblicato da B. BONCOMPAGNI.

Boncompagni (B.). — Intorno ad uno scritto inedito di Adelardo di Bath, intitolato : *Regule Abaci* (1-90), suivi de la publication des *Regule Abaci.* (91-134).

La Bibliothèque de l'Université de Leyde, la Bibliothèque Nationale de Paris et la Bibliothèque du Vatican possèdent chacune un manuscrit de cet Ouvrage important. Après les avoir minutieusement décrits, l'auteur en relève les variantes et en fait l'historique. Le manuscrit de Leyde provient de la bibliothèque de Scaliger, léguée par lui à l'Université; le manuscrit de Paris était conservé autrefois dans la bibliothèque de Saint-Victor. Après avoir énuméré les Catalogues dans lesquels les manuscrits en question sont cités, l'auteur passe aux mentions d'Adelard de Bath que l'on trouve dans divers travaux d'Adelung, de Michel Chasles, de Thomas Wright, de Moritz Cantor, de Thomas-Henri Martin, etc. C'est surtout Michel Chasles qui s'est occupé de cette question dans ses *Développements et détails historiques sur divers points du système de l'Abacus.*

Passant à l'examen de l'Ouvrage, l'auteur remarque qu'Adelard se reconnaît trois prédécesseurs. Le plus ancien est Boëce, à l'arithmétique duquel ont puisé la plupart des abacistes du moyen âge; puis vient Gerbert (c'est probablement de ses *Regule de Abaco computi* dont il s'agit); et enfin un mathématicien français nommé Guichardus.

Adelard traite surtout de la division; il en connaît trois : la *divisio ferrea* ou division par différence qui consiste essentiellement dans l'emploi d'un diviseur fictif plus grand que le vrai; la *divisio aurea*, assez semblable à celle que nous employons aujourd'hui; enfin la *divisio permixta*, combinaison des deux précédentes. Il distingue, en outre, cinq sortes (*species*) de divisions, suivant la nature du diviseur et du dividende, donnant des règles et des exemples pour chacun des cas. Suit une nomenclature des fractions d'*asses*, indispensables, comme on sait, dans la manière de compter des Romains. Adelard en indique vingt-quatre avec leurs noms et signes correspondants. Le prince Boncompagni fait remarquer que douze de ces fractions sont mentionnées par Varron, dans son Ouvrage *De lingua latina;* quatorze par Volusius Marcianus dans l'*Assis distributio;* huit dans Isidore de Séville, et dix-huit dans le *Vocabularium* de Papias (XI^e^ siècle). La chaîne de la tradition est donc interrompue. Le Chapitre sur les fractions duodécimales présente une particularité remarquable; tout un passage assez étendu s'accorde presque mot pour mot avec ce que nous trouvons sur le même sujet dans un Traité intitulé *Liber Abaci*, composé par un élève de Gerbert, nommé Bernelino. Ce Traité, publié en 1867, par M. A. Olleris, fait partie d'un assez grand nombre de manuscrits. M. le prince Boncompagni en a comparé huit, qui tous contenaient le passage en question.

L'auteur termine par quelques considérations touchant Adelard et son temps. Il se nomme simplement Adelardus; mais, d'après MM. Tanner, Wright et d'autres, il serait identique avec le moine Adelbart de Bath, qui a laissé des traductions d'Euclide, des *Tables astronomiques* de Al Kharizmi, de l'*Introduction mineure* de Abn Ma'schar Gia'far, des *Prestigii astronomici* de Thebiben Chora, et enfin un Traité sur l'astrolabe. Les dates de la vie de cet auteur peuvent être facilement précisées. Adelard fait mention du roi Henri I^er^ d'Angleterre, qui a régné de 1100 à 1135 et, de plus, il a dédié deux de ses Ouvrages aux évêques Guillaume de Syracuse et Richard de Bayeux. Or, Guillaume assistait au concile de Latran en 1112, et Richard occupait le siège de Bayeux de 1113 à 1133. Adelard a donc vécu dans la moitié du XII^e^ siècle.

Steinschneider (*Maurice*). — Étude sur Zarkali, astronome arabe du XI^e^ siècle, et ses Ouvrages. (171-182).

C'est un « premier article » traitant principalement des sources servant de complément à un autre publié à la suite d'une Notice de Bernaudino Baldi, inséré dans le *Bullettino* pour 1874.

Il n'y a qu'un seul Arabe qui ait dit quelque chose sur Zarkali : c'est le vizir Al Kifli; le court passage qu'il nous a laissé et une Notice un peu plus longue du juif Isaac Israëli, sont à peu près tout ce que le moyen âge nous a légué sur Zarkali. Les siècles immédiatement postérieurs ne fournissent qu'un seul écrivain : Bernadino Baldi. Mais la moisson devint plus ample dans les temps modernes. L'auteur cite Montucla (*Histoire des Mathématiques*), J.-B.-Jos. Delambre (*Histoire de l'Astronomie du moyen âge*), L.-P.-A. Sédillot(*Mémoire sur les instruments astronomiques des Arabes*), Joachim Selewel (*Géographie du moyen âge*), Hammer-Purgstall (*Literaturgeschichte der Araber*), Henry-Thomas Colebrook (*Miscellaneous essays*).

M. Steinschneider termine son article par quelques observations sur le nom, la ville natale et le temps de Zarkali. Il n'est pas parvenu à élucider complètement les deux premières questions. Le nom, qui ne se retrouve pas ailleurs dans les Ouvrages arabes, a paru déjà étrange à Al Kifti et, quant à la ville, le surnom de Kortubi (de Cordoue) n'est que l'addition d'un écrivain postérieur (Casiri). Nous sommes plus heureux quant au temps. Presque tous les témoignages s'accordent à placer Zerkali entre 1060 et 1080.

M. Steinschneider nous promet une liste complète des Ouvrages de Zerkali et une étude sur ses imitateurs ainsi que sur les mentions de ses Ouvrages par d'autres auteurs.

Henry (*Charles*). — Supplément à la bibliographie de Gergonne. (211-218).

C'est l'indication de quarante-trois Mémoires, publiés sans nom d'auteur dans les *Annales de Mathématiques* et qui doivent être attribués à Gergonne, d'après un exemplaire que le rédacteur légua à la Bibliothèque de la Sorbonne.

Wiedeman (*Eilardo*). — Sull'ottica degli Arabii. Traduzione dal tedesco del Dr Alfonso Sparagna. (219-225).

Ce travail concerne surtout les Ouvrages du célèbre savant Ibn al Haitam, mieux connu sous le nom d'Alhazen; il s'appelait en réalité Abu Ali Mohamed ben el Hasan Ibn el Heitem el Basri. La dernière particule de son nom indique qu'il était originaire de Basra; il ne peut donc être rangé au nombre des auteurs arabes proprement dits, mais plutôt parmi les auteurs des peuples écrivant l'arabe; en ce temps, tout l'Orient écrivait en arabe comme l'Occident en latin.

Les grands mérites d'Ibn al Haitam en Optique étaient reconnus déjà par ses compatriotes. Ainsi Ibn Khaldûn l'appelle « le plus célèbre parmi les Musulmans qui ont écrit sur cette Science ». Il devient donc doublement curieux d'examiner ses œuvres; heureusement qu'elles ont été conservées jusqu'à nos jours, à très peu d'exceptions près. Il ne manque, en effet, qu'un seul des Traités cités Ibn Ali Osebiah comme appartenant à Ibn el Haitam. Ces ouvrages se trouvent dans deux manuscrits dont l'un est à Londres et l'autre à Leyde. Le manuscrit de Londres contient les articles optiques suivants :

1° Sur la lumière des étoiles;
2° Sur la lumière;

3° Sur les miroirs concaves paraboliques ;

4° Sur la lumière de la Lune;

tandis que celui de Leyde renferme l'*Optique* avec un Commentaire de Kamale'd din Abn'l Hasan al Farisi, suivi d'autres Essais physiques sur l'arc-en-ciel, sur les éclipses, les ombres, etc., le tout d'après Ibn al Haitam et Avicenne. Enfin on y trouve un extrait du manuscrit de Londres. L'un et l'autre manuscrit sont très bien écrits, mais les dessins sont bien supérieurs dans celui de Leyde.

Voici les points sur lesquels l'auteur a insisté :

I. On trouve dans le manuscrit de Leyde un dessin de l'appareil employé par Ibn al Haitam pour déterminer l'indice de réfraction.

II. Dans l'introduction au Traité sur la sphère ardente, on trouve un théorème d'après lequel l'angle de réfraction du verre est plus petit que la moitié et plus grand que le quart de l'angle de l'incidence; la preuve en est faite d'après Ptolémée. L'auteur y a joint une table des angles de réfraction, correspondant à divers angles d'incidence, pris de 5 en 5°. Le manuscrit, corrompu en cet endroit, ne permet pas de déterminer comment on était arrivé à connaître les résultats, exprimés en degrés, minutes et secondes; toutefois, M. Wiedemann estime que la méthode est probablement identique avec celle qu'a décrite Ibn al Haitam dans son *Optique.*

III. Ibn al Haitam s'est aidé de Ptolémée. Il le cite manifestement quand il s'agit de prouver qu'en passant d'un corps dans un autre plus dense le rayon de lumière s'approche de la perpendiculaire, tandis qu'il s'en éloigne en passant dans un corps plus rare.

IV. Un passage dans le manuscrit de Londres prouve qu'une série de progrès importants dans la théorie des miroirs sphériques, attribués généralement à Roger Bacon, avaient été déjà l'œuvre d'Ibn al Haitam. Ce dernier étant très connu dans l'Occident, il est très probable que le moine anglais lui a emprunté cette part de ses connaissances.

Henry (Charles). — Notice sur un manuscrit inédit de Claude Mydorge (271-278), suivi des Extraits du Traité de Géométrie de Claude Mydorge (Manuscrit fonds français, n° 656, de la Bibliothèque Nationale de Paris). (279-350).

C'est une publication de 1008 énoncés de problèmes graphiques se rapportant à la Géométrie élémentaire; les solutions les plus intéressantes seront données dans le tome XVI.

Govi (Gilberto). — Alcune lettere inedite di Galileo Galilei. (351-379).

Ces lettres proviennent, à l'exception d'une seule, de la bibliothèque ambrosienne et sont adressées à son fondateur, le célèbre cardinal Federigo Borromeo. Trois d'entre elles sont destinées à accompagner des envois d'ouvrages nouvellement imprimés du savant florentin; les lettres à Welser sur les taches solaires (1613), le discours sur la comète (1619) et le *Saggiatore* (1623). La lettre imprimée sous le n° 3 nous montre qu'en 1617 le cardinal avait encore des doutes sur l'emploi du télescope; Galilée, alité par la fièvre, se fait fort de les lever à la prochaine entrevue. La sixième lettre est adressée à Raffaello

Staccoli, auditeur du duc Ferdinand II de Toscane. Elle porte la date de 1631 et provient des archives des Médicis. Galilée y exprime son opinion sur un plan de canalisation de l'Arno, soumis au grand-duc par un certain Coccapani. Il estime qu'il faut accorder à l'inventeur les privilèges demandés, mais seulement après qu'il aura fait connaître plus spécialement les moyens dont il entend se servir.

Ces lettres sont surtout intéressantes par les commentaires de M. Govi. C'est ainsi que, à propos des lettres sur les taches solaires, il nous fait l'historique de la brouille de Galilée avec le P. Scheiner. Ce sont les attaques du Père qui furent l'origine des lettres de Galilée, adressées, comme celles de son adversaire, à Marcus Welser, duumvir d'Augsbourg. L'impression de ces lettres fut surveillée à Rome par le prince Federigo Cesi. Le cardinal Borromeo, par une lettre qui a été conservée, remercia fort courtoisement le philosophe de son attention. Il était évidemment très bien disposé à son égard; cependant il avait encore quelques doutes. Une lettre de Cavalieri, que M. Govi a trouvée dans la Bibliothèque Nationale de Florence, et dont il publie le passage essentiel, nous apprend que le cardinal s'attendait à voir les étoiles fixes agrandies par le télescope à peu près comme les planètes.

