

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

H. EDLER

**Achèvement de la démonstration géométrique
élémentaire donnée par Steiner pour ce théorème
: « le cercle possède la plus grande parmi toutes
les figures planes isopérimètres »**

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2^e série,
tome 7, n° 1 (1883), p. 198-204

http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_198_1

© Gauthier-Villars, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

de Cauchy.

MÉLANGES.

**ACHÈVEMENT DE LA DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE ÉLÉMENTAIRE
DONNÉE PAR STEINER POUR CE THÉORÈME : « LE CERCLE POSSÈDE
LA PLUS GRANDE PARMİ TOUTES LES FIGURES PLANES ISOPÉRI-
MÈTRES ; »**

PAR M. H. EDLER, DE HALLE.

(Présenté à la Société royale de Göttingue par H.-A. Schwarz.)

Traduction par M. l'abbé PANTONNIER.

Une grande partie des recherches que Steiner a publiées dans deux Mémoires insérés dans le XXIV^e volume du *Journal de Crelle* sous ce titre : « Sur le maximum et le minimum des figures dans le

plan, sur la sphère et dans l'espace en général », repose sur ce théorème que de toutes les figures planes de même périmètre le cercle a la plus grande surface.

On a élevé contre les démonstrations géométriques élémentaires indirectes que Steiner a données de ce théorème fondamental l'objection formelle qu'elles reposent toutes sans exception sur une hypothèse non démontrée. En effet, chacune de ces démonstrations repose sur l'une ou l'autre des hypothèses suivantes :

1^o De toutes les figures planes de même périmètre *il y en a une* dont la surface est maximum ;

2^o De toutes les figures planes de même surface *il y en a une* dont le périmètre est minimum.

Ces hypothèses restent sans démonstration. De plus les démonstrations de Steiner restent sujettes à la même critique que Steiner a dirigée contre la démonstration donnée par Lhuilier pour le théorème que, de tous les triangles de même périmètre, le triangle équilatéral a la plus grande surface.

Pour ce dernier théorème, en montrant directement qu'un triangle équilatéral a une plus grande surface que tout autre triangle de même périmètre, Steiner en a donné une démonstration remarquable de rigueur et de simplicité, mais il a fait aussi désirer pour le théorème fondamental se rapportant au cercle énoncé plus haut une démonstration géométrique élémentaire directe d'une simplicité analogue et d'une égale rigueur.

Par une démonstration publiée dans le X^e Volume du *Journal pour l'enseignement des Sciences mathématiques et naturelles* (1879, p. 245), j'ai essayé de satisfaire aux conditions de rigueur imposées à une telle démonstration.

Cette démonstration repose essentiellement sur ceci : qu'il est toujours possible de transformer par des constructions géométriques un polygone irrégulier terminé par 2ⁿ côtés rectilignes en un polygone régulier d'un même nombre de côtés, et de même périmètre, mais comprenant une plus grande surface. La surface du polygone régulier est alors comparée à celle du cercle de même périmètre au moyen de considérations géométriques simples.

En continuant à m'occuper de ce sujet, j'ai trouvé que la démonstration était susceptible d'être notablement simplifiée tout en conservant l'idée fondamentale, de sorte qu'après cette simplification

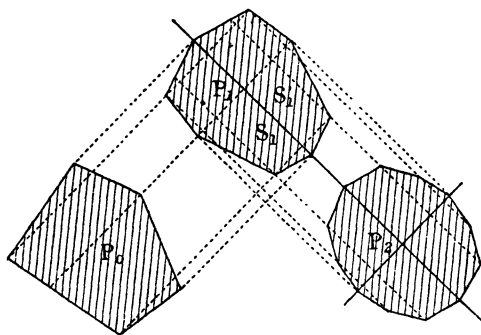
elle entre complètement dans l'ordre des idées qui jouent un rôle fondamental dans les recherches de Steiner et qu'elle peut être considérée comme une continuation, un complément des considérations se rapportant au cinquième mode de démonstration de Steiner.

C'est cette démonstration simplifiée que je vais me permettre d'exposer.

