Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

C. Possé

Sur le terme complémentaire de la formule de M. Tchebychef donnant l'expression approchée d'une intégrale définie par d'autres prises entre les mêmes limites

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 7, nº 1 (1883), p. 214-224

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_214_0>

SUR LE TERME COMPLÉMENTAIRE DE LA FORMULE DE M. TCHEBYCHEF DONNANT L'EXPRESSION APPROCHÉE D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE PAR D'AUTRES PRISES ENTRE LES MÊMES LIMITES;

PAR M. C. POSSÉ,
Professeur à l'Université de Saint-Pétersbourg.

Dans les *Communications de la Société mathématique de Kharkof* (janvier 1883), M. Tchebychef a donné une formule pour exprimer l'intégrale

$$\int_a^b uv\theta\, dx,$$

u et v étant des fonctions quelconques de x, continues entre les limites d'intégration, θ une fonction de x restant positive entre les mêmes limites, sous forme de série, dont le terme général est

$$\frac{\int_a^b u\psi_m\theta\, dx \int_a^b v\psi_m\theta\, dx}{\int_a^b \psi_m^2\theta\, dx},$$

ψ_m désignant le dénominateur de la réduite du rang $(m+1)$, obtenue par le développement en fraction continue de l'intégrale

$$(1) \qquad \int_a^b \frac{\theta(z)\, dz}{x-z}.$$

Arrêtant la série au terme

$$\frac{\int_a^b u\psi_{n-1}\theta\, dx \int_a^b v\psi_{n-1}\theta\, dx}{\int_a^b \psi_{n-1}^2\theta\, dx},$$

et dénotant par R_n le terme complémentaire, M. Tchebychef donne sans démonstration les deux propriétés qui suivent de R_n.

1° La valeur absolue de R_n ne surpasse jamais la quantité

$$\frac{\int_a^b \psi_n^2\theta\, dx}{\left(\dfrac{d^n\psi_n}{dx^n}\right)^2}\,AB,$$

A, B étant les plus grandes valeurs absolues des dérivées d'ordre n $\frac{d^n u}{dx^n}$, $\frac{d^n v}{dx^n}$, entre les limites d'intégration;

2° Si les dérivées d'ordre n des fonctions u et v ne changent pas de signe entre les limites d'intégration, le signe de R_n est celui du produit

$$\frac{d^n u}{dx^n}\frac{d^n v}{dx^n}.$$

Dans le cas particulier de $n=1$, $\theta=1$, la seconde propriété se réduit au théorème de M. Tchebychef, démontré par M. Korkine dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. XCVI, n° 5; l'expression exacte du terme complémentaire pour ce même cas particulier a été donnée par M. Andréief dans les *Communications de la Société mathématique de Kharkof* (mars 1883), et se déduit aussi simplement de l'identité donnée par M. Korkine (*loc. cit.*).

Dans la Note suivante, nous donnerons la valeur exacte du terme complémentaire R_n pour le cas le plus général, et la démonstration des propriétés mentionnées plus haut.

Pour abréger l'écriture, nous désignerons toujours par fx, φx, ψx, ... les diverses fonctions de x, que nous aurons à considérer, en omettant les parenthèses; en outre, comme toutes les intégrales dans les formules suivantes seront prises entre les mêmes limites a et b, nous omettrons la désignation de ces limites en écrivant

$$\int fx\,dx \quad \text{au lieu de} \quad \int_a^b fx\,dx.$$

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ des quantités indépendantes quelconques, comprises entre les limites a et b et fx, φx deux fonctions continues entre les mêmes limites. Introduisons les notations suivantes :

$$(2)\qquad \Delta_{n-1}(f) = \begin{vmatrix} \psi_{n-1}x_1 & \psi_{n-1}x_2 & \ldots & \psi_{n-1}x_{n+1} \\ \psi_{n-2}x_1 & \psi_{n-2}x_2 & \ldots & \psi_{n-2}x_{n+1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \psi_1 x_1 & \psi_1 x_2 & \ldots & \psi_1 x_{n+1} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ fx_1 & fx_2 & \ldots & fx_{n+1} \end{vmatrix},$$

$\psi_1 x, \psi_2 x, \ldots, \psi_{n-1} x$ étant les fonctions entières, définies comme il a été dit plus haut.

