ANDRÉIEWSKY

Sur la réduction des intégrales indéfinies

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 2, nº 1 (1878), p. 246-260
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1878_2_2_1_246_1>

MÉLANGES.

SUR LA RÉDUCTION DES INTÉGRALES INDÉFINIES;

PAR M. ANDRÉIEWSKY,

Professeur à l'Université de Varsovie.

1. Euler a indiqué, dans son *Traité de Calcul intégral* (1), une méthode pour réduire une intégrale de la forme $\int \frac{M\,dx}{N^{p+1}}$, où M et N désignent des fonctions de x, p un nombre entier ou fractionnaire, à une autre intégrale de la forme $\int \frac{M_1\,dx}{N^p}$. Pour cela, il considère la différentielle

$$d\frac{R}{N^p} = \frac{NR' - pRN'}{N^{p+1}}\,dx$$

(R désignant une fonction arbitraire de x, R′ et N′ les dérivées de R et N par rapport à x); d'où, en posant

$$y = \int \frac{M\,dx}{N^{p+1}},$$

on déduit

$$y + \frac{R}{N^p} = \int \frac{M + NR' - pRN'}{N^{p+1}}\,dx.$$

Si l'on détermine, maintenant, la fonction R, de manière que $M + NR' - pRN'$ soit divisible par N, ou que l'on ait

$$M - pRN' = NT, \tag{1}$$

(1) *Institutionum Calculi integralis tomus I*, p. 72. Editio tertia.

l'équation précédente donnera

$$(2)\qquad y=\int\frac{M\,dx}{N^{p+1}}=-\frac{R}{N^p}+\int\frac{M_1\,dx}{N^p},$$

où

$$(3)\qquad M_1=R'+T.$$

2. Ces formules d'Euler peuvent être présentées sous une autre forme, qui sera, dans plusieurs cas, plus commode pour les applications.

D'après le n° **1**, pour ramener l'intégrale y (2) à une autre intégrale plus simple, il faudra trouver deux fonctions R et T satisfaisant à l'équation (1) et pour lesquelles la fonction M_1 (3) ne soit pas plus compliquée que M.

En introduisant, au lieu de R et T, deux autres fonctions A et B, liées aux premières par les relations

$$pR=-MA,\quad T=MB,$$

on pourra écrire l'équation (1) sous la forme

$$(4)\qquad BN-AN'=1,$$

et les équations (2), (3) deviendront

$$(5)\qquad \int\frac{M\,dx}{N^{p+1}}=\frac{AM}{pN^p}+\int\frac{M_1\,dx}{N^p},$$

$$(6)\qquad M_1=\frac{1}{p}[(Bp-A')M-AM'],$$

où A et B désignent deux fonctions quelconques satisfaisant à l'équation (4). Or, si A, B remplissent la condition (4), il en sera de même des fonctions $A-\frac{K}{M}N$, $B-\frac{K}{M}N'$, K étant une fonction arbitraire de x. Par conséquent, on pourra remplacer la formule (5) par cette autre, plus générale,

$$(7)\qquad \int\frac{M\,dx}{N^{p+1}}=\frac{AM-NK}{pN^p}+\int\frac{L\,dx}{N^p},$$

où

$$(8)\qquad L=\frac{1}{p}[(Bp-A')M-AM'-(p-1)KN'+NK'].$$

3. On trouve, dans le *Cours d'Analyse* de M. Hermite (¹), une application très-élégante de la formule (7) à la recherche de la partie algébrique de l'intégrale $\int \frac{\mathrm{M}\,dx}{\mathrm{N}^{p+1}}$, où M et N sont deux polynômes, et p un nombre entier et positif.

Le succès de cette application dépend de ce qu'on peut toujours déterminer deux polynômes A, B satisfaisant à l'équation (4), si le polynôme N est premier avec sa dérivée N', en effectuant sur N et N' la recherche du plus grand commun diviseur.

Je dois établir, maintenant, au moyen des formules (5), (7), en observant qu'elles subsistent quels que soient les fonctions M, N et l'exposant p, excepté $p = 0$, plusieurs autres formules pour la réduction des intégrales de certaines différentielles algébriques et transcendantes.

