

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

ARISTIDE MARRE

**Deux nouvelles lettres mathématiques
inédites du P. Jaquèmet, de l'Oratoire, de la
Maison de Vienne (Dauphiné)**

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2^e série,
tome 4, n^o 1 (1880), p. 200-207

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1880_2_4_1_200_1>

© Gauthier-Villars, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉLANGES.

DEUX NOUVELLES LETTRES MATHÉMATIQUES INÉDITES DU P. JAQUÈMET,
DE L'ORATOIRE, DE LA MAISON DE VIENNE (DAUPHINÉ);

PUBLIÉES PAR ARISTIDE MARRE.

I.

Lors qu'une équation n'a pas alternativement + et — dans tous ses termes ou ce qui est la même chose lorsqu'elle n'a pas + dans tous ses termes impairs et — dans tous ses termes pairs, on demande une méthode générale pour pouvoir lui donner cette forme. Pour cela 1^o je remarque qu'une équation ayant cette suite alternative des signes + et — dans tous ses termes, si on augmente chacune de ses racines d'une grandeur positive quelconque, l'équation transformée qui en proviendra, aura encore la même suite alternative des signes + et — dans tous ses termes comme il est évident par l'opération même etc. Cela posé 2^o soit l'équation

$$\text{F} \quad x^t + n x^{t-1} - \varepsilon n^2 x^{t-2} + \varepsilon^2 n^3 x^{t-3} - \varepsilon^3 n^4 x^{t-4} + \varepsilon^4 n^5 x^{t-5} - \varepsilon^5 n^6 x^{t-6} \dots,$$

laquelle a la disposition la plus opposée à celle qu'on demande, puisqu'excepté le premier terme, elle a + partout ou elle devrait avoir —, et — ou elle devrait avoir +; 3^o je remarque que l'équation F est le produit de $x + \varepsilon n$ par l'équation

$$\text{C} \quad x^{t-1} - \frac{\varepsilon - 1}{1} \varepsilon^0 n x^{t-2} + \frac{\varepsilon - 2}{1} \varepsilon^1 n^2 x^{t-3} - \frac{\varepsilon - 3}{1} \varepsilon^2 n^3 x^{t-4} + \frac{\varepsilon - 4}{1} \varepsilon^3 n^4 x^{t-5} \dots,$$

dans laquelle la disposition des signes est telle qu'on la demande, et par conséquent que les racines de lequation F sont lune la grandeur negative $-\varepsilon n$ et les autres les mesmes que celles de l'equation C. Cela estant 4° si on augmente chaque racine de lequation F de la grandeur positive $+\varepsilon n$ on aura lequation transformée B dont les racines seront l'une $-\varepsilon n + \varepsilon n = 0$ et les autres les mesmes que celles de lequation C augmentées chacune de la grandeur positive $+\varepsilon n$, 5° or je dis que cette equation B aura la suite alternative des signes que lon demande excepté au dernier de ses termes qui sera zero, car par 1° et 3° sup. si on augmente chacune des racines de lequation C de la grandeur positive $+\varepsilon n$, on aura une equation G dont tous les termes auront alternativement $+$ et $-$, mais multipliant lequation G par son inconnue $+$ ou $-$ zero ou simplement par son inconnue, ce qui ne change rien à la suite des signes, on aura une equation dont tous les termes auront alternativement $+$ et $-$ excepté le dernier terme qui sera zero, et cette equation sera lequation B par 4° sup. puisque ses racines sont lune zero et les autres les mesmes que celles de lequation C augmentées chacune de la grandeur positive $+\varepsilon n$ donc etc. 6° On peut voir dans Schooten sur le troisième livre de la geometrie de M. Descartes lettre H ⁽¹⁾ la manière de se servir de l'equation F

(1) Si l'on compare la lettre du P. Jaquemet au passage de Schooten auquel il renvoie son correspondant, on est conduit à la proposition suivante :