$\Delta_{n-1}(\varphi)$ est le déterminant obtenu de $\Delta_{n-1}(f)$, si l'on y remplace la fonction fx par φx,

$$(3) \qquad \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} \psi_{n-1}x_1 & \psi_{n-1}x_2 & \ldots & \psi_{n-1}x_n \\ \psi_{n-2}x_1 & \psi_{n-2}x_2 & \ldots & \psi_{n-2}x_n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix},$$

$$(4) \qquad \prod_1^n \theta x_i \, dx_i = \theta x_1 \, \theta x_2, \ldots, \theta x_n \, dx_1 \, dx_2, \ldots, dx_n,$$

θx étant une fonction restant positive entre les limites a et b;

$$(5) \qquad \mathrm{I}_{n-1}(f, \varphi) = \int^{(n+1)} \Delta_{n-1}(f)\,\Delta_{n-1}(\varphi) \prod_1^{n+1} \theta x_i \, dx_i,$$

le signe $\int^{(n+1)}$ désignant l'intégrale multiple d'ordre $(n+1)$, toutes les intégrations étant effectuées entre les limites a et b,

$$(6) \qquad \mathrm{I}_{n-1} = \int^{(n)} \Delta_{n-1}^2 \prod_1^n \theta x_i \, dx_i.$$

Nous allons déduire une formule de réduction de l'intégrale $\mathrm{I}_{n-1}(f, \varphi)$, formule qui nous conduira immédiatement à la formule de M. Tchebychef avec le terme complémentaire. Pour cela, décomposons les déterminants $\Delta_{n-1}(f)$, $\Delta_{n-1}(\varphi)$ d'après les éléments de la première ligne; nous aurons

$$\Delta_{n-1}(f) = \psi_{n-1}x_1 \, \mathrm{A}_1 + \psi_{n-1}x_2 \, \mathrm{A}_2 + \ldots + \psi_{n-1}x_{n+1} \, \mathrm{A}_{n+1},$$
$$\Delta_{n-1}(\varphi) = \psi_{n-1}x_1 \, \mathrm{B}_1 + \psi_{n-1}x_2 \, \mathrm{B}_2 + \ldots + \psi_{n-1}x_{n+1} \, \mathrm{B}_{n+1},$$

A_i, B_i étant les déterminants mineurs, indépendants de x_i.

Effectuant le produit de

$$\Delta_{n-1}(f)\,\Delta_{n-1}(\varphi),$$

on aura

$$(7) \qquad \Delta_{n-1}(f)\,\Delta_{n-1}(\varphi) = \sum_{(i)} \psi_{n-1}^2 x_i \, \mathrm{A}_i \, \mathrm{B}_i + \sum_{(i,\,k)} \psi_{n-1}x_i \, \psi_{n-1}x_k \, \mathrm{A}_i \, \mathrm{B}_k.$$

La première somme contient $(n+1)$ termes, dont chacun s'obtient du premier par un échange des lettres $x_1, x_2, \ldots, x_n$; la seconde s'étend sur toutes les combinaisons des valeurs $1, 2, \ldots, (n+1)$ de i et k, inégales entre elles, et contient évidemment $n(n+1)$ termes dont chacun s'obtient du premier par un échange des lettres $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Multipliant les deux membres de l'égalité (7) par $\prod_1^{n+1} \theta x_i\, dx_i$ et intégrant $(n+1)$ fois entre les limites a et b, nous aurons, d'après ce qui a été dit, la formule qui suit :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} I_{n-1}(f,\varphi) &= (n+1)\int^{(n+1)} \psi_{n-1}^2 x_1\, A_1 B_1 \prod_1^{n+1} \theta x_i\, dx_i \\ &\quad + n(n+1)\int^{(n+1)} \psi_{n-1} x_1\, \psi_{n-1} x_2\, A_1 B_2 \prod_1^{n+1} \theta x_i\, dx_i. \end{aligned}\right.$$