4. Posons d'abord

$$\mathrm{N} = x^2 + rx + s.$$

En divisant N par sa dérivée $\mathrm{N}' = 2x + r$, on trouve le quotient $\frac{x}{2} + \frac{r}{4}$ avec le reste $s - \frac{r^2}{4}$, ce qui fournit, dans ce cas, les solutions suivantes de l'équation (4) :

$$\mathrm{A} = \frac{x + \frac{r}{2}}{2\left(s - \frac{r^2}{4}\right)}, \quad \mathrm{B} = \frac{1}{s - \frac{r^2}{4}}.$$

La substitution de ces valeurs de N, A, B dans les formules (7), (8) donne

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int \frac{\mathrm{M}\,dx}{(x^2 + rx + s)^{p+1}} \\ &= \frac{\left(x + \frac{r}{2}\right)\mathrm{M} - (x^2 + rx + s)\mathrm{K}}{2p\left(s - \frac{r^2}{4}\right)(x^2 + rx + s)^p} + \int \frac{\mathrm{L}\,dx}{(x^2 + rx + s)^p}, \end{aligned} \right.$$

(¹) *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, 1873. Première Partie, p. 267.

où

$$L = \frac{1}{2p\left(s - \frac{r^2}{4}\right)}\left[(2p - 1)M - \left(x + \frac{r}{2}\right)M' \right.$$
$$\left. - (p - 1)(2x + r)K + (x^2 + rx + s)K'\right].$$

Si $M = x^n$, n désignant un nombre entier et positif, on pourra disposer de la fonction arbitraire K de manière que le degré de L soit inférieur à n. Pour cela, faisons $K = \alpha x^{n-1}$; alors, en annulant le terme en x^n de L, nous trouverons $\alpha = 1$; ainsi, dans le cas de $M = x^n$, $K = x^{n-1}$, l'équation (9) devient

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int \frac{x^n\,dx}{(x^2 + rx + s)^{p+1}} \\ &= - \frac{\frac{r}{2}x^n + sx^{n-1}}{2p\left(s - \frac{r^2}{4}\right)(x^2 + rx + s)^p} \\ &+ \frac{1}{2p\left(s - \frac{r^2}{4}\right)}\int \frac{\left(\frac{n}{2} - p\right)rx^{n-1} + (n - 1)sx^{n-2}}{(x^2 + rx + s)^p}\,dx. \end{aligned} \right.$$

Cette formule ramène l'intégration de la différentielle

$$\frac{x^n\,dx}{(x^2 + rx + s)^{p+1}}$$

à l'intégration d'une autre différentielle du même genre, dans laquelle l'exposant du trinôme sera diminué d'une unité, et le numérateur renfermera les termes en x^{n-1}, x^{n-2}, et sera, par conséquent, d'un degré inférieur à n.

Lorsque M est une fonction transcendante, ayant une dérivée algébrique, on pourra, d'après la formule (9), réduire l'intégrale $\int \frac{M\,dx}{(x^2 + rx + s)^{p+1}}$, où p est un nombre entier et positif, à

$$\int \frac{M\,dx}{x^2 + rx + s}$$

et à une suite d'intégrales de différentielles algébriques.

Les formules (9), (10) deviennent illusoires si l'on a $p = 1$, ou

$s - \frac{r^2}{4} = 0$. Changeons maintenant p en $-p$ dans l'équation (9), où nous supposerons $K = 0$, et résolvons-la ensuite par rapport à l'intégrale $\int M(x^2 + rx + s)^p dx$, qui sera contenue dans son second membre; il viendra

$$\int M(x^2 + rx + s)^p dx = \frac{M}{2p+1}\left(x + \frac{r}{2}\right)(x^2 + rx + s)^p$$
$$- \frac{1}{2p+1}\int M'\left(x + \frac{r}{2}\right)(x^2 + rx + s)^p dx$$
$$+ \frac{2p}{2p+1}\left(s - \frac{r^2}{4}\right)\int M(x^2 + rx + s)^{p+1} dx.$$

Au moyen de cette formule on peut ramener l'intégrale $\int M(x^2 + rx + s)^p dx$, où M est une fonction transcendante ayant une dérivée algébrique, et p un exposant entier et positif, à $\int M dx$ et à des intégrales de différentielles algébriques.

