

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

M.-G. SABININE

**Développements analytiques, pour servir à
compléter la discussion de la variation seconde
des intégrales définies multiples**

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2^e série,
tome 2, n^o 1 (1878), p. 100-123

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1878_2_2_1_100_1>

© Gauthier-Villars, 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉLANGES.

DÉVELOPPEMENTS ANALYTIQUES, POUR SERVIR A COMPLÉTER LA DISCUSSION DE LA VARIATION SECONDE DES INTÉGRALES DÉFINIES MULTIPLES;

PAR M. M.-G. SABININE,
Professeur a l'Universite d'Odessa.

1. La discussion de la variation seconde d'une intégrale définie multiple, que nous désignerons par V , présente un cas qui n'a pas été résolu jusqu'ici. C'est, comme l'on sait, celui où il s'agit de la discussion de la partie intégrable de $\delta^2 V$, ou bien celui où les variations tronquées ω des fonctions y , qui rendent l'intégrale V maximum ou minimum, ne sont pas nulles aux limites des intégrations. Dans notre Note insérée au *Bulletin de l'Académie Im-*

périale des Sciences de Saint-Petersbourg, t. XV, p. 70-86, nous avons obtenu les mêmes résultats qu'a donnés M. Clebsch dans son Mémoire *Ueber die zweite Variation vielfacher Integrale* ⁽¹⁾, résultats qui n'ont pas la forme définitive sous laquelle il conviendrait de les présenter. Cela ne provient que des réductions que, d'après M. Clebsch, nous avons fait subir à l'expression ρ ⁽²⁾; en vertu de ces réductions, nos résultats contiennent un terme ε ⁽³⁾ qui entre dans la partie intégrable de $\delta^2 V$, et qui renferme les dérivées partielles de quantités arbitraires t . Dans la présente Note, nous allons démontrer que l'expression ρ se réduit *identiquement* à zéro, et nous indiquerons le moyen de discuter les deux parties de $\delta^2 V$, la partie non intégrable et celle qui se rapporte aux limites des intégrations.

Nous ferons entrer plusieurs parties de notre Note (*Bulletin de l'Académie de Saint-Petersbourg*, t. XV) dans celle-ci, afin de la présenter en entier, et en même temps afin d'éviter au lecteur l'inconvénient d'avoir recours aux citations.

Dans notre discussion de la variation $\delta^2 V$, nous supposons que les limites de l'intégrale définie multiple sont données et restent invariables. Cette supposition, étant admise uniquement pour exposer de la manière la plus simple la théorie compliquée, est toujours permise sans que la présente Note manque de la généralité qui est nécessaire pour la discussion de la variation $\delta^2 V$. En effet, au cas contraire, c'est-à-dire si l'intégrale multiple V est prise par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_i$, dont les valeurs extrêmes subissent des variations, la discussion de la variation $\delta^2 V$, par le changement de variables dans les intégrales définies, peut être toujours ramenée à la discussion de la variation seconde de l'intégrale V' , prise par rapport aux nouvelles variables indépendantes $x'_1, x'_2, \dots, x'_i$, dans laquelle les variables $x_1, x_2, \dots, x_i$ doivent être regardées comme des fonctions inconnues de $x'_1, x'_2, \dots, x'_i$. Ainsi le moyen que nous allons proposer sert à compléter la discussion de la variation seconde d'une intégrale définie multiple, lors même qu'il y a la supposition admise par nous,

⁽¹⁾ *Journal de Crelle*, t. 56, p. 122.

⁽²⁾ P. 79, formule (40).

⁽³⁾ P. 80, formule (47).

c'est-à-dire la supposition que les limites d'une intégrale définie multiple sont données et restent invariables.

2. Nous exposerons d'abord les préliminaires qu'il est nécessaire de faire voir pour les transformations de la variation seconde d'une intégrale définie multiple, et nous indiquerons ensuite ces transformations.