Dans le commentaire sur la quatrième lettre, l'auteur retrace l'histoire du malentendu qui survint entre Galilée et les jésuites du Collège Romain. Le philosophe avait été aigri contre cet ordre par les démarches du P. Scheiner, par une thèse soutenue contre lui, en 1611, à l'Université de Mantoue : *Sur la hauteur des montagnes de la Lune*, et surtout par la condamnation du système de Copernic, prononcée grâce à l'influence du jésuite cardinal Bellarmin. Il saisit donc l'occasion de se venger. Le P. Grassi, du Collège Romain, avait publié une brochure anonyme : *De tribus cometis anni* 1618, *disputatio astronomica*. Galilée la fait suivre d'un *Discorso sulle comete*, publié sous le nom de son élève Guiducci, mais dont il ne fait pas de difficulté de reconnaître la paternité dans la lettre à Federigo Borromeo. Il y attaqua assez vivement quelques opinions émises par Grassi. Cette attaque fit un très mauvais effet à Rome; une lettre Ciampoli vient nous le prouver. Grassi répondit peu après par la *Libra astronomica*, publiée à Pérouse. Il dirigea ses attaques directement contre Galilée, quoique celui-ci ne se fût pas nommé dans le *Discorso*. C'est ainsi qu'il provoqua le célèbre savant à entrer en lice. Galilée ne manqua pas de répondre à l'appel : il répliqua par le célèbre *Saggiatore*.

C'est de cet Ouvrage que M. Govi traite spécialement dans son commentaire sur la cinquième lettre. Il s'applique spécialement à éclaircir l'affaire de Stigliani. Ce dernier avait été chargé par Galilée de corriger les épreuves imprimées à Rome. Il s'était si mal acquitté de sa tâche, que Galilée fut obligé de faire imprimer séparément, à Florence, un errata comprenant 209 fautes. Mais, en outre, il avait eu l'audace inouïe d'interpoler un passage où il se faisait comparer à Dante par Galilée qui n'avait jamais lu ses Ouvrages. Il eut également l'audace de nier cette interpolation; mais, outre le témoignage d'un contemporain, Giralama Aleandri, voici que le manuscrit original du *Saggiatore* vient confirmer cette allégation. Ce manuscrit, qui est en possession de M. Govi, est écrit, il est vrai, par un secrétaire de Galilée; mais il porte des annotations de sa propre main. Or on n'y trouve pas le passage en question.

D'ailleurs, le *Saggiatore* ne fut pas la seule réponse aux attaques du P. Grassi. En 1620, Guiducci fit paraître une *Lettre au P. Tarquinio Gal-*

luzzi où il soutenait énergiquement qu'il était l'auteur du *Discorso delle comete.* Il y eut encore une brochure intitulée *Scandaglio sopra la libra astronomica* et attribuée souvent à Francesco Stelluti, un des fondateurs de l'Académie dei Lincei à Rome, mais que M. Govi prouve être de son frère Giovan Battista Stelluti da Fabriano. Cet opuscule, aujourd'hui oublié, contient cependant une curieuse observation météorologique. En parlant des gouttes de pluie, Stelluti établit que la quantité d'eau tombée sera toujours plus grande dans les lieux bas que sur les hauteurs.

Quant à l'affaire de Coccapani, qui forme le sujet de la sixième lettre, M. Govi est également en état de nous fournir des explications très complètes. Il a réussi à trouver dans les archives de Florence les requêtes présentées par l'inventeur au Grand-Duc et les réponses qui lui furent faites. Il les reproduit textuellement. Il paraît que tout dépendait de Galilée chargé officiellement de l'examen de l'affaire. Son avis ne semble pas avoir été favorable. Aussi l'affaire a-t-elle très probablement avorté.

Le travail de M. Govi contient encore une foule de renseignements sur des personnages inconnus, comme le Dr Giggi, le marquis d'Oriolo, etc., mentionnés dans les lettres et intéressants pour leurs relations avec Galilée.

Aristide Marre. — Appendice au Triparty en la Science des nombres de Nicolas Chuquet Parisien. (413-460).

1. La plupart des problèmes contenus dans cet Appendice sont résolus à l'aide de la *Règle des premiers,* appellation de l'Algèbre qui appartiendrait en propre à Nicolas Chuquet.

2. Les emprunts faits par Estienne de la Roche au manuscrit n° 1346 du fonds français de la Bibliothèque nationale de Paris ne se bornent pas aux 147 feuillets du Triparty : on en constate partout, du premier au dernier feuillet, et particulièrement dans les feuilles numérotées 148-208. Parmi les questions énoncées dans l'Appendice, il en est un très grand nombre qui se retrouvent mot pour mot dans les deux éditions du livre d'Estienne de la Roche.

3. Le problème n° 105 de l'Appendice met en lumière l'existence d'un mathématicien français du XVe siècle, maistre Barthélemy de Romans.

Dr. D. Bierens de Haan. — Bibliographie néerlandaise historico-scientifique des ouvrages importants dont les auteurs sont nés aux XVIe, XVIIe et XVIIIe siècles, sur les sciences mathématiques et physiques, avec leurs applications. (519-630 et 677-717).

Une bibliographie scientifique manquait jusqu'ici à la littérature néerlandaise. M. Bierens de Haan vient combler cette lacune, après avoir dû vaincre bien des difficultés. Les bibliothèques publiques dans les Pays-Bas sont, paraît-il, insuffisantes, la seule collection importante de livres mathématiques néerlandais se trouvant à Poulkova. Les Ouvrages sont décrits autant que possible *de visu;* M. de Haan a cependant admis aussi des livres dont il ne savait que le titre et même d'autres dont le titre ne lui était pas exactement connu; de cette manière il facilitera les découvertes futures. Il a admis également des travaux contenus dans les recueils et journaux scientifiques. Enfin, il a ajouté pour chaque auteur quelques détails biographiques. Dans le volume pour 1881 la bibliographie va jusqu'à la lettre K.

Dr. Eilardo Wiedemann. — Sulla storia delle scienze naturali presso gli Arabi. Pesi specifici. Traduzione del Dr. Alfonso Sparagna. (718-720).

Mahomed al Gaffari a composé en 917 de la Hegira (1511-1512 après J.-C.) un Ouvrage traitant *des choses naturelles précieuses.* M. Wiedemann y a trouvé un passage où se trouvent mentionnés les poids spécifiques de divers métaux et pierres précieuses, ainsi que la méthode de l'investigation. Les chiffres sont très exacts, ainsi que le prouve l'auteur en comparant, dans une table, les chiffres de Mohamed, ceux de deux autres auteurs arabes et enfin nos chiffres modernes. Quant à la méthode, on a employé celle du déplacement d'un volume d'eau dans un vase plein. La forme de ce vase a été conservée dans l'ouvrage d'Al-Khazinî intitulé : *Balance de la Sagesse.*

Maurice Steinschneider. — Notice sur un ouvrage astronomique inédit d'Ibn Haitham. (721-740).

L'Ouvrage en question est mentionné par Jehnda ben Samuel ben Ablas, auteur juif du XIIIe siècle. Dans le chapitre XV de son livre, *Jaïr Netib,* Jehnda recommande comme recueil astronomique le livre d'Abn li Aben Haitham. C'est évidemment l'ouvrage en question. Nous n'en possédons plus l'original arabe. Mais en revanche on en a trouvé quatre traductions dont deux latines et deux hébraïques. L'auteur examine minutieusement ces traductions et les manuscrits dans lesquels elles se trouvent.

1. Une version latine faite d'après la version espagnole dressée, par l'ordre d'Alphonse d'Espagne, par le juif Abraham.

2. Une version hébraïque par Jacob ben Machir (Prophatius), qui se trouve dans un grand nombre de manuscrits (M. Steinschneider en cite huit). Dans plusieurs de ces manuscrits le traducteur n'est pas nommé, de sorte qu'on a pu commettre toute sorte de confusion dans les catalogues. Un seul manuscrit (celui du Vatican) est précédé d'une préface du traducteur, qui permet de préciser plusieurs points de sa biographie, entièrement inconnue jusque-là.

3. La version latine d'Abraham de Balmes, d'après la traduction de Jacob, pour le cardinal Grimani.

4. Une seconde version hébraïque, faite par Salomo Ibn Pater Kohen, médecin de Burgos, dont il existe quatre manuscrits.

La traduction de Jacob ben Machir n'est pas divisée en chapitres numérotés; cependant on y distingue différentes rubriques commençant invariablement par les mots : *Traité* (*Ma'arnar*) *sur,* etc. M. Steinschneider donne leurs titres. Leur examen suffit pour prouver que l'ouvrage d'Ibn al-Haitam n'est pas une cosmographie comme celui d'Al-Fergani, mais plutôt un livre spécial d'Astronomie.

La version latine que nous avons marquée comme n° 1 se distingue des autres par sa division en chapitres. Il y a aussi une table des matières; mais dans le seul manuscrit que nous possédions de cette version (il se trouve dans la Bibliothèque Bodléienne, à Oxford), l'énoncé ne commence qu'au chapitre XXVII. Plusieurs chapitres, d'ailleurs, de cette traduction ne se retrouvent dans aucun autre manuscrit. M. Steinschneider présume que ce sont des additions de la traduction espagnole faisant partie du *meilleur mode d'arrangement* ordonné par le roi Alphonse. Il manque aussi dans cette version la préface de l'auteur, que nous retrouvons dans les manuscrits hébraïques; à sa place il y a un *prologue* que M. Coxe d'Oxford désigne comme *Alphonsi epistola;* il ressemble, en effet, parfaitement aux préfaces des autres traductions faites par l'ordre d'Alphonse le Sage. Cette version latine semble d'ailleurs supérieure à celle d'Abraham de Balmes. Il paraît que ce dernier n'a pas toujours compris le texte hébreu.

L'ouvrage d'Ibn al Haitam, quoique très spécial, n'était probablement qu'un abrégé; au moins Averroès, dans son abrégé de l'Almageste (connu seulement par une traduction hébraïque de Jacob Anatoli) le classe parmi ceux-là. Ce livre est d'ailleurs cité par Levi ben Gerson (ou Leo de Bagnols) dans son commentaire d'Averroès. Il paraît que Levi avait vu la traduction de Jacob.

Ce travail est complété par la publication d'extraits de plusieurs des manuscrits précités.

MATHEMATISCHE ANNALEN, begründet von A. CLEBSCH und C. NEUMANN, gegenwärtig herausgegeben von F. KLEIN und A. MAYER (1).

Tome XVII; 1880.

Wedekind (*L.*). — Le rapport anharmonique et l'invariant absolu des formes binaires biquadratiques. (1-20).

Comme suite à ses travaux antérieurs (2), l'auteur donne une représentation du rapport anharmonique et de l'invariant absolu pour une surface réelle et non réglée du second ordre; et en particulier pour une sphère, en faisant voir comment, pour une valeur particulière donnée $\lambda = (\cos\omega)^2$, l'angle ω peut se construire géométriquement et se calculer analytiquement. Cette représentation est appliquée à quelques questions relatives aux intégrales elliptiques, et les positions harmoniques et équiharmoniques sont discutées avec détail.

Rosanes (*J.*). — Sur la théorie des coniques. (21-30).

