BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Première partie, comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 6, nº 1 (1882), p. 5-14

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1882_2_6_1_5_0>

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Catalogue de modèles pour l'enseignement des Mathématiques supérieures, en vente chez L. Brill, à Darmstadt, 1881.

Cette collection, contenant 86 numéros, renferme 106 modèles, destinés à l'enseignement, dans les écoles supérieures, des Mathématiques, de la Physique et de la Mécanique. Souvent on s'est demandé s'il était utile d'employer des dessins et des modèles dans l'enseignement mathématique. La réponse est bien différente suivant le degré que l'on veut atteindre et le but qu'on se propose. De plus, cette question n'avait jusqu'ici aucune signification pratique, en ce qui concerne les Mathématiques supérieures, parce que, en Allemagne du moins, il n'y avait pas de grandes collections mathématiques appropriées à l'enseignement supérieur. Et pourtant toute personne, quelle que soit son opinion sur la question posée précédemment, voudra bien convenir que le modèle fournit non seulement à l'élève, mais aussi au professeur, un élément plein de vie, saisissant, alors qu'après un calcul pénible ou après une discussion ardue le résultat peut être présenté sous une forme réelle, concrète et élégante. Même pour le travailleur, le modèle peut soulever maintes questions, qui, sans une représentation plastique, ne se seraient pas présentées.

C'est cette certitude qui a engagé l'Institut Mathématique de l'École Technique supérieure de Munich, d'abord sous la direction de MM. Klein et Brill, maintenant sous celle de M. Brill seulement, à faire construire par les étudiants les modèles des différentes surfaces qui se présentaient dans les problèmes dont on s'occupait dans le séminaire. Comme nous le disions en publiant notre première série : « En faisant construire ces modèles, l'idée principale était d'exciter les étudiants qui assistaient aux conférences de Mathématiques à pousser jusqu'au bout la discussion de chacun des problèmes qui se présentaient et par là même à aller plus avant dans l'étude de ces questions. Les questions auxquelles se rattachent les modèles sont prises à différents cours faits à l'École Technique supérieure. On reconnaîtra certainement qu'il était utile de publier une telle collection, que c'était rendre un service que de la répandre partout. De plus, ces modèles offrent, en bien des cas, beaucoup de particularités nouvelles et intéressantes ; les notes qui y sont ajoutées présentent maintes fois des recherches originales. »

C'est ainsi que cinq séries de modèles préparés à l'École Technique supérieure de Munich se trouvent maintenant dans le catalogue de l'éditeur. Parmi les séries qui ont une autre origine, nous avons à citer la belle et riche collection des types des surfaces du troisième ordre et de leurs surfaces hessiennes, faite par Rodenberg à Darmstadt, et aussi différentes représentations élégantes des surfaces du second ordre. Nous allons parler d'abord de ces dernières surfaces.

Si la plupart des modèles du catalogue ont nécessité des études préliminaires profondes, des recherches géométriques toutes spéciales, nous devons dire cependant que l'ensemble des *surfaces du second degré* constitue une partie importante de notre collection. On a déjà, dans le *Bulletin,* parlé du modèle *en carton* de l'ellipsoïde. La série à laquelle il appartient contient tous les types de surfaces du second ordre, représentés de la même manière : on prépare d'abord avec du carton une série des sections circulaires de la surface, et on les réunit en sorte que, lorsque l'on fait varier l'angle des deux plans de section circulaires, on obtient toute une suite de surfaces. On connaît les beaux *modèles en fil de surfaces du second ordre* qu'Olivier a fait préparer pour le Conservatoire des Arts et Métiers. Notre collection contient cinq modèles de cette espèce, trois où les tiges métalliques auxquelles sont attachés les fils de soie sont mobiles, deux où ces tiges sont fixes. Une autre série de surfaces du second ordre, en gypse, donne sur tous ces types la *ligne de courbure*.

