BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

F. CASORATI

Quelques formules fondamentales pour l'étude des équations différentielles algébriques du premier ordre et du second degré entre deux variables et à intégrale générale algébrique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 3, nº 1 (1879), p. 42-48

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_42_1>

MÉLANGES.

QUELQUES FORMULES FONDAMENTALES POUR L'ÉTUDE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES DU PREMIER ORDRE ET DU SECOND DEGRÉ ENTRE DEUX VARIABLES ET A INTÉGRALE GÉNÉRALE ALGÉBRIQUE (¹);

PAR F. CASORATI,
Professeur à l'Université de Pavie.

(TRADUIT PAR E. DEWULF.)

1. Représentons par a, b, c trois fonctions des variables u, v, et considérons la résultante de l'élimination de la constante arbitraire Ω entre

$$a\Omega^2 + 2b\Omega + c = 0 \tag{1}$$

et la différentielle

$$da\Omega^2 + 2db\Omega + dc = 0.$$

(¹) *Alcune formole fondamentali per lo studio delle equazioni algebrico-differenziali di primo ordine e secondo grado tra due variabili ad integrale generale algebrica.* (Note lue dans la séance du 10 décembre 1874 de l'*Institut royal Lombard.*) Cette Note sera suivie d'applications.

Cette résultante est

$$(2)\qquad (c\,da - a\,dc)^2 - 4(a\,db - b\,da)(b\,dc - c\,db) = 0.$$

Posons

$$(3)\quad g = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix},\quad k = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \dfrac{\partial a}{\partial u} & \dfrac{\partial b}{\partial u} & \dfrac{\partial c}{\partial u} \\ \dfrac{\partial a}{\partial v} & \dfrac{\partial b}{\partial v} & \dfrac{\partial c}{\partial v} \end{vmatrix},\quad k^2 = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_u & b_u & c_u \\ a_v & b_v & c_v \end{vmatrix};$$

le dernier déterminant est le déterminant à éléments réciproques, ou, en d'autres termes, celui du système adjoint au système des éléments de k.

La valeur de g permet de mettre (2) sous la forme importante

$$(2_2)\qquad (dg)^2 - 4g[da\,dc - (db)^2] = 0.$$

On a donc pour la résultante les deux expressions suivantes en du, dv :

$$(2_3)\qquad (b_v\,du - b_u\,dv)^2 - 4(c_v\,du - c_u\,dv)(a_v\,du - a_u\,dv) = 0,$$

$$(2_4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial v}dv\right)^2 - 4g\Bigg[\left(\frac{\partial a}{\partial u}du + \frac{\partial a}{\partial v}dv\right)\left(\frac{\partial c}{\partial u}du + \frac{\partial c}{\partial v}dv\right) \\ &\qquad\qquad - \left(\frac{\partial b}{\partial u}du + \frac{\partial b}{\partial v}dv\right)^2\Bigg] = 0. \end{aligned} \right.$$

Par suite, en représentant la résultante par

$$(2_5)\qquad \mathrm{A}\,du^2 + 2\mathrm{B}\,du\,dv + \mathrm{C}\,dv^2 = 0,$$

on obtient pour A, B, C les deux systèmes d'expressions

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A} &= b_v^2 - 4a_v c_v, \\ \mathrm{B} &= -b_u b_v + 2a_u c_v + 2a_v c_u, \\ \mathrm{C} &= b_u^2 - 4a_u c_u, \end{aligned} \right.$$

$$(4_2)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A} &= \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 - 4g\left[\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial c}{\partial u} - \left(\frac{\partial b}{\partial u}\right)^2\right], \\ \mathrm{B} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - 2g\left(\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial c}{\partial v} + \frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial c}{\partial u} - 2\frac{\partial b}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial v}\right), \\ \mathrm{C} &= \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 - 4g\left[\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial c}{\partial v} - \left(\frac{\partial b}{\partial v}\right)^2\right]. \end{aligned} \right.$$

Cherchons le rapport du déterminant

$$(5) \qquad G = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

et de g. On tire des formules (4)

$$G = 4(a_u b_v - a_v b_u)(b_u c_v - b_v c_u) - 4(c_u a_v - c_v a_u)^2,$$

et des formules (3), d'après une propriété des déterminants à éléments réciproques,

