Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

# Comptes rendus et analyses

*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série*, tome 6, nº 1 (1882), p. 125-136

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1882_2_6_1_125_0>

# COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

KLEIN (F.). — UEBER RIEMANN'S THEORIE DER ALGEBRAISCHEN FUNCTIONEN UND IHRER INTEGRALE, eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen. — Leipzig, bei Teubner, 1882.

Dans le semestre d'hiver 1880-1881 et dans le semestre d'été 1881, M. Félix Klein s'était proposé de traiter, dans le Cours dont il est chargé à l'Université de Leipzig, la théorie des fonctions à un point de vue spécialement géométrique. Étudier à fond la première partie du Mémoire de Riemann sur la théorie des fonctions abéliennes, montrer comment des considérations empruntées à la Physique permettent de se faire une idée assez nette et assez précise de l'emploi du principe de Dirichlet par Riemann, donner enfin aux étudiants une idée claire et exacte de ce que l'on doit entendre par surfaces de Riemann, tel est le but que M. Klein s'était proposé; tel est aussi le sujet de ce petit livre, où il a résumé et ordonné les leçons de ces deux semestres.

## PREMIÈRE PARTIE.

### *Considérations préliminaires.*

1. *Emploi des courants stationnaires dans le plan pour la représentation des fonctions de $x+iy$.* — Soit

$$w=u+iv,\quad z=x+iy,\quad w=f(z),$$

on a

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1}$$

et, par suite,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{3}$$

et de même

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0. \tag{3}$$

On considérera $u$ comme un *potentiel de vitesse* (*Geschwind-*

*igkeitspotential*), en sorte que $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ sont les composantes de la vitesse avec laquelle un fluide se meut parallèlement au plan XY. L'équation (2) exprime alors que le courant est *stationnaire*. Les courbes $u =$ const. seront appelées *courbes de niveau*, les courbes $v =$ const., qui, d'après les équations (1), sont orthogonales aux précédentes, sont les *courbes de courant*.

La fonction $u + iv$ ainsi représentée est seulement déterminée à une constante près. De plus, les équations (1), (2) et (3) demeurent invariables quand on remplace $u$ par $v$ et $v$ par $-u$. On est donc conduit à considérer un second état stationnaire où le potentiel de vitesse est $v$ et où les courbes du courant sont $u =$ const. On a ainsi la représentation de la fonction $v - ui$, et nous désignons le courant correspondant sous le nom de courant *conjugué*.

Si, au point $z_0$, $\frac{dw}{dz}$, $\frac{d^2 w}{dz^2}$, $\ldots$, jusqu'à $\frac{d^\alpha w}{dz^\alpha}$ sont nuls, en ce point $(\alpha + 1)$ courbes $u =$ const. se coupent en faisant des angles égaux, et autant de courbes $v =$ const. viennent bissecter ces différents angles.

Un point de croisement de multiplicité supérieure peut être considéré comme la limite de plusieurs points de croisement simple.

2. *Considérations des points où $w = f(z)$ devient infini.* — On suppose que le courant différentiel $\frac{dw}{dz}$ ne possède aucune position singulière essentielle, ou, ce qui revient au même, que $w$ ne peut devenir infini que comme une expression de la forme

$$A \log(z - z_0) + \frac{A_1}{(z - z_0)} + \frac{A_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{A_\nu}{(z - z_0)^\nu},$$

$\nu$ étant un nombre fini déterminé.

On a donc à considérer différentes sortes d'infinis : infini logarithmique, infini algébrique de multiplicité un, etc.

Voyons ce qui, dans la représentation par des courants, correspond aux différents cas.

Considérons d'abord un point d'infini logarithmique

$$w = A \log(z - z_0) + C_0 + C_1(z - z_0) + C_2(z - z_0)^2 + \ldots;$$

$2Ai\pi$ est le résidu relatif à ce point.