La considération des lignes géodésiques de *l'ellipsoïde de rotation*, ainsi que de celles qui passent par les *ombilics de l'ellipsoïde à trois axes*, se rattache, on le sait, aux fonctions elliptiques. Ces lignes ont été représentées de différentes manières sur plusieurs modèles. Dans les notes qui y sont jointes, on a indiqué la marche du calcul, comment l'intégrale elliptique a été réduite à sa forme normale, et comment les fonctions ϑ ont été introduites.

Quant à la série de surfaces du troisième ordre dont nous parlions plus haut, ce sont des modèles où sont figurées les droites et les courbes paraboliques. On a eu l'intention de donner les types caractéristiques de surfaces du troisième ordre, et également de celles ayant des singularités élevées. On peut alors se faire une idée claire, exacte et complète de *toutes* les formes possibles des surfaces du troisième ordre. Il était impossible de songer à faire une collection complète de toutes les formes qui peuvent se présenter, mais il est possible de déduire des différents modèles construits un type quelconque ; la chose se fait d'une façon bien claire, sans aucune difficulté, par la déformation continue d'une des surfaces, procédé qui permet d'arriver non seulement à toutes les formes existantes, mais aussi de voir comment on passe d'un des modèles à un autre. Le même problème a été aussi résolu pour les surfaces hessiennes qui correspondent à un pentaèdre réel.

Parmi les surfaces d'ordre supérieur, citons d'abord quatre modèles élégants représentant des types différents de la *surface de Kummer*, cette surface connue du quatrième ordre, à seize points doubles, qui est sa propre réciproque. Signalons encore quatre types de la *cyclide de Dupin* et cinq types de la courbe gauche du troisième degré représentés sur des cylindres du second ordre.

Une surface curieuse est la surface transcendante qui représente la marche de la fonction elliptique $\varphi = \mathrm{sn}(u, k)$ pour toutes les valeurs de u et k (même pour $k > 1$); pour $k = 1$, une discontinuité se présente.

Pour l'application d'une surface sur une autre, les surfaces à courbure constante, et en particulier deux surfaces hélicoïdales, nous servent d'exemple. L'une d'elles est applicable sur l'ellipsoïde de rotation, l'autre, l'hélicoïde ordinaire, peut être développée sur la caténoïde ; dans ce dernier cas, les lignes asymptotiques se transforment en lignes de courbure et réciproquement. Une bande de laiton courbée d'une façon convenable permet d'effectuer réellement le développement.

De même nous avons ajouté aux nombreux types de *surfaces à courbure constante, positive ou négative,* des bandes de surface en gutta-percha pour faire avec elles un essai analogue. En particulier, le déplacement d'une bande à courbure constante négative sur la surface correspondante a quelque chose d'étonnant ; cela rappelle l'impression curieuse que l'on éprouve en déformant par une pression légère une sphère creuse de gutta-percha. La courbe méridienne de la surface hélicoïdale à courbure constante positive conduit, on le sait, aux intégrales elliptiques de troisième espèce ; dans les notes adjointes à la surface on a ramené ces intégrales à la forme la plus commode pour le calcul des fonctions $\mathfrak{I}$. Parmi les surfaces à courbure constante de la collection, il faut signaler la *surface de L. Bianchi,* dont S. Lie a parlé précisément dans le *Bulletin.* L'auteur du Mémoire ajouté au modèle, Th. Kuen, de Munich, fait remarquer, ce qu'on n'avait pas vu jusqu'ici, qu'un des systèmes de lignes de courbure de cette surface est composé de lignes planes, et que, par suite, la surface appartient à un genre de surfaces découvertes depuis longtemps par Enneper.

Signalons encore le modèle d'une *surface minimum du neuvième ordre,* d'après Enneper, qui possède des lignes de courbure planes du troisième ordre.

Viennent ensuite deux surfaces focales. La première, due à Seidel, s'obtient quand on fait tomber sur un système de lentilles à centre un faisceau de rayons dont le point de convergence est en dehors de l'axe du système. On peut le réaliser d'une façon élégante en faisant l'expérience dans un liquide coloré. La seconde, du douzième ordre, est la surface focale des rayons qui partent d'une ligne et se réfléchissent sur un cylindre dont l'axe rencontre la ligne. Cette surface offre un point sextuple remarquable. La première surface focale citée peut aussi servir comme surface du centre du paraboloïde elliptique. Trois modèles donnent aussi la surface du centre de l'hyperboloïde à une nappe.

