BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

SABININE

Sur l'intégration des équations différentielles par les séries

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 2, nº 1 (1878), p. 284-292

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1878_2_2_1_284_1>

MÉLANGES.

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PAR LES SÉRIES.

(A propos d'un travail de M. Starkof, intitulé : *Zur Frage über die Integration linearer Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten*);

PAR M. SABININE,
Professeur à l'Université d'Odessa.

Dans le Mémoire de Cauchy intitulé : *Sur l'intégration des équations différentielles* (¹), il y a (p. 339 et 340, théorème III) une méthode d'intégration d'un système d'équations différentielles

(¹) Ce Mémoire, comme l'on sait, est inséré dans le tome Ier des *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique.*

par les séries. Le point de départ de cette méthode de Cauchy consiste dans l'application de la méthode des substitutions successives à l'intégration d'un système d'équations différentielles : d'après cela, un moyen d'intégration d'un *certain* système d'équations différentielles par les séries, qui a le même point de départ, et qui, en même temps, ne contient pas d'autre procédé qu'une suite de substitutions. Ce moyen ne renferme que les opérations qui découlent *directement* du point de départ de la méthode de Cauchy (1); par conséquent, ce moyen, sans doute, n'est pas autre chose que la méthode de Cauchy simplifiée, parce que, conformément à un *certain* système d'équations différentielles, le procédé qui consiste seulement dans une suite de substitutions est mis à la place de l'autre méthode de Cauchy (2), dont le point de départ consiste dans la réduction de l'intégration d'un système d'équations différentielles à l'intégration d'une seule équation aux dérivées partielles du premier ordre, et qui, en même temps, sert à établir l'application de la méthode des substitutions successives à l'intégration d'un système d'équations différentielles. Cela étant donné, nous allons exposer la méthode de Cauchy que nous avons indiquée tout d'abord, conformément au système suivant d'équations différentielles :

$$(1)\quad \frac{dy}{dx} + Q_1 z_1 = 0, \quad \frac{dz_1}{dx} + Q_2 z_2 = 0, \quad \ldots, \quad \frac{dz_{n-1}}{dx} + Q_n y = r,$$

x étant la variable indépendante, y, z_1, z_2, ..., z_{n-1} étant des fonctions inconnues de x, et Q_1, Q_2, ..., Q_n et r des fonctions connues de x.

Admettons que toutes les quantités Q, ainsi que r, restent finies et continues pour $x = x_1$, $x = x_0$, et pour toute valeur de x entre x_0 et x_1; supposons en même temps que x croisse d'une manière continue depuis x_0 jusqu'à x_1.

Proposons-nous d'obtenir la série qui exprimerait la valeur d'une des variables principales des n équations différentielles simultanées (1).

(1) C'est-à-dire la méthode qui est constatée par le théorème III signalé par nous dans le même Mémoire de Cauchy, p. 339 et 340.

(2) Cette méthode, comme l'on sait, est insérée dans le même Mémoire de Cauchy.

Ces équations (1) donnent

$$(2)\quad \begin{cases} y = -\int_{x_0}^{x} Q_1 z_1\,dx + c_1, \quad z_1 = -\int_{x_0}^{x} Q_2 z_2\,dx + c_2, \quad \ldots, \\ z_{n-1} = -\int_{x_0}^{x} Q_n y\,dx + c_n + \int_{x_0}^{x} r\,dx, \end{cases}$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ étant des constantes arbitraires, et la limite x de chacune des intégrales étant une valeur quelconque de la variable indépendante prise entre x_0 et x_1.

Si, dans chacune des équations (2), nous substituons à z sa valeur, que donne l'équation qui suit celle dans laquelle nous faisons la substitution, alors nous aurons

$$(3)\qquad y = u + \nabla y,$$

où

$$(4)\quad \begin{cases} u = c_1 - c_2\int_{x_0}^{x} Q_1\,dx + c_3\int_{x_0}^{x} Q_1\,dx\int_{x_0}^{x} Q_2\,dx \\ \quad - c_4\int_{x_0}^{x} Q_1\,dx\int_{x_0}^{x} Q_2\,dx\int_{x_0}^{x} Q_3\,dx + \ldots \\ \quad + (-1)^{n-1}c_n\int_{x_0}^{x} Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^{x} Q_{n-1}\,dx \\ \quad + (-1)^{n-1}\int_{x_0}^{x} Q_1\,dx\int_{x_0}^{x} Q_2\,dx \ldots \int_{x_0}^{x} Q_{n-1}\,dx\int_{x_0}^{x} r\,dx, \end{cases}$$

et

$$(5)\qquad \nabla y = (-1)^n\int_{x_0}^{x} Q_1\,dx\int_{x_0}^{x} Q_2\,dx \ldots \int_{x_0}^{x} Q_n y\,dx.$$

