

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

P. APPELL

Sur une équation linéaire aux dérivées partielles

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2^e série,
tome 6, n° 1 (1882), p. 314-318

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1882_2_6_1_314_0>

© Gauthier-Villars, 1882, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉLANGES.

SUR UNE ÉQUATION LINÉAIRE AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

PAR M. P. APPELL.

L'équation différentielle linéaire

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{m(1-m)}{(x-y)^2} z,$$

à laquelle M. Darboux a consacré une Note si intéressante dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 10 juillet 1882, peut être considérée comme un cas particulier de l'équation

$$(2) \quad (x-y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \beta' \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

que j'ai rencontrée dans la théorie des fonctions hypergéométriques de deux variables (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 29 mars 1880). En effet, si dans l'équation (1) on fait

$$z = (x-y)^m u,$$

cette équation prend la forme (2), où $\beta = \beta' = m$. Cette remarque m'a conduit à essayer d'étendre à l'équation (2) les principales propriétés indiquées par M. Darboux pour l'équation (1).

Tout d'abord, l'équation (2) ne change pas si l'on remplace respectivement x et y par

$$ax + b, \quad ay + b,$$

a et b étant des constantes quelconques. Elle ne change pas non plus si l'on y remplace x par $\frac{1}{x}$, y par $\frac{1}{y}$ et u par $x^\beta y^{\beta'} u$. En combinant ces deux propriétés, on voit que, si

$$u = \varphi(x, y)$$

est une solution de l'équation (2), la fonction

$$(ax + b)^{-\beta} (ay + b)^{-\beta'} \varphi\left(\frac{cx + d}{ax + b}, \frac{cy + d}{ay + b}\right),$$

en est une autre solution.

Cherchons maintenant les solutions fonctions du seul rapport $\frac{y}{x}$.

Soit $\frac{y}{x} = t$; alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{du}{dt} \frac{y}{x^2}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{du}{dt} \frac{1}{x}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -\frac{du}{dt} \frac{1}{x^2} - \frac{d^2 u}{dt^2} \frac{y}{x^3}.\end{aligned}$$

Substituant ces expressions dans l'équation (2) et faisant en outre $y = tx$, on obtient l'équation

$$(3) \quad t(1-t) \frac{d^2 u}{dt^2} + [(1-\beta) - (1+\beta')t] \frac{du}{dt} = 0,$$

qui admet l'intégrale

$$u = t^{\beta} F(\beta, \beta + \beta', \beta + 1, t),$$

le signe F désignant, comme il est d'usage, la série hypergéométrique de Gauss. L'équation (2) admet donc la solution

$$(3) \quad u = \left(\frac{y}{x}\right)^{\beta} F\left(\beta, \beta + \beta', \beta + 1, \frac{y}{x}\right)$$

et, par raison de symétrie, la solution

$$(3') \quad u = \left(\frac{x}{y}\right)^{\beta'} F\left(\beta', \beta + \beta', \beta' + 1, \frac{x}{y}\right).$$

Les deux solutions précédentes sont des cas particuliers des solutions

$$(4) \quad u = x^{-\beta} y^{\mu} F\left(\beta, \mu + \beta', \mu + 1, \frac{y}{x}\right),$$

$$(4') \quad u = x^{\lambda} y^{-\beta'} F\left(\beta', \lambda + \beta, \lambda + 1, \frac{x}{y}\right),$$

dans lesquelles λ et μ sont des constantes arbitraires. Les solutions (3) et (3') s'obtiennent en faisant $\mu = \beta$ et $\lambda = \beta'$; et la solution de l'équation (1),

$$z = \left(1 - \frac{y}{x}\right)^m F\left(m, m, 1, \frac{y}{x}\right),$$

indiquée par M. Darboux, s'obtient en faisant dans (4)

$$\mu = 0, \quad \beta = \beta' = m.$$

Cherchons maintenant la solution entière la plus générale de

l'équation (2). Employons, à cet effet, la méthode des coefficients indéterminés et cherchons à vérifier l'équation (2) par la série

$$(5) \quad u = \sum_{m,n=0}^{m,n=\infty} A_{m,n} x^m y^n;$$

on trouve, pour déterminer les coefficients $A_{m,n}$, l'équation

$$(m+1)(n+\beta')A_{m+1,n} = (n+1)(m+\beta)A_{m,n+1},$$

d'où

$$(6) \quad A_{m,n} = \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+m-1)\beta'(\beta'+1)\dots(\beta'+n-1)}{1.2\dots m.1.2\dots n} \psi(m+n),$$

ψ étant une fonction arbitraire. En particulier, si l'on prend

$$\psi(m+n) = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+m+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+m+n-1)},$$

on obtient comme solution la série hypergéométrique de deux variables désignée par

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y).$$

On voit que l'équation (2) admet toujours pour solution *des polynômes en nombre infini de tous les degrés*. Il suffit en effet, pour que la solution (5) donne un polynôme de degré N , d'assujettir la fonction arbitraire $\psi(m+n)$ qui figure dans (6) à la condition

$$\psi(m+n) = 0 \quad \text{pour } m+n > N;$$

pour cela on pourra, par exemple, poser

$$\psi(m+n) = N(N-1)\dots(N-m-n+1)\varpi(m+n),$$

la fonction ϖ étant arbitraire.