Nous allons maintenant transformer le second membre de la formule (8). En mettant pour A_1, B_1, B_2 leurs valeurs, savoir :

$$A_1 = \begin{vmatrix} \psi_{n-2} x_2 & \psi_{n-2} x_3 & \ldots & \psi_{n-2} x_{n+1} \\ \psi_{n-3} x_2 & \psi_{n-3} x_3 & \ldots & \psi_{n-3} x_{n+1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ f x_2 & f x_3 & \ldots & f x_{n+1} \end{vmatrix},$$

$$B_1 = \begin{vmatrix} \psi_{n-2} x_2 & \psi_{n-2} x_3 & \ldots & \psi_{n-2} x_{n+1} \\ \psi_{n-3} x_2 & \psi_{n-3} x_3 & \ldots & \psi_{n-3} x_{n+1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \varphi x_2 & \varphi x_3 & \ldots & \varphi x_{n+1} \end{vmatrix},$$

$$B_2 = -\begin{vmatrix} \psi_{n-2} x_1 & \psi_{n-2} x_3 & \ldots & \psi_{n-2} x_{n+1} \\ \psi_{n-3} x_1 & \psi_{n-3} x_3 & \ldots & \psi_{n-3} x_{n+1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \varphi x_1 & \varphi x_3 & \ldots & \varphi x_{n+1} \end{vmatrix},$$

on voit immédiatement que le premier terme du second membre de la formule (8) se réduit à

$$\begin{aligned} &(n+1)\int \psi_{n-1}^2 x\, \theta x\, dx \int^{(n)} \Delta_{n-2}(f)\, \Delta_{n-2}(\varphi) \prod_1^{n} \theta x_i\, dx_i \\ &= (n+1)\int \psi_{n-1}^2 x\, \theta x\, dx\, I_{n-2}(f,\varphi), \end{aligned}$$

conformément aux notations (2) et (5).

Pour réduire le second terme du second membre de (8), rappelons d'abord que, d'après la propriété fondamentale des fonctions $\psi_m x$, on a

$$\int \psi_m x\, \omega x\, \theta x\, dx = 0, \tag{9}$$

ωx désignant une fonction entière quelconque de degré égal ou inférieur à $m-1$. Cela posé, remarquant que A_1 est indépendant de x_1 et B_2 de x_2, écrivons le second terme de la formule (8) de la manière suivante :

$$n(n+1)\int^{(n-1)} \left(\int \psi_{n-1} x\, B_2\, \theta x_1\, dx_1 \int \psi_{n-1} x_2\, A_1\, \theta x_2\, dx_2\right) \prod_3^{n+1} \theta x_i\, dx_i. \tag{10}$$

Or,

$$A_1 = (-1)^{n+1} f x_2 \begin{vmatrix} \psi_{n-2} x_3 & \psi_{n-2} x_4 & \cdots & \psi_{n-2} x_{n+1} \\ \psi_{n-3} x_3 & \psi_{n-3} x_4 & \cdots & \psi_{n-3} x_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + \rho x_2,$$

$$B_2 = -(-1)^{n+1} \varphi x_1 \begin{vmatrix} \psi_{n-2} x_3 & \psi_{n-2} x_4 & \cdots & \psi_{n-2} x_{n+1} \\ \psi_{n-3} x_3 & \psi_{n-3} x_4 & \cdots & \psi_{n-3} x_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + \sigma x_1.$$

ρx et σx étant des fonctions entières de x de degré $(n-2)$, on voit, en vertu de l'équation (9), que la quantité (10) se réduit à

$$\begin{aligned} n(n+1)\int f x\, \psi_{n-1} x\, \theta x\, dx . \int \varphi x\, \psi_{n-1} x\, \theta x\, dx . \int^{(n-1)} \Delta_{n-2}^2 . \prod_1^{n-1} \theta x_i\, dx_i \\ = n(n+1)\, I_{n-2} . \int f x\, \psi_{n-1} x\, \theta x\, dx . \int \varphi x\, \psi_{n-1} x\, \theta x\, dx. \end{aligned}$$