Si, dans le second membre de l'équation (3), on substitue une ou plusieurs fois de suite à la fonction y sa valeur tirée de cette équation même, en écrivant alors, pour abréger,

$$\nabla^2 y,\ \nabla^3 y,\ \ldots$$

au lieu de

$$\nabla\nabla y,\ \nabla\nabla\nabla y,\ \ldots,$$

on trouvera

$$y = u + \nabla u + \nabla^2 y = u + \nabla u + \nabla^2 u + \nabla^3 y = \ldots,$$

et généralement

$$(6)\qquad y = u + \nabla u + \nabla^2 u + \ldots + \nabla^{p-1} u + \nabla^p y,$$

p étant un nombre entier quelconque.

Si, dans l'équation (6), nous remplaçons u par sa valeur (4), nous aurons

$$(7)\qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + R + \nabla^p y,$$

où

$$(8)\qquad C_1 = c_1,\quad C_2 = -c_2,\quad C_3 = c_3,\quad \ldots,\quad C_n = (-1)^{n-1} c_n,$$

$$(9)\left\{\begin{aligned}
y_1 &= 1 + (-1)^n \int_{x_0}^{x} Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^{x} Q_n\,dx \\
&\quad + (-1)^{2n} \int_{x_0}^{x} Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^{x} Q_n\,dx \int_{x_0}^{x} Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^{x} Q_n\,dx + \ldots, \\
y_2 &= \int_{x_0}^{x} Q_1\,dx + (-1)^n \int_{x_0}^{x} Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^{x} Q_n\,dx \int_{x_0}^{x} Q_1\,dx \\
&\quad + (-1)^{2n} \int_{x_0}^{x} Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^{x} Q_n\,dx \int_{x_0}^{x} Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^{x} Q_n\,dx \int_{x_0}^{x} Q_1\,dx + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
y_n &= \int_{x_0}^{x} Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^{x} Q_{n-1}\,dx + (-1)^n \int_{x_0}^{x} Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^{x} Q_n\,dx \int_{x_0}^{x} Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^{x} Q_{n-1}\,dx \\
&\quad + (-1)^{2n} \int_{x}^{x} Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^{x} Q_n\,dx \int_{x_0}^{x} Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^{x} Q_n\,dx \int_{x_0}^{x} Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^{x} Q_{n-1}\,dx + \ldots,
\end{aligned}\right.$$

$$(10)\left\{\begin{aligned}
R &= (-1)^{n-1} \Bigg(\int_{x_0}^{x} Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^{x} Q_{n-1}\,dx \int_{x_0}^{x} z\,dx \\
&\quad + (-1)^n \int_{x_0}^{x} Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^{x} Q_n\,dx \int_{x_0}^{x} Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^{x} Q_{n-1}\,dx \int_{x_0}^{x} z\,dx + \ldots \Bigg),
\end{aligned}\right.$$

$$(11)\qquad \nabla^p y = (-1)^{np} \int_{x_0}^{x} Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^{x} Q_n\,dx \ldots \int_{x_0}^{x} Q_1\,dx \ldots \int_{x_0}^{x} Q_n\,y\,dx.$$

De la manière connue, il est facile de démontrer que chacune des séries (9) et (10) est convergente pour toute valeur de x, pour laquelle les fonctions données Q et z restent finies et continues entre x_0 et x_1.

Cela posé, et en désignant par K la somme

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + R,$$

l'équation (7) se représentera ainsi :

$$(12) \qquad y = K + \nabla^p y,$$

K étant une quantité finie.

Cette équation (12) sert à établir que le terme $\nabla^p y$ tend vers zéro à mesure que le nombre p augmente pour toute valeur de x, pour laquelle les fonctions données Q et r restent finies et continues entre x_0 et x_1. C'est, en effet, ce qui arrive quand y_0, valeur maximum de y, ne devient pas infinie dans l'intervalle où l'on fait varier x. Pour le démontrer, supposons que $m_1, m_2, \ldots, m_n$ soient les valeurs maxima de $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, et que M soit plus grande que chacune des valeurs de $m_1, m_2, \ldots, m_n$; alors, d'après l'équation (11), il est évident que, en valeur absolue,

$$\nabla^p y < \frac{y_0 M^{np} (x - x_0)^{np}}{1.2\ldots(np-1)np}.$$

Or, la quantité M étant finie, le coefficient de y_0 peut devenir moindre que toute valeur donnée α, quand n est suffisamment grand; donc

$$\nabla^p y < \alpha y_0.$$

En vertu de cela, au lieu de l'équation (12), nous aurons l'inégalité suivante :

$$y < K + \alpha y_0.$$

Cette inégalité ayant lieu pour toute valeur de x comprise entre x_0 et x_1, on peut remplacer y par sa valeur maximum y_0, et l'on aura

$$y_0 < K + \alpha y, \quad \text{d'où} \quad y_0 < \frac{K}{1 - \alpha}.$$

Ainsi y_0 ne peut pas devenir infini, et, par suite, le terme $\nabla^p y$, qui est moindre que αy_0, tend vers zéro. C. Q. F. D.