Trois coniques f, φ, ψ, situées dans un même plan, peuvent toujours, d'après un théorème d'Hermite, être considérées comme polaires coniques des trois points ξ, η, ζ, par rapport à une courbe du troisième ordre Θ. Cette courbe, ainsi que les trois points, est susceptible d'une seule détermination; mais il existe, entre les points et les coniques, cette relation, que la polaire du point ξ par rapport à φ est identique à la polaire de η par rapport à f, etc., ce qu'on exprimera par les équations

$$\varphi_\xi \overset{\infty}{=} f_\eta, \quad \psi_\eta \overset{\infty}{=} \varphi_\zeta, \quad f_\zeta \overset{\infty}{=} \psi_\xi.$$

L'auteur fait voir que les six équations contenues dans ces relations sont

(1) Voir *Bulletin*, VI_2, 18.

(2) *Mathem. Annalen*, t. IX, et *Habilitationsschrift*. Karlsruhe; 1876.

encore vérifiées par deux autres systèmes de trois points. Ces trois systèmes de trois points sont, dans leur position respective, soumis à trois conditions, de telle sorte que sept de ces neuf points peuvent être choisis à volonté, tandis que le huitième et le neuvième sont alors des points de deux droites coordonnées projectivement. Réciproquement, si ces trois relations de position ont lieu entre neuf points, on pourra déterminer les coniques correspondantes f, φ, ψ.

Gall (von). — Le système de formes complet d'une forme binaire de huitième ordre. (31-51). — Sur le système complet d'une forme binaire de huitième ordre. (139-152). — Extrait d'une Lettre à la Rédaction des *Mathem. Annalen.* (456).

En se fondant sur les méthodes développées par Gordan (*Binäre Formen,* Leipzig, 1875), l'auteur donne le système de la forme binaire du huitième ordre, en le réduisant, dans son premier Mémoire, à 96 formes. Après avoir pris connaissance du tableau publié par Sylvester dans l'*American Journ. of Math.,* et qui contient 70 formes, l'auteur parvient, dans les articles suivants, à réduire le système à 71 formes, de sorte qu'il ne diffère plus maintenant du résultat obtenu par Sylvester que relativement à une seule forme, qu'il considère comme irréductible.

Klein (F.). — Sur la définition géométrique de la projectivité pour les figures fondamentales du premier degré (*Stufe*). (52-54).

Darboux (G.). — Sur le théorème fondamental de la Géométrie projective. (Extrait d'une Lettre à M. Klein). (55-61; fr.).

Les fondements de la Géométrie établis par v. Staudt reposent essentiellement sur ce théorème : « Si deux séries d'éléments se correspondent de telle manière qu'à quatre éléments quelconques de l'une des séries, formant une proportion harmonique, correspondent quatre éléments également en rapport anharmonique, la correspondance est définie par cette unique propriété, et elle coïncide avec la transformation homographique ». Tandis que M. Klein, en mentionnant il y a quelques années ce théorème ([1]), avait cru devoir compléter la démonstration de v. Staudt par la condition que, de la correspondance de deux séries, que l'on peut construire, d'un nombre infini d'éléments, on puisse toujours conclure aussi la correspondance des éléments-limites corrélatifs; M. Darboux fait voir, par la voie analytique aussi bien que par la Géométrie, que le théorème en question peut être démontré en toute rigueur sans admettre de nouvelles hypothèses.

Klein (F.). — Sur la théorie des fonctions elliptiques du module. (62-70).

Ce Mémoire expose les points de vue généraux sous lesquels l'auteur a déjà traité, dans des travaux antérieurs ([2]), la théorie des fonctions elliptiques du

---

([1]) *Mathem. Annalen,* t. VI et VII.
([2]) *Mathem. Annalen,* t. XIV et XV.

module, et a pour but de développer les principes fondamentaux d'une théorie générale de ces fonctions. Il s'agit ici de *toutes* les fonctions uniformes d'une variable ω, qui restent invariables par les substitutions linéaires à coefficients entiers de déterminant égal à 1,

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}.$$

Ces substitutions peuvent se classer suivant trois points de vue différents : 1° d'après les sous-groupes qu'elles contiennent; 2° d'après la nature arithmétique des coefficients de la substitution ; 3° d'après le genre (la connexion) du polygone fondamental correspondant à un sous-groupe. C'est surtout la dernière classification qui est importante dans la théorie des modules appartenant à un groupe. Si l'on a $p = 0$, on pourra choisir un module algébrique correspondant de telle sorte que ce module ne passe qu'une seule fois par une valeur donnée quelconque dans l'intérieur du polygone fondamental. Mais, si l'on a $p > 0$, il faudra, pour désigner le point unique du polygone, considérer au moins deux modules à la fois, entre lesquels existera alors une équation du degré p correspondant. Dans le premier cas, on a un module principal ; dans le second, on en a plusieurs, formant un sytème complet. Tous les modules appartenant au sous-groupe peuvent s'exprimer rationnellement, pour $p = 0$, au moyen du module principal, et dans les autres cas au moyen des modules du système complet. Si, de plus, ω' et ω sont liés entre eux par une substitution d'un sous-groupe désigné, alors, dans le cas de $p = 0$, il est non seulement nécessaire, mais encore suffisant que le module principal calculé pour ω coïncide avec le module principal calculé pour ω'. Mais si l'on a $p > 0$, la même conséquence exige l'égalité de tous les modules d'un système complet. L'auteur cite pour exemples l'invariant absolu comme module principal de toutes les substitutions de ω, la racine $\nu^{\text{ième}}$ du $\varkappa^2$ de Legendre, l'irrationalité icosaédrique comme module principal du cinquième degré (*Stufe*), et le système complet des modules du septième degré. En outre, dans la seconde partie de son travail, il fait voir comment ces idées générales peuvent s'appliquer à la théorie des transformations.

Gierster (*J.*). — Sur les relations entre les nombres de classes des formes quadratiques binaires de déterminant négatif. (Première et seconde Note). (71-84).

Les huit formules que M. Kronecker a établies entre les nombres de classes des formes quadratiques de déterminant négatif sont tirées des équations modulaires ordinaires par une formation de résultantes. C'est dans le même sens que l'auteur, dans sa première Note, étudie les équations modulaires des corps réguliers, en particulier celle qui appartient à l'icosaèdre. Dans la seconde Note, il se pose le problème d'aborder la même question d'une manière analogue pour les formes, en nombre infini des équations modulaires construites par Klein. Dans les correspondances modulaires de degré (*Stufe*) m, le nombre des coïncidences est compté de deux manières, une fois arithmétiquement, l'autre fois algébriquement. Le dénombrement arithmétique, qui, dans le présent travail, est effectué pour un degré égal à un nombre premier quelconque, fournit une somme de nombres de classes. Le dénombrement algébrique, au contraire, est d'abord restreint au cas où les modules de congruence considérés sont des modules principaux. On obtient alors une suite de relations entre des nombres de classes, parmi lesquelles figurent aussi les formules de Kronecker. Les résultats généraux sont calculés pour le septième degré (*Stufe*).

Konig (*J.*). — Développement en série suivant les fonctions de Bessel. (85-86).

Remarque sur le Mémoire de M. Sonine (*Math. Ann.*, t. XVI), avec renvoi à la représentation donnée par l'auteur (*Math. Ann.*, t. V) des fonctions sous forme de séries infinies.

Brill (*A.*). — Sur le théorème d'addition et le problème de l'inversion des fonctions elliptiques. (87-102).

L'auteur fait voir comment l'introduction des fonctions Z et Θ de Jacobi se déduit avec facilité de l'intégrale de troisième espèce, en partant de cette intégrale comme forme normale, exprimée par une intégrale double.

Brill (*A.*). — Sur les points d'inflexion des courbes du quatrième ordre ayant des points doubles. (103-106 et 517-522).

Les douze points d'inflexion d'une courbe du quatrième ordre à deux points doubles peuvent être considérés comme points fondamentaux d'un faisceau doublement infini de courbes du quatrième ordre. Dans les deux Notes enquestion, l'auteur nous montre comment on peut former l'équation de ce faisceau.

Schur (*F.*). — Sur la théorie des complexes de rayons du second ordre. (107-109).

« Si une forme quadratique de six variables représente un complexe de droites du second degré en coordonnées ponctuelles de droites, ses formes adjointes, qui au moyen du facteur variable constituent un faisceau simplement infini, représenteront, en coordonnées tangentielles de droites, les complexes du second degré avec la même surface de singularité. »

Marx (*W.*). — Démonstration synthétique du théorème d'Euler sur les rayons de courbure. (110-114).

Cayley (*A.*). — Sur un théorème relatif aux fonctions Θ multiples. (115-122; ang.).

Démonstration de ce théorème :

$$e^{-n(u_1,\ldots;\mu',\nu')}\,\Theta(u_1+2\varpi'_1;\mu,\nu)=e^{-2\pi i\Sigma\mu_\alpha\nu'_\alpha}\,\Theta(u_1,\ldots;\mu+\mu',\nu+\nu').$$

Les fonctions Θ dépendent de la fonction quadratique générale

$$G(u_1,\ldots,u_\rho;n_1,\ldots,n_\rho)$$

de 2ρ variables, et les caractéristiques $\nu_1,\ldots,\nu_\rho;\mu_1,\ldots,\mu_\rho$ sont des nombres quelconques, entiers ou fractionnaires.

Harnack (*Ax.*). — Sur la série trigonométrique et sur la représentation d'une fonction arbitraire. (123-132).

La nouvelle méthode dont l'auteur s'est servi, dans ce Mémoire, pour établir les principes généraux de la théorie des séries de Fourier est plus complètement développée dans le tome XIX des *Math. Ann.* et dans le *Bulletin des Sc. math. et astron.*

Klein (F.). — Sur les formes normales en nombre infini de l'intégrale elliptique de première espèce. (132-138).

L'intégrale normale de Legendre

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}},$$

se présente dans la classification de l'auteur comme une intégrale de second degré (*Stufe*), parce que le module du second degré y apparaît comme unique constante. On obtient des formes normales aussi légitimes de degré supérieur, en partant de la représentation des fonctions doublement périodiques donnée par Hermite :

$$\begin{aligned} \rho x_0 &= \sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_n), \\ \rho x_1 &= \sigma(u-b_1)\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho x_{n-1} &= \sigma(u-n_1)\sigma(u-n_2)\ldots\sigma(u-n_n), \end{aligned}$$

que l'on peut interpréter comme une courbe elliptique dans l'espace de $n-1$ dimensions, ou, suivant l'expression de l'auteur, comme une courbe elliptique de $n^{\text{ième}}$ degré. Les intégrales elliptiques appartenant à ces courbes dépendent, dans chaque cas, d'*une seule* constante, qui est un module du troisième, du quatrième, du cinquième,... degré. Le moyen de calculer les formes normales (irrationnelles) repose sur le choix des constantes $a_1, b_1, \ldots, n_1$; on les prend égales aux $n^{\text{ièmes}}$ parties des périodes. Le troisième degré s'obtient à l'aide de la courbe plane du troisième ordre, et sa forme normale se déduit de la théorie des points d'inflexion. Pour le quatrième degré, on a affaire à une courbe gauche du quatrième ordre et à la théorie des plans osculateurs stationnaires. Pour le cinquième rang, la représentation algébrique dépend de l'intersection de cinq surfaces du second degré dans l'espace de quatre dimensions.

Schubert (H.). — Étude du triangle par la géométrie numérique. (153-212).

Comme il serait impossible de résumer en peu de mots le riche contenu de ce Mémoire, nous préférons renvoyer le lecteur au texte original.

Enneper (A.). — Sur une équation entre les fonctions ϑ. (213-216).