Soit proposé de trouver le maximum ou le minimum de l'intégrale multiple

$$(1) \quad W = \int w dx_1 dx_2 \dots dx_i,$$

prise par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_i$, dont les valeurs extrêmes ou les limites des intégrations successives sont données par l'équation

$$(2) \quad u = 0,$$

u étant une fonction donnée de $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Nous désignerons par $x'_1, x'_2, \dots, x'_i$ les limites inférieures des variables $x_1, x_2, \dots, x_i$, et par $x''_1, x''_2, \dots, x''_i$ leurs limites supérieures; nous supposerons que les limites de chacune des variables $x_1, x_2, \dots, x_i$ sont des fonctions des variables qui la suivent, de sorte que les limites x''_i et x'_i sont indépendantes de toutes les variables $x_1, x_2, \dots, x_i$, tandis que les limites x''_{i-1} et x'_{i-1} pourront être fonctions de x_i ; celles des x_{i-2} , savoir x''_{i-2} et x'_{i-2} , des fonctions de x_i et x_{i-1} , et ainsi de suite jusqu'à la variable x_1 , dont les limites x''_1 et x'_1 seront en général des fonctions de $x_2, x_3, \dots, x_i$.

La fonction w , qui se trouve sous le signe $\int$, contient explicitement les variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_i$, des fonctions inconnues $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ de ces variables, et les dérivées partielles du premier ordre de ces fonctions par rapport à $x_1, x_2, \dots, x_i$. Ces dérivées seront désignées dans la suite par

$$p_{1,1}, p_{1,2}, \dots, p_{1,i}, \dots, p_{s,1}, p_{s,2}, \dots, p_{s,i}$$

et en général

$$p_{s,i} = \frac{\partial \gamma_s}{\partial x_i},$$

i étant un des nombres $1, 2, \dots, i$, et s un des nombres $1, 2, \dots, s$.

par nous. En posant

$$\int^{x''_1} F(x_1, x_2, \dots, x_i, y_1, y_2, \dots, y_i, q_{1,1}, \dots, q_{1,i}, \dots, q_{s,1}, \dots, q_{s,i}) \\ = \psi(x_2, \dots, x_i, y_2, \dots, y_i, q_{2,i}, \dots, q_{s,i}),$$

l'équation (6) se représentera par celle-ci :

$$(8) \quad \psi(x_2, \dots, x_i, y_2, \dots, y_i, q_{2,i}, \dots, q_{s,i}) = 0,$$

i étant, dans cette équation, un des nombres 2, 3, ..., i .

Les variations tronquées ω , relatives aux limites des intégrations, et leurs dérivées partielles $\frac{\partial \omega_s}{\partial x_i}$, qui sont en même temps les variations des dérivées partielles $q_{s,i}$, doivent satisfaire à l'équation

$$(9) \quad \delta \psi = 0,$$

dont la forme générale est

$$(10) \quad \sum_s \frac{\partial \psi}{\partial y_s} \omega_s + \sum_s \sum_i \frac{\partial \psi}{\partial q_{s,i}} \frac{\partial \omega_s}{\partial x_i} = 0.$$

Il est à remarquer que nous supposons que dans les équations (6) et (9) entrent les $q_{s,i}$, mais non pas les $p_{s,i}$; cette supposition est permise sans restreindre la généralité de la discussion de la variation $\delta^2 W$. En effet, au cas où l'on donne l'équation de condition contenant $p_{s,i}$ sous la forme

$$\int^{x''_1} f(x_1, x_2, \dots, y_i, \dots, p_{s,i}) = 0,$$

et en même temps

$$\int^{x''_1} \delta f(x_1, x_2, \dots, y_i, \dots, p_{s,i}) = 0,$$

cette équation $\int^{x''_1} \delta f(x_1, x_2, \dots, y_i, \dots, p_{s,i}) = 0$ entraîne $s+1$

équations, dont une est celle à laquelle doivent satisfaire les valeurs limites des ω_s , et les s autres, les équations qui donnent les s relations entre x_i, y_i et $p_{s,i}$; ces s relations et les $s(i-1)$ équations (7) déterminent les $p_{s,i}$ en fonctions de x_i, y_i et $q_{s,i}$; en portant ces valeurs

des $p_{s,i}$ dans l'équation $\int^{x''} f(x_1, \dots, x_i, \dots, \gamma_s, \dots, p_{s,i}) = 0$, on aura l'équation de condition qui ne renferme plus d'autres dérivées partielles de γ_s que les $q_{s,i}$.