Considérons une équation algébrique

$$(F) \quad x^n + \dots - A_p x^{n-p} + \dots - A_q x^{n-q} + \dots = 0,$$

dont nous n'écrivons que les termes négatifs. Pour trouver une limite supérieure des racines positives de cette équation, comparons-la à la suivante,

$$(A) \quad x^n - \alpha x^{n-1} - n \alpha^2 x^{n-2} - n^2 \alpha^3 x^{n-3} - \dots = 0,$$

qui n'a qu'une racine positive dont la valeur est $n\alpha$. Tout nombre supérieur à $n\alpha$ rendra le premier membre de (A) positif, et il rendra aussi le premier membre de (F) positif si l'on a

$$A_p \leq n^{p-1} \alpha^p, \quad A_q \leq n^{q-1} \alpha^q, \quad \dots$$

Si donc on considère les quantités

$$n \sqrt[p]{\frac{A_p}{n^{p-1}}} = \sqrt[p]{n A_p}, \quad \sqrt[q]{n A_q}, \quad \dots,$$

comme d'une règle ou d'une formule pour connoître quelle doit être la valeur de n dans la grandeur positive $+\varepsilon n$ dont il faut augmenter chaque racine d'une équation afin quelle ait la suite des signes $+$ et $-$ dans tous ses termes. 7° On pourroit prendre l'équation

$$\begin{aligned} \Phi \quad x^4 + nx^{4-1} - \frac{\varepsilon-1}{1} \times \frac{\varepsilon+2}{2} n^2 x^{4-2} \\ + \frac{\varepsilon-1}{1} \times \frac{\varepsilon-2}{2} \times \frac{2\varepsilon+3}{3} n^3 x^{4-3} \\ - \frac{\varepsilon-1}{1} \times \frac{\varepsilon-2}{2} \times \frac{\varepsilon-3}{3} + \frac{3\varepsilon-4}{4} n^4 x^{4-4} \\ + \frac{\varepsilon-1}{1} \times \frac{\varepsilon-2}{2} \times \frac{\varepsilon-3}{3} \times \frac{\varepsilon-4}{4} \times \frac{4\varepsilon-5}{5} n^5 x^{4-5} \dots, \end{aligned}$$

laquelle est le produit de $x + \varepsilon n$ par l'équation H $\overline{x - \varepsilon n}^{4-1}$ et se servir comme d'une règle ou d'une formule comme de l'équation F. 8° Si on compare ensemble ces deux formules on verra que dans l'une et dans l'autre les premiers et deuxièmes termes sont les mêmes, que depuis le troisième degré l'équation Φ a le troisième terme plus grand mais les termes suivans plus petits que l'équation F, donc on peut connoître que l'on ne doit se servir de la formule Φ que lorsque la plus grande valeur de n est donnée par le troisième terme soit par exemple P $x^3 + 2x^2 - 170x + 360 = 0$. Par la formule F on aura 1° $n = 2$, 2° $3n^2 = 170$ et n entre 7 et 8, 3° $9n^3 = 360$ et n entre 3 et 4, ce qui donne 8 pour la plus grande

la plus grande de ces quantités sera une limite supérieure des racines positives de l'équation (F).

Cette règle est semblable à celles que l'on attribue à Maclaurin. Dans les deux cas, le nombre que l'on détermine dépend exclusivement de la valeur et de la place des coefficients négatifs, et il est supérieur au plus petit nombre qui rendrait positif le premier membre de l'équation auxiliaire

$$x^n - A_p x^{n-p} - A_q x^{n-q} - \dots = 0,$$

et par conséquent aussi le premier membre de l'équation proposée.

Le P. Jaquemot, au lieu de chercher une limite supérieure des racines positives, détermine une limite inférieure des racines négatives; mais on sait que l'un de ces problèmes est équivalent à l'autre.

G. D.

valeur de n . Par la formule Φ on aura $1^\circ n = 2$, $2^\circ 5n^2 = 170$ et n entre 5 et 6, $3^\circ 3n^3 = 360$ et n entre 4 et 5, ce qui donne 6 pour la plus grande valeur de n . Ainsi la grandeur $+\varepsilon n$ seroit 24 par la formule F et elle n'est que 18 par la formule Φ ce qui est un peu plus simple, mais comme il n'y a que le troisième terme seul qui soit avantageux à la formule Φ on peut dire que généralement parlant la formule F est la plus simple. 9° Ayant $Px^3 + 2x^2 - 170x + 360 = 0$ si à x on substitue $\overline{170 + 1} - \gamma$ on aura une transformée dont les racines positives seront les négatives de P, et les négatives les positives de P augmentées chacune de $+171$ et dont tous les termes auront alternativement $+$ et $-$; et si on avoit