1. Étant donné un polygone irrégulier quelconque terminé par n côtés rectilignes, on peut construire un polygone régulier de 2^{n-1} côtés au plus de *moindre périmètre* et dont la surface soit supérieure ou au moins égale à celle du polygone proposé.

Démonstration. — Qu'on imagine, menées par les n sommets du polygone donné P_0 , n droites parallèles entre elles par lesquelles la surface du polygone est divisée en $(n-1)$ trapèzes parallèles dont deux sont remplacés par des triangles. Si l'on transforme ces trapèzes parallèles d'après la méthode de Steiner dans le cinquième mode de démonstration (*Œuvres de Steiner*, t. II, p. 264), en conservant la longueur des côtés parallèles, leur distance, par un simple glissement le long des parallèles sur lesquelles ils se trouvent de manière à obtenir des trapèzes parallèles ayant un axe de symétrie, de tous ces trapèzes symétriques on forme un nouveau polygone P_1 (*fig. 1*).

Fig. 1.

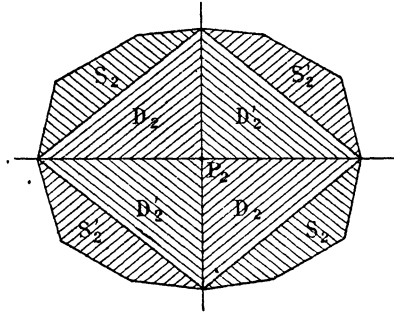


Le polygone P_1 a la même surface que P_0 , mais un périmètre moindre : il a $2(n-1)$ côtés et est divisé par son axe de symétrie en deux moitiés symétriques, les segments de polygone S_1 et S'_1 .

De la même manière qu'on a fait dériver le polygone P_1 du polygone P_0 , faisons dériver du polygone P_1 un polygone P_2 en menant par les sommets de P_1 des parallèles à l'axe de symétrie.

Le polygone P_2 a même surface que P_0 , mais un périmètre moindre. Il a au plus $4(n - 2)$ côtés, et est séparé par ses deux

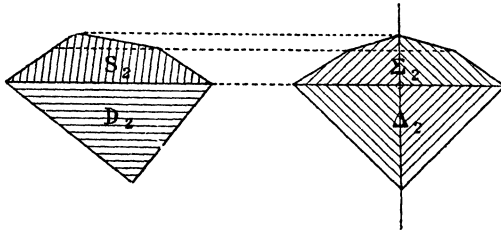
Fig. 2.



axes de symétrie en quatre parties symétriques deux à deux (*fig. 2*).

Chacune de ces *parties* a au plus $(n - 2)$ côtés communs avec le périmètre de P_2 . Considérons-en une seulement (*fig. 3*). Par

Fig. 3.



une diagonale passant par les deux sommets se trouvant sur les axes de symétrie on sépare la surface de ce segment de polygone en deux parties, à savoir un triangle rectangle D_2 et un segment polygonal S_2 . On peut, en conservant son hypoténuse, changer le triangle rectangle D_2 en un autre triangle rectangle isocèle Δ_2 qui aura une surface plus grande que D_2 , ou égale dans le cas où D_2 lui-même était isocèle.

Changeons le segment polygonal en choisissant l'hypoténuse du triangle D_2 pour base en menant par les sommets de S_2 des parallèles à cette hypoténuse, de manière à avoir un segment polygonal Σ_2 de même surface, de même base, possédant un axe de symétrie perpendiculaire à cette base. Ce segment polygonal en dehors de la base a au plus $2(n-3)$ côtés, et son périmètre n'est pas en tout cas plus grand que celui de S_2 . Si maintenant de Δ_2 et de Σ_2 on forme le quart d'un polygone P_3 , comme D_2 et S_2 forment le quart du polygone P_2 , on obtient un polygone P_3 de $2^3(n-3)$ côtés au plus qui, ayant un périmètre moindre que P_0 , a une plus grande surface ou au moins une surface égale.

