Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Duarte Zeite Pereira Da Silva

Sur quelques intégrales données dans le cours d'analyse de M. Hermite

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 7, nº 1 (1883), p. 291-292

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_291_1>

SUR QUELQUES INTÉGRALES DONNÉES DANS LE COURS D'ANALYSE DE M. HERMITE ;

PAR M. DUARTE ZEITE PEREIRA DA SILVA.

Soient

$$u = x\sin x + \cos x, \quad v = \sin x - x\cos x,$$

et proposons-nous de trouver l'intégrale $y = \int \frac{x\,dx}{(au + bv)^2}$.

On a

$$
\begin{aligned}
au + bv &= (ax + b)\sin x + (a - bx)\cos x \\
&= (ax + b)\frac{e^{2ix} - 1}{2ie^{ix}} + (a - bx)\frac{e^{2ix} + 1}{2ie^{ix}} i \\
&= \frac{1}{2ie^{ix}}[e^{2ix}(x + i)(a - ib) - (x - i)(a + ib)] \\
&= \frac{(x - i)(a + ib)}{2ie^{ix}}\left(e^{2ix}\frac{x + i}{x - i}\frac{a - ib}{a + ib} - 1\right).
\end{aligned}
$$

Posant

$$z = e^{2ix}\frac{x + i}{x - i}\frac{a - ib}{a + ib},$$

on aura

$$au + bv = \frac{(x - i)(a + ib)}{2ie^{ix}}(z - 1);$$

donc

$$y = \int \frac{-4e^{2ix}x^2\,dx}{(a + ib)^2(x - i)^2(z - 1)^2}.$$

Mais

$$dz = 2i\frac{a - ib}{a + ib}\frac{e^{2ix}x^2}{(x - i)^2}dx;$$

par suite,

$$y = \frac{2i}{a^2 + b^2}\int \frac{dz}{(z - 1)^2} = \frac{2i}{a^2 + b^2}\frac{1}{1 - z}$$

et

$$y = \frac{i - x}{a - ib}\frac{e^{-ix}}{au + bv} + \text{const.} = \frac{1}{a - ib}\frac{iu + v}{au + bv} + \text{const.},$$

et non $-\dfrac{u}{au + bv}$, comme je l'avais affirmé, par mégarde.

Pour obtenir $\int \frac{x^2\,dx}{u^2}$ et $\int \frac{x^2\,dx}{v^2}$, il suffit de donner à a et b des valeurs convenables.