Si A est réel, les courbes de niveau sont, dans le voisinage de $z_0$, de petits cercles; les courbes de courant, des rayons partant de ce point. $z = z_0$ est une source, et l'on trouve, pour son rendement, le quotient par $i$ du résidu.

Si A est purement imaginaire, les deux systèmes de courbes se permutent; on dit alors qu'il y a au point $z_0$ un tourbillon.

Pour les points d'infini algébrique d'ordre 1, les courbes $u =$ const. et $v =$ const. sont, dans le voisinage du point $z_0$, de petits ovales. La fonction $u$ prend, dans le voisinage de ce point, une valeur quelconque.

3. *Fonctions rationnelles et leurs intégrales. Déduction des points d'infini d'ordre supérieur de ceux d'ordre moindre.* — Soit

$$w = \frac{\Phi(z)}{\Psi(z)},$$

$\Phi$ et $\Psi$ étant de degré $n$. En comptant chaque point avec son ordre de multiplicité, on peut dire qu'il y a $n$ points d'infini algébrique et $2n - 2$ points de croisement.

Si l'on considère l'intégrale

$$w = \int \frac{\Phi(z)}{\Psi(z)} dz,$$

pour qu'elle reste finie pour $z = \infty$, il faut que le degré de $\Phi$ soit de deux unités inférieur à celui de $\Psi$; $\Phi = 0$ donne les points de croisement libres (c'est-à-dire qui ne coïncident pas avec des points d'infini). Si l'on compte chaque point d'infini aussi souvent que l'indique la multiplicité du facteur correspondant de $\Psi$, l'ensemble des points de multiplicité est inférieur de deux unités à celui des points de croisement.

La considération des fractions rationnelles et de leurs intégrales permet de déduire de singularités connues des singularités plus élevées.

4. *Réalisation expérimentale des courants considérés.* — Si l'on admet le principe de la superposition des singularités, il est évident que la seule question à se proposer est celle de la réalisation des formes de mouvement et des singularités les plus sim-

ples. On est amené ainsi à considérer les deux types suivants :

$$A \log(z - z_0) \quad \text{et} \quad \frac{A}{(z - z_0)^{\nu}}.$$

Au premier, et pour ne pas avoir à considérer $z = \infty$, on substitue

$$A \log \frac{z - z_0}{z - z_1},$$

qu'on divise d'ailleurs en deux parties, en posant $A = a + ib$.

1° $a \log \dfrac{z - z_0}{z - z_1}$. En $z_0$ on a une source de rendement $2a\pi$, en $z_1$ une autre de rendement $-2a\pi$. On n'a qu'à mettre en $z_0$ et en $z_1$ les deux pôles d'une batterie galvanique d'une force choisie convenablement pour réaliser un tel mouvement.

2° $ib \log \dfrac{z - z_0}{z - z_1}$. La chose est plus difficile à réaliser. On peut supposer $z_0$ relié à $z_1$ par une courbe qui ne se coupe pas; cette courbe doit être le siège d'une force constante électromotrice. Les points $z_0$ et $z_1$ seront alors des points à tourbillon.

Les formes de mouvement correspondant à $\dfrac{1}{(z - z_0)^{\nu}}$ pourraient se déduire des précédentes. On s'appuie sur ce que, en faisant coïncider des points d'infini logarithmique pour lesquels la somme des résidus est nulle, on obtient un point d'infini algébrique.

5. *Passage sur la sphère. Courant sur une surface courbe quelconque.* — On peut évidemment, dans tous les développements précédents, substituer au plan une sphère dont le plan serait la projection stéréographique, et alors il est tout à fait inutile de parler de la valeur $z = \infty$.

On peut considérer aussi des mouvements stationnaires sur une surface quelconque. Soit $u$ une fonction de lieu sur cette surface, on trace les courbes $u = \text{const.}$, et l'on imagine que le fluide se meut normalement à ces courbes avec une vitesse égale à $\dfrac{du}{dn}$, en désignant par $dn$ l'élément d'arc de la direction normale sur la surface; $u$ sera encore appelé potentiel de vitesse. A $u$ correspond une autre fonction $v$; les propriétés de $u$ et $v$ sont réciproques. Dès lors, ayant $u$ et $v$, on appelle la combinaison $u + iv$

fonction complexe du lieu sur la surface. Quand une surface est appliquée conformément sur une seconde, toute fonction complexe du lieu sur la première surface se transforme en une fonction complexe de même espèce sur la seconde.