Par conséquent, la formule (8) nous donne

$$\left\{ \begin{aligned} I_{n-1}(f, \varphi) &= (n+1)\int \psi_{n-1}^2 x\, \theta x\, dx . I_{n-2}(f, \varphi) \\ &\quad - n(n+1)\, I_{n-2} \int f x\, \psi_{n-1}\, \theta x\, dx . \int \varphi x\, \psi_{n-1} x\, \theta x\, dx. \end{aligned} \right. \tag{11}$$

En faisant ici une hypothèse particulière sur les fonctions fx,

φx, savoir

$$fx = \varphi x = \psi_{n-1} x,$$

on aura, remarquant que dans ce cas $\mathrm{I}_{n-1}(f, \varphi)$ se réduit à zéro, et $\mathrm{I}_{n-2}(f, \varphi)$ à I_{n-1}, la formule

$$\mathrm{I}_{n-1} = n \mathrm{I}_{n-2} \int \psi_{n-1}^2 x\, \theta x\, dx,$$

en vertu de laquelle la formule (11) se réduit à la forme

$$(12) \quad \frac{\mathrm{I}_{n-1}(f, \varphi)}{(n+1)\mathrm{I}_{n-1}} = \frac{\mathrm{I}_{n-2}(f, \varphi)}{n \mathrm{I}_{n-2}} - \frac{\int fx\, \psi_{n-1} x\, \theta x\, dx \int \varphi x\, \psi_{n-1} x\, \theta x\, dx}{\int \psi_{n-1}^2 x\, \theta x\, dx},$$

Posant successivement $n = 2, 3, \ldots, n$, ajoutant les résultats et remarquant que

$$\frac{\mathrm{I}_0(f, \varphi)}{2 \mathrm{I}_0} = \frac{\int\int (fx_2 - fx_1)(\varphi x_2 - \varphi x_1)\, \theta x_1\, \theta x_2\, dx_1\, dx_2}{2 \int \theta x\, dx}$$

$$= \int fx\, \varphi x\, \theta x\, dx - \frac{\int fx\, \theta x\, dx \int \varphi x\, \theta x\, dx}{\int \theta x\, dx},$$

on obtient

$$(13) \quad \begin{cases} \int fx\, \varphi x\, \theta x\, dx \\ \quad = \sum_{n=1}^{n=n} \frac{\int fx\, \psi_{n-1} x\, \theta x\, dx \int \varphi x\, \psi_{n-1} x\, \theta x\, dx}{\int \psi_{n-1}^2 x\, \theta x\, dx} + \frac{\mathrm{I}_{n-1}(f, \varphi)}{(n+1)\mathrm{I}_{n-1}}, \end{cases}$$

convenant de poser $\psi_0 x = 1$.

C'est précisément la formule de M. Tchebychef avec le terme complémentaire

$$(14) \qquad \mathrm{R}_n = \frac{\mathrm{I}_{n-1}(f, \varphi)}{(n+1)\mathrm{I}_{n-1}}.$$

Avant d'aller plus loin, nous allons simplifier l'expression de R_n. Considérant les déterminants $\Delta_{n-1}(f)$, $\Delta_{n-1}(\varphi)$, et remarquant que la fonction entière $\psi_{n-1}x$ peut se mettre sous la forme

$$\psi_{n-1}x = C_{n-1}x^{n-1} + a_0\psi_{n-2}x + a_1\psi_{n-3}x + \ldots + a_{n-2},$$

