Faculté des sciences de Paris. Sujets donnés aux examens de licence ès Sciences mathématiques (suite et fin)

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 7, nº 1 (1883), p. 43-56
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_43_1>

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

SUJETS DONNÉS AUX EXAMENS DE LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

(SUITE ET FIN.)

Astronomie. — Sachant qu'un astre A a, à une certaine époque, pour coordonnées écliptiques

$$\lambda = 2^\circ 51' 4'',45 \quad \text{et} \quad L = 9^\circ 33' 38'',386,$$

on demande les coordonnées équatoriales correspondantes.

On prendra pour l'obliquité de l'écliptique

$$\omega = 23^\circ 27' 32'',09.$$

Juillet 1879. — *Analyse.* — 1° Déterminer les trajectoires orthogonales des courbes définies en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$(x^2+y^2)^2 = \pm a^2 xy,$$

dans laquelle a désigne un paramètre variable.

2° Soit AB un arc de courbe sur lequel il n'y a ni points singuliers ni points d'inflexion. En un point quelconque m de l'arc, on mène la normale sur laquelle on porte, à partir de m, de part et d'autre, les longueurs mm_1, mm_2 égales à une ligne donnée l; le point m décrivant l'arc AB, les points m_1, m_2 décrivent deux arcs correspondants A_1B_1 A_2B_2.

Démontrer les relations suivantes :

$$S_1 = S - l\theta, \quad S_2 = S + l\theta,$$

dans lesquelles S_1, S, S_2 représentent les longueurs des arcs A_1B_1, AB, A_2B_2; θ l'angle des normales extrêmes.

On suppose que l'arc A_1B_1, situé du côté de l'arc AB où se trouve sa développée, ne rencontre pas cette développée.

Épure. — On donne : 1° un cône de révolution dont l'axe est vertical. Le sommet de ce cône se trouve sur le grand axe de la feuille, à $0^m,06$ des deux plans de projection. Les génératrices font avec l'axe un angle de 45°.

2° Une droite parallèle au plan vertical à $0^m,09$ en avant du plan vertical. La trace horizontale de cette droite est à $0^m,05$ à gauche du centre de la feuille et sa projection verticale passe par la projection verticale du sommet du cône.

On demande de construire le contour apparent horizontal du conoïde engendré par une horizontale s'appuyant constamment sur la droite et sur le cône.

Indiquer à l'encre la construction pour trouver un point du contour apparent. On ne représentera à l'aide de génératrices que la partie de surface opaque du conoïde placée au-dessous du sommet du cône, tout en indiquant en trait mixte la portion du contour apparent correspondant à la région enlevée du conoïde.

Mécanique. — Un point matériel non pesant, de masse m, est assujetti à se mouvoir sur la surface d'une sphère de rayon l; dans chacune de ses positions, il est soumis à l'action d'une force perpendiculaire à un plan fixe P mené par le centre de la sphère, dirigée vers ce plan, et dont l'intensité est $\frac{mk^2}{z^3}$, z désignant la distance du mobile au plan. On suppose la vitesse initiale parallèle au plan :

1° Trouver la projection de la trajectoire sur le plan P;

2° γ et θ désignant les coordonnées polaires d'un point quelconque de cette projection, donner les expressions de r et de θ en fonction du temps, dans le cas où l'on a

$$\gamma_0^2 z_0^2 - k^2 > 0,$$

γ_0 désignant la vitesse initiale et z_0 la valeur initiale de z.

Astronomie. — L'obliquité de l'écliptique étant supposée de $23^\circ 27' 26'',4$, on donne l'ascension droite d'un astre égale à $14^h 17^m 35^s,28$ et sa déclinaison égale à $-46^\circ 49' 13'',7$. Calculer la longitude et la latitude à $0'',1$ près.