Démonstration des équations (¹)

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &-\vartheta'(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z)+\vartheta(x+y+z)\vartheta'(x)\vartheta(y)\vartheta(z) \\ &+\vartheta(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta'(y)\vartheta(z)+\vartheta(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta'(z) \\ &\quad =\vartheta_1'(0)\vartheta_1(y+z)\vartheta_1(z+x)\vartheta_1(x+y); \end{aligned} \right.$$

$$(2)\qquad \frac{d^2\tau}{dx^2}=\tau\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\left[2k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}-(1+k^2)\frac{1}{\sin^2\operatorname{am}\frac{2Ky}{\pi}}\right],$$

(¹) HERMITE, *Comptes rendus*, t. LXXXV; 1877.

où l'on a

$$\tau = g\frac{\vartheta(x+\nu)}{\vartheta(x)}e^{-x\frac{\vartheta_1'(\nu)}{\vartheta_1 \nu}};$$

$$(3)\quad kk'^2\frac{\sin\operatorname{am}u}{dK} = \cos\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}u\left[\left(\frac{E}{K}-k'^2\right)+\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}\right]-k^2\sin\operatorname{am}u\cos^2\operatorname{am}u.$$

Gordan (*P.*). — Sur le système de formes complet de la forme biquadratique $f_1 = x_1^3x_2 + x_2^3x_3 + x_3^3x_1$. (216-233).

Cette forme biquadratique spéciale, importante pour la théorie des équations du septième degré, se change en elle-même au moyen de 168 substitutions linéaires, et par suite possède seulement quatre covariants linéairement indépendants. L'auteur, qui n'a pas encore publié sa démonstration du nombre fini des formes du système des formes biquadratiques ternaires générales, donne pour celles-ci le système total correspondant, lequel se compose de 54 formations. Le premier Chapitre contient les méthodes générales; le second commence à traiter la construction des formes pour la forme biquadratique *générale,* et poursuit cette recherche aussi loin qu'on peut le faire sans calculs trop prolixes. Dans le Chapitre III, il emploie les simplifications qui se présentent pour la forme particulière dont il s'agit, et il développe complètement les formes correspondantes.

Bianchi (*L.*). — Sur les formes normales du troisième et du cinquième degré (*Stufe*) de l'intégrale elliptique de première espèce. (234-262).

Ce travail contient un développement des théorèmes établis dans la Note de M. Klein, citée plus haut, sur les formes normales de l'intégrale elliptique, et en particulier l'auteur y développe la représentation algébrique de l'intégrale de cinquième degré au moyen de cinq formes quadratiques, dépendantes seulement de l'irrationnalité icosaédrique.

Noether (*M.*). — Sur la représentation invariante des fonctions algébriques. (263-284).

Dans la théorie des fonctions algébriques, une courbe algébrique

$$(1)\qquad f(s,z) = 0$$

est considérée, avec toutes les courbes qui peuvent s'en déduire par des substitutions rationnelles, uniformes réversibles, comme appartenant *à une même classe.* D'après cela, et en particulier dans la théorie des fonctions abéliennes, on a à résoudre le problème de représenter toutes les fonctions rationnelles σ de s et de z, sous la condition $f = 0$, c'est-à-dire toutes les fonctions algébriques σ de z appartenant à une classe, sous forme qui soit indépendante de la relation (1) choisie dans cette classe.

Les quotients des formes adjointes du $(n-3)^{\text{ième}}$ ordre φ ont le caractère invariant, et il en est par suite de même pour toute fonction de ces quotients. Réciproquement, toute fonction rationnelle σ de s et z peut se mettre sous la forme d'une fonction rationnelle homogène de dimension zéro par rapport aux φ, à la seule exception près du cas où $f = 0$ représente une courbe hyperelliptique, c'est-à-dire une courbe sur laquelle il existe une série linéaire de couples de points. Alors on n'a plus à s'occuper que de relations entre ces rapports des φ. Pour déterminer les dimensions du numérateur et du dénominateur de ces expressions dans les p fonctions φ, qui sont linéairement indépendantes entre elles, il faut traiter la question du nombre des relations d'un ordre quelconque μ entre les p fonctions. On fait voir que ce nombre reste constant dans tous les cas, et dépend uniquement du genre p de la classe; sa valeur est (le cas hyperelliptique étant seul excepté), pour l'ordre $\mu > 1$,

$$\frac{p(p+1)\ldots(p+\mu-1)}{\mu!}-(2\mu-1)(p-1).$$

Au § 5, l'auteur étudie les fonctions d'ordre μ des φ dans quelques cas spéciaux, et détermine le nombre des relations du $\mu^{\text{ième}}$ ordre dans le cas des courbes hyperelliptiques. Ce nombre a pour valeur

$$\frac{p(p+1)\ldots(p+\mu-1)}{\mu!}-\mu(p-1)-1.$$

Dans les § 6 à 7, on discute, comme exemple du mode de conception dont on a développé les principes, les courbes qui ont avec la courbe fondamentale, en tous les points d'intersection, un contact du premier ordre. On arrive ainsi à des résultats, relativement aux systèmes de courbes de contact, qui ont une bien plus grande extension que ceux que l'on pourrait obtenir par la seule considération des courbes adjointes.

Bäcklund (*A.-V.*). — Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. (285-328).

Ce Mémoire traite des équations aux dérivées partielles entre n variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$ et une fonction inconnue z, telles que leur solution complète puisse s'exprimer au moyen de deux, de trois, ..., ou d'un plus grand nombre d'équations entre z, $x_1, \ldots, x_n$ et n constantes arbitraires; et l'auteur fait voir comment, étant donnée une équation aux dérivées partielles, on peut reconnaître si elle possède cette propriété. Les méthodes générales pour $n=3$ et $n=4$ sont développées dans le cas particulier de deux équations intégrales.

Freyberg (*J.*). — Équation pour la détermination des points de contact des tangentes doubles des courbes du quatrième degré, (329-331).

Cette Note renferme une exposition très claire et très simple du calcul de Hesse pour la représentation de la courbe bien connue du quatorzième ordre, sous forme symbolique.

Mayer (*A.*). — Sur les intégrales générales des équations différentielles de la Dynamique, et leur réalisation par les méthodes de Lie. (337-354).

L'auteur dit, dans son Introduction : « Pour le mouvement d'un système de points matériels, soumis seulement à des attractions intérieures, et pouvant se mouvoir comme un corps solide libre, les principes généraux de la Mécanique fournissent dix intégrales. Ces dix intégrales se partagent en deux groupes, de caractère tout à fait différent. Le premier groupe se compose seulement de l'unique intégrale de la force vive, laquelle (jointe aux équations de condition qui peuvent exister dans le système, ainsi qu'aux positions et aux vitesses initiales données pour les points) contient toutes les données nécessaires pour la détermination univoque du mouvement, et par suite est elle-même nécessairement, à elle seule, l'expression analytique du problème dynamique. Le second groupe est formé de trois intégrales des aires et des six intégrales du centre de gravité qui ont lieu sans aucun changement, de quelque manière que la fonction des forces soit exprimée au moyen des distances mutuelles des points. Ces dernières intégrales, ne correspondant pas seulement à un problème de Dynamique, mais à une infinité de problèmes, ne sont pas nécessairement uniques. La réponse à la question de savoir s'il existe encore d'autres intégrales générales de cette seconde espèce est le sujet du premier paragraphe de ce travail.

A la démonstration de la non-existence d'autres principes généraux de Mécanique de même nature que les principes cités se rattache ensuite, dans les paragraphes suivants, cette seconde question : Jusqu'à quel point, dans l'état actuel des méthodes d'intégration, peut-on, au moyen de ces intégrales générales, pousser la solution d'un problème de la dynamique d'un système de points matériels? Lie a donné la réponse à cette question pour le problème des trois corps ou pour un système de points libres. Pour un système restreint par des équations de condition, la réponse s'obtient, d'une manière claire et évidente, par un calcul fondé sur un théorème de Jacobi (¹), et donné par Mathieu (²). Toutefois, il faut encore, pour la démonstration du théorème, des développements de calculs considérables. Le théorème général donné par Lie (³) est déjà en réalité suffisant à lui seul pour répondre à la question proposée.

Cantor (G.). — Sur les multitudes de points groupés en ligne droite. (355-358).

Suite de l'article publié dans le tome XV.

La présente Note se rapporte à un groupe de points du second genre, c'est-à-dire qui ne possèdent pas un nombre fini de groupes dérivés. L'auteur fait voir comment on peut ici détacher de la série infinie des dérivées de nouveaux groupes de points, en extrayant le groupe des points communs à tous les dérivés. Il en résulte un groupe, que nous désignerons par $P^{(\infty)}$, et au moyen duquel on pourra former de la même manière de nouveaux groupes. On remarquera aussi l'exemple qui montre qu'un groupe de points du second genre ne doit, dans aucun intervalle aussi petit que l'on voudra, être *dense en tout lieu.*

Gordan (P.). — Sur la représentation typique de la forme ternaire biquadratique $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$. (359-378).

Apres avoir développé, dans le Mémoire analysé plus haut, le système complet de cette forme biquadratique, l'auteur résout, dans le premier Chapitre du présent travail, le problème d'exprimer toute forme rationnelle au moyen d'un

---

(¹) *Journal de Borchardt*, t. LX.
(²) *Journal de Liouville*; 1874. — *Dynamique analytique*; 1878.
(³) *Mathem. Annalen*, t. XI.

système de formes associées. Un tel système se compose, dans le cas présent, de la fonction f, d'un invariant i, de trois covariants ψ, Δ, Ω, du sixième, du quatorzième et du vingt et unième degré respectivement, et de deux formes intermédiaires linéaires, qui sont, par rapport aux x, des degrés respectifs 8 et 9, et de la forme intermédiaire identique u_x.

Dans le Chapitre II, on démontre que la forme biquadratique spéciale considérée est complètement caractérisée par la condition

$$f_\varphi^2 - \frac{i}{8} u_x^2 = 0,$$

et donne la solution du problème de transformer une fonction f, d'ailleurs quelconque, satisfaisant à cette condition, dans la forme canonique

$$x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1.$$

Enfin, le problème généralisé : *Étant données les valeurs numériques des formes canoniques f, Δ, ψ, Ω, satisfaisant à la relation numérique qui doit exister entre elles, déterminer les inconnues* x_1, x_2, x_3, est complètement résolu au moyen de la représentation type, sous forme explicite.

Markof (*A.*). — Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. (379-399; fr.).

« L'auteur a démontré, dans son premier Mémoire ([1]), qu'à toute classe de formes binaires quadratiques de déterminant positif donné correspond une certaine suite de nombres positifs entiers

$$\text{(J)} \qquad \ldots, \alpha_{-3}, \alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots,$$

et réciproquement; le rapport entre $2\sqrt{D}$ et le minimum de ces formes est égal au maximum de la somme

$$\alpha_\varkappa + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa+1} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa+2} + \ddots}} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-1} + \cfrac{1}{\alpha_{\varkappa-2} + \ddots}} = \frac{2}{L_\varkappa},$$

où l'indice $\varkappa$ est un nombre variable.

» Après avoir fait différentes suppositions relativement à la suite (J) et avoir fait varier l'indice $\varkappa$, on arrive aux résultats suivants :

» Pour chaque nombre positif $l \leqq \frac{2}{3}$, on peut trouver une infinité de suites (J) satisfaisant à la condition $L_\varkappa \geqq l$, pour tout indice $\varkappa$.

» A tout nombre positif $l > \frac{2}{3}$ correspond un nombre limité de suites (J), satisfaisant à la condition $L_\varkappa \geqq l$, pour tout indice $\varkappa$.

» Si la suite (J) satisfait à la condition $L_\varkappa \geqq l > \frac{2}{3}$, pour tout indice $\varkappa$ il lui correspond dans ce cas un certain système, composé d'un nombre limité de suites W, V, ..., S, R, dont l'une W ne contient pas de termes égaux w_0, toutes les suivantes se déduisant les unes des autres par une formule donnée.

([1]) *Sur les formes quadratiques binaires indéfinies* (*Math. Annalen*, t. XV).

