BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

GOURSAT

Sur les intégrales algébriques des équations linéaires

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 6, n° 1 (1882), p. 120-124
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1882_2_6_1_120_1>

SUR LES INTÉGRALES ALGÉBRIQUES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES;

PAR M. GOURSAT.

Soit

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\frac{dy}{dx} + by \tag{1}$$

une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients rationnels; si l'intégrale générale de cette équation est une fonction algébrique, il est clair que, entre deux intégrales quelconques, il existera une relation algébrique à coefficients constants. Mais la proposition réciproque n'a été, du moins à ma connaissance, établie nulle part; je me propose de montrer que, sauf des cas tout particuliers, quand deux intégrales distinctes de l'équation (1) sont liées par une relation algébrique, ces intégrales sont elles-mêmes des fonctions algébriques de la variable x.

Soient donc y_1, y_2 deux intégrales linéairement indépendantes de l'équation (1), liées par la relation $F(y_1, y_2) = 0$, où F désigne une fonction entière à coefficients constants. Des deux équations

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = a\frac{dy_1}{dx} + by_1, \tag{2}$$

$$\frac{d^2y_2}{dx^2} = a\frac{dy_2}{dx} + by_2, \tag{3}$$

---

(1) Pour la définition des fonctions $\vartheta(v_1, \ldots, v_r)$, comparez : *Journal fur Mathematik*, t. LXXXI, p. 170.

on tire

$$(4)\qquad b = \frac{\dfrac{d^2y_2}{dx^2}\dfrac{dy_1}{dx} - \dfrac{d^2y_1}{dx^2}\dfrac{dy_2}{dx}}{y_2\dfrac{dy_1}{dx} - y_1\dfrac{dy_2}{dx}},$$

D'ailleurs, si l'on considère y_2 comme une fonction de y_1, on a

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\dfrac{dy_2}{dx}}{\dfrac{dy_1}{dx}},$$

$$\frac{d^2y_2}{dy_1^2} = \frac{\dfrac{d^2y_2}{dx^2}\dfrac{dy_1}{dx} - \dfrac{d^2y_1}{dx^2}\dfrac{dy_2}{dx}}{\left(\dfrac{dy_1}{dx}\right)^3};$$

et la relation (4) devient

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 = \frac{y_2 - y_1\dfrac{dy_2}{dy_1}}{\dfrac{d^2y_2}{dy_1^2}}.$$

Désignons par u l'expression contenue dans le second membre; u sera liée à y_1 par une relation algébrique à coefficients constants $f(u, y_1) = 0$, qu'il sera facile de calculer en partant de la relation $F(y_1, y_2) = 0$.

La fonction y_1 de x vérifiera donc les deux équations différentielles

$$(2)\qquad \frac{d^2y_1}{dx^2} = a\frac{dy_1}{dx} + by_1,$$

$$(5)\qquad \frac{1}{b}\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 = u;$$

différentions les deux membres de la dernière par rapport à x, et divisons par $\frac{dy_1}{dx}$. On obtient une nouvelle relation

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{1}{2b}\frac{db}{dx}\frac{dy_1}{dx} + \frac{b}{2}\frac{du}{dy_1},$$

qui, combinée avec l'équation (2), nous donne

$$\left(2ab - \frac{db}{dx}\right)\frac{dy_1}{dx} = b^2\left(\frac{du}{dy_1} - 2y_1\right).$$

Enfin, si l'on compare cette dernière avec l'équation (5), on obtient la relation

$$(6)\qquad \frac{\left(2ab - \frac{db}{dx}\right)^2}{b^3} = \frac{\left(\frac{du}{dy_1} - 2y_1\right)^2}{u},$$

Si $\dfrac{\left(2ab - \frac{db}{dx}\right)^2}{b^3}$ ne se réduit pas à une quantité constante, en éliminant u et $\dfrac{du}{dy_1}$ entre l'équation (6) et les équations $f(u, y_1) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y_1} + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dy_1} = 0$, on sera conduit à une relation algébrique entre x et y_1. L'*intégrale générale de l'équation* (1) *est donc une fonction algébrique.*

M. Appell a montré (*Annales de l'École Normale*, t. X, p. 418) comment on pouvait reconnaître l'existence d'une relation algébrique entre deux intégrales linéairement indépendantes de l'équation (1), et comment on pouvait calculer les coefficients constants qui entrent dans cette relation quand on se donne les valeurs initiales de ces deux intégrales et de leurs dérivées premières, pour une valeur de x qui ne coïncide pas avec un point singulier de l'équation différentielle. On pourra donc, dans ces cas, trouver l'intégrale générale de l'équation (1) par de simples éliminations.

Les conclusions précédentes sont en défaut si $\dfrac{\left(2ab - \frac{db}{dx}\right)^2}{b^3}$ ne contient pas x; mais, dans ces cas, il est aisé de reconnaître que l'intégration de l'équation (1) se ramène à des quadratures. Supposons d'abord que l'on ait $\dfrac{db}{dx} - 2ab = 0$; alors l'équation (1) admet les deux intégrales

$$y_1 = \sin[\varphi(x)], \quad y_2 = \cos[\varphi(x)],$$

où

$$\varphi(x) = \int \sqrt{b}\, dx.$$

Entre ces deux intégrales existe la relation

$$y_1^2 + y_2^2 = 1.$$

Si l'on a

$$\left(\frac{db}{dx} - 2ab\right)^2 = hb^3,$$

h étant différent de zéro, en faisant un changement de variable $x = f(\zeta)$ de façon à annuler le coefficient de $\frac{dy}{d\xi}$, l'équation (1) devient

$$(1') \qquad \left(\frac{\sqrt{h}}{2}\xi + \alpha\right)^2 \frac{d^2 y}{d\xi^2} = y;$$

elle admet les deux intégrales

$$y_1 = \left(\frac{\sqrt{h}}{2}\xi + \alpha\right)^{r_1}, \quad y_2 = \left(\frac{\sqrt{h}}{2}\xi + \alpha\right)^{r_2},$$

r_1 et r_2 désignant les deux racines de l'équation

$$hr(r-1) - 4 = 0.$$

Il y aura une relation algébrique entre y_1 et y_2, si les deux racines de cette équation sont commensurables entre elles.

Ces cas exceptionnels écartés, je remarque que les considérations précédentes s'appliquent sans modification à des équations différentielles linéaires du second ordre d'une forme plus générale que l'équation (1) : ce sont les équations

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \varphi(x, y)\frac{dz}{dx} + \psi(x, y) z,$$

où $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ désignent des fonctions rationnelles de x et de y, y étant liée à x par une relation algébrique $F(x, y) = 0$. De pareilles équations ont été considérées par M. Appell dans diverses communications. La méthode précédente prouve que, s'il existe une relation algébrique entre deux intégrales d'une équation de cette forme, l'intégrale générale est elle-même une fonction algébrique. Si le genre de la relation $F(x, y) = 0$ est égal à l'unité, alors x et y peuvent s'exprimer par des fonctions uniformes doublement périodiques d'un paramètre t, et l'intégrale générale est elle-même une fonction algébrique de $\sin \operatorname{am} t$.

Enfin, je ferai remarquer que la même méthode s'applique à toute équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients quelconques, quand on connaît une relation, algébrique ou non, entre deux intégrales distinctes de cette équation. Elle permet de former l'intégrale générale par des différentiations et des éliminations, sauf, bien entendu, dans les cas exceptionnels que j'ai signalés plus haut.