Analyse. — Étant donné le paraboloïde défini en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$z = \frac{mx^2 + y^2}{2a},$$

on considère sur cette surface les courbes dont les tangentes font un angle constant donné γ avec l'axe OZ:

1° Trouver l'équation différentielle des projections de ces courbes sur le plan XOY et montrer que l'intégration de cette équation se ramène à une quadrature ;

2° Effectuer la quadrature et construire la projection dans le cas particulier où m est égal à l'unité.

Mécanique. — 1° Étudier le mouvement d'un point matériel M assujetti à se mouvoir sur un paraboloïde de révolution et attiré vers le foyer F de ce paraboloïde par une force inversement proportionnelle au carré de la distance.

2° On sait qu'il existe à chaque instant dans le mouvement d'un plan mobile Q, sur un plan fixe P, deux points dont l'un a une vitesse nulle et l'autre une accélération nulle.

On demande quel doit être le mouvement du plan Q sur le plan P pour que le point B soit fixe et la distance AB constante.

Astronomie. — Calcul d'une éclipse de Lune.

Heure de l'apparition, temps moyen	$17^h 39^m 30^s,3$
Déclinaison à cette époque de la Lune.........	$4°.53'.17'',4$
Déclinaison du Soleil.........................	3.57.15,9
Mouvement horaire en ascension de la Lune...	30.11,3
Mouvement horaire en ascension du Soleil	2.18
Mouvement en déclinaison de la Lune.........	16.13,6
Mouvement en déclinaison du Soleil	58,7
Parallaxe horizontale de la Lune	57.59,9
Parallaxe horizontale du Soleil...............	8,9
Demi-diamètre de la Lune....................	15.49,8
Demi-diamètre du Soleil......................	16. 7,9

On demande l'époque du commencement, du milieu et de la fin de l'éclipse.

Novembre 1879. — *Analyse.* — On donne les deux surfaces définies en coordonnées rectangulaires par les équations

$$z = a \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} \text{ (hélicoïde gauche)}$$

et

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right),$$

surface engendrée par la rotation d'une chaînette autour de l'axe OZ.

Soient M un point de la première surface, M_1 un point de la seconde, θ l'angle du plan MOZ avec le plan ZOX, l la distance du point M à l'axe OZ, θ_1 l'angle du méridien M_1OZ avec le plan ZOX, σ l'arc AM_1 de ce méridien compris entre le point m_1 et l'équateur de la surface. On dit que le point m_1 de la deuxième surface correspond au point m de la première lorsqu'on a $\theta_1 = \theta$, $\sigma = l$; le point M décrivant une courbe C sur la première surface, le point M_1 décrit une courbe correspondante C_1 sur la deuxième surface :

1° Démontrer que les arcs correspondants des courbes C et C_1 ont même longueur;

2° Démontrer que les produits des rayons de courbure principaux des deux surfaces en deux points correspondants sont égaux.

Mécanique. — Une figure plane se meut dans son plan de manière que deux de ses points A et B restent constamment sur deux droites rectangulaires fixes Ox, Oy; on sait que le point A est animé d'un mouvement uniforme sur la droite Ox.

On propose de déterminer pour une époque quelconque :

1° La vitesse angulaire ω de la rotation autour du centre instantané ;

2° L'accélération d'un point quelconque de la droite AB en grandeur et en direction.

Soient O un centre d'attraction, OX une droite fixe passant par ce point ; un point matériel M est sollicité à chaque instant par une force dirigée vers le point O et dont l'intensité est $\frac{n}{r^2 \cos^2\theta}$, n désignant une constante, r et θ étant les coordonnées polaires du point M, $r = \text{OM}$; $\theta = \text{XOM}$. La vitesse initiale est dirigée dans le plan qui passe par la position initiale M_0 et la droite OX. On demande de déterminer la nature de la trajectoire du point matériel.

Examiner, en particulier, le cas où la vitesse initiale est perpendiculaire à OM_0.

Astronomie. — Calculer l'anomalie excentrique et l'anomalie moyenne d'une planète, sachant que l'anomalie vraie est de 123°37′15″ et que l'excentricité de l'orbite a pour valeur 0,016759566.