5. Reprenons l'équation (4) et supposons qu'on ait

$$(11) \qquad N = \varphi + \psi^m,$$

φ et ψ désignant deux fonctions rationnelles de x, m un exposant quelconque; si m est fractionnaire, ψ^m sera irrationnelle; mais on peut facilement satisfaire à l'équation (4) par des valeurs rationnelles de A, B.

Il suffit, pour cela, de remplacer dans l'équation (4) N par son expression (11), et N' par $\varphi' + \frac{m\psi^m}{\psi}\psi'$, et d'égaler ensuite les parties rationnelles et les coefficients de ψ^m dans les deux membres.

On trouve ainsi

$$(12) \qquad A = \frac{\psi}{m\varphi\psi' - \psi\varphi'}, \quad B = \frac{m\psi'}{m\varphi\psi' - \psi\varphi'}.$$

Par conséquent, d'après les formules (5), (6), (12), l'intégrale $\int \frac{M dx}{(\varphi + \psi^m)^{p+1}}$ peut être ramenée à $\int \frac{M_1 dx}{(\varphi + \psi^m)^p}$, où le numérateur M_1

ne contiendra pas d'autres quantités irrationnelles que celles qui figurent dans M.

6. Soit, par exemple,

$$\mathrm{N} = a + x^m, \quad \varphi = a, \quad \psi = x.$$

Les équations (12) donneront

$$\mathrm{A} = \frac{x}{ma}, \quad \mathrm{B} = \frac{1}{a},$$

et, par suite, des formules (5), (6) on déduira

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{\mathrm{M}\,dx}{(x^m + a)^{p+1}} &= \frac{a\mathrm{M}}{map\,(x^m + a)^p} \\ &\quad + \frac{1}{map} \int \frac{(mp - 1)\,\mathrm{M} - x\mathrm{M}'}{(x^m + a)^p}\,dx. \end{aligned} \right.$$

En changeant dans cette équation p en $-p$, et en la résolvant ensuite par rapport à l'intégrale $\int \mathrm{M}(x^m + a)^p\,dx$, on a

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int \mathrm{M}(x^m + a)^p\,dx \\ &\quad = \frac{\mathrm{M}x\,(x^m + a)^p}{mp + 1} - \frac{1}{mp + 1} \int \mathrm{M}'x\,(x^m + a)^p\,dx \\ &\quad + \frac{map}{mp + 1} \int \mathrm{M}\,(x^m + a)^{p-1}\,dx. \end{aligned} \right.$$

Ces formules comprennent, comme cas particuliers, la formule connue pour la réduction de l'exposant d'une différentielle binôme.

Lorsque M est une fonction transcendante ayant une dérivée algébrique, les formules (13), (14) réduisent les intégrales $\int \frac{\mathrm{M}\,dx}{(x^m + a)^{p+1}}$, $\int \mathrm{M}\,(x^m + a)^p\,dx$, où p désigne un nombre entier et positif, respectivement à $\int \frac{\mathrm{M}\,dx}{x^m + a}$, $\int \mathrm{M}\,dx$, et à des intégrales de différentielles algébriques.

7. Si l'on fait, dans les équations (11), (12),

$$\varphi = cx, \quad \psi = ax^n + b, \quad m = \frac{1}{n},$$

n désignant un nombre entier et positif, on aura

$$N = cx + \sqrt[n]{ax^n + b}, \quad A = -\frac{1}{bc}(ax^n + b), \quad B = -\frac{ax^{n-1}}{bc}.$$

En substituant ces fonctions à N, A, B dans les équations (5), (6), il viendra

$$(15) \quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{M\,dx}{(cx + \sqrt[n]{ax^n + b})^{p+1}} \\ \displaystyle\quad = -\frac{(ax^n + b)M}{pbc(cx + \sqrt[n]{ax^n + b})^p} \\ \displaystyle\quad + \frac{1}{pbc}\int \frac{a(n-p)x^{n+1}M + (ax^n + b)M'}{(cx + \sqrt[n]{ax^n + b})^p}\,dx. \end{cases}$$

Les coefficients de M, M′ du numérateur sous le signe d'intégration du second membre étant des fonctions entières, l'intégrale $\int \frac{M\,dx}{(cx + \sqrt[n]{ax^n + b})^{p+1}}$, où M est une fonction entière et p un nombre entier et positif, se réduit, au moyen de la formule (15), à $\int \frac{Q\,dx}{cx + \sqrt[n]{ax^n + b}}$, où Q sera aussi une fonction entière.