Le polygone P_3 a quatre axes de symétrie, dont deux consécutifs, forment l'angle $\frac{1}{4}\pi$; il est divisé par ces quatre axes en *huit* parties symétriques. Divisons ensuite une de ces huit parties du polygone par une diagonale en un triangle D_3 ayant cette diagonale pour base et un angle au sommet égal à $\frac{\pi}{4}$ et en un segment polygonal S_3 qui, outre sa base commune avec le triangle D_3 , a au plus $(n-3)$ côtés. Transformons le triangle D_3 en conservant sa base et l'angle au sommet en un triangle isocèle Δ_3 . Transformons de même le segment polygonal S_3 en un segment polygonal Σ_3 de même base, de même surface que S_3 et d'un périmètre moindre ou au plus égal, possédant un axe de symétrie perpendiculaire sur sa base, et ayant, outre cette base, au plus $2(n-4)$ côtés.

De Σ_3 et de Δ_3 formons la huitième partie d'un nouveau polygone P_4 qui, avec un périmètre moindre que P_0 , a une surface plus grande ou au moins égale, qui possède huit axes de symétrie dont deux consécutifs font entre eux un angle égal à $\frac{1}{8}\pi$. Le nombre des côtés de ce polygone est au plus $2^4(n-4)$.

On peut continuer de cette manière. Le succès (étonnant) de cette construction consiste en ceci que l'opération, dans un certain sens, se termine nécessairement. A chaque opération, en effet, dans l'expression donnant le nombre des côtés du polygone, l'un des facteurs est doublé, l'autre diminuant d'une unité au moins et ne pouvant devenir plus petit que 1.

Après n opérations au plus la construction indiquée conduit donc à un polygone régulier P ayant au plus 2^{n-1} côtés qui avec un

moindre périmètre a une surface supérieure ou au moins égale à celle du polygone donné P_0 .

Le théorème énoncé est par suite démontré.

2. Tout polygone régulier a une surface moindre que le cercle de même périmètre.

Démonstration. — Soit un polygone régulier P de périmètre U , soit R le rayon du cercle inscrit dans ce polygone.

Soit un cercle K dont le rayon sera R' qui ait le périmètre U et soit U' le périmètre du polygone régulier P' , circonscrit au cercle K et du même nombre de côtés que P .

De la similitude des polygones P et P' il résulte

$$\frac{U}{U'} = \frac{R}{R'}.$$

Désignons par P , K , P' les surfaces de ces trois figures, on a

$$P = \frac{1}{2} RU, \quad K = \frac{1}{2} R'U, \quad P' = \frac{1}{2} R'U'.$$

On a d'ailleurs $P' > k$, puisque la surface k est une partie de la surface P' . Par suite, on a ainsi $U' > U$, d'où aussi $R' > R$, donc $K > P$.

3. Des deux théorèmes I et II réunis, il résulte que tout polygone plan P_0 , limité par des côtés rectilignes, a une surface moindre que le cercle de même périmètre.

Si l'on veut établir un théorème analogue pour une figure plane quelconque, limitée en tout ou en partie par des lignes courbes, on peut continuer comme il suit.

Changeons, d'après une des méthodes données par Steiner, la figure F , qui d'après l'hypothèse n'est pas un cercle, en une autre figure F' de même périmètre, mais *de plus grande surface* que la figure F . Construisons ensuite un polygone rectiligne P_0 dont les sommets soient sur le périmètre de la figure F' dont les côtés soient par suite des cordes de la ligne limitant F' , et dont la surface diffère de la surface de F' *de moins* de l'excès de la surface F' sur la surface F . Le polygone P_0 a alors sous un moindre périmètre une plus grande surface que F . Par suite du théorème précédent, le

polygone P_0 a une surface inférieure à celle du cercle de même périmètre, et à plus forte raison une surface inférieure à celle du cercle de même périmètre que la figure F . Par suite, la figure F dont la surface est inférieure à celle du polygone P_0 a une moindre surface que le cercle de même périmètre.

Dès lors le théorème énoncé au commencement est ainsi directement démontré.

A. P.