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial k^2}{\partial a_0} = b_u c_v - b_v c_u = ka, \\ \dfrac{\partial k^2}{\partial b_0} = c_u a_v - c_v a_u = kb, \\ \dfrac{\partial k^2}{\partial c_0} = a_u b_v - a_v b_u = kc; \end{cases}$$

le rapport cherché est donc exprimé par la formule remarquable (¹)

$$(7) \qquad \frac{G}{g} = 4k^2.$$

On peut introduire g et ses dérivées dans le déterminant k. Il résulte de cette opération trois formules que l'on obtient en exprimant les valeurs des inconnues c, $-2b$, a tirées du système des équations algébriques linéaires

$$(8) \qquad \begin{cases} ca - 2bb + ac = 2g, \\ c\dfrac{\partial a}{\partial u} - 2b\dfrac{\partial b}{\partial u} + a\dfrac{\partial c}{\partial u} = \dfrac{\partial g}{\partial u}, \\ c\dfrac{\partial a}{\partial v} - 2b\dfrac{\partial b}{\partial v} + a\dfrac{\partial c}{\partial v} = \dfrac{\partial g}{\partial v}, \end{cases}$$

(¹) Cette formule, que j'ai trouvée en 1869 en faisant des recherches que je n'ai pu reprendre avant cette année, a été trouvée aussi par M. Catalan, sous la forme

$$B^2 - 4AC = (P^2 - 4Q)\left(\frac{dP}{dx}\frac{dQ}{dy} - \frac{dP}{dy}\frac{dQ}{dx}\right)^2,$$

en faisant $a = 1$, dans l'élimination qu'il a eu à faire de la constante arbitraire c entre l'équation $c^2 + Pc + Q = 0$ et sa différentielle immédiate (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 4 juillet 1870).

et qui sont

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}
ck &= \begin{vmatrix} 2g & b & c \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial b}{\partial u} & \dfrac{\partial c}{\partial u} \\ \dfrac{\partial g}{\partial v} & \dfrac{\partial b}{\partial v} & \dfrac{\partial c}{\partial v} \end{vmatrix}, \\
-2bk &= \begin{vmatrix} a & 2g & c \\ \dfrac{\partial a}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial c}{\partial u} \\ \dfrac{\partial a}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial v} & \dfrac{\partial c}{\partial v} \end{vmatrix}, \\
ak &= \begin{vmatrix} a & b & 2g \\ \dfrac{\partial a}{\partial u} & \dfrac{\partial b}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial u} \\ \dfrac{\partial a}{\partial v} & \dfrac{\partial b}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix}.
\end{aligned}\right.$$

2. Toutes les formules ci-dessus subsistent, quelle que soit la nature des fonctions a, b, c, mais elles acquièrent une plus grande importance quand on suppose que les fonctions a, b, c sont algébriques, rationnelles, entières. Dans cette hypothèse, il faut remarquer d'abord, parmi les conséquences de ces formules, celles que l'on rencontre en comparant entre eux les deux discriminants et le déterminant k.

Un facteur qui entre m fois dans g entre au moins $m-1$ *fois dans k*. En effet, considérons, pour plus de simplicité, un facteur premier φ de ce facteur et qui y entre r fois : il entre $rm-1$ fois dans chaque élément d'une colonne du second membre de chacune des formules (9), et, par suite, le facteur φ entrera $rm-1$ fois dans chaque premier membre, c'est-à-dire dans k. Dans le cas où une puissance φ^μ de ce facteur diviserait simultanément a, b, c, le facteur $\varphi^{\mu-1}$ se trouverait dans les deux autres colonnes des seconds membres; on voit donc que φ doit entrer au moins $rm+\mu-2 \geqq m-1$ fois dans k, puisque φ^{rm-1}, $\varphi^{\mu-1}$, φ^μ et φ entrent respectivement dans les trois colonnes et dans la première ligne.

Mais de ce que des facteurs entrent dans k on ne peut pas conclure qu'ils entrent aussi dans g. En prenant, par exemple, une fonction a contenant $\varphi^{\mu+1}$ et une fonction b non divisible par φ, on aura φ^μ dans k, et g ne sera pas divisible par φ.