8. Les formules de réduction démontrées dans les numéros précédents (4 à 7) se rapportaient aux cas où N est une fonction algébrique. Nous allons appliquer maintenant les formules du nº 2 à la réduction des intégrales $\int \frac{M\,dx}{N^{p+1}}$ pour certaines formes transcendantes de la fonction N.

Soit d'abord

$$(16) \qquad N = \varphi + e^x,$$

où φ est une fonction quelconque, que nous supposerons indépendante de l'exponentielle e^x.

Dans ce cas, l'équation (4) peut être facilement vérifiée par des valeurs de A, B, qui seront aussi indépendantes de e^x.

En effet, si l'on écrit l'équation (4) pour la fonction (16), et que l'on égale ensuite dans les deux membres les coefficients de e^x et les termes indépendants de e^x, on obtiendra deux équations qui donneront

$$A = B = \frac{1}{\varphi - \varphi'}. \tag{17}$$

En remplaçant, dans les équations (5), (6), N, A, B par les expressions (16), (17), on a

$$\int \frac{M\,dx}{(\varphi + e^x)^{p+1}} = \frac{M}{p(\varphi - \varphi')(\varphi + e^x)^p} + \int \frac{M_1\,dx}{(\varphi + e^x)^p}, \tag{18}$$

où

$$M_1 = \frac{1}{p(\varphi - \varphi')}\left[\left(p + \frac{\varphi' - \varphi''}{\varphi - \varphi'}\right) M - M'\right]. \tag{19}$$

La formule (18) devient illusoire si $p = 0$, ou $\varphi = e^x$.

Supposons que M renferme le facteur $\varphi - \varphi'$ élevé à une certaine puissance, c'est-à-dire que l'on ait

$$M = (\varphi - \varphi')^n \psi,$$

ψ désignant aussi une fonction de x.

Alors les équations (18), (19) pourront être remplacées par celles-ci

$$\int \frac{(\varphi - \varphi')^n \psi\,dx}{(\varphi + e^x)^{p+1}} = \frac{(\varphi - \varphi')^{n-1}\psi}{p(\varphi - e^x)^p} + \frac{1}{p}\int \frac{(\varphi - \varphi')^{n-2}\psi_1\,dx}{(\varphi + e^x)^p}, \tag{20}$$

$$\psi_1 = (\varphi - \varphi')(p\psi - \psi') + (1 - n)(\varphi' - \varphi'')\psi. \tag{21}$$

9. Quand φ et ψ seront des fonctions entières respectivement des degrés g et h, le numérateur $(\varphi - \varphi')^n\psi$ sera du degré $gn + h$, ψ_1 de degré $g + h$, et $(\varphi - \varphi')^{n-2}\psi_1$ du degré $g(n - 1) + h$.

La formule (20) permet donc de ramener l'intégration de la différentielle $\frac{(\varphi - \varphi')^n \psi\,dx}{(\varphi + e^x)^{p+1}}$ à l'intégration d'une autre différentielle de même forme, mais dans laquelle le degré du numérateur sera abaissé de g unités, et l'exposant $p + 1$ d'une unité.

Faisons, par exemple, dans les équations (20), (21)

$$\varphi = x^g, \quad \psi = x^h, \quad h = m - ng + n,$$

il viendra

$$\left\{\begin{aligned} \int \frac{x^m (x - g)^n\,dx}{(x^g + e^x)^{p+1}} &= \frac{x^{m-g+1}(x - g)^{n-1}}{p(x^g + e^x)^p} \\ &+ \frac{1}{p}\int \frac{x^{m-g}(x - g)^{n-2}[px^2 - (pg + m + n - g)x + g(m - g + 1)]\,dx}{(x^g + e^x)^p}. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Le numérateur de la différentielle du premier membre de cette équation est du degré $m+n$, et le numérateur de la différentielle du second membre est du degré $m+n-g$.