En ce qui concerne la Physique et la Mécanique, nous citerons la trajectoire du pendule sphérique, la chaînette sur la sphère, différentes représentations de la surface des ondes pour les cristaux à deux ou à trois axes; une d'elles donne les ombilics et les courbes sphériques.

Enfin, on trouve à côté de ces modèles de surfaces parfois compliquées quelques perspectives relief de corps géométriques simples. Nous n'appuierons pas sur leur utilité. La plupart des modèles sont en gypse, à surface d'un mat brillant. On a adjoint à beaucoup d'entre elles un texte explicatif, provenant, en général, de celui qui a fait le modèle, et qui donne la marche du calcul ainsi que les propriétés principales du corps représenté. Dans le catalogue, les modèles sont arrangés en séries qui correspondent à l'ordre dans lequel ils ont paru, mais qui, en somme, ne forment point des groupes de modèles de même espèce.

GÜNTHER (S.). — PARABOLISCHE LOGARITHMEN UND PARABOLISCHE TRIGONOMETRIE. — Leipzig, 1882. In-8°, 100 pages, 18 figures.

L'idée de réunir et de signaler, dans un même parallèle, les propriétés et les analogies de certaines courbes, qui ont, pour ainsi dire, un air de famille, s'est présentée depuis longtemps à la sagacité des géomètres. La Géométrie des Grecs nous en offre un premier exemple, emprunté, il est vrai, à la mesure des solides, forme plus accessible que l'étude des courbes; cependant, pour ces dernières, elle ne tarda point à se développer dans les écrits de Grégoire de Saint-Vincent, de Pascal, de Roberval et de Hobbes. Mais il faut arriver à Brendel pour trouver une étude méthodique des analogies de la parabole et de la spirale d'Archimède. C'est Brendel qui le premier a complété ces analogies par l'indication de la nature logarithmique des arcs de la parabole; on lui doit l'invention des logarithmes paraboliques. Cette notion a été reprise avec succès par James Booth, qui a montré les conséquences de ces relations de nature à développer les propriétés géométriques des fonctions elliptiques, dans un travail publié en 1851.

Ces considérations servent de point de départ à la nouvelle monographie que M. Günther vient de consacrer à ses recherches parallèles sur les logarithmes paraboliques et la trigonométrie de la parabole. Elles forment le premier Chapitre de ce travail.

Le Chapitre II renferme un rapide aperçu des formules de la trigonométrie hyperbolique, dont on aura besoin pour l'étude principale de la courbe dont l'auteur s'occupe plus particulièrement, la strophoïde droite, qui, entre autres modes de génération, peut se définir la podaire du pied de la direction d'une parabole.

Les propriétés de cette courbe, à laquelle J. Booth avait proposé de donner le nom de *logocyclique,* ont été rappelées avec détails en s'inspirant des études du géomètre anglais. Mais, à un autre point de vue, l'on peut considérer ce travail comme un nouveau Chapitre de l'Ouvrage récemment édité par M. Günther, *Sur les fonctions hyperboliques*, dont il a été rendu compte au *Bulletin* (avril 1881). L'auteur retrouve, en effet, au moyen de ces fonctions, les principaux résultats obtenus antérieurement par J. Booth, et les complète par d'autres propriétés. Il énumère successivement celles qui se rapportent à la définition de la courbe comme lieu géométrique, à ses points conjugués qui la classent au nombre des anallagmatiques; aux tangentes et normales; aux rayons de courbure; à la quadrature et à la rectification.

Ces divers problèmes forment l'objet du Chapitre III, et il est intéressant d'y rencontrer l'emploi de la trigonométrie de l'hyperbole équilatère, qui semble ainsi avoir servi de transition naturelle entre les analogies de la trigonométrie du cercle et la trigonométrie de la parabole.