La question proposée du maximum ou du minimum relatif peut être ramenée, comme on sait, à la question du maximum ou du minimum absolu de cette autre intégrale

$$(11) \quad V = V_1 + V_2, \quad \text{où} \quad V_1 = \int v_1 dx_1 dx_2 \dots dx_i, \quad V_2 = \int v_2 dx_1 dx_2 \dots dx_i,$$

dans lesquelles

$$(12) \quad v_1 = \omega + \sum_i \lambda_i \varphi_i, \quad v_2 = l\psi,$$

les λ_i et l représentant des fonctions inconnues des x_i , qu'il faut déterminer, ainsi que les fonctions γ_s , au moyen des équations (2) et (8) et d'autres équations qui dérivent de la condition $\delta V = 0$.

Les limites de l'intégrale V étant supposées invariables, la variation δV ne sera autre chose que l'intégrale des différentielles de v_1 et v_2 dues aux accroissements ω_s des γ_s et aux accroissements $\frac{\partial \omega_s}{\partial x_i}$ des $p_{s,i}$. Nous pouvons donc représenter cette variation δV par

$$(13) \quad \delta V = \delta V_1 + \delta V_2 = \int \delta v_1 dx_1 dx_2 \dots dx_i + \int \delta v_2 dx_1 dx_2 \dots dx_i,$$

en posant, pour abréger,

$$N_s = \frac{\partial v_1}{\partial \gamma_s}, \quad P_{s,i} = \frac{\partial v_1}{\partial p_{s,i}}, \quad M_s = \frac{\partial v_2}{\partial \gamma_s}, \quad Q_{s,i} = \frac{\partial v_2}{\partial p_{s,i}},$$

l'indice i qui affecte les $Q_{s,i}$ étant un des nombres 2, 3, ..., i , et

$$(14) \quad \delta v_1 = \sum_s N_s \omega_s + \sum_s \sum_i P_{s,i} \frac{\partial \omega_s}{\partial x_i},$$

$$(15) \quad \delta v_2 = \sum_s M_s \omega_s + \sum_s \sum_i Q_{s,i} \frac{\partial \omega_s}{\partial x_i},$$

ou

$$(16) \quad \delta v_1 = \sum_s \sum_i \frac{\partial (P_{s,i} \omega_s)}{\partial x_i} + \sum_s \omega_s \left(N_s - \sum_i \frac{\partial P_{s,i}}{\partial x_i} \right),$$

$$(17) \quad \delta v_2 = \sum_s \sum_i \frac{\partial (Q_{s,i} \omega_s)}{\partial x_i} + \sum_s \omega_s \left(M_s - \sum_i \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial x_i} \right).$$

Nous aurons donc

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta V = & \int \sum_s \sum_i \frac{\partial (Q_{s,i} \omega_s)}{\partial x_i} dx_2 \dots dx_i \\ & + \int \sum_s \left(M_s - \sum_i \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial x_i} \right) \omega_s dx_2 \dots dx_i \\ & + \int \sum_s \sum_i \frac{\partial (P_{s,i} \omega_s)}{\partial x_i} dx_1 dx_2 \dots dx_i \\ & + \int \sum_s \left(N_s - \sum_i \frac{\partial P_{s,i}}{\partial x_i} \right) \omega_s dx_1 dx_2 \dots dx_i. \end{aligned} \right.$$