$$P \quad x^3 - 2x^2 - 170x - 360 = 0$$

il faudroit par cette méthode substituer à x $\overline{360 + 1} - \gamma$ ou au moins $\overline{170 + 2 + 1} - \gamma$, au lieu que dans l'un et l'autre cas il ne faut substituer à x que $\gamma - 3 \times 8$ ou même $\gamma - 3 \times 6$ ce qui est bien plus simple. 10° M. Descartes dans le cas particulier de la formule F pour le sixième degré demande une autre condition qui est que le coefficient du troisième terme soit plus grand que le carré de la moitié de celui du second, ceste condition se trouve toujours remplie dans la transformée de l'équation B et par conséquent dans celle de l'équation P pourvu 1° que la valeur de ε soit au moins 3, et 2° que le coefficient du second terme de P n'ait point le signe $-$ car pour lors elle peut n'être point remplie. Soit par exemple $Px^3 - 18x^2 - 12x - 360 = 0$. La seule valeur de n et par conséquent la plus grande est $n = 2$ que donne $3n^2 = 12$. On a donc $\varepsilon n = 3 \times 2 = 6$, et dans la transformée de P le coefficient du troisième terme est $312 < \frac{1}{4} \overline{36}^2$ carré de la moitié de celui du second. Mais ayant une équation dont tous les termes ont alternativement $+$ et $-$, comme A $x^4 - nx^{4-1} + px^{4-2} - \dots$ si $\frac{1}{4}n^2 > p$ pour avoir une transformée ou $p > \frac{1}{4}n^2$ il n'y a qu'à augmenter les racines de A chacune de la grandeur positive $+\frac{n}{\varepsilon}$ cela suffira toujours depuis le troisième degré inclus car on aura pn^2 pour carré de la moitié du coefficient du second terme, et $\frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2\varepsilon}n^2 + p$ pour coefficient du troisième terme ce qui est plus grand que n^2 .

Je vous souhaite les bonnes festes et la bonne année, souvenez-vous de la cheminée (¹).

II.

Je viens de recevoir votre lettre mon tres cher ami, je vous suis obligé de ce que vous me mandez du Mans j'escri ray au p. — suivant ce que vous me mandez, j'escri ray aussi à Lion pour savoir quand la loterie se tirera, je vous remercie de la cheminée etc. je l'entend a peu pres mais j'apprehende que les massons de ce pais ne l'entendent pas assez pour l'executer, si on en fait imprimer la description, vous aurez la bonté de me l'envoyer. Vous me remerciez de mes lumieres mais elles sont si tenebreuses dans votre lettre que je ne les reconnois point, elles supposent dites vous le calcul différentiel qu'on ne peut point rendre facile a concevoir sans figures et sans geometrie, je crois vous avoir desja mandé que ce quelles supposent de ce calcul na besoin ni de figure ni de geometrie pour etre facilement entendu il me sera aisé de vous le faire voir quand vous le souhaitez, il s'agit de trouver les limites des racines des equations mesmes ou les racines sont incommensurables, et dont les différences peuvent etre si petites que lon voudra, il faut donc, quelque methode dont vous vous serviez, que vous alliez jusqu'aux différences indefiniment petites, or cela me suffit. Mais vous ne voyez point dites vous que les racines de B soient celles de A augmentées ou diminuées de la différentielle de chaque racine de A, je ne le vois

(¹) Cette lettre a pour suscription :

Au Reverend Pere

*Le Reverend pere Reyneau
pretre de l'oratoire rue du
louvre*

à Paris.

Le P. Reyneau, né à Brissac (Anjou), en 1656, mort en 1728, auteur de l'*Analyse démontrée*, 2 vol. in-4°, et des *Éléments de Mathématiques*, 2 vol. in-4°, professait les Mathématiques à Angers. Il se trouvait alors à Paris, à la maison de l'Oratoire de la rue du Louvre, qu'habitaient les PP. Malebranche et Bizance. Voir, dans le *Bullettino di Bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e fisiche* du prince Balthazar Boncompagni, t. XII, p. 886-891, une autre Lettre autographe du P. Jaquemet au P. Bizance, datée de Vienne, 26 janvier 1690, et la Notice consacrée à ces deux mathématiciens de l'Oratoire par Aristide Marre.

