

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

E. CATALAN

Théorème de Staudt et Clausen

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2^e série,
tome 4, n° 1 (1880), p. 77-82

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1880_2_4_1_77_1>

© Gauthier-Villars, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉLANGES.

THÉORÈME DE STAUDT ET CLAUSEN;

PAR M. E. CATALAN.

I. — LÈMMES PRÉLIMINAIRES.

I. *Si n est un nombre non premier, supérieur à 4, on a*

$$1.2.3\dots(n-2) = \mathfrak{N}n.$$

Soit $n = abc\dots$, les facteurs $a, b, c, \dots$ étant *premiers entre eux, deux à deux*. Chacun de ces facteurs ne surpasse pas $\frac{n}{2}$; donc il se rencontre dans la suite $2, 3, \dots, (n-2)$. Par conséquent, le produit $1.2.3\dots(n-2)$ est divisible par $abc\dots$.

II. Si n est un nombre premier,

$$\frac{(n-2)(n-3)\dots(n-k)}{1.2\dots(k-1)} = \mathfrak{N} n \mp k,$$

selon que k est pair ou impair.

Si k est pair,

$$(n-2)(n-3)\dots(n-k) + 1.2.3\dots(k-1)k = \mathfrak{N} n.$$

Chacune des parties du premier membre est divisible par $2.3\dots(k-1)$.
De plus, ce produit est premier avec n . Donc

$$\frac{(n-2)(n-3)\dots(n-k)}{1.2\dots(k-1)} + k = \mathfrak{N} n.$$

Même démonstration si k est impair.

III. n étant un nombre premier, impair, et p étant un nombre entier moindre que $n-1$, on a

$$S_{p, n-1} = 1^p + 2^p + \dots + (n-1)^p = \mathfrak{N} n \quad (1).$$

IV. Si n est un nombre premier, impair, on a

$$S_{n-1, n-1} = 1^{n-1} + 2^{n-1} + \dots + (n-1)^{n-1} = \mathfrak{N} n - 1.$$

D'après le théorème de Fermat, chacune des puissances $n-1$ est un multiple de n , augmenté de l'unité; donc

$$S_{n-1, n-1} = \mathfrak{N} n + (n-1) = \mathfrak{N} n - 1.$$

V. (Corollaire des lemmes III et IV.) n étant un nombre premier, impair, la somme $S_{p, n-1}$ est un multiple de n , diminué de l'unité, ou un multiple de n , selon que $n-1$ divise ou ne divise pas l'exposant p .

VI. Les nombres de Bernoulli sont donnés par chacune des

(1) Ce curieux théorème, presque évident, a été démontré par M. Lionnet (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. I, 1843). J'ignore à qui on le doit.

deux formules :

$$(A) \quad B_q = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \Delta(1^q) + \frac{1}{4} \Delta^2(1^q) - \dots \pm \frac{1}{n} \Delta^{n-2}(1^q) \mp \dots - \frac{1}{q+2} \Delta^q(1^q),$$

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_q = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \varphi(1, q) + \frac{1 \cdot 2}{4} \varphi(2, q) - \dots \\ \quad \pm \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2)}{n} \varphi(n-2, q) \mp \dots \\ \quad - \frac{1 \cdot 2 \dots q}{q+2} \varphi(q, q), \end{array} \right.$$

dans lesquelles q est impair ⁽¹⁾.

II. — THÉORÈME DE STAUDT ET CLAUSEN.

Soient $n, n', n'', \dots$ les nombres premiers, impairs, tels que $n-1, n'-1, n''-1, \dots$ divisent $q+1$. Le $q^{\text{ième}}$ Nombre de Bernoulli, B_q , est donné par la formule

$$(C) \quad -B_q = E_q + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} + \dots,$$

dans laquelle E_q est un entier, positif ou négatif.

Démonstration. — Il s'agit d'examiner quelles sont, dans la formule (A), les fractions réductibles à des nombres entiers.

$$1^{\circ} \quad \frac{1}{4} \Delta^2(1^q) = \frac{1}{4} (3^q - 2 \cdot 2^q + 1^q).$$

q étant impair, $3^q = 3 \cdot 4 - 1$. Donc la quantité entre parenthèses est un multiple de 4; et, en conséquence,

$$\frac{1}{4} \Delta^2(1^q) = \text{entier}.$$

(1) Sur les différences de 1^n , et sur le calcul des Nombres de Bernoulli (*Mélanges mathématiques; Annali di Matematica*, 1859). Dans cette Note, les nombres entiers $\varphi(1, q), \varphi(2, q), \dots$ sont désignés par $B_q, C_q, \dots$

2° Si n est un nombre composé, supérieur à 4,

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2)}{n} q(n-2, q) = \text{entier};$$

d'après le lemme I.

3° Soit n premier, impair.