Les analogies les plus frappantes qui existent entre ces trois ordres de formules sont présentées par l'auteur sous forme de tableau synoptique. Cette disposition est des plus favorables pour faire ressortir l'utilité de cette comparaison, qui sert ainsi de résumé aux aperçus développés par J. Booth dans son Mémoire publié en 1856, *Sur la trigonométrie de la parabole et l'origine* *géométrique des logarithmes,* et son Traité, publié en 1873, relatif à diverses méthodes géométriques nouvelles. De nombreux extraits de ces deux Ouvrages sont indiqués par M. Günther et forment, pour ainsi dire, la matière du quatrième Chapitre. Au surplus, les considérations exposées par le géomètre anglais dans le Mémoire de 1856 ont été en partie reproduites dans le Traité de 1873, dont la tendance et l'esprit ont été appréciés déjà dans le *Bulletin* (mars 1874).

Le cinquième Chapitre, qui termine ce travail, est consacré à la représentation graphique d'un système de logarithmes, au moyen de paraboles homofocales et de même axe, associées à la logocyclique. On y trouve d'intéressantes considérations sur le mode de représentation de la formule de Moivre étendue aux fonctions hyperboliques ou paraboliques.

La monographie dont nous venons de nous occuper aura bientôt sa place marquée dans nos livres classiques, parce qu'elle vient heureusement compléter la trilogie des coniques particulières, circonférence, hyperbole équilatère et parabole. Ces trois courbes présentent, comme on le voit, de nombreux points de ressemblance, que la Trigonométrie ou les logarithmes mettent en lumière à tour de rôle. Il est intéressant pour l'enseignement de savoir où l'on peut les rencontrer. H. BROCARD.

RIBAUCOUR (A.). — ÉTUDE DES ÉLASSOÏDES OU SURFACES A COURBURE MOYENNE NULLE, Mémoire couronné par l'Académie royale de Belgique, dans la séance publique du 16 décembre 1880. — Bruxelles, Hayez. Extrait du Tome XLIV des *Mémoires couronnés et Mémoires des Savants étrangers,* publiés par l'Académie, 1881.

L'Académie de Belgique a eu souvent la bonne fortune de recevoir, en réponse aux questions qu'elle proposait, des travaux du mérite le plus éclatant. Sans remonter jusqu'à l'immortel *Aperçu historique,* et sans sortir de France, il nous suffira de rappeler que le beau *Mémoire sur la théorie générale des séries* de M. O. Bonnet était la réponse à une question posée par l'Académie.

Le Mémoire de M. Ribaucour dont nous allons rendre compte présente, lui aussi, le plus haut intérêt. Nous avons récemment fait connaître dans le *Bulletin* les belles recherches de M. Lie sur les surfaces minima. Ces recherches paraissaient presque avoir épuisé la question. M. Ribaucour est venu nous prouver une fois de plus qu'il y a toujours à faire, même dans les questions les plu sétudiées, quand on apporte dans leur étude un esprit ingénieux et inventif; son travail mérite d'être consulté : il ouvre bien des points de vue nouveaux, et il contribuera certainement d'une manière notable aux progrès de la théorie qui trouve son origine dans l'intégrale de Monge.

Par ses recherches sur la théorie des surfaces en général, M. Ribaucour était bien préparé à l'étude que demandait l'Académie. L'importance même de son travail provient de ce que la plupart des propositions qu'il y démontre sont des cas particuliers, ou mieux des applications, à la théorie des surfaces minima, de propositions ayant une portée générale.

Dans le Chapitre Ier, M. Ribaucour développe le programme de ses recherches, et indique les procédés de démonstration dont il fera usage. Ces procédés de démonstration reposent sur les formules de la théorie des surfaces, et en particulier sur celles qui portent le nom de M. Codazzi. Mais la méthode employée presque constamment par l'auteur repose sur l'emploi d'axes variables dont l'origine se déplace sur une surface. Elle est donc analogue à celles qu'on emploie en Mécanique, lorsqu'on substitue aux axes fixes des axes mobiles, et au mouvement absolu un mouvement relatif. M. Ribaucour désigne cette méthode sous le nom de *périmorphie*.