La formule (22) subsistant pour toutes les valeurs des constantes m, n, g, nous considérerons un cas particulier, en déterminant m et n par la condition

$$px^2-(pg+m+n-g)x+g(m-g+1)=p(x-g)^2,$$

d'où

$$m=(p+1)g-1, \quad n=1.$$

Pour ces valeurs de m, n, la formule (22) devient

$$\int \frac{x^{(p+1)g-1}(x-g)\,dx}{(x^g+e^x)^{p+1}}=\frac{x^{pg}}{p(x^g+e^x)^p}+\int \frac{x^{pg-1}(x-g)\,dx}{(x^g+e^x)^p},$$

ou, en changeant g en $-g$,

$$(23) \qquad \int \frac{\left(1+\frac{g}{x}\right)dx}{(1+x^g e^x)^{p+1}}=\frac{1}{p(1+x^g e^x)^p}+\int \frac{\left(1+\frac{g}{x}\right)dx}{(1+x^g e^x)^p}.$$

D'après cette équation, l'intégrale du premier membre se réduit à une autre, qui ne diffère de la première que parce que p est remplacé par $p-1$. Conséquemment, l'application répétée de la formule (23) ramène l'intégrale $\int \frac{\left(1+\frac{g}{x}\right)dx}{(1+x^g e^x)^{p+1}}$, où p est supposé entier et positif, à $\int \frac{\left(1+\frac{g}{x}\right)dx}{1+x^g e^x}$, quel que soit g.

En remplaçant p par $-p$ dans l'équation (23), et en la résolvant ensuite par rapport à l'intégrale du second membre, on trouve la relation

$$\int\left(1+\frac{g}{x}\right)(1+x^g e^x)^p\,dx=\frac{(1+x^g e^x)^p}{p}-\int\left(1+\frac{g}{x}\right)(1+x^g e^x)^{p-1}\,dx,$$

qui permet d'évaluer facilement l'intégrale

$$\int\left(1+\frac{g}{x}\right)(1+x^g e^x)^p\,dx,$$

où p est entier et positif et g quelconque, en la réduisant à

$$\int\left(1+\frac{g}{x}\right)dx = x+\log x^g + C.$$

10. Si l'on pose, dans les équations (20), (21),

$$\varphi = \alpha\sin x + \beta\cos x,\quad \psi = \sin^g x\cos^h x,$$

on obtient

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\frac{[(\beta+\alpha)\sin x+(\beta-\alpha)\cos x]^n\sin^g x\cos^h x}{(\alpha\sin x+\beta\cos x+e^x)^{p+1}}dx\\ &=\frac{[(\beta+\alpha)\sin x+(\beta-\alpha)\cos x]^{n-1}\sin^g x\cos^h x}{p(\alpha\sin x+\beta\cos x+e^x)^p}\\ &\quad+\frac{1}{p}\int\frac{[(\beta+\alpha)\sin x+(\beta-\alpha)\cos x]^{n-2}\psi_1}{(\alpha\sin x+\beta\cos x+e^x)^p}dx,\end{aligned}\right.$$

où

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} \psi_1 = {}&[\alpha(p-h-n+1)+\beta(p+h+n-1)]\sin^{g+1}x\cos^h x\\ &+[\beta(p-g-n+1)-\alpha(p+g+n-1)]\sin^g x\cos^{h+1}x\\ &+h(\beta+\alpha)\sin^{g+1}x\cos^{h-1}x-g(\beta-\alpha)\sin^{g-1}x\cos^{h+2}x.\end{aligned}\right.$$

Le numérateur de la différentielle du premier membre de l'équation (24) est du degré $g+h+n$ par rapport à $\sin x$, $\cos x$, et le numérateur de la différentielle du second membre est du degré $g+h+n-1$ par rapport à $\sin x$, $\cos x$.

Pour $\alpha=\beta=\frac{1}{\mu}$, $g=k-n$, les équations (24), (25) donnent

$$\begin{aligned}&\int\frac{\sin^k x\cos^h x\,dx}{(\sin x+\cos x+\mu e^x)^{p+1}}\\ &=\frac{\sin^{k-1}x\cos^h x}{2p(\sin x+\cos x+\mu e^x)^p}\\ &\quad+\frac{1}{2p}\int\frac{p\sin^{k-1}x\cos^h x-(k-1)\sin^{k-2}x\cos^{h+1}x+h\sin^k x\cos^{h-1}x}{(\sin x+\cos x+\mu e^x)^p}dx.\end{aligned}$$

On peut facilement généraliser cette formule de réduction, en la différentiant m fois par rapport à μ; il viendra