En égalant à zéro le quatrième terme de cette expression, on obtient les s équations aux dérivées partielles du second ordre

$$(19) \quad N_1 = \sum_i \frac{\partial P_{1,i}}{\partial x_i}, \quad N_2 = \sum_i \frac{\partial P_{2,i}}{\partial x_i}, \quad \dots, \quad N_s = \sum_i \frac{\partial P_{s,i}}{\partial x_i},$$

auxquelles il faut adjoindre les k équations (3). Ces équations (19) et (3) serviront à déterminer les fonctions inconnues γ_s et λ_k . Les valeurs générales des γ_s et des λ_k , obtenues par l'intégration des équations (19) et (3), contiendront des fonctions arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \dots$.

Quant à la partie restante de $\delta^2 V$, l'intégrale

$$\int \sum_s \sum_i \frac{\partial (P_{s,i} \omega_s)}{\partial x_i} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

se réduira, au moyen des transformations connues, à deux intégrales de l'ordre $i-1$, dont l'une, celle dans laquelle x_1 reçoit la valeur limite x'_1 , donne les s équations

$$(20) \quad \int^{x'_1} \sum_i P_{1,i} \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\frac{\partial u}{\partial x_1}} = 0, \quad \dots, \quad \int^{x'_1} \sum_i P_{s,i} \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\frac{\partial u}{\partial x_1}} = 0;$$

l'autre, celle dans laquelle x_1 reçoit la valeur limite x''_1 , étant égalée à zéro, avec l'intégrale $\int \sum_s \left(M_s - \sum_i \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial x_i} \right) \omega_s dx_2 \dots dx_i$, donne

encore les s équations

[illegible]

L'intégrale

$$\int \sum_s \sum_i \frac{\partial(Q_{s,i}, \omega_s)}{\partial x_i} dx_2 dx_3 \dots dx_i$$

se réduira, au moyen de transformations connues, à deux intégrales qui, étant égalées à zéro, donnent les 2s équations

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} /^{x''_1} \sum_i Q_{1,i} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} = 0, \quad \dots, \quad /^{x''_2} \sum_i Q_{2,i} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} = 0, \\ /^{x'_1} \sum_i Q_{1,i} \frac{\partial u_i}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad /^{x'_2} \sum_i Q_{2,i} \frac{\partial u_i}{\partial x_2} = 0, \end{array} \right.$$

u_1 étant le résultat de l'élimination de la variable x_1 entre $u = 0$ et

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0.$$

Aux équations (20), (21) et (22) il faut adjoindre les équations (7) et (8). Ces équations (20), (21), (22), (7) et (8), relatives aux limites des intégrations, serviront à déterminer les fonctions l et $\alpha_1, \alpha_2, \dots$

La variation seconde $\partial^2 V$, en vertu de la formule (13), se réduit à

$$(23) \quad \delta^2 V = \delta^2 V_1 + \delta^2 V_2 = \int \delta^2 v_1 dx_1 dx_2 \dots dx_i + \int \delta^2 v_2 dx_2 dx_3 \dots dx_i,$$

où

$$\begin{aligned}\partial^2 v_1 &= \sum_s \frac{\partial \partial v_1}{\partial y_s} \omega_s + \sum_s \sum_i \frac{\partial \partial v_1}{\partial p_{s,i}} \frac{\partial \omega_s}{\partial x_i}, \\ \partial^2 v_2 &= \sum_s \frac{\partial \partial v_2}{\partial y_s} \omega_s + \sum_s \sum_i \frac{\partial \partial v_2}{\partial q_{s,i}} \frac{\partial \omega_s}{\partial x_i}.\end{aligned}$$