A. M.

point non plus, mais je vois ce me semble quelles sont les racines de A augmentées ou diminuées d'un multiple de la différentielle de chaque racine de A, cela me paroît fort différent. Vous ajoutez que vous ne trouvez point que la racine qui reste dans A et qui nest pas dans B soit moyenne entre la plus petite des positives et la plus grande des negatives de B, vous trouvez au contraire que si elle est positive elle doit surpasser toutes les positives, et si elle est negative elle doit surpasser toutes les negatives. Ces paroles « la racine qui reste dans A et qui nest pas dans B » font apparemment votre difficulté, mais ces paroles sont elles de moy ? je suis au moins tres assuré que ce nest point ce que jay voulu dire, mais le voicy : soit

$$A \quad x^4 - 44x^3 + 432x^2 + 2288x \pm q = 0,$$

$$B \quad x^3 - 33x^2 + 216x + 572 = 0.$$

Les racines de B sont $-2, +13, +22$ or cela estant je dis 1° que deux racines de A sont necessairement positives l'une plus grande ou au moins egale a $+22$, lautre plus grande ou au moins egale a $+13$, 2° qu'une racine de A est necessairement negative et quelle est ou plus petite ou au moins egale a -2 , 3° qu'il reste encore ou qu'il y a encore une racine de A qui doit etre moyenne entre -2 et $+13$ ou egale ou à -2 ou à $+13$, et que cette derniere racine a ne considerer que lequation B peut etre ou positive ou negative, mais quelle est positive ou negative selon que q aura le signe ou $-$ ou $+$ respectivement, et quelle sera zero si q est zero, voila surement ce que javois dit mais ce nest point ce que vous me faite dire. Javois dit, sil men souvient bien, « la racine reellevil y a de plus dans A que dans B », mais cela veut dire seulement que dans A il y a une racine réelle de plus que dans B ce qui me paroît incontestable. Il meseroit aisé d'ajouter « le plus forte raison » sur ce quil y a des imaginaires dans une equation dont le deuxième terme manque et dont le troisième a $+$ mais cela est inutile, vous en avez une autre raison et je vous remercie de me l'avoir communiquée, je passe à la formule de M. Descartes laquelle ne vous paroît point generale. Vous voyez bien dites vous quelle aura son effet dans toutes les equations representées par celle qui sert de formule mais les coefficients de cette formule étant des puissances exactes d'une mesme grandeur ont des limites, et ainsi la formule ne represente

pas toutes les équations possibles dans chaque degré. Voilà votre difficulté, mais cette difficulté sera levée si vous voulez bien remarquer 1° que $\overline{y - 6n}^6 = x^5$ (voyez M. Descartes pag. 79) a dans tous ses termes la suite alternative des signes telle qu'on la demande, 2° que $+n \times \overline{y - 6n}^1, -6n^2 \times \overline{y - 6n}^2$, etc. ont chacun dans tous leurs termes des signes opposés à ceux qu'on demande, 3° que dans chacun des termes de la transformée le signe de $\overline{y - 6n}^6$, qui est celui qu'on demande subsiste et reste après la soustraction des coefficients qui ont un signe opposé, 4° d'où il sensuit qu'à plus forte raison ces signes de $\overline{y - 6n}^6$ subsisteroient dans la transformée si dans la formule un ou plusieurs ou même tous les coefficients étoient plus petits qu'on ne les suppose, ou bien encore à plus forte raison si un ou plusieurs ou tous les coefficients de la formule étoient zéro, ou bien encore à plus forte raison si un ou plusieurs de ces coefficients avoient un signe opposé à celui qu'on leur suppose dans la formule, car alors leurs signes seroient favorables au lieu d'être contraires, mais 5° c'est ce qui arrive dans la manière dont on se sert de cette formule pag. 274. 1° On y néglige les termes de la proposée qui ont des signes différents de ceux de la formule, et cela parce que ces signes sont favorables au lieu d'être contraires. 2° On y prend la plus grande des valeurs de n données par la comparaison des autres termes et pour lors $\overline{y - 6n}^6$ suffiroit pour donner la suite alternative des signes à la proposée quand mêmes tous ses termes auroient les mêmes signes et les mêmes grandeurs proportionnelles que ceux de la formule, donc à plus forte raison etc. On peut appliquer la même preuve à l'autre formule etc. Je vous écrivis dimanche passé une lettre dans laquelle je vous mande une difficulté sur ces paroles de votre livre pag. 69 lig. 12 « comme on le suppose. » Je sais bien qu'on suppose que dans la proposée les imaginaires ne paroissent point, mais je ne vois point qu'il soit clair que dans toute équation où il y aura au moins quatre imaginaires on puisse toujours trouver une équation de second degré, formée par quelques deux imaginaires, dans le second terme de laquelle les imaginaires disparaîtront, on le pourra dans plusieurs cas mais il faut faire voir que cela se peut toujours, et c'est ce qui me paroît difficile à prouver, au lieu que ce qu'on veut prouver par là, se prouve bien

plus facilement sans cela, Je suis etc. Mes respects sil vous plait au
R. P. Malebranche (1).