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin^k x\cos^h x\,e^{mx}dx}{(\sin x+\cos x+\mu e^x)^{p+1}} &= \frac{\sin^{k-1}x\cos^h x\,e^{mx}}{2p(\sin x+\cos x+\mu e^x)^p}\\ &\quad+\frac{1}{2p}\int\frac{Q\,e^{mx}\,dx}{(\sin x+\cos x+\mu e^x)^p},\end{aligned}$$

où

$$Q=(p-m+1)\sin^{k-1}x\cos^{h}x-(k-1)\sin^{k-2}x\cos^{h+1}x+h\sin^{k}x\cos^{h-1}x.$$

11. Considérons encore les formes trigonométriques de la fonction N; soit

$$N=a+b\cos x. \tag{26}$$

Dans ce cas, l'équation (4) se présentera ainsi

$$B(a+b\cos x)+Ab\sin x=1. \tag{27}$$

Pour déterminer les valeurs de A, B, nous poserons

$$A=-hb\sin x,\quad B=h(a-b\cos x);$$

alors l'équation (27) donnera

$$h=\frac{1}{a^2-b^2}$$

et, par suite,

$$A=-\frac{b\sin x}{a^2-b^2},\quad B=\frac{a-b\cos x}{a^2-b^2}. \tag{28}$$

Substituant, dans les équations (7), (8), à N, A, B leurs valeurs (26), (28), on trouve

$$\left\{\begin{aligned}\int\frac{M\,dx}{(a+b\cos x)^{p+1}}=&-\frac{bM\sin x+(a+b\cos x)K}{p(a^2-b^2)(a+b\cos x)^p}\\&+\frac{1}{p(a^2-b^2)}\int\frac{L\,dx}{(a+b\cos x)^p},\end{aligned}\right. \tag{29}$$

où

$$\left\{\begin{aligned}L=&[ap-b(p-1)\cos x]M\\&+(a+b\cos x)K'+b\sin x[M'+(p-1)K],\end{aligned}\right. \tag{30}$$

K désignant une fonction arbitraire de x.

La formule (29), qui subsiste quelle que soit la fonction M, comprend, comme cas particulier, la formule connue [1] pour la réduction de l'intégrale $\int\frac{(f+g\cos x)\,dx}{(a+b\cos x)^{p+1}}$.

---

[1] EULER, *Institutionum Calculi integralis tomus I*, p. 150.

En effet, si dans les équations (29), (30), on a $M = f + g\cos x$, on pourra disposer de la fonction arbitraire K, de manière à rendre L aussi linéaire par rapport à $\cos x$.

Pour cela, faisons $K = \mu \sin x$, μ désignant un coefficient indéterminé; après la substitution de ces fonctions à M et K, et le remplacement de $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$, l'expression (30) de L devient

$$\begin{aligned} L = apf - bg + (p-1)b\mu \\ + [apg - (p-1)bf + a\mu]\cos x - (p-2)(\mu + g)b\cos^2 x, \end{aligned}$$

et, en égalant à zéro le coefficient de $\cos^2 x$, on trouve $\mu = -g$.

Par conséquent, pour $M = f + g\cos x$, $K = -g\sin x$, les équations (29), (30) donnent la formule

$$\begin{aligned} \int \frac{(f + g\cos x)dx}{(a + b\cos x)^{p+1}} = \frac{(ag - bf)\sin x}{p(a^2 - b^2)(a + b\cos x)^p} \\ + \frac{1}{p(a^2 - b^2)} \int \frac{p(af - bg) + (p-1)(ag - bf)\cos x}{(a + b\cos x)^p} dx. \end{aligned}$$

12. Si la fonction N est de la forme

$$N = \sin x + \alpha \cos x,$$

on satisfait à l'équation (4) en posant

$$A = -\cos x, \quad B = \sin x.$$

Pour ces valeurs de N, A, B, les équations (7), (8) deviennent

$$(31) \quad \int \frac{M\,dx}{(\sin x + \alpha\cos x)^{p+1}} = -\frac{M\cos x + K(\sin x + \alpha\cos x)}{p(\sin x + \alpha\cos x)^p} + \int \frac{L\,dx}{(\sin x + \alpha\cos x)^p},$$

$$(32) \quad L = \frac{1}{p} \left\{ \begin{aligned} [(p-1)M\sin x + M'\cos x \\ + (\sin x + \alpha\cos x)K' - (p-1)(\cos x - \alpha\sin x)K] \end{aligned} \right\}.$$

13. Posons maintenant

$$(33) \qquad M = x^m e^{\beta x}, \quad K = e^{\beta x}(\gamma x^m + \delta x^{m-1}),$$

γ et δ étant deux coefficients indéterminés.