Si, dans l'équation (7), le terme $\nabla^p y$ décroît indéfiniment pour les valeurs croissantes de p, cette équation (7) donnera

$$(13) \qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + R,$$

série qui est le résultat de la méthode de Cauchy que nous nous sommes proposé d'exposer.

Au cas de $r = 0$, les équations (1) et (13) deviendront

$$(14)\quad \frac{dy}{dx} + Q_1 z_1 = 0, \quad \frac{dz_1}{dx} + Q_2 z_2 = 0, \quad \ldots, \quad \frac{dz_{n-1}}{dx} + Q_n y = 0,$$

et

$$(15)\qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

dont la seconde (15) exprime la valeur d'une des variables principales y des équations différentielles simultanées (14). En remplaçant, de la manière connue, une équation différentielle linéaire aux dérivées partielles par un système d'équations différentielles, les procédés qui constituent la méthode de Cauchy exposée s'appliquent, sans aucune difficulté, à l'intégration, par les séries, de *certaines* équations différentielles linéaires aux dérivées partielles, par exemple d'équations analogues à celle qu'on trouve dans le Mémoire de Poisson : *Sur les solutions particulières des équations différentielles et des équations aux différences* (*Journal de l'École Polytechnique*, XIII^e Cahier, § 41, p. 111 et 112).

Nous allons maintenant indiquer comment la méthode de Cauchy exposée s'applique à l'intégration d'une équation différentielle linéaire de l'ordre n.

La forme générale d'une telle équation est

$$(16)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = U,$$

$P_1, P_2, \ldots, P_n$ et U étant des fonctions données de x, qui restent finies et continues pour $x = x_1$, $x = x_0$ et pour toute valeur de x entre x_0 et x_1.

Il est facile de montrer comment les équations différentielles telles que (1) peuvent être ramenées à l'équation différentielle (16). En effet, en différentiant $(n-1)$ fois la première des équations (1) par rapport à x, nous aurons n équations, d'où nous tirerons, pour $\frac{dz_1}{dx}, \frac{d^2 z_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1} z_1}{dx^{n-1}}$, les $(n-1)$ expressions linéaires par rapport aux $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}$; en substituant à $\frac{dz_1}{dx}, \frac{d^2 z_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1} z_1}{dx^{n-1}}$ ces expressions obtenues dans les $(n-1)$ équations que nous formerons *préliminairement* en différentiant $(n-2)$ fois la seconde des équations (1) par rapport à x, ces $(n-1)$ équations donneront, pour $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z_2}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-2} z_2}{dx^{n-2}}$, les $(n-2)$ expressions linéaires par rapport aux $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}$. En continuant ainsi, nous obtiendrons pour $\frac{dz_{n-1}}{dx}$ l'expression linéaire par rapport aux $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}$. En substituant à $\frac{dz_{n-1}}{dx}$ cette expression obtenue dans la dernière des équations (1), elle prendra la forme suivante :

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^n y}{dx^n} + Q_1 Q_2 \ldots Q_{n-1} F_1\left(Q, \frac{dQ}{dx}\right) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots \\ &\quad + Q_1 Q_2 \ldots Q_{n-1} F_{n-1}\left(Q, \frac{dQ}{dx}, \frac{d^{n-1}Q}{dx^{n-1}}\right) \frac{dy}{dx} \\ &\quad + Q_1 Q_2 \ldots Q_n y = \pm Q_1 Q_2 \ldots Q_{n-1} r. \end{aligned}\right.$$

En égalant les coefficients de y et de ses dérivées dans l'équation (17) aux coefficients de y et de ses dérivées dans l'équation (16), nous aurons les $(n+1)$ équations suivantes :

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &\pm Q_1 Q_2 \ldots Q_{n-1} r = U, \\ &Q_1 Q_2 \ldots Q_n = P_n, \\ &Q_1 Q_2 \ldots Q_{n-1} F_{n-1}\left(Q, \frac{dQ}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-2}Q}{dx^{n-1}}\right) = P_{n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &Q_1 Q_2 \ldots Q_{n-1} F_1\left(Q, \frac{dQ}{dx}\right) = P_1, \end{aligned}\right.$$

auxquelles on peut toujours satisfaire par r et n fonctions Q.