6. *Connexion de la théorie précédente avec l'étude des fonctions complexes d'une variable.* — Les différentes fonctions du lieu que l'on étudie sur la sphère sont des fonctions de la variable $x + iy$. Mais cela tient à un fait plus général : deux fonctions complexes du lieu sur une surface quelconque sont fonctions l'une de l'autre, dans le sens habituel attribué à cette expression dans la théorie des fonctions. Enfin, si, sur deux surfaces, on connaît deux fonctions complexes du lieu et si l'on rapporte les surfaces l'une à l'autre, en sorte que, aux points correspondants, correspondent aussi des mêmes valeurs de la fonction, les deux surfaces se trouvent par là-même rapportées conformément l'une à l'autre.

Il est évident que les théorèmes énoncés sont relatifs à des portions de surfaces; nous verrons plus tard ce qui arrive quand on considère dans leur entier des surfaces fermées.

7. *Encore une fois les courants sur la sphère. Exposé général de la question de Riemann.* — On appelle *courants uniformes* ceux pour lesquels, en chaque point de la sphère, il n'y a qu'un courant. Les courants considérés, pour lesquels n'existe d'autre genre d'infini que ceux qui ont été définis dans le n° 2, sont les courants uniformes les plus généraux qui existent sur la sphère. On peut se proposer de suivre un chemin tout différent de celui qu'on a suivi dans le premier Chapitre : commencer par l'étude des courants et développer ensuite la théorie de certaines fonctions analytiques. M. Klein substitue ainsi à l'emploi du principe de Dirichlet, qui formait la base de toute la théorie de Riemann et que Riemann avait probablement été conduit à employer par des considérations physiques, ces mêmes considérations physiques.

Mais, au lieu de se borner à la sphère, on peut évidemment prendre la question à un point de vue plus élevé et s'occuper des surfaces fermées. Sur ces surfaces nous aurons des courants uniformes, des fonctions complexes du lieu dont la comparaison nous fournira maints théorèmes d'Analyse.

## Deuxième Partie.

### *Exposition de la théorie de Riemann.*

8. *Classification des surfaces fermées d'après le nombre p.* — Un des caractères principaux pour une surface est le nombre que Riemann a désigné par la lettre $p$ et qui indique combien on peut faire dans la surface de sections linéaires fermées, chacune d'elles formant une courbe sans point double, sans que la surface se sépare en plusieurs morceaux. Pour la sphère, $p = 0$.

Pour que deux surfaces puissent être rapportées univoquement l'une à l'autre, il suffit que les deux surfaces aient le même $p$.

Comme type de surface du genre $p$ on peut prendre une sphère avec $p$ anses. Relativement à chacune des anses, on peut considérer deux sections linéaires que, par analogie avec le cas du tore, on appelle *courbe méridienne* $A_i$ et *courbe parallèle* $B_i$. Dès lors on peut supposer la surface normale de genre $p$ coupée par $2p$ courbes, $p$ méridiens et $p$ parallèles, toute autre section allant d'un point du bord à un autre point quelconque du bord, la décomposant alors en plusieurs morceaux, deux au moins.

9. *Détermination première des courants stationnaires sur une surface donnée.* — En ne considérant que des infinis tels qu'il a déjà été dit (n° 2), et en exigeant que la somme de tous les résidus logarithmiques soit nulle, on a sur la surface que l'on considère des fonctions complexes du lieu, qui deviennent infinies en des points donnés quelconques, et d'ailleurs d'une façon donnée quelconque. Partout ailleurs la fonction est continue.