Juillet 1880. — *Analyse.* — Déterminer la courbe C telle que le triangle TMN, dont les côtés sont la tangente MT en un point quelconque, la normale MN au même point, la perpendiculaire NT élevée au pôle O sur le rayon vecteur OM ait une aire constante donnée a^2.

On indiquera la figure de chacune des branches de la courbe.

Épure. — On considère une surface réglée ayant pour directrices :

1° Une circonférence ayant son centre sur le grand axe de la feuille à $0^m,10$ des deux plans de projection. Le plan de cette circonférence est horizontal et elle a $0^m,04$ de rayon;

2° Une perpendiculaire au plan vertical sur le grand axe de la feuille à $0^m,14$ au-dessus de ce plan horizontal;

3° Une parallèle à la ligne de terre à $0^m,10$ en avant du plan vertical et $0^m,06$ au-dessus du plan horizontal.

Indiquer à l'encre la détermination d'un point du contour apparent.

Mécanique. — Un fil flexible et inextensible sans masse, de longueur l, passe sur une très petite poulie O et porte à ses deux extrémités deux points matériels M et M' de masses m et m'.

Le point M est assujetti à se mouvoir sur une droite fixe OX; il est attiré proportionnellement à la distance par un point fixe A de cette droite.

Trouver le mouvement des deux points M et M', ce mouvement étant supposé se faire dans le plan qui passe par OX et M'_0, position initiale de M'.

On fera $OA = a$ et l'on représentera par μm l'attraction de A sur M à la distance 1.

On supposera qu'à l'origine du mouvement le point M est en O et qu'il a reçu une vitesse h dirigée de O vers A, que le point M' a reçu une vitesse k perpendiculaire sur OM'_0.

Effectuer les quadratures lorsque $l = a$ et trouver la trajectoire de M'; faire complètement les calculs en supposant

$$m = m',$$
$$h = k = a\sqrt{3\mu}.$$

Astronomie. — Le demi-grand axe de l'orbite d'une planète est égal à 2,954267; l'excentricité est égale à 0,218709. Étant donnée l'anomalie vraie égale à 143°28'17",6, calculer les valeurs correspondantes du rayon vecteur et de l'anomalie moyenne.

Analyse. — I. En un point quelconque M de la chaînette définie en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

on mène la tangente, que l'on prolonge jusqu'à son point de rencontre T avec l'axe Ox, puis l'on fait tourner la figure autour de cet axe.

Exprimer la différence des aires décrites par l'arc de chaînette AM, A étant le sommet de la courbe, et par la tangente MT :

1° En fonction de l'abscisse du point M;

2° En fonction de l'abscisse du point T.

II. Soient OX, OY, OZ trois axes de coordonnées rectangulaires et dans le plan ZOX une courbe donnée C. Une surface est engendrée par une circonférence de cercle dont le plan reste parallèle au plan XOY, dont le centre décrit la courbe C et qui rencontre constamment OZ.

On demande de former l'équation différentielle des lignes asymptotiques de la surface en prenant pour variables la coordonnée Z d'un point quelconque M et l'angle θ du rayon du cercle qui passe en ce point avec la trace du plan du cercle sur le plan ZOX.

Appliquer au cas où la courbe C est une parabole ayant le point O pour sommet et la droite OX pour axe.

Mécanique. — 1° Un tube circulaire, infiniment petit, peut tourner librement autour d'un de ses diamètres qui est fixe; dans l'intérieur du tube peut se mouvoir sans frottement un point matériel.

Déterminer le mouvement de ce système en supposant que les seules forces qui agissent sur le tube et sur le point soient leurs réactions normales mutuelles.

On donne le rayon r du cercle, le moment d'inertie A du tube par rapport à l'axe fixe et la masse m du point mobile.

2° Un corps solide se meut autour d'un point fixe; trouver à chaque instant le lieu des points du corps pour lesquels l'accélération est perpendiculaire à l'axe instantané de rotation.

