BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

J. TANNERY

Sur la suite de Schwab

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 5, nº 1 (1881), p. 454-456
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_454_1>

SUR LA SUITE DE SCHWAB;

PAR M. J. TANNERY.

Dans le Volume consacré à la mémoire de Chelini, M. Borchardt a traité la question suivante :

Étant donnés deux nombres positifs a_1, b_1, *on fait*

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad b_1 = \sqrt{a_1 b},$$

$$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, \qquad b_2 = \sqrt{a_2 b_1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

trouver la limite de la suite indéfinie,

$$a,\ b,\ a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \dots.$$

L'Analyse de M. Borchardt est fort élégante; toutefois, je ne crois pas inutile de faire remarquer qu'on peut parvenir par une voie entièrement élémentaire à la solution du problème que l'illustre géomètre n'a pas cru indigne de ses efforts.

Soit d'abord $a < b$; je pose

$$a = b\cos\alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$$

on aura

$$a_1 = b\cos^2\frac{\alpha}{2}, \quad b_1 = b\cos\frac{\alpha}{2}, \quad a_1 = b_1\cos\frac{\alpha}{2},$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1 \quad \cos\frac{\alpha}{4}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_n &= b_{n-1}\cos\frac{\alpha}{2^n} = b\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^n}, \end{aligned}$$

ou

$$b_n = \frac{b\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}},$$

puis

$$a_n = b_n\cos\frac{\alpha}{2^n}.$$

De là résulte immédiatement que a_n et b_n ont, pour n infini, la limite commune

$$\frac{b\sin\alpha}{\alpha}.$$

Soit maintenant $a > b$; je pose

$$a = b\,\mathrm{ch}\,\alpha, \quad \mathrm{ch}\,\alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}, \quad \mathrm{sh}\,\alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2},$$

α étant un nombre positif.

On aura de même

$$\frac{b\,\mathrm{sh}\,\alpha}{2^n\,\mathrm{sh}\,\frac{\alpha}{2^n}}, \quad a_n = b_n\,\mathrm{ch}\,\frac{\alpha}{2^n},$$

et l'on voit que la limite commune de a_n et b_n, pour n infini, est

$$\frac{b\,\mathrm{sh}\,\alpha}{\alpha}.$$

Enfin, on arriverait à des propositions du même genre, plus ou moins simples, en prenant pour point de départ, non les expressions de $\sin 2x$, $\mathrm{sh}\,2x$, mais les formules qui donnent $\mathrm{tang}\,2x$, $\sin 3x$, $\mathrm{sn}\,2x$, etc.