En remplaçant respectivement par Q et par r les résolutions des équations (18) dans l'équation (13), nous obtiendrons la série qui exprimera l'intégrale de l'équation différentielle linéaire de l'ordre n (16). Il est à remarquer que le moyen qui consiste dans l'application de la méthode de Cauchy exposée à l'intégration d'une équation différentielle linéaire par les séries n'est pas commode dans son application aux cas particuliers, parce qu'il demande la résolution des équations différentielles (18).

Voilà ce que nous croyons suffisant de dire sur l'intégration des équations différentielles par les séries, à propos du travail de

M. Starkof intitulé : *Zur Frage über die Integration linearer Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten* ([1]). Dans ce travail, on trouve l'application de la méthode de Cauchy que nous venons d'indiquer. En effet, il y a un moyen dont fait usage M. Starkof pour l'intégration d'une équation différentielle linéaire par les séries, et qui consiste dans les opérations suivantes : 1° M. Starkof remplace (*voir* la proposition III) l'équation différentielle linéaire

$$(19)\quad \frac{d^n y}{dx^n} + P_{1,n}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + P_{2,n}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + P_{n-1,n}\frac{dy}{dx} + P_{n,n}y = 0$$

par le système suivant d'équations différentielles :

$$(20)\quad \frac{dy}{dx} + Q_1 z = 0, \quad \frac{dz}{dx} = Q_2 v = 0, \quad \ldots, \quad \frac{dt}{dx} = Q_n y = 0,$$

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ étant des fonctions qui se déterminent par les équations (5) [p. 12]; 2° sans déduire des équations (12) les expressions $D_{s,n}$ (p. 31 et 32) qui sont identiques avec y_n [*voir* notre formule (9)], M. Starkof prend ces $D_{s,n}$ comme expressions données; 3° en se bornant à cette seule démonstration (p. 33 et 34) que tous ces $D_{s,n}$ satisfont à l'équation (19), M. Starkof présente immédiatement (*voir* la proposition VI) l'intégrale générale de cette équation différentielle (19) sous la forme suivante :

$$(21)\quad y = c_1 D_{1,n} + c_2 D_{2,n} + c_3 D_{3,n} + \ldots + c_{n-1} D_{n-1,n} + c_n D_{n,n},$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ étant des constantes arbitraires; mais ce moyen, tel qu'il est exposé par M. Starkof, a le défaut qui consiste dans ce que la démonstration de la proposition VI n'est pas rigoureuse. En effet, M. Starkof ne donne pas la démonstration de ce que les expressions $D_{s,n}$ sont indépendantes entre elles, tandis que cette démonstration est nécessaire pour établir la possibilité de former, de la manière connue, l'intégrale générale de l'équation différentielle (19), ces expressions des $D_{s,n}$ n'étant déterminées que parce que, étant prises comme expressions données, elles satisfont à l'équation différentielle (19).

---

[1]) Ce travail a été publié en allemand, à Odessa, le 25/13 avril 1878.

Dans le même travail de M. Starkof, il y a un autre moyen d'intégration d'une équation différentielle linéaire par les séries, savoir celui qui est le sujet de la première Partie du Chapitre Ier (p. 43). En général, ce moyen n'a aucun intérêt scientifique, puisque l'on peut employer la méthode de Cauchy que nous avons indiquée plus haut, et, au point de vue pratique, ce dernier moyen est plus commode que l'autre dans l'application aux cas particuliers; dans le Chapitre II du travail de M. Starkof, lui-même forme dans chaque cas particulier l'intégrale générale de l'équation différentielle linéaire à l'aide des expressions $D_{s,n}$; mais ce n'est pas à l'aide de cet autre moyen qui, comme nous l'avons dit, est le sujet de la première Partie du Chapitre Ier (p. 4-31); ce moyen, tel qu'il est exposé par M. Starkof, a encore le défaut de reposer principalement sur la proposition IV; or la démonstration de cette proposition n'est pas rigoureuse; car, pour constater rigoureusement cette proposition, il est nécessaire d'établir que le terme qui entre dans l'expression placée à la page 22 (commençant par la 6e ligne), et qui contient toujours la fonction inconnue y sous le signe $\int$, tend vers zéro à mesure que le nombre des termes augmente; or cette preuve n'est pas donnée par M. Starkof. Par la même raison, la démonstration de la proposition XII n'est pas rigoureuse; de plus, M. Starkof ne démontre pas que le déterminant qu'il désigne par δ (p. 24) n'est pas égal à zéro, tandis que cette démonstration est nécessaire pour constater la possibilité de déterminer y, z, v, ..., t à l'aide des équations (10) [p. 24].