Astronomie. — A un lieu dont la latitude est

$$\lambda = 48°50',$$

la distance zénithale observée est

$$Z = 61°48'30'';$$

la réfraction calculée $1',8$;

les coordonnées équatoriales de l'étoile observée

$$\text{Æ} = 4^{h}28^{m}48^{s},38,$$
$$\delta = 73^{\circ}44'30''.$$

On demande l'heure sidérale.

Novembre 1880. — *Analyse.* — On considère le conoïde défini par l'équation

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

1° Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques du conoïde.

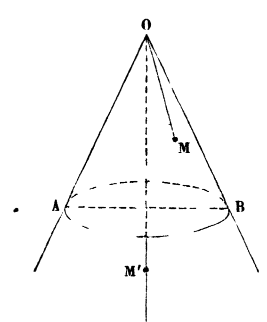
2° Intégrer cette équation.

3° Chercher quelle doit être la fonction φ pour que la projection de l'une des lignes asymptotiques, sur le plan de xy, soit le cercle représenté par l'équation $x^2 + y^2 = ay$.

Quelles seront, dans ce dernier cas, les projections des autres lignes asymptotiques.

Mécanique. — On donne un cône de révolution dont l'axe OZ est vertical et l'angle au sommet $AOB = 2\alpha$; en O se trouve une très petite poulie sur laquelle passe un fil de longueur l, portant à

Fig 4.



ses deux extrémités des poids égaux à M et M'; M est assujetti à rester sur la surface du cône M' sur l'axe OZ.

Déterminer le mouvement.

On supposera, pour les données initiales, que, pour $t = 0$, $OM = r_0$; que la vitesse initiale V_0 du point M est égale à $\sqrt{2gh}$ et est dirigée tangentiellement au parallèle du point de départ; enfin que la vitesse initiale de M′ est nulle.

On s'attachera particulièrement à fixer les limites entre lesquelles varie la distance $OM = r$.

On considérera, en dernier lieu, le cas de

$$h = \frac{8}{3} r_0 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Astronomie. — La durée de la révolution d'une planète autour du Soleil est de $1035^{\text{jours}},438$, l'excentricité de son orbite est 0,245367. Calculer le temps qui s'écoule depuis le passage de la planète, à son périhélie, jusqu'à l'instant auquel son rayon vecteur est perpendiculaire au grand axe.

Juillet 1881. — *Analyse.* — On donne l'équation aux dérivées partielles

$$\left(x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + 2xy \frac{d^2 z}{dx\,dy} + y^2 \frac{d^2 z}{dy^2}\right)(x^2 + y^2)$$
$$- \left(x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy}\right)(x^2 + y^2) - \left(x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy}\right)^3 = 0,$$

les coordonnées étant rectangulaires :

1° Transformer cette équation en substituant aux variables indépendantes x et y les coordonnées polaires ρ et θ.

2° Intégrer l'équation transformée et indiquer le mode de génératrice des surfaces représentées par l'intégrale.

Géométrie descriptive. — On donne :

1° Une circonférence AA′ dans un plan horizontal à $0^{\text{m}},08$ au-dessus du plan horizontal. Le centre de cette circonférence se trouve sur le grand axe de la feuille, à $0^{\text{m}},08$ en avant du plan vertical, et le rayon a pour longueur $0^{\text{m}},04$;

2° La parallèle à la ligne de terre BB′ à $0^{\text{m}},04$ au-dessus du plan horizontal et $0^{\text{m}},08$ en avant du plan vertical;

3° La verticale C à $0^{\text{m}},04$ à droite du centre de la feuille et $0^{\text{m}},04$ en avant du plan vertical.

Trouver :

1° Un point de contour apparent vertical de la surface réglée déterminée par les trois directrices ABC;

2° Un point de la trace horizontale de la même surface, ainsi que la tangente en ce point.