Or on peut mettre ces deux dernières expressions sous la forme

$$\delta^2 v_1 = \sum_s \sum_i \frac{\partial \left(\frac{\partial \delta v_1}{\partial p_{s,i}} \omega_s \right)}{\partial x_i} + \sum_s \left(\frac{\partial \delta v_1}{\partial y_s} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \delta v_1}{\partial p_{s,i}} \right) \omega_s,$$

$$\delta^2 v_2 = \sum_s \sum_i \frac{\partial \left(\frac{\partial \delta v_2}{\partial q_{s,i}} \omega_s \right)}{\partial x_i} + \sum_s \left(\frac{\partial \delta v_2}{\partial y_s} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \delta v_2}{\partial q_{s,i}} \right) \omega_s,$$

par conséquent

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta^2 V_1 &= \int \sum_s \sum_i \frac{\partial \left(\frac{\partial \delta v_1}{\partial p_{s,i}} \omega_s \right)}{\partial x_i} dx_1 dx_2 \dots dx_i \\ &+ \int \sum_s \left(\frac{\partial \delta v_1}{\partial y_s} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \delta v_1}{\partial p_{s,i}} \right) \omega_s dx_1 dx_2 \dots dx_i, \end{aligned} \right.$$

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta^2 V_2 &= \int \sum_s \sum_i \frac{\partial \left(\frac{\partial \delta v_2}{\partial q_{s,i}} \omega_s \right)}{\partial x_i} dx_1 dx_2 \dots dx_i \\ &+ \int \sum_s \left(\frac{\partial \delta v_2}{\partial y_s} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \delta v_2}{\partial q_{s,i}} \right) \omega_s dx_1 \dots dx_i, \end{aligned} \right.$$

où, sous le signe $\int$, il faut aussi substituer à δv_1 et δv_2 leurs expressions (14) et (15). La sommation relative à chacun des indices s et i devant être faite deux fois, nous remplacerons d'abord, dans les formules (14) et (15), les indices s et i respectivement par σ et j , et nous porterons ensuite ces expressions dans (24) et (25), sans changer les indices s et i relatifs aux secondes sommations. Observant que

$$\frac{\partial N_s}{\partial p_{s,i}} = \frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_s}, \quad \frac{\partial P_{s,j}}{\partial p_{s,i}} = \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{s,j}}, \quad \frac{\partial N_s}{\partial y_s} = \frac{\partial N_i}{\partial y_s}, \quad \sum_j \frac{\partial P_{s,j}}{\partial y_s} \frac{\partial \omega_s}{\partial x_j} = \sum_i \frac{\partial N_s}{\partial p_{s,i}} \frac{\partial \omega_s}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial M_s}{\partial q_{s,i}} = \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial y_s}, \quad \frac{\partial Q_{s,j}}{\partial q_{s,i}} = \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{s,j}}, \quad \frac{\partial M_s}{\partial y_s} = \frac{\partial M_i}{\partial y_s}, \quad \sum_j \frac{\partial Q_{s,j}}{\partial y_s} \frac{\partial \omega_s}{\partial x_j} = \sum_i \frac{\partial M_s}{\partial q_{s,i}} \frac{\partial \omega_s}{\partial x_i},$$

nous obtiendrons les deux formules

$$(26) \left\{ \begin{aligned} \delta^2 V_1 = & \int \left[\sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial \left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma} \omega_s \omega_\sigma \right)}{\partial x_i} \right] dx_1 dx_2 \dots dx_i \\ & + \int \left[\sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial \left(\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j} \omega_s \right)}{\partial x_i} \right] dx_1 dx_2 \dots dx_i \\ & + \int \left\{ \sum_s \sum_\sigma \left[\frac{\partial N_s}{\partial y_\sigma} \omega_\sigma + \sum_i \frac{\partial N_s}{\partial p_{\sigma,i}} \frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_i} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sum_i \frac{\partial \left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma} \omega_s \right)}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial \left(\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j} \right)}{\partial x_i} \right] \omega_s \right\} dx_1 dx_2 \dots dx_i, \end{aligned} \right.$$

