BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 7, nº 1 (1883), p. 193-198

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_193_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

V. ERMAKOF. — INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE LA MÉCANIQUE. — INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

PRÉFACE.

Dans cet Ouvrage, je me propose principalement de parler des méthodes d'intégration des équations qu'on nomme *canoniques*. Il n'existe, à ma connaissance, aucun Traité complet où cette question soit traitée conformément aux exigences de la Science moderne; c'est ce qui m'a engagé à faire paraître cet Ouvrage.

En outre, selon mon avis, les géomètres qui ont traité la question d'intégration des équations canoniques ont suivi une méthode d'exposition incommode, simple au début, mais qui présente de grandes difficultés dans la suite. Au lieu de commencer directement par traiter l'intégration des équations canoniques, Jacobi, Bour, Serret, Bertrand et d'autres géomètres se sont occupés exclusivement de l'intégration des équations différentielles du premier ordre aux dérivées partielles; car l'intégration des équations canoniques peut être ramenée à l'intégration d'une équation différentielle aux dérivées partielles.

Il m'a semblé qu'il valait mieux commencer par l'exposition de la théorie complète de l'intégration des équations canoniques; on peut alors, en quelques mots, montrer de quelle manière on peut déduire d'un système d'intégrales des équations canoniques une intégrale d'une équation du premier ordre aux dérivées partielles; c'est cette méthode que j'emploie dans cet Ouvrage. Jacobi et Bour, qui ont choisi une voie commode, n'ont pu donner une théorie complète de l'intégration des équations simultanées du premier ordre aux dérivées partielles. Et il n'y a pas longtemps que Lie et Mayer, avec une difficulté assez grande, ont démontré que l'intégration de m équations simultanées du premier ordre aux dérivées partielles peut être ramenée à l'intégration d'une seule équation différentielle avec un nombre des variables différant du premier de $m-1$. Le théorème de Lie et Mayer est d'une grande importance pour les équations canoniques; en voici le motif. Jacobi a démontré que l'intégration des équations canoniques avec $2n+1$ variables peut être ramenée à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles avec $n+1$ variables, et réciproquement.

De plus, Jacobi a démontré que, ayant obtenu pour les équations canoniques m intégrales qui satisfont à certaines conditions, on peut ramener l'intégration des équations canoniques à l'intégration de $m+1$ équations aux dérivées partielles avec $n+1$ variables. Jacobi s'arrêta à ce théorème et n'en tira pas d'autres conclusions. De cette manière, Jacobi avait augmenté les difficultés du problème; car, au lieu d'une équation avec $n+1$ variables, nous avons à intégrer $m+1$ équations aux dérivées partielles ayant le même nombre de variables. Lie et Mayer ont fait disparaître ce malentendu, car ils ont démontré que l'intégration de $m+1$ équations aux dérivées partielles avec $n+1$ variables peut être ramenée à l'intégration d'une seule équation avec $n-m+1$ variables. Nous avons dit plus haut que Jacobi donne une méthode pour ramener l'intégration d'une équation aux dérivées partielles avec $n-m+1$ variables à l'intégration des équations canoniques avec $2n-2m+1$ variables.

En employant une voie assez longue, nous parvenons au résultat suivant :

Si nous avons m intégrales qui satisfont à certaines conditions, alors le nombre des variables dans les équations canoniques peut être diminué de $2m$. Ce théorème est démontré dans ce Mémoire sans employer les équations aux dérivées partielles.

On sait que Cauchy a posé et résolu le problème suivant :

Intégrer une équation aux dérivées partielles du premier ordre, de telle manière que la fonction cherchée pour une valeur particulière d'une variable soit égale à une fonction donnée des autres variables.

Pour résoudre ce problème, Cauchy a donné une méthode différente de la méthode de Jacobi.

Jusqu'à présent, personne n'est parvenu à perfectionner la méthode de Jacobi de manière à l'appliquer directement à la résolution du problème de Cauchy. Dans ce Mémoire, je démontre qu'en employant ma méthode, qui n'est autre chose que la méthode de Jacobi appliquée exclusivement aux équations canoniques, le problème de Cauchy se ramène à l'élimination des variables entre certaines équations. Le problème de Cauchy est surtout simplifié dans ma méthode par l'introduction d'une nouvelle notion : « l'intégrale principale des équations aux dérivées partielles du premier ordre. » Je montre de quelle manière on peut obtenir cette intégrale. On peut aussi obtenir sans difficulté l'intégrale principale des équations aux dérivées partielles, si le système complet des intégrales des équations canoniques est connu.

Ainsi ce Mémoire présente une théorie complète et systématique de l'intégration des équations canoniques et des équations aux dérivées partielles de premier ordre.

Je donne ensuite une théorie abrégée de l'intégration des systèmes des équations canoniques simultanées. Je me sers des systèmes simultanés comme un moyen de démontrer quelques théorèmes qui se rapportent à l'intégration d'un système d'équations canoniques.

On sait que la plupart des équations de la Mécanique ont quelques intégrales qui ne dépendent pas des forces; ces intégrales sont les équations des aires et les équations du mouvement du centre de gravité.

On sait, en outre, que ces équations ne dépendent pas de la position des axes de coordonnées, c'est-à-dire qu'ils conservent leurs formes si nous les rapportons à des axes des coordonnées arbitraires.

Ceci donne naturellement naissance à la question suivante : Ces deux propriétés des équations de la Mécanique ne sont-elles pas liées l'une à l'autre étroitement?