Le Chapitre II contient une démonstration géométrique de la formule de Riemann qui fait connaître l'aire de la portion d'élassoïde terminée à un contour donné.

Le Chapitre III donne la solution également géométrique du problème de Monge, c'est-à-dire l'intégration effectuée par la géométrie de l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima. Nous aurions ici une objection à présenter. Nous ne voyons pas d'abord pourquoi M. Ribaucour appelle les surfaces minima des *surfaces moulures*. La génération géométrique qu'il en donne n'est nullement d'accord avec la définition universellement adoptée des surfaces moulures. Nous croyons également que le raisonnement de l'auteur aurait besoin d'un complément, si l'on ne voyait pas immédiatement que l'intégrale obtenue par ses procédés géométriques coïncide avec celle de Monge.

Le Chapitre IV est consacré à la définition d'un élément, la *congruence isotrope*, qui joue un rôle essentiel dans toute la suite du Mémoire. L'auteur définit ainsi la congruence dont la surface focale est formée de deux développables circonscrites au cercle de l'infini. Le théorème suivant explique comment la théorie des congruences isotropes est liée à celle des surfaces minima. Appelons *plan moyen* d'une droite de la congruence le plan qui est perpendiculaire à cette droite, et qui passe à égale distance de ses deux foyers ou points de contact avec les deux nappes de la surface focale. Le plan moyen enveloppe une surface que l'auteur appelle *enveloppée moyenne :* cela posé, l'enveloppée moyenne d'une congruence isotrope est une surface minimum.

Dans le Chapitre V, M. Ribaucour étudie et construit toutes les congruences isotropes, admettant pour enveloppée moyenne une surface minima donnée. Elles sont en nombre triplement infini, et il est ainsi démontré que l'on peut toujours faire dériver une surface minimum d'une congruence isotrope. Les Chapitres VI et VII contiennent des conséquences de cette importante proposition.

Le Chapitre VIII traite des propriétés des surfaces moyennes. M. Ribaucour donne ce nom à la surface, lieu des milieux des segments compris entre les points focaux sur toutes les droites d'une congruence, et il fait d'abord connaître ce beau théorème :

La surface moyenne d'une congruence isotrope est le lieu des milieux de cordes égales entre elles dont les extrémités décrivent des surfaces applicables l'une sur l'autre. Réciproquement, *si les deux extrémités d'un segment constant de droite décrivent deux surfaces* (C), (C') *applicables l'une sur l'autre, la droite engendre une congruence isotrope, et le plan perpendiculaire sur le milieu de la droite enveloppe une surface minima.*

Dans le Chapitre IX, M. Ribaucour montre comment on peut faire dériver de chaque système orthogonal isotherme de la sphère une infinité de congruences isotropes donnant naissance à des surfaces minima ou élassoïdes, qui sont étudiées dans le Mémoire sous le nom d'*élassoïdes groupés*. Tous ces élassoïdes sont applicables sur l'un d'eux, mais ils ne sont pas superposables. Parmi eux il faut distinguer des couples de surfaces conjuguées, dont on doit la découverte à M. Bonnet, et qui jouissent de la propriété que l'image sphérique des lignes de courbure de l'un des élassoïdes coïncide avec l'image sphérique des asymptotiques de l'autre. M. Ribaucour ne se contente pas de la considération des élassoïdes groupés, il leur associe les élassoïdes stratifiés, pour la définition desquels nous renvoyons à son beau Mémoire.

On peut dire en résumé, et en laissant de côté une foule de résultats de détail, que la méthode de M. Ribaucour a pour caractère distinctif l'emploi des congruences isotropes. Il nous sera permis de regretter que l'auteur se soit trop renfermé dans la question posée par l'Académie, et qu'il n'ait pas complètement développé plusieurs belles propositions générales, notamment celles qui se trouvent à la fin de son travail. G. D.