On peut concevoir sur la surface des courbes fermées qui ne décomposent pas la surface et d'où part dans un sens le fluide pour revenir dans l'autre ; on obtient ainsi des courants qui, en général, ne possèdent pas de discontinuité ; on a par suite ainsi des fonctions partout finies. Toute courbe fermée tracée sur la surface est équivalente à une combinaison de courbes $A_i$ et de courbes $B_i$. Il en résulte que la fonction la plus générale que l'on puisse construire, et qui soit partout finie, est celle dont la partie réelle possède, relativement aux $2p$ sections normales, des modules de périodicité donnés quelconques.

10. *Courant stationnaire le plus général. Démonstration de l'impossibilité de courants d'autre espèce.* — La fonction de lieu la plus générale est ainsi définie : en des positions données quelconques, la fonction devient infinie (avec les conditions données relativement aux infinis); de plus, sa partie réelle possède aux $2p$ sections normales des modules de périodicité quelconques donnés. C'est là la fonction la plus générale qui, sur notre surface, réponde à un courant uniforme. Cela résulte de ce qu'il n'y a pas de fonction qui ne devienne nulle part infinie et pour laquelle les modules de périodicité de la partie réelle soient tous nuls.

11. *Exemples de courants. Courants sur le tore et le double tore.* — En général, le nombre des points de croisement est $\mu + 2p - 2$, en désignant par $\mu$ le nombre des infinis logarithmiques.

12. *Sur la formation de la fonction complexe de lieu la plus générale au moyen de fonctions simples.* — Considérons d'abord les fonctions partout finies. On peut toujours de bien des manières trouver $2p$ potentiels linéairement indépendants,

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{2p},$$

tels que tout autre potentiel partout fini peut être formé linéairement avec ceux-là,

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_{2p} u_{2p} + \mathrm{A}.$$

Des $u_i$ on peut déduire les $v_i$ en prenant, par exemple, sur la surface un système de coordonnées $x, y$ tel que $u$ et $v$ soient reliés par les équations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

et cela en sorte que l'on obtient enfin $2p$ potentiels linéairement indépendants :

$$u_1,\ v_1,\ u_2,\ v_2,\ \ldots,\ u_p,\ v_p.$$

En posant $u_\alpha + iv_\alpha, = w_\alpha$, on obtient $p$ fonctions partout finies et linéairement indépendantes

$$w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_p.$$

Une fonction quelconque partout finie peut être dès lors constituée au moyen des fonctions $w$ sous la forme

$$w = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_p w_p + C.$$

Si maintenant nous avons une fonction ayant des infinis, elle pourra être mise sous la forme

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_\mu + c_1 w_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_p w_p + C,$$

$F_1$ étant une fonction qui est infinie *comme* la fonction proposée au point $\xi$, et qui a de plus, en un point pris quelconque $y$, un point logarithmique dont le résidu est égal et de signe contraire au résidu de la fonction donnée correspondant au point $\xi$ y relatif.

**13.** *Plurivoquie de nos fonctions. Considération particulière des fonctions univoques.* — En général, deux chemins différents (c'est-à-dire non équivalents) conduisent à deux valeurs différentes de la fonction, quand on part d'une même valeur. Cette différence est composée de modules de périodicité correspondant aux points logarithmiques et des modules $A_i$ et $B_i$.

On aura des fonctions univoques lorsque l'on astreindra tous les points d'infini à être algébriques et tous les $A_i$ et $B_i$ à être nuls. Supposons que tous les infinis algébriques soient simples et désignons par $m$ leur nombre ; en représentant par $Z_i$ une fonction devenant simplement infinie au point d'indice $i$, on aura, pour la forme générale des fonctions ayant les $m$ infinis donnés,

$$a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + \ldots + a_m Z_m + c_1 w_1 + \ldots + c_p w_p + C.$$

Si on assujettit les A et les B à être nuls, on trouve qu'il ne peut y avoir de fonctions univoques du lieu que si $Z = p + 1$, et alors ces fonctions contiennent $m - p + 1$ constantes linéairement indépendantes. L'ensemble de ces fonctions existant sur la surface considérée forme donc un *continuum* à $2m - p + 1$ dimensions et la fonction $u + iv$ peut prendre une valeur donnée quelconque $u_0 + iv_0$ précisément en $m$ positions.