C_{n-1}, a_0, a_1 ... a_{n-2} étant des constantes. Nous pouvons remplacer les premières lignes de ces déterminants par

$$C_{n-1}x_1^{n-1} \quad C_{n-1}x_2^{n-1} \quad \ldots \quad C_{n-1}x_{n+1}^{n-1}$$

en vertu des propriétés connues des déterminants; en général, la ligne

$$\psi_m x_1 \quad \psi_m x_2 \quad \ldots \quad \psi_m x_{n+1}$$

pourra être remplacée par

$$C_m x_1^m \quad C_m x_2^m \quad \ldots \quad C_m x_{n+1}^m,$$

C_m étant le coefficient de x^m dans $\psi_m x$. En faisant la même réduction des éléments dans le déterminant Δ_{n-1} et divisant les deux membres de la fraction (14) par $(C_{n-1}.\ C_{n-2}\ldots C_1)^2$, on aura

$$(15) \qquad R_n = \frac{\displaystyle\int^{(n+1)} D_{n-1}(f)\, D_{n-1}(\varphi) \prod_1^{n+1} \theta x_i\, dx_i}{\displaystyle (n+1)\int^{(n)} D_{n-1} \prod_1^{n} \theta x_i\, dx_i},$$

où

$$D_{n-1}(f) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_{n+1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} \\ fx_1 & fx_2 & \ldots & fx_{n+1} \end{vmatrix},$$

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)\ldots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1}).$$

Passant à la démonstration des propriétés de R_n, nous allons d'abord établir à l'égard des déterminants de la forme $D_{n-1}(f)$ la proposition très simple qui suit :

Si $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ désignent des quantités indépendantes et fx une fonction quelconque, continue pour toutes les valeurs de x, comprises entre la plus petite et la plus grande des quantités $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, on aura

$$(16)\quad D_{n-1}(f) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_{n+1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} \\ fx_1 & fx_2 & \ldots & fx_{n+1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)\ldots(x_{n+1} - x_1)(x_3 - x_2)\ldots(x_{n+1} - x_1) f^{(n)}(\xi)}{1.2\ldots n}$$

ou

$$D_{n-1}(f) = \frac{D_n . f^{(n)}(\xi)}{1.2\ldots n}$$

$f^{(n)}x$ étant la dérivée $n^{\text{ième}}$ de fx, et ξ un nombre moyen entre la plus grande et la plus petite des quantités

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}.$$

Cette proposition est évidente pour $n = 1$, car

$$D_0(f) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ fx_1 & fx_2 \end{vmatrix} = fx_2 - fx_1 = (x_2 - x_1) f^1 \xi.$$

Donc, pour nous assurer de l'exactitude de la proposition énoncée, il suffit de prouver que, étant supposée vraie pour une certaine valeur de n, elle le sera aussi pour la valeur de n immédiatement supérieure. Suivant cette voie, transformons $D_{n-1}(f)$ comme il suit :

$$D_{n-1}(f) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_{n+1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} \\ fx_1 & fx_2 & \ldots & fx_{n+1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_{n+1} - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 & \dots & x_{n+1}^2 - x_1^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & x_3^{n-1} - x_1^{n-1} & \dots & x_{n+1}^{n-1} - x_1^{n-1} \\ fx_2 - fx_1 & fx_3 - fx_1 & \dots & fx_{n+1} - fx_1 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1 \dots (x_{n+1} - x_1)$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_2 + x_1 & \dots & x_{n+1} + x_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-2} + x_1 x_2^{n-3} + \dots x_1^{n-2} & \dots & x_{n+1}^{n-2} + x_1 x_{n+1}^{n-3} + \dots + x_1^{n-2} \\ \dfrac{fx_2 - fx_1}{x_2 - x_1} & \dots & \dfrac{fx_{n+1} - fx_1}{x_{n+1} - x_1} \end{vmatrix},$$

ou, retranchant des éléments de chaque ligne les éléments correspondants des lignes précédentes, multipliés par les mêmes facteurs, et désignant par Fx la fonction

$$\frac{fx - fx_1}{x - x_1},$$

nous aurons

$$D_{n-1}(f) = (x_2 - x_1)\dots(x_{n+1} - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_{n+1}^{n-2} \\ Fx_2 & Fx_3 & \dots & Fx_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Supposant la proposition énoncée vraie pour le déterminant d'ordre n qui figure dans la formule précédente, on aura

$$(17)\quad D_{n-1}(f) = \frac{(x_2 - x_1)\dots(x_{n+1} - x_1)(x_3 - x_2)\dots(x_{n+1} - x_n) F^{(n-1)}\eta}{1.2\dots(n-1)},$$

η étant un nombre moyen entre les quantités $x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$.

