

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

ÉMILE BARBIER

Démonstration élémentaire du théorème relatif à la somme des cubes des nombres secondaires

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2^e série,
tome 7, n° 1 (1883), p. 42-43

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_42_1>

© Gauthier-Villars, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DU THÉORÈME RELATIF A LA SOMME
DES CUBES DES NOMBRES SECONDAIRES;**

PAR M. ÉMILE BARBIER.

Formons une table de multiplication

$$\begin{array}{cccccc}
 1 \times 1, & 1 \times 2, & 1 \times 3, & \dots, & 1 \times n, \\
 2 \times 1, & 2 \times 2, & 2 \times 3, & \dots, & 2 \times n, \\
 3 \times 1, & \dots, & \dots, & \dots, & 3 \times n, \\
 \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\
 n \times 1, & n \times 2, & n \times 3, & \dots, & n \times n, \\
 \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots
 \end{array}$$

La somme de tous les produits contenus dans les N premières

lignes et les N premières colonnes est évidemment le carré de la somme des N premiers nombres. Il suffit, pour le reconnaître, d'effectuer la sommation par lignes horizontales ou verticales.

Formons la somme d'une autre manière. Groupons les produits de la manière suivante :

$$\begin{array}{l}
 1 \times 1 \\
 \left\{ \begin{array}{l} 1 \times 2 + 2 \times 2 \\ + 2 \times 1 \end{array} \right. \\
 \left\{ \begin{array}{l} 1 \times 3 + 2 \times 3 + 3 \times 3 \\ + 2 \times 3 + 1 \times 3 \end{array} \right. \\
 \dots\dots\dots \\
 \left\{ \begin{array}{l} 1 \times n + 2 \times n + \dots + (n-1).n + n.n \\ + (n-1)n + (n-2)n + \dots + 1.n, \end{array} \right.
 \end{array}$$

le groupe général se composant de tous les produits contenus dans la $n^{\text{ième}}$ ligne et la $n^{\text{ième}}$ colonne jusqu'à l'élément commun inclusivement. Si l'on fait la somme de tous ces produits, dans chaque groupe, en ajoutant d'abord ceux que nous avons disposés sur la même ligne verticale, on obtient pour le groupe de rang n , n fois n^2 , c'est-à-dire n^3 .

Donc la somme des cubes des N premiers nombres est égale au carré de la somme de ces nombres.