» Dans ce second Mémoire, l'auteur détermine la période de la suite (J) et le maximum de la somme $\frac{2}{L_\varkappa}$, les nombres w^0, v^0, ..., s^0, r^0 étant connus. »

Neumann (*C.*). — Les principes de l'Électrodynamique. (400-434).

Ce Mémoire, imprimé depuis l'année 1868 ([1]), contient essentiellement deux études de principes importantes pour les lois des phénomènes électriques. D'abord l'auteur fait la supposition que la tendance au mouvement d'un point fixe vers un autre, représentée par le potentiel, se transmet, non pas instantanément, mais progressivement, et se propage ainsi dans l'espace avec une certaine vitesse constante, extrêmement grande. De cette hypothèse et de la supposition que le principe d'Hamilton se réalise sans restriction, résulte la réalité de la loi de Weber. Il montre en second lieu que cette loi se fonde sur un potentiel, duquel, par la variation relativement aux coordonnées, on peut déduire, absolument comme on le fait du potentiel newtonien, les composantes de la force par la différentiation. Il établit en même temps la conclusion qui admet le principe de la force vive pour la loi de Weber. Ces recherches sont enrichies en partie d'éclaircissements que Riemann avait exposés dans ses leçons (professées en 1861 et publiées par Hattendorff en 1876). Cependant l'auteur, dans un Appendice, fait remarquer avec raison que l'idée de l'introduction d'un potentiel électrodynamique, en en déduisant les forces par la variation des coordonnées, a été publiée par lui pour la première fois, indépendamment de Riemann, dans une exposition détaillée.

Krause (*M.*). — Sur la transformation linéaire des fonctions hyperelliptiques du premier ordre. (435-447).

— Sur la multiplication des fonctions hyperelliptiques du premier ordre. (448-455).

La première de ces études a pour objet la composition de la transformation linéaire générale au moyen de six transformations de nature plus simple, et elle donne une Table de la transformation des seize fonctions θ. Dans le second Mémoire, l'auteur développe les formules de multiplication des fonctions θ, en se fondant sur le théorème d'addition, et, à l'aide de la transformation linéaire et de la substitution des demi-périodes, il déduit une série d'équations pour la détermination des coefficients.

Schubert (*H.*). — La relation trilinéaire entre trois figures fondamentales du premier degré (*Einstufigen Grundgebilden*). (457-472).

Trois figures à une dimension g, g', g'' sont dites *trilinéaires entre elles* lorsque, entre leurs éléments x, x', x'', il existe une équation

$$\begin{aligned} &xx'x'' + ax'x'' + a'x''x + a''xx' \\ &\quad + bx \quad + b'x' \quad + b''x'' \doteq C. \end{aligned}$$

([1]) *Gratulationsschrift der Tubinger Universitat zum funfzigjarigen Jubilaum der Bonner Universität.*

Le cas le plus simple d'une relation trilinéaire se produit sur trois séries rectilignes de points dans l'espace, lorsque, en dehors de ces suites, on prend un point fixe, et que l'on considère comme correspondants entre eux trois points situés dans un même plan que ce point fixe. Si les trois droites sont dans le même plan, la droite de jonction de deux points quelconques sur deux des droites coupera la troisième droite au point correspondant; les trois séries de points sont dites en relation rectiligne.

Dans ce Mémoire, l'auteur étudie : 1° les six éléments singuliers de toute relation trilinéaire; 2° les relations de rapports anharmoniques entre deux groupes ternaires d'éléments correspondants et les six points singuliers; 3° le caractère qui indique si une relation trilinéaire est rectiligne; 4° la construction linéaire d'un nouveau groupe ternaire; 5° les propriétés et la construction linéaire de la surface générale du troisième degré engendrée par trois faisceaux plans trilinéaires; 6° les dégénérescences des relations trilinéaires.

Dyck (*W.*). — Sur la formation et l'étude du groupe et de l'irrationnalité des surfaces régulières de Riemann. (473-516).

Une surface régulière de Riemann est définie comme une surface étendue en N feuilles sur le plan complexe, et qui, par un groupe de N transformations, consistant dans l'échange des feuilles, reprend sans altération son état primitif. Dans le présent travail, l'auteur expose les méthodes générales pour obtenir la propriété du groupe et sa composition au moyen de groupes partiels, ainsi que l'irrationnalité de la surface, d'après sa définition géométrique. Dans le dernier paragraphe, il traite spécialement comme exemple les surfaees régulières de genre 1 et leurs relations avec le problème de la transformation des fonctions elliptiques.

Dyck (*W.*). — Note sur une surface régulière de Riemann du genre 3 et sur la *courbe normale* du quatrième ordre. (510-516).

Il s'agit d'une surface à 96 feuilles, dont les feuilles se relient entre elles en un point par 12 groupes de 8 feuilles chacun, en un autre point par 32 groupes de 3, en un troisième par 48 groupes de 2. L'auteur discute son irrationnalité.

Mayer (*A.*). — Sur la solution donnée par Pfaff du problème de Pfaff. (523-530).

Recherche des conditions qui doivent être remplies pour que l'on puisse appliquer la méthode de Pfaff a l'intégration de l'équation

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_m dx_m = 0.$$

Scheibner (*W.*). — Sur les valeurs asymptotiques des coefficients du développement d'une puissance quelconque du rayon vecteur suivant l'anomalie moyenne [1]. (531-544).

---

(1) Une traduction anglaise de cet article a paru dans l'*Astronomical Journal* de Gould, Cambridge (Mass.); août 1856.

Scheibner (*W.*). — Sur les valeurs asymptotiques des coefficients dans les développements ordonnés suivant l'anomalie moyenne [1]. (545-560).

Ces articles contiennent une méthode générale très élégante pour la détermination asymptotique des coefficients des développements en séries suivant l'anomalie moyenne, en particulier pour l'équation du centre, problème traité déjà par Carlini (Milan, 1817), puis repris par Jacobi. Laplace l'a partiellement résolu dans le tome V de la *Mécanique céleste*.

Königsberger (*L.*). — Extension du théorème d'Abel sur la forme des intégrales de fonctions algébriques qui admettent une expression algébrique ou logarithmique. (561-564).

Klein (*F.*). — Sur certaines valeurs partielles des fonctions Θ. (565-574).

Schubert (*H.*). — Remarque sur la détermination du nombre des lignes torsales d'une surface réglée. (575-576).

Tome XVIII; 1881.

Schur (*F.*). — Sur les courbes et les surfaces engendrées par des figures fondamentales collinéaires. (1-22).

Ces recherches concernent la génération des surfaces du troisième ordre au moyen de trois systèmes plans (*Ebenenbündel*) collinéaires et des courbes planes du troisième ordre au moyen de trois systèmes plans collinéaires; elles montrent que, inversement, une courbe du troisième ordre, ou une surface du troisième ordre, peut être engendrée, et cela d'une infinité de façons, au moyen de systèmes collinéaires. D'une façon plus précise, on est conduit pour les courbes à trois réseaux de coniques dont la courbe triple est la courbe du troisième ordre et, pour les surfaces du troisième ordre, à une surface du second degré, relativement à laquelle les droites d'un double-six de Schlaefli (*Schlaefli'sche Doppelsechs*) sont polaires réciproques. Au moyen de quatre systèmes de plans (*Ebenenbündel*) collinéaires, on engendre une courbe gauche du sixième ordre, de troisième espèce, avec 7 points doubles apparents. Ces courbes constituent une multiplicité 24^{uple}. Outre ces courbes, l'auteur étudie les courbes du sixième ordre formées de points qui sont les points conjugués d'un plan par rapport à un faisceau de surfaces du second degré. Il est ainsi amené à la détermination d'un faisceau de surfaces du second ordre qui constituent les premières polaires des points d'un plan par rapport à une surface du troisième ordre. Finalement il étudie les surfaces du quatrième ordre engendrées par quatre systèmes collinéaires dans l'espace. Il montre ainsi que les surfaces dépendent de 33 constantes.

---

[1] Extrait des *Berichte der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss.*; mai 1856.

Zeuthen. — Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre. (33-68).

Dans le célèbre Mémoire intitulé : *Théorie analytique des courbes à double courbure de tous les ordres tracés sur l'hyperboloide à une nappe* (*Comptes rendus*, t. LIII), M. Chasles rapporte les courbes d'une surface du second ordre à un système de coordonnées sur la surface. Une valeur donnée de l'une ou de l'autre des coordonnées détermine une génératrice de l'une ou de l'autre des deux séries. Ces coordonnées peuvent servir aussi à établir une projectivité entre deux figures sur la surface. Si x, y sont les coordonnées d'un point quelconque de l'une des figures, on déterminera le point correspondant de l'autre, soit par

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad y' = \frac{ay + b}{cy + d},$$

soit par

$$x' = \frac{ay + b}{cy + d}, \quad y' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

Les nouvelles coordonnées x' et y' déterminant respectivement des génératrices de la même série que x et y, on voit qu'il existe deux espèces de figures projectives. Nous verrons que dans les deux cas elles sont projectives dans le sens propre du mot, l'une pouvant être formée de l'autre par une suite de projections centrales successives, et qu'elles sont les seules figures sur une surface du second ordre qui méritent ce nom.

Les propriétés des figures projectives que nous déduirons, dans le § 2, d'une définition géométrique identique à la définition analytique que nous venons de donner, sont applicables, non seulement au cas où la surface a des génératrices réelles, mais aussi à celui où la surface a des génératrices imaginaires, ce qui n'empêche pas les figures d'être réelles. Seulement, dans une partie des constructions indiquées dans le § 2, on fait usage d'éléments qui sont imaginaires dans ce cas; dans le § 3, nous y substituons des opérations réelles.

Les applications de la théorie des figures projectives sur une surface du second ordre sont analogues à celles de la théorie des séries projectives de points d'une conique plane. Le problème de l'inscription de polygones dont les côtés passent par des points donnés se résout aussi pour une surface par trois essais (§ 4), et la théorie de ces polygones présente beaucoup d'analogie avec la théorie connue de Poncelet sur les polygones inscrits à une conique plane. On trouve par exemple que, de même qu'il existe une relation entre les points d'intersection d'une droite avec une conique et avec les côtés d'un polygone inscrit à un nombre pair de côtés, il existera une relation entre la trace sur un plan d'une surface du second ordre et la trace d'un polygone inscrit à un nombre impair de côtés. Pour le cas d'un pentagone, cette même relation a été trouvée, mais exprimée d'une manière bien différente, par M. Paul Serret (1).

De même que le théorème de Desargues sur un quadrilatère inscrit à une co-

---

(1) *Geometrie de direction*, p. 371.

nique s'applique à la construction de la conique, celui dont nous venons de parler sur un pentagone inscrit à une surface s'applique à la construction de la surface (§ 6). Malgré la différence de la forme du théorème, la construction d'une courbe gauche du quatrième ordre par huit points, qui fait une partie principale de la construction de la surface, s'est montrée identique à celle de M. Serret (¹), pendant que la construction que nous avons trouvée du huitième point commun aux surfaces du second degré passant par sept points donnés est différente de celle de M. Serret (²), mais aussi simple.

Notre sujet nous a semblé mériter d'être exposé d'une manière élémentaire, ce que nous avons essayé de faire dans les § 2-4 et 6-7, qui sont indépendants des § 1 et 5. Dans le § 1, j'ai exposé quelques considérations plus générales sur les transformations d'ordre supérieur d'une surface de second degré en elle-même, qui m'ont guidé dans mes premières études des figures projectives sur la surface. J'y démontre notamment une formule énumérative analogue à celle qui exprime le principe de correspondance plane, dont on aurait pu la déduire par une projection stéréographique, mais j'ai préféré en donner une démonstration directe. »

König (*J.*). — Sur les systèmes finis de formes dans la théorie des fonctions rationnelles. (69-77).