Astronomie. — La comète de Donati fut observée par James Ferguson, à Washington, le 13 octobre 1858, à $6^h 26^m 21^s,01$ temps moyen, qui trouva pour l'ascension droite et la déclinaison corrigées de la réfraction

$$\mathcal{A} = 236^\circ 48' 0'',05,$$
$$\mathcal{D} = 7^\circ 36' 52'',08,$$

le logarithme de la distance de la comète à la Terre étant

$$l\Delta = 9,7444.$$

On demande le lieu géocentrique correspondant.

Analyse. — 1° Former l'équation du second degré qui donne les rayons de courbure principaux en un point quelconque du paraboloïde défini, en coordonnées rectangulaires, par l'équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z. \tag{1}$$

2° Exprimer, en fonction de la variable z, chacun des deux rayons principaux, pour tout point de la ligne de rencontre du paraboloïde proposé avec le paraboloïde défini par l'équation

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 2z - \lambda. \tag{2}$$

Astronomie. — Le 1^{er} janvier 1851, l'ascension droite de α du Cocher (la Chèvre) était de $5^h 5^m 42^s,03$, et la déclinaison $45^\circ 50' 22'',4$. On demande de trouver sa longitude et sa latitude en adoptant pour l'obliquité de l'écliptique

$$23^\circ 27' 25'',47.$$

Mécanique. — On considère la surface engendrée par une cycloïde ACB, tournant autour de sa base AB.

Un point matériel M, non pesant, est assujetti à rester sur cette surface que l'on suppose parfaitement polie; le point M est soumis à l'action d'une force perpendiculaire à AB, dirigée vers AB et dont l'intensité est proportionnelle à la distance r du mobile à AB. Déterminer le mouvement et discuter les différents cas qui peuvent se présenter. Fixer les limites entre lesquelles r peut varier.

Données. — a, diamètre du cercle générateur de la cycloïde; r_0, valeur initiale de r; ε, angle de r_0 avec la tangente au parallèle du point de départ; k, intensité de la force d'attraction exercée par AB sur l'unité de masse placée à la distance 1 de AB.

Un triangle isoscèle rectangle AOB de forme invariable et dans lequel le sommet O de l'angle droit est fixe est animé d'un mouvement quelconque. Soient, à un instant quelconque, AA′, BB′ les vitesses respectives des points A et B. Démontrer que la projection de AA′ sur OB est égale à la projection de BB′ sur AO et que, des deux angles formés, l'un, par les directions AA′ et OB, l'autre, par les directions BB′ et OA, l'un est aigu et l'autre obtus.

Novembre 1881. — Déterminer les fonctions u et v de deux variables indépendantes x, y dont les différentielles totales vérifient les relations

$$du = (3u + 12v)dx + (2u + 12v)dy,$$
$$dv = (u + 2v)dx + (u + v)dy.$$

Mécanique. — On considère deux points matériels M, M′ de masses m et m', que l'on suppose non pesants. L'un d'eux M est assujetti à demeurer sur un plan P; l'autre à demeurer sur une droite OZ, perpendiculaire au plan P. De plus, ces deux points sont reliés par un fil tendu MOM′ de longueur l, qui passe par une petite ouverture pratiquée en O dans le plan P. On demande de déterminer le mouvement de ces deux points, en supposant qu'ils se repoussent proportionnellement à la distance, la répulsion mutuelle à la distance 1 étant μ. On négligera le frottement, et l'on représentera par r_0 la distance du point O à la position centrale M_0 de M par v_0 la vitesse initiale de M, qui sera supposée perpendiculaire à OM_0;

2° Un point M se meut d'un mouvement uniforme sur une hélice tracée sur un cylindre circulaire dont on demande :

1° De montrer que, toutes les fois que le point M traversera un plan (P), la normale à la trajectoire, située dans ce plan (P), ira passer par un point fixe de ce plan. On projette le point M sur un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, parallèlement à la tangente à l'hélice au point où elle coupe ce plan. Soit m la projection de M. On construit, à un instant quelconque, la grandeur géométrique qui représente l'accélération du point m. On demande le lieu du point m'. Dans quel cas ce lieu se réduira-t-il à une droite? Quelle est la trajectoire du point m?