Remplaçant M et K par ces valeurs dans l'équation (32), nous aurons

$$
(34)\quad \mathrm{L}=\frac{e^{\beta x}}{p}\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}[(p-1)(1+\alpha\gamma)+\beta\gamma]x^m \\ \quad +[(\beta\delta+m\gamma+(p-1)\alpha\delta]x^{m-1}+(m-1)\delta x^{m-2}\end{array}\right\}\sin x \\
+\left\{\begin{array}{l}[\beta(1+\alpha\gamma)-(p-1)]x^m \\ \quad +[m+\alpha(\beta\delta+m\gamma)-(p-1)\delta]x^{m-1} \\ \quad +(m-1)\alpha\delta x^{m-2}\end{array}\right\}\cos x
\end{array}\right\}.
$$

En disposant des coefficients indéterminés γ, δ, on peut réduire cette expression de L à la forme

$$\mathrm{L}=\frac{e^{\beta x}}{p}(ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2})(\sin x+\alpha\cos x).$$

Il suffit, pour cela, de prendre pour γ, δ les valeurs satisfaisant aux équations

$$\begin{aligned} \beta-(p-1)\gamma &= \alpha(p-1)(1+\alpha\gamma), \\ m-(p-1)\delta &= (p-1)\alpha^2\delta, \end{aligned}$$

d'où

$$\gamma=\frac{\beta-\alpha(p-1)}{(p-1)(1+\alpha^2)},\quad \delta=\frac{m}{(p-1)(1+\alpha^2)}.$$

En portant ces valeurs de γ, δ dans les équations (33), (34), il vient

$$\mathrm{K}=\frac{e^{\beta x}}{(p-1)(1+\alpha^2)}\left\{[\beta-\alpha(p-1)]x^m+mx^{m-1}\right\},$$

$$\mathrm{L}=\frac{e^{\beta x}}{p(p-1)(1+\alpha^2)}\left\{\begin{array}{l}[(p-1)^2+\beta^2]x^m \\ \quad +2m\beta x^{m-1}+m(m-1)x^{m-2}\end{array}\right\}(\sin x+\alpha\cos x);$$

puis, en substituant les expressions de K et L dans l'équation (31) et en y remplaçant ensuite p par $p+1$, on obtient la formule de réduction

$$
(35)\quad \left\{\begin{array}{l}
\displaystyle\int\frac{x^m e^{\beta x}\,dx}{(\sin x+\alpha\cos x)^{p+2}} \\
\displaystyle\quad =-\frac{e^{\beta x}\{[(\beta-\alpha p)x^m+mx^{m-1}]\sin x+[(p+\alpha\beta)x^m+m\alpha x^{m-1}]\cos x\}}{(p+1)p(1+\alpha^2)(\sin x+\alpha\cos x)^{p+1}} \\
\displaystyle\quad +\frac{1}{(p+1)p(1+\alpha^2)}\int\frac{[(\beta^2+p^2)x^m+2m\beta x^{m-1}+m(m-1)x^{m-2}]e^{\beta x}}{(\sin x+\alpha\cos x)^p}\,dx.
\end{array}\right.
$$

Changeons, dans cette équation, p en $-p$ et résolvons-la ensuite par rapport à $\int x^m e^{\beta x}(\sin x + \alpha \cos x)^p dx$; il viendra

$$(36)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int x^m e^{\beta x}(\sin x + \alpha \cos x)^p dx \\ &= \frac{e^{\beta x}(\sin x + \alpha \cos x)}{\beta^2 + p^2} \left\{ \begin{aligned} &[(\beta + \alpha p) x^m + m x^{m-1}] \sin x \\ &+ [(\alpha\beta - p) x^m + m \alpha x^{m-1}] \cos x \end{aligned} \right\} \\ &\quad + \frac{p(p-1)(1+\alpha^2)}{\beta^2 + p^2} \int x^m e^{\beta x}(\sin x + \alpha \cos x)^{p-2} dx \\ &\quad - \frac{2m\beta}{\beta^2 + p^2} \int x^{m-1} e^{\beta x}(\sin x + \alpha \cos x)^p dx \\ &\quad - \frac{m(m-1)}{\beta^2 + p^2} \int x^{m-2} e^{\beta x}(\sin x + \alpha \cos x)^p dx. \end{aligned} \right.$$