**14.** *Surfaces ordinaires de Riemann sur le plan $x + iy$.* — On peut figurer sur un plan la distribution des valeurs de la fonction que nous appelons alors $x + iy$ au lieu de $u + iv$. On obtient ainsi à la fois une application conforme de notre surface sur le plan, et aussi les surfaces à plusieurs feuilles et à points de ramification que l'on appelle *surfaces de Riemann*. Dans les conditions indiquées précédemment, la surface a $m$ feuilles; à un point de croisement d'ordre $\nu$, $\nu + 1$ feuilles se trouvent reliées en sorte que, si l'on tourne autour de ce point, on passe de la première feuille dans la deuxième, de la deuxième dans la troisième, ..., de la $(\nu + 1)^{\text{ième}}$ dans la première. En ces points la conformité ne subsiste plus. On voit dès lors le passage immédiat aux surfaces recouvertes de plusieurs feuilles.

On reconnaît aussi que le nombre $p$, ainsi que les modules de périodicité, sont des choses essentielles, tandis que la position et le mode d'existence des points de ramification ne sont que des faits secondaires.

15. *L'anneau, $p = 1$, et la surface à deux feuilles et quatre points de ramification sur le plan.* — Dans le cas du tore, M. Klein effectue réellement l'application sur le plan.

16. *Fonctions de $x + iy$ qui répondent aux courants étudiés.* — Soit $w$ une fonction complexe de lieu qui sur notre surface est aussi bien que $x + iy$ univoque; $w$ est une fonction algébrique de $z$. L'équation irréductible $f(w, z) = 0$ entre $w$ et $z$ est en $w$ du $m^{\text{ième}}$ ordre et en $z$ du $n^{\text{ième}}$.

De plus, $w_1$ donne une nouvelle fonction univoque sur notre surface, $w_1$ est une fonction rationnelle de $w$ et $z$, et réciproquement toute fonction rationnelle de $w$ et $z$ est une fonction de même caractère que $w_1$.

Si l'on considère les fonctions plurivoques sur la surface, on trouve qu'une telle fonction W est de la forme

$$W = \int R(w_1, z)\,dz,$$

et la réciproque est vraie : toute intégrale de cette espèce représente sur la surface une fonction du lieu.

17. *Portée et signification de nos considérations.* — Il résulte

des développements précédents que, en fait, c'est l'ensemble des fonctions algébriques et de leurs intégrales qui s'est présenté dans les recherches de M. Klein. On a vu combien des considérations physiques simples se prêtaient facilement à l'étude des caractères fondamentaux des fonctions. On reconnaît aussi, inversement, dans la théorie de Riemann, un moyen de simplifier l'étude analytique de l'application conforme des surfaces fermées l'une sur l'autre.

**18.** *Extension de la théorie.* — Au lieu de considérer seulement des surfaces applicables l'une sur l'autre conformément, on peut prendre également toute surface qui, par une déformation continue, peut se transformer en la surface donnée, et plus généralement tout composé géométrique dont les éléments correspondent univoquement et d'une façon continue à ceux de la surface primitive. Les surfaces normales considérées (n° 8) constituent un exemple de la première correspondance; les réseaux polygonaux, bien des fois employés par M. Klein (*Math. Annalen,* XIV), par M. Dyck (*Math. Annalen,* XVII), fournissent des exemples du second mode de représentation.

## TROISIÈME PARTIE.

### *Conséquences.*

**19.** *Sur les modules des équations algébriques.* — M. Klein s'occupe maintenant de la détermination des modules des fonctions algébriques, c'est-à-dire de la détermination des constantes qui jouent dans les transformations univoques relatives à $f(w, z) = 0$ le rôle d'invariants. Il démontre que le nombre des modules est égal à 0 pour $p = 0$, égal à 1 pour $p = 1$, et à $3p - 3$ pour $p > 1$.