En comparant g et k, on peut prendre $ba - c^2$ ou $cb - a^2$ au lieu de $ac - b^2$ comme valeur de g.

Puisque k entre deux fois dans G, il résulte du théorème ci-dessus que k divise le déterminant

$$(10) \qquad \mathrm{K} = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial u} & \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial u} & \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial u} \\ \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} & \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial v} & \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

En désignant respectivement par

$$m, \quad m', \quad m''$$

les degrés de multiplicité d'un facteur premier dans

$$g, \quad k, \quad \mathrm{G},$$

la relation (7) donne

$$(11) \qquad m + 2m' = m'',$$

et de cette relation, combinée avec le théorème concernant g et k, on déduit les inégalités

$$(12) \qquad 3m' \geqq m'' - 1, \quad m'' \geqq 3m - 2, \quad m' \geqq m - 1.$$

Parmi les propositions ainsi écrites, il faut maintenant remarquer particulièrement les suivantes : *Tout facteur premier simple de* G *est facteur simple de* g *et ne divise pas* k; *tout facteur premier multiple de* G *est aussi facteur de* k.

3. Supposons maintenant que (1) soit l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(13) \qquad \alpha\, du^2 + 2\beta\, du\, dv + \gamma\, dv^2 = 0,$$

où α, β, γ représentent des fonctions rationnelles entières de u, v. En rapprochant cette équation de (2_3), on trouve

$$(14) \qquad \mathrm{A} = \theta\alpha, \quad \mathrm{B} = \theta\beta, \quad \mathrm{C} = \theta\gamma,$$

d'où

$$(15)\qquad G = 4(ac-b^2)\begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{\partial a}{\partial u} & \frac{\partial b}{\partial u} & \frac{\partial c}{\partial u} \\ \frac{\partial a}{\partial v} & \frac{\partial b}{\partial v} & \frac{\partial c}{\partial v} \end{vmatrix}^2 = \theta^2(\alpha\gamma-\beta^2),$$

et

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} A & B & C \\ \frac{\partial A}{\partial u} & \frac{\partial B}{\partial u} & \frac{\partial C}{\partial u} \\ \frac{\partial A}{\partial v} & \frac{\partial B}{\partial v} & \frac{\partial C}{\partial v} \end{vmatrix} = \theta^3 \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\partial \alpha}{\partial u} & \frac{\partial \beta}{\partial u} & \frac{\partial \gamma}{\partial u} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial v} & \frac{\partial \beta}{\partial v} & \frac{\partial \gamma}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Dorénavant nous supposerons toujours que les fonctions α, β, γ sont premières entre elles. Il résulte de là que le facteur rationnel θ doit être entier.

En désignant par σ le discriminant de (13), c'est-à-dire en posant

$$(17)\qquad \sigma = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix},$$

d'où

$$G = \theta^2\sigma,$$

nous écrirons (7) ou (15) comme il suit :

$$(18)\qquad 4gk^2 = \theta^2\sigma.$$

Il résulte de ce qui précède que *tout facteur premier de θ doit être facteur de k.* L'égalité

$$(19)\qquad \theta(\alpha du^2 + 2\beta du\,dv + \gamma dv^2) = (dg)^2 - 4g[da\,dc - (db)^2]$$

prouve qu'*un facteur qui entre une seule fois dans g ne divise pas θ*; car, s'il en était autrement, il devrait diviser dg ou les deux premières dérivées partielles de g, ce qui ne peut avoir lieu que pour des facteurs multiples de g. Pour ceux-ci, au contraire, l'égalité ci-dessus montre qu'*un facteur qui entre plusieurs fois dans g entre au moins autant de fois dans θ.*

En comparant σ et g, l'équation (18) nous montre que *tout facteur premier entre dans ces deux discriminants un nombre impair* *de fois ou entre dans ces deux discriminants un nombre pair de fois;* ainsi, en particulier, *les facteurs qui entrent un nombre impair de fois sont les mêmes pour les deux discriminants.* Nous noterons aussi, par rapport à σ et k, que *tout facteur qui entre plusieurs fois dans σ entre aussi dans k.*