Cette formule ramène l'intégration de la différentielle

$$x^m e^{\beta x}(\sin x + \alpha \cos x)^p dx$$

à l'intégration de trois autres différentielles de même forme, qui n'en diffèrent qu'en ce que, dans l'une d'elles, l'exposant p est remplacé par $p-2$, dans la deuxième, m par $m-1$, et dans la troisième, m par $m-3$.

Pour $m = 0$, les formules (35), (36) se simplifient considérablement; elles deviennent

$$(37)\quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{e^{\beta x} dx}{(\sin x + \alpha \cos x)^{p+2}} = &- \frac{e^{\beta x}[(\beta - \alpha p)\sin x + (\alpha\beta + p)\cos x]}{(p+1)p(1+\alpha^2)(\sin x + \alpha \cos x)^{p+1}} \\ &+ \frac{\beta^2 + p^2}{(p+1)p(1+\alpha^2)} \int \frac{e^{\beta x} dx}{(\sin x + \alpha \cos x)^p}, \end{aligned} \right.$$

$$(38)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int e^{\beta x}(\sin x + \alpha \cos x)^p dx \\ &= \frac{e^{\beta x}[(\beta + \alpha p)\sin x + (\alpha\beta - p)\cos x]}{\beta^2 + p^2}(\sin x + \alpha \cos x)^{p-1} \\ &\quad + \frac{p(p-1)(1+\alpha^2)}{\beta^2 + p^2} \int e^{\beta x}(\sin x + \alpha \cos x)^{p-2} dx. \end{aligned} \right.$$

Si p est un nombre entier et positif, la première de ces formules réduit la recherche de $\int \frac{e^{\beta x} dx}{(\sin x + \alpha \cos x)^{p+2}}$ à $\int \frac{e^{\beta x}}{(\sin x + \alpha \cos x)^2}$, ou à

$\int \frac{e^{\beta x}}{\sin x + \alpha \cos x}$ selon que p est un nombre pair ou impair; la seconde formule réduit la recherche de $\int e^{\beta x}(\sin x + \alpha \cos x)^p dx$ à

$\int e^{\beta x} dx = \frac{e^{\beta x}}{\beta} + C$, ou à

$$\int e^{\beta x}(\sin x + \alpha \cos x)\, dx = \frac{e^{\beta x}[(\beta + \alpha)\sin x + (\alpha\beta - 1)\cos x]}{1 + \beta^2},$$

selon que p est pair ou impair.

14. On déduit de l'équation (38) une autre formule de réduction si, en faisant usage de la formule du binôme, on égale les coefficients d'une certaine puissance α^n dans les deux membres; en posant $p - n = m$, on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
&\int e^{\beta x} \sin x^m \cos x^n\, dx \\
&= \frac{e^{\beta x}}{\beta^2 + (m+n)^2} \left\{ \begin{aligned} &m\left(\frac{\beta}{m+n}\sin x - \cos x\right)\sin^{m-1} x \cos^n x \\ &+ n\left(\sin x + \frac{\beta}{m+n}\cos x\right)\sin^m x \cos^{n-1} x \end{aligned} \right\} \\
&\qquad + \frac{m(m-1)}{\beta^2 + (m+n)^2}\int e^{\beta x}\sin^{m-2} x \cos^n x\, dx \\
&\qquad + \frac{n(n-1)}{\beta^2 + (m+n)^2}\int e^{\beta x}\sin^m x \cos^{n-2} x\, dx.
\end{aligned}$$

Quand $m = 0$, ou $n = 0$, cette formule rentre dans celles qu'on trouve dans le *Traité du Calcul intégral* d'Euler [1].

---

[1] *Institutionum Calculi integralis tomus I*, p. 151. — *Voir* aussi BERTRAND, *Calcul intégral*, p. 70.