

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

OSSIAN BONNET

**Note sur la formule qui sert de fondement à une
théorie des séries trigonométriques; (Extrait
d'une Lettre écrite à M. Darboux)**

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2^e série,
tome 3, n° 1 (1879), p. 480-484

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_480_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_480_0)

© Gauthier-Villars, 1879, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉLANGES.

NOTE SUR LA FORMULE QUI SERT DE FONDEMENT A UNE THÉORIE
DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES;

(Extrait d'une Lettre écrite à M. Darboux),

PAR M. OSSIAN BONNET.

Il y a longtemps que je possède une solution entièrement satisfaisante de la question assez délicate que M. du Bois-Reymond vient de traiter dans votre dernier *Bulletin*. J'ai fait allusion à cette solution dans mon Mémoire sur les séries couronné par l'Académie de Bruxelles (note au bas de la page 11), et, il y a deux ou trois ans, je l'ai communiquée à M. Hermite, qui était alors préoccupé de l'insuffisance des raisonnements de Poisson et de Cauchy.

Peut-être penserez-vous qu'en raison de leur extrême simplicité les considérations dont je fais usage pourront encore aujourd'hui intéresser vos lecteurs.

a et $b > a$ étant deux nombres finis quelconques, positifs ou négatifs, et comprenant un nombre quelconque de multiples pairs de π parmi lesquels nous comptons zéro, il s'agit de trouver la limite vers laquelle tend

$$(1) \quad \int_a^b \frac{(1 - \alpha^2) f(x) dx}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x}$$

lorsque α tend vers 1 en lui restant constamment inférieure.

Nous supposons que l'intervalle de a à b ne renferme comme multiple pair de π que zéro, de sorte que a sera négatif et supérieur à -2π , et b positif et inférieur à 2π . On sait du reste que le cas général se ramène à celui-là en décomposant l'intégrale proposée en plusieurs intégrales partielles et en faisant pour chacune de celles-ci un facile changement de variable. Soit ε un nombre positif que nous n'assujettirons pour le moment qu'aux conditions d'être inférieur à b , à $2\pi - b$ et aux valeurs absolues de a et de $-2\pi - a$. Décomposons l'intégrale (1) en quatre de la manière

suivante :

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{-1} \frac{(1-\alpha^2)f(x)dx}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x} + \int_{-1}^0 \frac{(1-\alpha^2)f(x)dx}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x} \\ & + \int_0^1 \frac{(1-\alpha^2)f(x)dx}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x} + \int_1^b \frac{(1-\alpha^2)f(x)dx}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x} \end{aligned} \right.$$

D'après les hypothèses faites sur ϵ , on a, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites de la première et de la quatrième intégrale,

$$\cos x < \cos \epsilon,$$

par suite

$$1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x > 1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \epsilon,$$

par suite

$$1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x > \sin^2 \frac{\epsilon}{2};$$

car

$$1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \epsilon = (1-\alpha)^2 \cos^2 \frac{\epsilon}{2} + (1+\alpha)^2 \sin^2 \frac{\epsilon}{2}$$

est évidemment

$$> \sin^2 \frac{\epsilon}{2};$$

et enfin

$$\frac{1}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x} < \frac{1}{\sin^2 \frac{\epsilon}{2}}.$$

Donc, si l'on appelle M un nombre positif égal ou supérieur à la plus grande valeur absolue que prend $f(x)$ quand x varie de a à b , le premier et le quatrième terme de la somme (2) seront, en valeur absolue, respectivement moindres que

$$\frac{(1-\alpha^2)M(-\alpha)}{\sin^2 \frac{\epsilon}{2}}, \quad \frac{(1-\alpha^2)Mb}{\sin^2 \frac{\epsilon}{2}}.$$

On en déduit que ces deux termes tendent vers zéro lorsque α tend vers 1, et cela quelle que soit la valeur attribuée à ϵ , pourvu que cette valeur reste invariable.

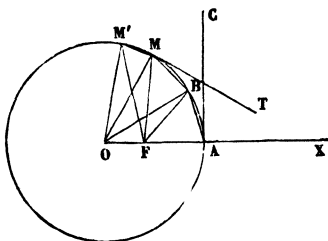
Reste à trouver les limites du deuxième et du troisième terme

de la somme (2), ou simplement de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{(1 - \alpha^2)f(x)dr}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x},$$

car l'autre intégrale se déduit de celle-ci en changeant $f(x)$ en $f(-x)$.