On a

$$(D) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta^{n-2}(1^q) &= (n-1)^q - \frac{n-2}{1} (n-2)^q \\ &+ \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} (n-3)^q - \dots + \frac{n-2}{1} 2^{q-1}. \end{aligned} \right.$$

Par le lemme II, le second membre égale

$$\mathfrak{N}n + (n-1)^q + 2(n-2)^q + 3(n-3)^q + \dots - 2 \cdot 2^q - 1,$$

ou

$$\mathfrak{N}n - [(n-1)^{q+1} + (n-2)^{q+1} + \dots + 2^{q+1} + 1^{q+1}].$$

Ainsi

$$(E) \quad \Delta^{n-2}(1^q) = \mathfrak{N}n - S_{q+1, n-1}.$$

Il y a, maintenant, deux cas à distinguer :

Si $n-1$ ne divise pas $q+1$, le second membre est un multiple de n , puis

$$\frac{1}{n} \Delta^{n-2}(1^q) = \text{entier}.$$

Si, au contraire, $n-1$ divise $q+1$, l'égalité (E) devient

$$\Delta^{n-2}(1^q) = \mathfrak{N}n - (\mathfrak{N}n - 1)$$

ou

$$\frac{1}{n} \Delta^{n-2}(1^q) = \text{entier} + \frac{1}{n}.$$

En résumé,

$$B_q = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{n'} - \frac{1}{n''} - \frac{1}{n'''} - \dots \pm \text{entier},$$

ou, ce qui est équivalent,

$$(F) \quad -B_q = E_q + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} + \frac{1}{n'''} + \dots$$

III. — REMARQUES.

1. Soit

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n''} + \frac{1}{n'''} + \dots = \frac{N}{2 \cdot 3 \cdot n' n'' n'''}.$$

Cette fraction est *irréductible*. Donc la forme la *plus simple* des nombres de Bernoulli est

$$(G) \quad B_q = \pm \frac{N_q}{2 \cdot 3 \cdot n' n'' n''' \dots}.$$

2. Tous les dénominateurs sont divisibles par 6.

3. Si $n' = 5$, $q = 204 - 1 : B_3, B_7, B_{11}, \dots$ contiennent, en dénominateur, le facteur 5.

De même, $B_5, B_{11}, B_{17}, \dots$ contiennent, en dénominateur, le facteur 7; etc.

4. Si 4 divise $q + 1$, et que les nombres $2n' - 1, 2n'' - 1, \dots$ soient composés, B_q et B_{2q+1} ont même partie fractionnaire.

Par exemple,

$$-B_{15} = +6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17},$$

$$-B_{31} = 15116315766 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17};$$

donc

$$B_{15} - B_{31} = 15116315760.$$

5. On sait que

$$(H) \quad B_q = \pm \frac{P_q}{2^{(2^{q+1}-1)}},$$

P_q étant un nombre *impair* ⁽¹⁾.

(1) *Mélanges mathématiques*, p. 131.

La comparaison des égalités (G), (H) donne

$$N_q = P_q : \frac{2^{q+1} - 1}{3 \cdot n' n'' \dots}$$

Ainsi, *au moyen des nombres* P_q [dont le calcul n'exige que des additions et des multiplications ⁽¹⁾], on peut déterminer le numérateur N_q . D'ailleurs, N_q est un diviseur de P_q .

6. Généralisation du lemme II :

$$C_{p+q,q} \pm C_{n-p-1,q} = \mathfrak{N} n \quad (\text{— si } q \text{ est pair}).$$

Par exemple,

$$\frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \mathfrak{N} 29.$$

(¹) A l'endroit cite, on trouve une formule qui revient à

$$P_q = \frac{q+1}{4} \left[P_{q-1} + \frac{(q-1)(q-2)}{3 \cdot 4} P_3 P_{q-1} \right. \\ \left. + \frac{(q-1)(q-2)(q-3)(q-4)}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} P_5 P_{q-5} + \dots \right. \\ \left. + \frac{(q-1)(q-2)}{3 \cdot 4} P_{q-1} P_3 + P_{q-2} \right].$$

A cause de $P_1 = 1$, $P_3 = 1$, elle donne, successivement :

$$P_5 = 3, \quad P_7 = 17, \quad P_9 = 155, \quad P_{11} = 2073,$$

$$P_{13} = 38227, \quad P_{15} = 929769, \quad P_{17} = 28820619, \quad \dots$$

Par suite :

$$N_1 = 1, \quad N_3 = 1, \quad N_5 = 1, \quad N_7 = 1, \quad N_9 = 5,$$

$$N_{11} = 691, \quad N_{13} = 7, \quad N_{15} = 3617, \quad N_{17} = 43867, \quad \dots,$$

puis

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = -\frac{1}{30},$$

$$B_9 = \frac{5}{66}, \quad B_{11} = -\frac{611}{2730}, \quad B_{13} = \frac{7}{6}, \quad B_{15} = -\frac{3617}{510}, \quad B_{17} = \frac{43867}{798}, \quad \dots$$

Si je ne me trompe, ce calcul est plus simple que celui qui consiste à déterminer, préalablement, les *parties entières* E_q .