BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

T.-J. STIELTJES

Sur la théorie des résidus biquadratiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 7, nº 1 (1883), p. 139-141

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_139_1>

SUR LA THÉORIE DES RÉSIDUS BIQUADRATIQUES;

PAR M. T.-J. STIELTJES.

(Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite.)

Vous savez que, dans son second Mémoire, Gauss a déterminé le caractère biquadratique du nombre $1+i$ par rapport à un nombre premier M, ou, d'après Jacobi, la valeur du symbole $\left(\left(\frac{1+i}{M}\right)\right)$. Cette détermination se fonde sur le théorème de l'art. **71**, théorème analogue à celui qui sert de fondement à la troisième et à la cinquième des démonstrations de Gauss, de la loi de réciprocité pour les résidus quadratiques.

Or j'ai remarqué qu'on peut obtenir la valeur de $\left(\left(\frac{1+i}{M}\right)\right)$ à l'aide de raisonnements complètement analogues à ceux que Gauss développe dans son *premier* Mémoire, pour obtenir le caractère du nombre 2 dans la théorie réelle.

Il suffira de considérer le cas

$$M = a + bi,\quad a \equiv 1 \pmod 4),$$
$$b \equiv 0,\quad \mu = aa + bb = 8n + 1.$$

D'après la valeur du symbole $\left(\left(\frac{k}{M}\right)\right)$, on peut diviser les $\mu - 1$ nombres incongrus k, non divisibles par M, en quatre classes, savoir :

(A) $\quad \alpha, \alpha', \alpha'' \ldots \quad \left(\left(\frac{\alpha}{M}\right)\right) = 1,$

(B) $\quad \beta, \beta', \beta'' \ldots \quad \left(\left(\frac{\beta}{M}\right)\right) = i,$

(C) $\quad \gamma, \gamma', \gamma'' \ldots \quad \left(\left(\frac{\gamma}{M}\right)\right) = -1,$

(D) $\quad \delta, \delta', \delta'' \ldots \quad \left(\left(\frac{\delta}{M}\right)\right) = -i.$

Alors, il est évident qu'on a identiquement

$$(x - \delta)(x - \delta')(x - \delta'')\ldots \equiv x^{\frac{\mu-1}{4}} + i \pmod{M},$$

d'où l'on tire, en posant $x = -1$,

$$(1 + \delta)(1 + \delta')(1 + \delta'')\ldots \equiv 1 + i \pmod{M};$$

ce qui fait voir qu'il suffira de savoir combien des nombres $1 + \delta, 1 + \delta', 1 + \delta'', \ldots$ appartiennent aux classes (A), (B), (C), (D).

Si l'on désigne maintenant par

$$(S)\qquad \begin{cases} (0,0)\ (0,1)\ (0,2)\ (0,3) \\ (1,0)\ (1,1)\ (1,2)\ (1,3) \\ (2,0)\ (2,1)\ (2,2)\ (2,3) \\ (3,0)\ (3,1)\ (3,2)\ (3,3) \end{cases}$$

combien des nombres

$$1 + \alpha,\ 1 + \alpha',\ 1 + \alpha'' \ldots,$$
$$1 + \beta,\ 1 + \beta',\ 1 + \beta'' \ldots,$$
$$1 + \gamma,\ 1 + \gamma',\ 1 + \gamma'' \ldots,$$
$$1 + \delta,\ 1 + \delta',\ 1 + \delta'' \ldots$$

appartiennent à (A), (B), (C), (D), on pourra déterminer les valeurs de tous ces nombres (i, k) à l'aide des considérations employées par Gauss dans son *premier* Mémoire.

Dans le cas actuel, on trouve que le tableau (S) a la forme suivante :

$$\begin{array}{llll} k & j & k & l \\ j & l & m & m \\ k & m & k & m \\ l & m & m & j \end{array} \qquad \begin{aligned} 8h &= 4n - 3a - 5, \\ 8j &= 4n + a - 2b - 1, \\ 8k &= 4n + a - 1, \\ 8l &= 4n + a + 2b - 1, \\ 8m &= 4n - a + 1. \end{aligned} \qquad \left(n = \frac{aa + bb - 1}{8}\right).$$

On a maintenant

$$\left(\left(\frac{1+i}{M}\right)\right) = i^{3m+3j} = i^{-m-j} \qquad (-m - j = -n + \tfrac{1}{4}b).$$

Or (mod. 4),

$$\frac{a^2-1}{8} \equiv \frac{-a+1}{4},$$

$$\frac{b^2}{8} \equiv \pm \tfrac{1}{2} b;$$

donc

$$n \equiv \tfrac{1}{4}(-a + 1 + 2b),$$

$$-m - j = \tfrac{1}{4}(a - 1 - b).$$

Enfin

$$\left(\left(\frac{1+i}{M}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(a-1-b)}.$$

Les autres cas peuvent se traiter d'une manière analogue.

La même méthode réussit pour déterminer le caractère cubique de $1 - \rho$, et encore pour trouver les théorèmes sur le nombre 2 dans la théorie des résidus quadratiques. Dans ce dernier cas, après avoir déterminé les nombres (i, k), il n'est pas nécessaire de recourir à ces congruences identiques, comme plus haut celle-ci :

$$(x - \delta)(x - \delta')(x - \delta'' \ldots \equiv x^{\frac{\mu-1}{4}} + i \qquad (\text{mod. } M).$$

Mais on arrive au but par une considération arithmétique, qui ne diffère pas de celle que Gauss a employée dans son premier Mémoire pour le nombre 2, dans la théorie des résidus biquadratiques. On a, de cette manière, une démonstration assez simple et purement arithmétique de ces théorèmes :

$$\left(\tfrac{2}{p}\right) = +1, \quad p = 8n \pm 1,$$

$$\left(\tfrac{2}{p}\right) = -1, \quad p = 8n \pm 3.$$