Dans le cas particulier où les deux nombres β et β' sont des *entiers négatifs*, toutes les solutions données par la série (5), $A_{m,n}$ ayant la valeur (6), sont des polynômes; en effet, si

$$\beta = -N, \quad \beta' = -N',$$

on a $A_{m,n} = 0$ pour toutes les valeurs de m et n satisfaisant aux conditions

$$m > N, \quad n > N'.$$

D'une façon générale, désignons par $u(\beta, \beta')$ une solution de l'équation (2); on aura

$$(7) \quad \begin{cases} u(\beta + 1, \beta') = \frac{\partial u(\beta, \beta')}{\partial x}, \\ u(\beta, \beta' + 1) = \frac{\partial u(\beta, \beta')}{\partial y}; \end{cases}$$

c'est-à-dire que, si $u(\beta, \beta')$ est une solution de l'équation (2), $\frac{\partial u(\beta, \beta')}{\partial x}$ est une solution de l'équation (2) où l'on a remplacé β par $\beta + 1$, et $\frac{\partial u(\beta, \beta')}{\partial y}$ une solution de cette même équation où l'on a remplacé β' par $\beta' + 1$. Pour le démontrer, il suffit de différentier le premier membre de l'équation (2) par rapport à x ou à y .

La propriété exprimée par les équations (7) conduit à l'intégrale générale de l'équation (2) quand β et β' sont des entiers positifs : $\beta = m$, $\beta' = n$.

Remarquons, en effet, que si $\beta = \beta' = 1$, l'intégrale générale de l'équation (2) est

$$u(1, 1) = \frac{X - Y}{x - y},$$

X étant une fonction de x seul et Y de y seul. Alors, d'après (7),

$$u(2, 1) = \frac{\partial \left(\frac{X - Y}{x - y} \right)}{\partial x},$$

et

$$u(m, n) = \frac{\partial^{m+n-2}}{\partial x^{m-1} \partial y^{n-1}} \left(\frac{X - Y}{x - y} \right).$$

Telle est donc l'expression de l'intégrale générale quand β et β' sont des entiers positifs m et n . Le cas où β et β' sont des entiers négatifs se ramène immédiatement au précédent. En effet, si, dans l'équation (2), on fait

$$(8) \quad u = (x - y)^{1-\beta-\beta'} t,$$

cette équation prend la forme

$$(9) \quad (x - y) \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} - (1 - \beta) \frac{\partial t}{\partial x} + (1 - \beta') \frac{\partial t}{\partial y} = 0,$$

c'est-à-dire la forme (2), où β et β' sont changés respectivement

en $1 - \beta'$ et $1 - \beta$. Si donc β et β' sont des entiers négatifs, $1 - \beta$ et $1 - \beta'$ sont des entiers positifs et l'intégrale t de l'équation (9) est donnée par la formule établie précédemment.

Supposons enfin que, β' étant quelconque, β soit un entier que l'on pourra toujours supposer positif à cause de la transformation (8). En supposant d'abord $\beta = 1$, on voit que l'intégrale générale de l'équation (2) est

$$u(1, \beta') = (x - y)^{-\beta'} \left[\int Y(x - y)^{\beta'-1} dy + X \right];$$

et, par suite,

$$u(m, \beta') = \frac{\partial^{m-1} u(1, \beta')}{\partial x^{m-1}},$$

m étant entier. On a une formule analogue si, β étant quelconque, β' est entier.

Lorsque les nombres β et β' sont quelconques, on peut, par la transformation (8) et l'application répétée des formules (7), ramener ces deux nombres à avoir leurs parties réelles comprises entre 0 et 1. On obtient alors l'expression suivante de l'intégrale générale :

$$u = \int_x^y \varphi(\alpha) (y - \alpha)^{-\beta'} (\alpha - x)^{-\beta} dx \\ + (x - y)^{1-\beta-\beta'} \int_x^y \psi(\alpha) (y - \alpha)^{\beta-1} (\alpha - x)^{\beta'-1} dx,$$

φ et ψ désignant des fonctions arbitraires.