**20.** *Application conforme des surfaces fermées sur elles-mêmes.* — Il y a à distinguer deux sortes d'applications : l'une dans laquelle le sens des angles est conservé, l'autre où il y a pour ainsi dire réflexion des angles : applications de première et de seconde espèce. Les surfaces pour lesquelles $p = 0$ ou $p = 1$ peuvent d'une infinité de manières être représentées conformément sur elles-mêmes par des applications de première espèce; pour des surfaces à $p > 1$, cela est impossible. Si $p = 0$, l'application de première espèce se trouve définie quand on détermine les trois points correspondants à trois points donnés. Si $p = 1$, on peut faire correspondre à un point quelconque de la surface un second point à volonté, et, en général, il y a encore deux modes d'application ; dans un cas particulier, il peut y en avoir quatre ou six.

Pour les surfaces de $p = 0$, il y a une infinité de transformations de seconde espèce qui peuvent les appliquer conformément l'une sur l'autre ; si $p = 1$, il n'y a plus en général de telle transformation ; de même pour $p > 1$. Il n'y a exception que si l'on a des surfaces symétriques.

21. *Examen particulier des surfaces symétriques.* — On dit que l'on a affaire à des surfaces symétriques quand il y a des transformations qui font correspondre par couples les points de la surface. Certains points dans ces transformations restent fixes et constituent les courbes de passage (*Uebergangscurven*). Le nombre de ces courbes ne peut jamais être plus grand que $p + 1$. A ce genre de recherches se rattachent les travaux de M. Dyck (*Math. Annalen,* XVII), de M. Cayley (*ibid.*, XV), etc.

22. *Application conforme de différentes surfaces l'une sur l'autre.* — Les surfaces $p = 0$ peuvent toujours être appliquées conformément l'une sur l'autre. Si $p > 0$, pour qu'il puisse y avoir application conforme des deux surfaces, il y a pour $p = 1$ deux équations de condition entre les constantes réelles des surfaces ; pour $p > 1$, il y en a $6p - 6$. Si l'on a affaire à des surfaces symétriques, le nombre des conditions diminue ; si $p = 1$, il suffit que les deux surfaces aient le même invariant ; si $p > 1$, il n'y a plus à écrire que $3p - 3$ équations entre les constantes réelles des surfaces.

23. *Surfaces limitées et surfaces doubles.* — M. Klein, dans ce paragraphe, montre comment les considérations précédentes peuvent être étendues à des surfaces limitées par des bords (*Randcurven*) et aux surfaces doubles ou à un seul côté. Il montre alors les liens qui rattachent sa théorie à la méthode de Schottky (*Borchardt's Journal,* Bd. 83) et à celle de Schwarz [*Ueber die Abbildung geschlossener Polyederflächen auf die Kugel* (*Ber-*

*liner Monatsberichte,* 1865, p. 150 et suiv., et *Borchardt's Journal,* Bd. 70; p. 121-136; Bd. 75, p. 330].

**24.** *Remarque finale.* — M. Klein ne s'est occupé dans le Chapitre précédent que de la correspondance univoque établie entre deux surfaces au moyen de l'application conforme. Riemann avait aussi pensé aux correspondances plurivoques. On devrait imaginer les deux surfaces à examiner ayant plusieurs feuilles et appliquer conformément l'une sur l'autre ces deux surfaces à feuillets. Les points de ramification que peuvent posséder ces surfaces fourniraient de nouvelles constantes complexes dont la considération serait nécessaire. Un cas particulier a d'ailleurs été effectivement traité dans le n° 15 de ce Mémoire.

On voit dès lors, sans avoir traité à fond cette question, comment elle se rattache aux autres spéculations de Riemann ayant rapport à la théorie des fonctions et dont il a été question dans le Mémoire de M. Klein. G. B.