L'auteur résume ainsi le résultat général de ses recherches. Toutes les fonctions rationnelles d'un nombre quelconque de variables, satisfaisant à des conditions données quelconques, peuvent être exprimées rationnellement au moyen d'un nombre fini de telles fonctions, convenablement choisies.

Konig (*J.*). — Sur la théorie des résolvantes. (78-81).

Krey (*H.*). — Sur un cas particulier de la correspondance univoque des points de deux surfaces. (84-90).

Quatre équations homogènes biquaternaires :

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4; y_1, y_2, y_3, y_4) = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4; y_1, y_2, y_3, y_4) = 0,$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4; y_1, y_2, y_3, y_4) = 0,$$
$$f_4(x_1, x_2, x_3, x_4; y_1, y_2, y_3, y_4) = 0,$$

définissent un couple de surfaces liées l'une à l'autre d'une façon univoque; soient m_i, n_i les degrés respectifs de f_i par rapport aux x et aux y; les surfaces sont des ordres

$$m_1 n_2 n_3 n_4 + m_2 n_1 n_3 n_4 + m_3 n_1 n_2 n_4 + m_4 n_1 n_2 n_3$$

et

$$n_1 m_2 m_3 m_4 + n_2 m_1 m_3 m_4 + n_3 m_1 m_2 m_4 + n_4 m_1 m_2 m_3.$$

L'auteur détermine les nombres qui caractérisent les singularités des deux surfaces.

(¹) *Geometrie de direction*, p. 273.
(²) *Géometrie de direction*, p. 314.

Pasch (*M.*). — Note sur les courbes rationnelles. (91-92).

L'équation d'une courbe rationnelle n'est autre chose que la relation algébrique qui existe entre les trois formes algébriques binaires; l'auteur la discute de ce point de vue.

Pasch. — Note sur les formes ternaires à déterminant fonctionnel évanouissant. (93-94).

Entre trois formes homogènes du $n^{\text{ième}}$ degré sans diviseur commun à déterninant fonctionnel nul, existe une équation irréductible de degré ν, d'espèce o, ν étant un diviseur de n.

Brill (*A.*). — Sur les courbes gauches algébriques qui ont la forme d'un lacs (1). (95-98).

L'auteur donne des courbes gauches du quatrième, du sixième et du dixième ordre formées d'entrelacements susceptibles d'être réduits à un nœud.

Rohn (*K.*). — Sur les diverses formes de la surface de Kummer. (99-159).

Voir *Bulletin,* 2e série, t. V.

Klein. — Remarque sur les surfaces du quatrième ordre. (160).

L'auteur indique une surface du quatrième ordre composée de neuf parties réelles distinctes.

Mehler. — Sur une fonction voisine des fonctions sphériques et cylindriques et sur son application à la théorie de la distribution électrique. (161-194).

L'auteur montre d'abord comment la distribution de l'électricité sur un cône limité à son sommet, sous l'influence de forces électriques extérieures ayant leur point central sur l'axe; ou encore sur la surface engendrée par la révolution d'un segment de cercle autour de sa corde, peut être représentée d'une façon très simple au moyen d'une fonction très voisine des fonctions spécifiques et des fonctions cylindriques (fonctions de Fourier-Bessel) et satisfaisant à une équation différentielle de même forme que les dernières. M. Mehler désigne ces nouvelles fonctions sous le nom de *fonctions coniques;* elles permettent de résoudre les problèmes analogues pour les hyperboloïdes de révolution et pour deux calottes sphériques limitées à un même cercle. Les fonctions coniques sont définies, d'abord pour des valeurs réelles de θ et μ, par l'intégrale

$$K^{\mu}(\cos\theta) = \frac{2\cos\mu\pi i}{\pi}\int_{\pi}^{\infty}\frac{\cos\mu\alpha\, d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha i + \cos\theta)}}.$$

Cette même définition s'étend aux valeurs imaginaires de μ et conduit en

(1) Le mot *lacs* est pris dans le sens qu'il a dans l'expression *lacs d'amour*.

particulier à l'équation relative aux fonctions sphériques

$$P^n(\cos\theta) = K^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)}(\cos\theta).$$

La fonction cylindrique $I(xi)$ se présente comme cas limite, pour μ infiniment grand et θ infiniment petit, le produit $\mu\theta$ ayant une limite finie x.

Les fonctions coniques peuvent encore être représentées par l'intégrale suivante, qui subsiste aussi pour les valeurs imaginaires de μ,

$$K^\mu(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{\cos(\beta\mu i)\,d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta - \cos\theta)}}.$$

Cette représentation conduit à la nouvelle formule

$$P^n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta\,d\beta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\beta)}}.$$

Pour les fonctions cylindriques l'auteur appelle l'attention sur l'intégrale

$$I(x) = \frac{2}{\pi}\int_\alpha^\infty \frac{\sin\alpha\,d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}},$$

qui peut être obtenue comme cas particulier de l'intégrale par lui donnée pour représenter K^μ. Le dernier paragraphe concerne le théorème d'addition pour les fonctions sphériques, et aussi la représentation des fonctions de deux variables par une intégrale triple, analogue à l'intégrale de Fourier : on parvient ainsi aux deux développements spéciaux

$$K^\mu(-y) = \frac{\cos\mu\pi i}{\pi}\int_0^\infty \frac{K^\mu(x)\,dx}{x-y},$$

$$\frac{1}{x-y} = \pi\int_0^\infty \mu\,\frac{\operatorname{tang}(\mu\pi i)}{i\cos(\mu\pi i}\,K^\mu(x)K^\mu(-y)\,d\mu,$$

qui ont leurs analogues dans la théorie des fonctions sphériques.

Neumann (C.). — Sur les fonctions coniques de Mehler et sur leur application aux problèmes électrostatiques. (195-236).

Dans ce travail, l'auteur applique les fonctions coniques de Mehler au problème électrostatique pour une surface conoïde, c'est-à-dire pour la surface engendrée par la révolution d'un arc de cercle autour de sa corde, dans le cas où il n'y a point de forces extérieures et aussi dans le cas général où il existe de telles forces. Enfin l'auteur étudie des surfaces limitées d'une part par une surface conoïde, de l'autre par une surface sphérique.

Les fonctions coniques s'introduisent en exprimant l'inverse de la distance de deux points en coordonnées bipolaires. Ayant fixé deux points A, A' sur l'axe des abscisses à une distance a de l'origine, un point, situé au-dessus de l'axe des x, aux distances ρ, ρ' des deux pôles A, A', est défini par les deux équations

$$\frac{\rho}{\rho'} = e^{-\upsilon}, \quad \text{angle}(\rho, \rho') = \omega;$$

on a en outre

$$\rho\rho' = \frac{4a^2}{2\cos i\theta - 2\cos\omega} = \frac{4a^2}{\psi},$$

les courbes $\omega =$ const. sont des arcs de cercle ayant AA' pour corde; les courbes $\theta =$ const. sont des cercles orthogonaux aux précédents.

Pour la densité électrique sur un conoïde de longueur d'axe $2a$, de paramètre ω, chargé d'électricité jusqu'à une tension donnée C, on parvient à l'expression suivante :

$$\Delta = C \frac{\Psi \sqrt{\psi}}{4\pi^2 a \sin\omega} \int_0^\infty \frac{dq \cos q\theta}{K_q(\cos\omega)},$$

et, pour la masse totale d'électricité, on a

$$M = C\, 2a \int_0^\infty \frac{d_q C_q L_q(\cos\omega)}{K_q(\cos\omega)},$$

où

$$K_q(\mu) = \frac{2\cos\mu\pi i}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos\mu\alpha\, d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha i + \mu)}},$$

$$\alpha_q(\mu) = K_q(-\mu).$$

Le potentiel de la couche pour un point extérieur $(\theta_1, \omega_1, \psi_1)$ est

$$V = C\sqrt{\psi} \int_0^\infty \frac{d_q C_q K_q(\mu) L_q(\mu) \cos q\theta_1}{K_q(\mu)},$$

où

$$\mu = \cos\omega_1, \quad \theta_q = \frac{1}{\cos(q\pi i)}.$$

La déduction de ces formules repose sur une proposition générale de Calcul intégral relative aux fonctions circulaires, proposition que l'auteur a établie dans son Mémoire *Ueber die nach Kreis-, Kugel- u. Cylinderfunctionen fortschreitenden Entwickelungen*. M. Neumann donne en outre des formules générales pour la distribution sous l'influence de forces extérieures données et discute le même problème pour un conducteur formé de deux sphères réunies par un conoïde.

Klein. — Sur les fonctions de Lamé. (237-246).

Les fonctions de Lamé relatives à l'indice n sont, abstraction faite d'un facteur où peuvent figurer les éléments λ, $\sqrt{\lambda^2 - b^2}$, $\sqrt{\lambda^2 - c^2}$, des fonctions entières en λ^2. Il y en a $\tau + 1$ de même classe et de degré τ. On savait que les racines de l'équation $\varepsilon(\lambda) = 0$ étaient toutes réelles, distinctes et comprises entre o et c, b étant inférieur à c. En partant de considérations géométriques nouvelles, l'auteur montre comment se distribuent les racines de diverses fonctions dans les intervalles de o à b et de b à c; il montre qu'il y a toujours une et seulement une fonction admettant k racines dans le premier intervalle et $\tau - k$ dans le second, en sorte que les fonctions d'un même type se trouvent complètement distinguées par la distribution des racines dans ces intervalles.

Pour les fonctions générales de Lamé du $p^{\text{ième}}$ ordre, l'auteur montre d'une façon analogue comment les racines des fonctions appartenant à une même classe se distribuent dans les p intervalles.

Netto (E.). — Remarques sur les équations abéliennes. (247-251).

Dans ce travail l'auteur définit les équations les plus générales qui peuvent être résolues algébriquement par la méthode d'Abel.

Schur. — Sur le théorème fondamental de la Géométrie projective. (252-254).

Cette Note concerne la démonstration donnée par M. Darboux (*Math. Annal.*, t. XVII) du théorème fondamental de Staudt.

Stolz. — Rôle de Bolzano dans l'histoire du Calcul infinitésimal. (255-279).

Cet important travail historique est destiné à appeler l'attention sur les écrits en partie oubliés de Bernhard Bolzano. Bolzano est né à Prague en 1781, il y est mort en 1848; dans une suite de Mémoires publiés entre 1810 et 1817, il exposa les principes de l'analyse des fonctions réelles d'une façon nouvelle et y introduisit des notions dont l'importance ne peut plus être méconnue. Voici les titres des écrits dont il est question.

1. *Beiträge zu einer begründeten Darstellung der Mathematik.* 1. Lief. Prag, 1810.

2. *Der binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomische und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrössen dienen, genauer als bisher erweisen.* Prag, 1816.

3. *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen jezwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege.* Prag, 1817.

4. *Die drei Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst, zugleich als Probe einer gänzlichen Umgestaltung der Raumwissenschaft allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt.* Leipzig, 1817.

5. *Dr. Bernhard Bolzano's Paradoxien des Unendlichen, herausgegeben aus dem schriftlichen Nachlasse des Verfassers von Dr. Fr. Přihonsky.* Leipzig, 1851.

Faà de Bruno. — Trois Notes sur la théorie des formes. (280-288).