$$(27) \left\{ \begin{aligned} \delta^2 V_2 = & \int \left[\sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial \left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial y_\sigma} \omega_s \omega_\sigma \right)}{\partial x_i} \right] dx_2 dx_3 \dots dx_i \\ & + \int \left[\sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial \left(\sum_j \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}} \frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j} \omega_s \right)}{\partial x_i} \right] dx_2 dx_3 \dots dx_i \\ & + \int \left\{ \sum_s \sum_\sigma \left[\frac{\partial M_s}{\partial y_\sigma} \omega_\sigma + \sum_i \frac{\partial M_s}{\partial q_{\sigma,i}} \frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_i} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sum_i \frac{\partial \left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial y_\sigma} \omega_s \right)}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial \left(\sum_j \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}} \frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j} \right)}{\partial x_i} \right] \omega_s \right\} dx_2 dx_3 \dots dx_i. \end{aligned} \right.$$

3. Pour obtenir une expression de $\delta^2 V$ qui puisse servir à la distinction du maximum ou du minimum de l'intégrale V , nous transformerons les expressions (26) et (27) en substituant aux variations tronquées ω , des fonctions linéaires de nouvelles variables, dont les coefficients se déterminent de la manière suivante.

Désignons par a_m une constante indéterminée, indépendante de $x_1, x_2, \dots, x_i$, qui n'entre dans les fonctions γ, λ et l que par suite de l'intégration des équations (3), (13), (20), (21), (22) et (8); le nombre des fonctions γ , étant égal à s , prenons s quelconques

de ces constantes a_m , et formons les expressions

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{1,1} = \sum_m b_{1,m} \frac{\partial \gamma_1}{\partial a_m}, \quad \dots, \quad R_{1,n} = \sum_m b_{n,m} \frac{\partial \gamma_1}{\partial a_m}, \\ \dots, \dots, \dots, \\ R_{s,1} = \sum_m b_{1,m} \frac{\partial \gamma_s}{\partial a_m}, \quad \dots, \quad R_{s,n} = \sum_m b_{n,m} \frac{\partial \gamma_s}{\partial a_m}, \end{array} \right.$$

dans lesquelles $b_{1,1}, \dots, b_{1,m}, \dots, b_{n,1}, \dots, b_{n,m}$ sont des constantes indéterminées, indépendantes de $x_1, x_2, \dots, x_i$, qui sont assujetties à la seule condition d'être des quantités réelles et positives, et qui n'entrent ni dans les fonctions γ, λ et l , ni dans les équations (2), (13), ni dans les équations aux limites (3), (20), (21) et (22); la somme $\sum_m$ s'étendant aux constantes a_m , et n , ainsi que m , désignant tous les nombres entiers positifs depuis 1 jusqu'à s .

Nous représenterons encore ces mêmes valeurs par

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{1,1} = \sum_\mu b_{1,\mu} \frac{\partial \gamma_1}{\partial a_\mu}, \quad \dots, \quad R_{1,\nu} = \sum_\mu b_{\nu,\mu} \frac{\partial \gamma_1}{\partial a_\mu}, \\ \dots, \dots, \dots, \\ R_{\sigma,1} = \sum_\mu b_{1,\mu} \frac{\partial \gamma_\sigma}{\partial a_\mu}, \quad \dots, \quad R_{\sigma,\nu} = \sum_\mu b_{\nu,\mu} \frac{\partial \gamma_\sigma}{\partial a_\mu}, \end{array} \right.$$

en changeant les indices s, n, m respectivement en σ, ν, μ .