Je réponds à cette question affirmativement, et je démontre, dans le § 38, un théorème plus général : « Si une équation canonique peut être transformée dans une autre forme aussi canonique, si les formules de transformation contiennent m constantes arbitraires qui n'entrent explicitement ni dans les équations données, ni dans les transformées, alors, en se servant des quadratures, on peut obtenir m intégrales des équations données. » Ces intégrales s'obtiennent par des formules de transformation ; ainsi elles seront des intégrales communes pour toutes les équations canoniques, lesquelles, étant transformées à l'aide des mêmes formules, ne contiennent de constantes arbitraires ni dans la forme initiale, ni dans la forme transformée. En exposant une méthode tout à fait nouvelle pour l'intégration des équations canoniques, je suis loin de penser que mon exposition sera à l'abri de toute objection. J'espère que mes lecteurs me pardonneront s'ils trouvent dans mon travail quelques parties un peu obscures. J'ai tâché d'exposer d'une manière brève et concise les théorèmes connus.

En exposant les méthodes pour trouver l'intégrale singulière et l'intégrale générale de l'intégrale complète, j'évite d'employer le déterminant fonctionnel, ce qui rend mon exposition plus brève et plus claire.

Voici le sommaire de cet Ouvrage :

Dans les § 1 à 7, j'expose les méthodes d'intégration des équations différentielles simultanées simples et des équations linéaires aux dérivées partielles. Les théorèmes démontrés dans ces paragraphes servent d'introduction à l'intégration des équations canoniques.

Dans le § 8, je donne la condition à laquelle doit satisfaire l'intégrale des équations canoniques, et j'introduis le symbole de Poisson.

Dans le § 9, je démontre une identité donnée pour la première fois par Donkin.

Dans le § 10, je démontre le théorème de Poisson, lequel donne le moyen, à l'aide de deux intégrales, d'obtenir la troisième.

Dans les § 11 à 14, je donne les formules les plus générales pour la transformation des équations canoniques, d'une telle manière que les équations transformées conservent aussi la forme canonique.

Dans le § 15, je démontre que l'intégration des équations canoniques peut être ramenée à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Dans les § 16 et 17, on trouve quelques conséquences des formules de transformation des équations canoniques.

Dans le § 18, je démontre une propriété particulière des intégrales des équations canoniques.

Dans le § 19, je démontre que de la moitié du nombre des intégrales qui satisfont à certaines conditions, on peut obtenir les autres intégrales des équations canoniques, de même que l'intégrale de l'équation différentielle aux dérivées partielles.

Dans le § 20, je démontre une particularité d'un système des intégrales canoniques.

Dans le § 21, je prouve l'existence d'une infinité des intégrales canoniques.

Dans le § 22, je donne les conditions de l'existence simultanée de quelques systèmes d'équations canoniques.

Dans le § 23, on trouve, pour les systèmes des équations canoniques simultanées, un théorème analogue à ce qui est donné dans le § 13 pour un seul système.

Dans le § 24, je prouve que l'intégration de m systèmes simultanés des équations canoniques avec $2n+m$ variables peut être ramenée à l'intégration d'un système des équations canoniques avec $2n+1$ variables.

Dans le § 25, on démontre une particularité des intégrales des équations canoniques.

Dans les § 26, 27 et 28, on expose la méthode de Jacobi pour obtenir des intégrales de telle sorte que les parenthèses de Poisson, formées avec elles, deviennent identiquement égales à zéro.

Dans le § 29, on démontre que, ayant m intégrales satisfaisant à quelques conditions, le nombre des variables dans les équations canoniques peut être diminué de $2m$.

Dans les § 30 et 31, on donne une autre méthode, un peu différente de la précédente, pour diminuer le nombre des variables.

Dans les § 32 et 33, nous analysons quelques cas particuliers des équations canoniques.

Dans le § 34, se trouve exposée la méthode de la variation des constantes arbitraires dans l'intégration des équations de la perturbation.

Dans le § 35, je démontre que, si les formules de transformation des équations canoniques contiennent m constantes arbitraires, lesquelles n'entrent ni dans les équations données ni dans les équations obtenues, alors, à l'aide des quadratures, on peut trouver m intégrales indépendantes des formes des équations données.

Dans les autres paragraphes, je démontre de quelle manière, d'un système complet d'intégrales des équations canoniques, on peut obtenir les différentes intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Dans le § 36 sont données les formules générales de la transformation des équations aux dérivées partielles.

Dans le § 37, je démontre que chaque équation aux dérivécs partielles peut être transformée de telle manière que l'équation transformée ne contiendra pas la fonction cherchée, mais seulement ses dérivées partielles.

Dans le § 38, nous exposons la méthode pour obtenir l'intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles.

Dans le § 39, nous exposons les conditions de l'existence simultanée de certaines équations aux dérivées partielles avec une seule fonction cherchée.

Dans le § 40, nous donnons la méthode pour obtenir une intégrale complète de quelques équations aux dérivées partielles.

Dans les § 41 et 42, je montre de quelle manière on peut déduire, de l'intégrale complète, l'intégrale singulière et générale.

Dans le § 43, je montre que l'intégrale complète peut être représentée sous différentes formes, et je donne une méthode pour obtenir l'intégrale principale.

Dans le § 44, j'expose la méthode pour résoudre le problème de Cauchy.