Astronomie. — Sachant que les coordonnées écliptiques d'un astre sont, à une certaine époque,

$$\lambda = 2°51'4'',55,$$
$$\mathcal{L} = 9°33'38'',386.$$

On propose de trouver les coordonnées équatoriales correspondantes. L'obliquité de l'écliptique est supposée égale à

$$\omega = 23°27'32''.935.$$

On a, pour Washington,

$$\varphi = 38°53'39'',03,$$
$$l\rho \cos\varphi' = 9,8917,$$
$$l\rho \sin\varphi' = 9,7955,$$

et le temps moyen de l'observation réduit en temps sidéral est

$$\theta = 19^h 55^m 16^s,98.$$

Mécanique. — On donne une ellipse dont les axes ont pour longueur $2a$ et $2b$; cette ellipse sert de base à un cylindre droit indéfini, sur lequel un point matériel est assujetti à se mouvoir. Ce point est, en outre, attiré proportionnellement à la distance par le centre O de l'ellipse. Déterminer le mouvement et discuter les divers cas qui peuvent se présenter.

Données : on représentera par k^2 l'attraction du centre O sur l'unité de masse, à l'unité de distance, par v_0 la vitesse initiale, par ε l'angle qu'elle fait avec la génératrice du cylindre, par z_0 la distance de la position initiale du mobile au plan de l'ellipse, et par x_0 la distance de ce même point au plan qui passe par l'axe du cylindre et le petit axe de l'ellipse.

Appliquer les formules trouvées au cas du $b = a$; que faut-il dans ce cas, pour que la trajectoire soit une courbe formée, ou bien une courbe plane?

Calculer, dans la même hypothèse, la réaction du cylindre.

Dynamique.— On considère la surface engendrée par une cycloïde ACB tournant autour de sa base AB.

Un point matériel M non pesant est assujetti à rester, dans chacune de ses positions sur cette surface, que l'on suppose parfaitement polie; le point M est soumis à l'action d'une force perpendiculaire à AB, dirigée vers AB, et dont l'intensité est proportionnelle à la distance r du mobile à AB. Déterminer le mouvement et discuter les différents cas qui peuvent se présenter; *fixer les limites entre lesquelles r peut varier.*

Données : a, diamètre du cercle générateur de la cycloïde; v_0, vitesse initiale; r_0, valeur initiale de r; ε, angle de v_0 avec la tangente au parallèle du point de départ; k^2, intensité de la force d'attraction exercée par AB sur l'unité de masse placée à la distance 1 de AB.

Cinématique. — Un triangle isoscèle rectangle AOB, de forme invariable, et dans lequel le sommet O de l'angle droit est fixe, est animé d'un mouvement quelconque : soient, à un instant quelconque, AA′, BB′ les vitesses respectives des points A, B.

Démontrer que la projection de AA′ sur OB est égale à la projection de BB′ sur OA et que, des deux angles formés, l'un par les directions AA′ et OB, l'autre par les directions BB′ et OA, l'un est aigu et l'autre obtus.

Astronomie. — Le 1^er^ janvier 1851, l'ascension droite de α_q Cocher (la Chèvre) était de

$$5^h 5^m 42^s,03,$$

et la déclinaison

$$+45^\circ 50' 22'',04.$$

On demande de trouver sa longitude et sa latitude, en adoptant pour l'obliquité de l'écliptique

$$23°27'25'',47.$$

Analyse. — 1° Former l'équation du second degré qui donne les rayons de courbure principaux en un point quelconque du paraboloïde défini, en coordonnées rectangulaires, par l'équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z. \tag{1}$$

2° Exprimer, en fonctions de la variable z, chacun des deux rayons de courbure principaux, pour tout point de la ligne de rencontre du paraboloïde proposé avec le paraboloïde défini par l'équation

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 2z - \lambda. \tag{2}$$