D'ailleurs,

$$Fx = (fx - fx_1)(x - x_1)^{-1}.$$

Donc, appliquant la formule de Leibnitz, on aura

$$\begin{aligned} F^{(n-1)} x &= (x - x_1)^{-1} f^{(n-1)} x \\ &\quad - (n-1)(x - x_1)^{-2} f^{(n-2)} x \\ &\quad + (n-1)(n-2)(x - x_1)^{-3} f^{(n-3)} x \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} 1.2\dots(n-1)(x - x_1)^{-n}(fx - fx_1) \\ &= 1.2\dots(n-1) \frac{fx_1 - fx - (x_1 - x) f'_x - \dots - (x_1 - x)^{n-1} f^{n-1} x}{(x_1 - x)^n} \\ &= \frac{1.2\dots(n-1) f^{(n)}\zeta}{1.2\dots n}, \end{aligned}$$

ζ étant un nombre moyen entre x_1 et x.

Par conséquent, désignant par ξ un nombre intermédiaire entre η et x_1, on aura

$$\frac{F^{(n-1)}(\eta)}{1.2\ldots(n-1)} = \frac{f^{(n)}\xi}{1.2\ldots n},$$

et la formule (17) donnera

$$\begin{aligned} D_{n-1}(f) &= \frac{(x_2-x_1)\ldots(x_{n+1}-x_1)(x_3-x_2)\ldots(x_{n+1}-x_1)f^{(n)}\xi}{1.2\ldots n}, \\ &= \frac{D_n f^{(n)}\xi}{1.2\ldots n}, \end{aligned}$$

ce qui démontre la formule (16).

Cette formule nous permet de mettre l'expression de R_n, donnée par la formule (15), sous la forme

$$(18) \qquad R_n = \frac{\int^{(n+1)} D_n^2 f^{(n)}\xi\, \varphi^{(n)}\xi_1 \prod_1^{n+1} \theta x_i\, dx_i}{(1.2\ldots n)^2(n+1)\int^{(n)} D_{n-1}^2 \prod_1^{n} \theta x_i\, dx_i}$$

ξ, ξ_1 étant des nombres variables, restant entre les limites d'intégration. La seconde des deux propriétés de R_n, mentionnées au commencement de la note, est évidente d'après la forme même sous laquelle se présente R_n dans la formule (18).

Pour avoir la première, remarquons que, d'après la formule (18), on voit que la valeur absolue de R_n ne surpasse jamais la quantité

$$(19) \qquad Q^2 AB = \frac{\int^{(n+1)} D_n^2 \prod_1^{n+1} \theta x_i\, dx_i}{(1.2\ldots n)^2(n+1)\int^{(n)} D_{n-1}^2 \prod_1^{n} \theta x_i\, dx_i} AB.$$

A, B étant les plus grandes valeurs absolues de $f^{(n)}x$, $\varphi^{(n)}x$ entre les limites d'intégration. D'un autre côté, si l'on pose dans la formule (13) $fx = \varphi x = \psi_n x$, tous les termes du second membre, à l'exception de R_n, se réduisent à zéro; d'après la propriété fondamentale des fonctions $\psi_m x$, R_n se réduit à

$$Q^2(1.2\ldots n\, C_n)^2$$

à cause de

$$f^{(n)}x = \varphi^{(n)}x\,\psi = \psi^n x = 1.2\ldots n\,C_n,$$

et la formule (13) donnera

$$\int \psi_n^2\, x\,\theta x\, dx = Q^2(1.2\ldots n.C_n)^2;$$

par conséquent, la quantité (19) prend la forme

$$\frac{\int \psi_n^2\, x\,\theta x\, dx}{(1.2\ldots n.C_n)^2}\,AB = \frac{\int \psi_n^2\, x\,\theta x\, dx}{\left(\frac{d^n\psi_n x}{dx^n}\right)^2}\,AB,$$

ce qui démontre la première propriété de R_n.