I. Sur un théorème général dans la théorie des formes binaires.

Si dans une forme binaire on fait la substitution

$$x = p\,X + q\,Y,$$
$$y = p'X + q'Y,$$

les opérations dites δ et δ_1 sont équivalentes aux opérations

$$p'\frac{d}{dp} + q'\frac{d}{dq} \quad \text{et} \quad p\frac{d}{dp'} + q\frac{d}{dq'}.$$

II. Sur le jacobien des formes binaires.

III. Théorème général sur les déterminants fonctionnels.

Soit, en général, D le déterminant

$$\begin{vmatrix} P & \Delta P & \Delta^2 P \\ Q & \Delta Q & \Delta^2 Q \\ R & \Delta R & \Delta^2 R \\ .. & ... & ... \end{vmatrix},$$

où chaque colonne est dérivée de la première par l'opération Δ quelconque répétée une, deux fois, etc., de suite et en sorte que la dernière colonne ne renferme que des constantes par rapport à Δ; on aura

$$\Delta D = 0.$$

Holzmüller (*G.*). — Étude complète d'une transformation isogonale représentée par une fraction du second degré. (289-318).

Il s'agit de la transformation définie par l'équation

$$Z = \frac{z^2+1}{2z},$$

et de la transformation inverse

$$z = Z + \sqrt{z^2 - 1}.$$

Gierster (*J.*). — Les sous-groupes du groupe de Galois des équations modulaires pour le cas d'un degré premier de transformation. (319-365).

Le théorème suivant résume les résultats essentiels du travail de l'auteur : « En dehors des sous-groupes cycliques et métacycliques déjà connus, il ne peut y avoir de contenus dans le groupe de Galois de l'équation modulaire que trois espèces de sous-groupes : ce sont les groupes tétraédriques, octaédriques, icosaédriques de 12, 24, 60 substitutions et de plus il y a :

» Des groupes tétraédriques pour chaque degré de transformation q.

» Des groupes octaédriques pour $q \equiv \pm 1$, mod 8.

» Des groupes icosaédriques pour $q \equiv \pm 1$, mod 5. »

Rupp (*O.*). — Sur la dépendance entre les caractères d'une surface réglée définie par ses directrices et les caractères de ces directrices. (267-310).

L'auteur traite des surfaces réglées engendrées par une droite qui rencontre une fois trois courbes données, ou deux fois une courbe donnée et une fois une autre courbe donnée, ou trois fois une courbe donnée.

Rausenberger. — Théorie de la périodicité générale (379-417).

L'auteur appelle *fonction périodique* une fonction transcendante $F(x)$ jouissant de la propriété

$$F[\varphi_1(x)] = F(x),$$

où $\varphi_1(x) = y$ désigne une fonction algébrique quelconque de x, définie par une équation $f(x, y) = 0$. Si une fonction admet l'équation de périodicité

$$y = \varphi_1(x),$$

elle admet aussi les équations de périodicité $y = \varphi_k(x)$, $y = \varphi_{-k}(x)$, où $\varphi_k(x)$ signifie l'opération $\varphi_1(x)$ répétée k fois, et où $\varphi_{-k}(x)$ est la fonction inverse de $\varphi_k(x)$. En mettant maintenant dans $F(x)$, à la place de x, une fonction algébrique $\psi_1(x)$, on aura

$$F[\psi_1(x)] = F[\varphi_1 \psi_1(x)],$$

et, en désignant $F[\psi_1(x)]$ par $F_1(x)$, on déduit de l'égalité

$$F_1[\psi_{-1}(x)] = F(x)$$

que la fonction $F_1(x)$ admet l'équation de périodicité $y = \psi_{-1}\varphi_1\psi_1(x)$.

Cette substitution fonctionnelle permet de ramener les diverses espèces de périodes à certains types normaux. Les fonctions à période fermée (*wiederkehrende Periode*) sont les fonctions pour lesquelles on a $\psi_n(x) = x$. Toutes les fonctions $\varphi_1(x)$ de cette nature se déduisent de la substitution $y = \alpha x$, où α est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité. L'équation de périodicité rationnelle en x et y la plus générale possible se ramène à l'une ou l'autre des deux formes normales

$$y = px, \quad y = x + n,$$

qui ne peuvent se réduire l'une à l'autre par aucune substitution algébrique et pour lesquelles il convient d'observer que toute forme $y = x + n$ se ramène à la forme $y = x + m$ par une substitution linéaire, tandis que la forme $y = px$ ne se ramène à la forme $y = qx$ par une substitution algébrique que si q est une puissance commensurable de p.

Pour les fonctions à équation de périodicité irrationnelle, on se borne à étudier les équations dont les répétitions sont de même multivocité (*Vieldeutigkeit*) que la fonction périodique elle-même; l'auteur établit le théorème suivant :

Toutes les equations de périodicité du $n^{\text{ième}}$ degré qui, répétées, restent du $m^{\text{ième}}$ degré proviennent d'une équation linéaire par la substitution d'une fonction rationnelle du $n^{\text{ième}}$ degré à la place de x et de y.

Enfin l'auteur traite brièvement des fonctions à deux équations de périodicité rationnelles échangeables et parvient à ce théorème :

Toute fonction univoque à période multiplicatrice peut être transformee en une fonction univoque à double période additive, au moyen d'une substitution transcendante.

Klein (*F.*). — Sur les corps limités par des surfaces homofocales du second degré. (410-247).

Dans ce Mémoire, l'auteur montre comment la solution que Lamé a développée pour le problème du potentiel dans le cas d'un ellipsoïde à trois axes inégaux peut être étendue aux corps limités par six surfaces d'un système homofocal, ou par un moindre nombre.

Schröter (*H.*). — Sur l'hexagone gauche formé par trois couples de génératrices parallèles d'un hyperboloïde à une nappe. (428-442).

Thomae (*J.*). — Sur les fonctions algébriques qui appartiennent à une surface donnée de Riemann. (443-447).

Construction d'une fonction algébrique représentée sur une surface à quatre feuillets avec des points d'embranchement (*Windungspunkt*) donnés.

Veronese (*G.*). — Nombre des équations indépendantes qui relient les caractères généraux d'une courbe dans l'espace à n dimensions. (448).

Une courbe dans un espace à n dimensions a $3n$ caractères généraux, entre lesquels il existe $3(n-1)$ équations indépendantes.

Bachmann. — Sur la théorie de Galois des équations algébriques. (449-468).

L'exposition de M. Bachmann évite l'emploi de la théorie des substitutions, au moyen de laquelle M. Camille Jordan, dans son commentaire sur Galois (*Math. Ann.*, t. I), a expliqué la méthode de résolution de Galois et repose essentiellement sur le concept des corps numériques (*Zahlenkorper*) (Dedekind, *Sur la théorie des nombres entiers algébriques*) et sur le concept d'irréductibilité.

Mehler (*G.*). — Sur la théorie de la distribution de l'électricité sur les corps conducteurs. (469-506).

L'auteur ouvre une nouvelle voie pour obtenir, au moyen d'intégrales définies, les résultats obtenus précédemment au moyen de séries et traite le cas de deux surfaces sphériques, concentriques ou non.

Dyck (*W.*). — Recherche d'une représentation explicite de la surface de Riemann qui correspond à la résolvante de Galois des équations modulaires pour la transformation de degré premier des fonctions elliptiques (507-527).

Hurwitz (*A.*). — Fondements d'une théorie indépendante des fonctions modulaires elliptiques et théorie des équations au multiplicateur de premier grade (*Stufe*). (528-592).

Dans la première Partie l'auteur traite des transformations linéaires à coefficients entiers, telles que

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta},$$

de déterminant $+1$, des sous-groupes qu'elles contiennent, de leur représentation au moyen du polygone fondamental; il définit les fonctions modulaires et les formes modulaires de la $k^{\text{ième}}$ dimension; ces dernières sont des fonctions analytiques univoques, homogènes de la $k^{\text{ième}}$ dimension de deux arguments ω_1, ω_2 qui restent invariables quand on soumet les arguments à une transformation linéaire homogène quelconque d'un sous-groupe contenu dans l'ensemble des transformations précédentes; les fonctions modulaires sont les quotients de deux formes modulaires de même dimension.

M. Hurwitz en étudie la représentation analytique et les relations algébriques. La seconde Partie contient une théorie des équations au multiplicateur, même dans le cas d'un degré de transformation composé, théorie fondée sur les recherches générales dont on vient de parler.

Du Bois-Reymond. — Sur les fonctions de représentation (593-603).

La preuve de l'égalité

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a dx f(x) \varphi(x,h) = f(0) \lim_{h=\infty} \int_0^a \varphi(x,h) dx$$

suppose : 1° que

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a \varphi(x,h) dx$$

est indépendante de a, finie et déterminée ; 2° que

$$\lim \int_{a_1}^a \varphi(x,h) dx = 0,$$

quand $a_1 - a$ et $\frac{1}{h}$ tendent vers zéro simultanément et indépendamment.

Mangold (H.). — Sur une propriété caractéristique des surfaces développables.

Ce théorème : *Deux segments egaux et parallèles à un troisième sont égaux entre eux,* ne se généralise, pour une surface courbe, que pour les surfaces développables.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. GERONO et CH. BRISSE (¹). — 3ᵉ série.

Tome II; 1883, 1ᵉʳ semestre.

Rouché (E.). — Note sur l'impossibilité de la quadrature du cercle. (5-16).

Cette Note, tirée de la 5ᵉ édition du *Traite de Geometrie* de MM. Rouché et de Comberousse, résume d'une façon fort claire les travaux de M. Hermite et de M. Lindemann, qui ont fait faire à cette question si souvent débattue un pas définitif.

Le théorème auquel on parvient consiste en ce que *le nombre* π *ne saurait être*

(¹) Voir *Bulletin,* VII_2, 177.

racine d'une équation algébrique à coefficients rationnels (*réels ou imaginaires*). On peut consulter sur ce sujet : HERMITE, *Mémoire sur la fonction exponentielle*, 1874; et LINDEMANN, *Comptes rendus*, t. XCV, et *Mathematische Annalen*, t. XX, 1882.

Laguerre. — Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles. (16-34).

Application de la théorie des semi-droites et des cycles, due à l'auteur. Celui-ci démontre que l'anticaustique est un *hypercycle cubique;* il étudie ensuite les tangentes par un point sur une tangente donnée, la tangente parallèle à une semi-droite donnée, les tangentes communes à un cycle qui touche une tangente à l'hypercycle, le cycle osculateur en un point donné, et quelques autres propriétés encore. Enfin, il termine par quelques considérations plus générales sur les anticaustiques d'une courbe algébrique quelconque, et sur la théorie des hypercycles.

Picart (*A.*). — Note sur les équations linéaires aux dérivées partielles, à deux variables indépendantes, du deuxième et du troisième ordre. (34-43).

Variété de la méthode de Legendre, ayant pour objet de généraliser celle de Laplace sur l'intégration des équations linéaires du deuxième ordre ramenées préalablement à la forme $S + Pp + Qq = V$. Le procédé de M. Picart s'applique à l'équation linéaire complète.

Cesaro (*E.*). — Démonstration élémentaire de la formule de Stirling. (43-46).

On sait que cette formule est la suivante :

$$1.2.3\ldots n = \sqrt{2\pi n}.n^n e^{-n+\frac{\theta}{12n}}.$$

M. Cesaro y parvient d'une manière fort originale, et en s'appuyant sur la formule de Wallis.

Cesaro (*E.*). — Sur l'existence de certains polyèdres. (46-47).

Démonstration de cette proposition : *Il n'y a que cinq espèces de polyèdres dont tous les angles solides ont* $2n$ *arêtes et toutes les faces* n *côtés.*

Lebon (*E.*). — Remarque sur l'intersection de deux quadratiques réglées. (47-48).

Lorsque deux quadratiques réglées ont un plan principal commun P, une génératrice commune et leurs sections par un autre plan principal Q homothétiques, leur intersection est formée de deux génératrices et d'une conique parallèle au plan Q.

QUESTION PROPOSÉE : 1430. (48).

Picart (A.). — Théorie nouvelle du calcul des variations. (49-64).