Décrivons une circonférence de rayon 1, et sur le rayon OA prenons une longueur OF = $\alpha < 1$; regardons x comme l'angle formé



par le rayon variable OM avec le rayon fixe OA, et soit BOA la valeur particulière de x désignée plus haut par ϵ . Tirons FM : nous formerons un second angle MFA, fonction de x , et que nous désignerons par γ . Nous allons d'abord évaluer la dérivée $\frac{d\gamma}{dx}$. Pour cela donnons à x un accroissement infiniment petit Δx , ce qui amènera OM en OM'; l'accroissement infiniment petit correspondant $\Delta \gamma$ de γ sera M'FM, et nous aurons

$$\frac{d\gamma}{dx} = \lim \frac{\Delta \gamma}{\Delta x} = \lim \frac{M'FM}{M'OM} = \lim \frac{\sin M'FM}{\text{corde } M'M} = \lim \frac{\sin FM'M}{FM} = \frac{\sin FMT}{FM},$$

MT étant la tangente à la circonférence de rayon 1 au point M; on peut encore écrire

$$\frac{d\gamma}{dx} = \frac{\cos FMO}{FM}.$$

Mais le triangle OMF donne

$$\overline{FM}^2 = 1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x, \quad \alpha^2 = 1 + \overline{FM}^2 - 2FM \cos FMO;$$

donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \overline{FM}^2 - \alpha^2}{2 \overline{FM}^2} = \frac{1}{2} + \frac{1 - \alpha^2}{2(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x)},$$

d'où

$$\frac{(1 - \alpha^2) dx}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x} = 2 dy - dx,$$

et par suite

$$\begin{aligned} \int_0^\epsilon \frac{(1 - \alpha^2) f(x) dx}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x} &= \int_0^\epsilon f(x) (2 dy - dx) \\ &= k \int_0^\epsilon (2 dy - dx) = k(2 \text{BFA} - \text{BOA}), \end{aligned}$$

en appelant k une quantité convenable comprise entre la plus petite et la plus grande des valeurs que reçoit $f(x)$ lorsque x varie de 0 à ϵ . Faisant maintenant tendre α vers 1 ou le point F vers le point A, en laissant ϵ constant, c'est-à-dire en laissant le point B fixe, BFA tendra vers BAX = $\frac{\pi}{2}$ + BAC = $\frac{\pi}{2}$ + $\frac{1}{2}$ BOA; donc la limite de l'intégrale sera πk .

k représente, avons-nous dit, une certaine quantité comprise entre la plus petite et la plus grande des valeurs que reçoit $f(x)$ lorsque x varie de 0 à ϵ ; mais, comme ϵ peut être pris aussi petit que l'on veut, on voit que k ne peut être que $f(0)$ ou plutôt que $f(+0)$, en représentant ainsi la limite vers laquelle tend $f(x)$ lorsque x tend vers zéro en restant positif; ainsi

$$\lim \int_0^\epsilon \frac{f(x)(1 - \alpha^2) dx}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x} = \pi f(+0).$$

On trouverait de même

$$\lim \int_{-\epsilon}^0 \frac{f(x)(1 - \alpha^2) dx}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x} = \pi f(-0),$$

$(f-0)$ étant la limite vers laquelle tend $f(x)$ lorsque x tend vers zéro en restant négatif; par conséquent,

$$\lim \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{f(x)(1 - \alpha^2) dx}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x} = \pi [f(+0) + f(-0)].$$

Si le seul multiple pair de π compris entre a et b , au lieu d'être zéro, était $2n\pi$, on aurait

$$\lim \int_a^b \frac{(1 - \alpha^2) f(x) dx}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x} = \pi [f(2n\pi + 0) + f(2n\pi - 0)],$$

et, si a et b comprenaient un nombre fini quelconque de multiples pairs de π , $2n\pi$, $2(n+1)\pi$, $2(n+2)\pi$, ..., $2(n+p)\pi$, on aurait

$$(3) \left\{ \begin{aligned} & \lim \int_a^b \frac{(1 - \alpha^2) f(x) dx}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x} \\ &= \pi \left\{ \begin{aligned} & f(2n\pi + 0) + f[2(n+1)\pi + 0] + f[2(n+2)\pi + 0] + \dots + f[2(n+p)\pi + 0] \\ & + f(2n\pi - 0) + f[2(n+1)\pi - 0] + f[2(n+2)\pi - 0] + \dots + f[2(n+p)\pi - 0] \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

Ajoutons encore que, lorsque la limite supérieure b de l'intégrale est un multiple pair de π , on doit introduire dans le second membre de l'équation (3) un nouveau terme égal à $\pi f(b - 0)$, et que, lorsque la limite inférieure a est un multiple pair de π , on doit encore tenir compte de $\pi f(a + 0)$.