L'auteur pose dès le début le problème général de la variation d'une intégrale multiple, et en donne une analyse pour le cas d'une intégrale triple, avec une seule fonction des variables. L'article se termine par l'indication de quelques applications, toujours pour le cas d'une intégrale triple, le plus intéressant à cet égard.

Laguerre. — Sur quelques propriétés des cycles. (65-74).

Applications d'une théorie dont il a été question plus haut. L'auteur introduit ici la notion de la *distance de deux cycles;* il définit ainsi la distance des points de contact d'une semi-droite tangente aux deux cycles. Il tire grand profit de cette notion pour établir plusieurs propriétés, notamment sur les coniques et leurs directions asymptotiques.

Laquière. — Construction géométrique des caustiques par réflexion. (74-76).

Détermination directe du point brillant, d'où l'on peut déduire ensuite la construction du centre de courbure de la courbe miroir.

Legoux (A.). — Généralisation d'un théorème relatif aux points d'inflexion des cubiques planes. (77-82).

L'auteur prend l'équation, en coordonnées homogènes,

$$U = x^\alpha y^\beta z^\gamma + ku^\delta = 0.$$

Lorsque $\alpha = \beta = \gamma = 1$, et $\delta = 3$, on a un système de cubiques. Dans le cas général, on a des courbes d'ordre δ, et c'est sur la distribution des points d'inflexion (réels ou imaginaires) de ces courbes que l'auteur établit une intéressante série de propriétés.

Catalan (E.). — Sur la circonférence des neuf points. (82-84).

Application de la théorie des triangles *annexes* d'un triangle donné, lesquels résultent d'une construction des plus élémentaires, que l'auteur définit.

Cesaro (E.). — Propriétés d'une courbe de poursuite. (85-89).

Deux mobiles M, μ partent en même temps d'un point O; M parcourt une trajectoire quelconque; μ occupe à chaque instant le centre de gravité du chemin parcouru par M. La trajectoire de μ est une courbe de poursuite sur M. M. Cesaro en donne des propriétés fort intéressantes.

Concours d'admission a l'École centrale en 1882. — Première et seconde session : Composition en Géométrie analytique, en Géométrie descriptive, en Triangle, en Physique et en Chimie. Énoncés. (89-95).

Bibliographie. — P. Mansion : Introduction à la théorie des déterminants. Compte rendu par H. Brocard.

Publications récentes. (96).

Laguerre. — Sur les courbes de direction de la troisième classe. (97-109).

C'est encore une application de la théorie des cycles et des semi-droites. Les propriétés établies dans cet article se rattachent à celles de l'anticaustique par réflexion de la parabole pour des rayons incidents parallèles. L'auteur montre que la classification des courbes planes de direction se ramène à la classification des surfaces développables isotropes.

Picart (A.). — Représentation des fonctions d'une ou de plusieurs variables, entre de certaines limites de ces variables, par des séries procédant suivant les valeurs relatives à un indice variable et multipliées par des coefficients constants, d'une fonction qui satisfait à une certaine forme d'équations aux différentielles ordinaires ou partielles du second ordre. (109-118).

Ce titre est un peu long, mais l'article n'en présente pas moins d'intérêt. L'auteur examine successivement le cas d'une variable et celui de deux variables. Il s'attache à démontrer en toute rigueur que la série obtenue représente la fonction donnée.

Laquière. — Quelques propriétés d'une classe de courbes spirales. (118-129).

Ces courbes sont celles dont la tangente tourne avec une vitesse angulaire d'orientation proportionnelle à celle du rayon vecteur mené d'un pôle fixe au point de contact. Leur équation générale est $\rho = a \cos^p \frac{\omega}{p}$. M. Laquière en étudie les podaires, les tangentes, les asymptotes, les rayons de courbure et les caustiques par réflexion du pôle.

Cesaro (E.). — Théorème de Géométrie. (129-133).

Détermination des droites pouvant engendrer une surface développable, parmi celles qui sont invariablement liées au trièdre formé par la tangente, la binormale et la normale principale en chaque point d'une courbe.

Chateau (C.). — Solution géométrique des questions 1395 et 1387. (133-136).

Propriétés de l'hyperbole.

Chauchat (L.). — Solution analytique des questions 1387 et 1395. (136-138).

Publications récentes. (138-143).

Questions proposées : 1431 à 1436. (143-144).

Laurent (*H.*). — Mémoire sur la théorie de l'élimination. (145-160).

L'auteur se propose de faire connaître une méthode nouvelle, le nombre des équations étant supérieur d'une unité à celui des inconnues. Dans ce but, il introduit la notion des polynômes *réduits*, que nous ne pouvons définir ici, mais qui semble être d'une application heureuse et féconde à la théorie de l'élimination.

Caron (*J.*). — Note sur la ponctuation. (161-166).

Examinant la projection horizontale d'un système de surfaces, l'auteur suppose qu'une verticale se déplace de manière à percer successivement le plan horizontal dans toutes les régions. L'étude de ce déplacement lui permet d'énoncer plusieurs propriétés dignes d'intérêt, sur les parties vues et cachées.

Humbert. — Sur les triangles conjugués à une conique et sur les tétraèdres conjugués à une quadratique. (167-188).

M. Humbert s'est proposé d'exposer, relativement aux triangles polaires des coniques, aux diamètres conjugués des quadratiques et à leurs tétraèdres polaires, une méthode de calcul nouvelle. Il met, de deux manières différentes, le premier membre de l'équation d'une conique en coordonnées homogènes sous la forme d'une somme de trois carrés, et cela le conduit très directement et très simplement à la détermination d'un triangle polaire. Les coordonnées tangentielles s'appliquent à cette méthode, aussi bien que les coordonnées ponctuelles.

L'application aux diamètres conjugués des quadratiques est presque immédiate; et sur ce sujet plusieurs questions intéressantes sont traitées.

Enfin, l'article se termine par l'indication d'une méthode tout à fait analogue, pour l'étude des tétraèdres polaires des quadriques. On prend le premier membre de l'équation de la surface (en coordonnées homogènes) sous la forme d'une somme de quatre carrés.

Ocagne (*M. d'*). — Addition à une Note sur un mode de détermination des courbes planes. (189-192).

Cette Note avait paru dans le même Recueil (3e série, t. I, p. 40). Il s'agit de propriétés relatives aux normales et aux centres de courbure.

Question proposée : 1437. (192).

Antomari (*X.*). — Relations entre les distances d'un foyer d'une conique à quatre points ou à quatre tangentes. (193-208).

Cet article ne représente que le commencement du Mémoire de M. Antomari. Les relations qu'il met en lumière semblent nouvelles, et elles sont, comme il le fait remarquer, susceptibles d'applications intéressantes. La première Partie se rapporte aux distances d'un foyer à quatre points. Après avoir établi une série de théorèmes concernant les relations dont il s'agit, l'auteur en fait application à la détermination des foyers dans l'ellipse.

Forestier. — Équation aux carrés des différences de l'équation générale du quatrième degré. (209-219).

L'auteur s'est proposé de simplifier, pour ce cas, les méthodes de Sylvester et de Bézout, la première conduisant à un déterminant du huitième ordre qui contient 40320 termes, la seconde obligeant ainsi à des calculs inextricables. Le procédés indiqués sont relativement très courts, fractionnent le calcul et permettent d'obtenir chaque coefficient séparément et d'une manière tout à fait indépendante.

Ocagne (*M. d'*). — Sur un algorithme algébrique. (220-226).

Cet algorithme, qui n'est autre que celui désigné par Wronski sous le nom de fonction *aleph*, ainsi que nous le fait connaître M. d'Ocagne, représente le développement de la $m^{\text{ième}}$ puissance d'un polynôme $a_1 + a_2 + \ldots + a_p$, où l'on remplace tous les coefficients par l'unité. Application de cet algorithme à la théorie des séries.

Ibach (*L.-F.*). — De quelques propriétés d'une famille de polygones que l'on peut former avec un polygone donné. (226-233).

On divise les côtés d'un polygone dans des rapports donnés, et il en résulte, en joignant les points de division, un nouveau polygone. Expression de l'aire de ce polygone; cas du triangle; démonstration de plusieurs propriétés de ces polygones. Quelques-unes gagneraient à être énoncées avec plus de rigueur et de clarté.

Legoux (*A.*). — Note sur un faisceau de surfaces d'ordre quelconque. (233-236).

L'équation $x^\alpha y^\beta z^\gamma u^\delta + k w^\varepsilon = 0$ représente un système de surfaces d'ordre quelconque. M. Legoux en recherche la hessienne. Cet article n'est que le commencement de son Mémoire. Il est regrettable, ainsi que nous l'avons fait remarquer jadis, qu'on fractionne à l'excès des publications qui gagneraient à pouvoir être lues dans leur ensemble.

Genty. — Note de Géométrie infinitésimale. (237-239).

Intéressante propriété de deux courbes planes, qui conduit heureusement à une construction très simple du centre de courbure de l'ellipse.

Questions proposées : 1438 à 1446. (239-240).

Walecki. — Démonstration du théorème de d'Alembert. (241-248).

Il s'agit de la proposition algébrique fondamentale : *Toute équation a une* *racine*. La démonstration dont il s'agit reproduit, avec quelques développements et une simplification due à M. Laguerre, une Note insérée aux *Comptes rendus*, 19 mars 1882.

Colin. — Problème de Géométrie. (248-249).

Sur une droite qui enveloppe un cercle.

Ocagne (*M. d'*). — Note sur la transformation par semi-droites réciproques. (249-252).

Application de la théorie des cycles et des semi-droites de M. Laguerre.

Ocagne (*M. d'*). — Sur l'enveloppe de certaines droites variables. (252-259).

Il s'agit de la córde variable d'une courbe plane : 1° quand cette corde est de longueur constante; 2° quand l'arc est de longueur constante; 3° quand la somme de l'arc et de la corde est constante; 4° quand la corde est vue d'un point fixe sous un angle constant; 5° quand les tangentes aux extrémités de la corde forment un angle constant.

Fouret (*G.*). — Recherche d'une courbe plane possédant un lieu géométrique de pôles principaux d'inversion. (259-262).

On sait qu'un pôle principal d'inversion est un point tel que la transformation reproduit la courbe donnée. L'auteur démontre qu'il n'existe pas de courbe anallagmatique plane satisfaisant à la condition proposée; et que seule la circonférence se transforme en elle-même en prenant un pôle d'inversion quelconque. Extension à l'espace.

Fouret (*G.*). — Sur quelques identités trigonométriques. (262-265).

Démonstration nouvelle et applications de la formule

$$\frac{\sin(b-c)}{\sin a}+\frac{\sin(c-a)}{\sin b}+\frac{\sin(a-b)}{\sin c}+\frac{\sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)}{\sin a\sin b\sin c}=0.$$

Weill. — Sur le discriminant de l'équation du quatrième degré. (265-266).

L'auteur donne sous forme simple la condition pour que l'équation du quatrième degré ait une racine double.

Cesaro (*E.*). — Théorème de Géométrie. (266-267).

Addition au théorème indiqué plus haut. (129-133).

Kœnigs (*G.*). — Sur le complexe formé par les axes d'une surface du second ordre. (267-272).

Ici, on appelle *axe*, d'après M. Reye, toute droite normale au plan polaire d'un de ces points. L'article contient l'énoncé et la démonstration d'un grand nombre de propriétés de ces axes ainsi définis.

Laquière (*E.-M.*). — Recherche des cercles coupant trois cercles donnés sous des angles déterminés. (272-287).

La solution que donne M. Laquière est élémentaire et géométrique. Il la fait suivre d'une formule donnant l'équation de l'ensemble des huit circonférences qui satisfont à la question. Il étend enfin les résultats obtenus à la Géométrie dans l'espace, et aux seize sphères qui résolvent le problème analogue, pour quatre sphères données.

Questions proposées : 1447 à 1450. (287-288). A. L.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME VII.