Les valeurs des γ_s , considérées comme fonctions des a_m , étant indépendantes entre elles, et les constantes $b_{n,m}$ parfaitement arbitraires, on peut toujours attribuer à ces dernières des valeurs pour lesquelles le déterminant D des s^2 quantités (28) ne sera pas égal à zéro. Cela posé, formons encore les $s(k+1)$ expressions

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{1,1} = \sum_m b_{1,m} \frac{\partial \lambda_1}{\partial a_m}, \quad \dots, \quad \Lambda_{1,n} = \sum_m b_{n,m} \frac{\partial \lambda_1}{\partial a_m}, \\ \dots, \dots, \dots, \\ \Lambda_{k,1} = \sum_m b_{1,m} \frac{\partial \lambda_k}{\partial a_m}, \quad \dots, \quad \Lambda_{k,n} = \sum_m b_{n,m} \frac{\partial \lambda_k}{\partial a_m}, \end{array} \right.$$

$$(31) \quad \begin{array}{l} \mathbf{I}_1 = \sum_m b_{1,m} \frac{\partial l}{\partial a_m}, \quad \dots, \quad \mathbf{I}_n = \sum_m b_{n,m} \frac{\partial l}{\partial a_m}, \end{array}$$

ou, en changeant les indices n, m respectivement en ν, μ ,

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{1,1} = \sum_{\mu} b_{1,\mu} \frac{\partial \lambda_1}{\partial a_{\mu}}, \quad \dots, \quad \Lambda_{1,\nu} = \sum_{\mu} b_{\nu,\mu} \frac{\partial \lambda_1}{\partial a_{\mu}}, \\ \dots, \dots, \dots, \\ \Lambda_{k,1} = \sum_{\mu} b_{1,\mu} \frac{\partial \lambda_k}{\partial a_{\mu}}, \quad \dots, \quad \Lambda_{k,\nu} = \sum_{\mu} b_{\nu,\mu} \frac{\partial \lambda_k}{\partial a_{\mu}}, \end{array} \right.$$

$$(33) \quad L_1 = \sum_{\mu} b_{1,\mu} \frac{\partial l}{\partial a_{\mu}}, \quad \dots, \quad L_{\nu} = \sum_{\mu} b_{\nu,\mu} \frac{\partial l}{\partial a_{\mu}},$$

qui nous seront utiles dans la suite.

En prenant les dérivées de quelques-unes des équations (19), (3), (20), (21), (22) et (8), par rapport aux constantes a_{μ} , multipliant ensuite ces dérivées par les constantes $b_{\nu,\mu}$, et faisant la somme des produits, nous obtiendrons des équations différentielles linéaires par rapport aux expressions (23), (32) et (33), de la forme

$$(34) \quad h_{s,\nu} = 0,$$

où

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} h_{s,\nu} = \sum_{\sigma} \frac{\partial N_s}{\partial y_{\sigma}} R_{\sigma,\nu} + \sum_k \frac{\partial N_s}{\partial \lambda_k} \Lambda_{k,\nu} + \sum_i \sum_{\sigma} \frac{\partial N_s}{\partial p_{\sigma,i}} \frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_i} \\ - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{\sigma} \frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_{\sigma}} R_{\sigma,\nu} + \sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k} \Lambda_{k,\nu} + \sum_j \sum_{\sigma} \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j} \right), \end{array} \right.$$

$$(36) \quad \sum_{\sigma} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_{\sigma}} R_{\sigma,\nu} + \sum_i \sum_{\sigma} \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_{\sigma,i}} \frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_i} = 0,$$

$$(37) \quad \int_{x_1}^{x_1''} \sum_i \sum_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_{\sigma}} R_{\sigma,\nu} + \sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j} + \sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k} \Lambda_{k,\nu} \right) dx_i + g_{s,\nu} = 0,$$

où

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{s,\nu} = \sum_{\sigma} \frac{\partial M_s}{\partial y_{\sigma}} R_{\sigma,\nu} + \frac{\partial M_s}{\partial l} L_{\nu} + \sum_i \sum_{\sigma} \frac{\partial M_s}{\partial q_{\sigma,i}} \frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_i} \\ - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{\sigma} \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial y_{\sigma}} R_{\sigma,\nu} + \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l} L_{\nu} + \sum_j \sum_{\sigma} \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}} \frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j} \right), \end{array} \right.$$

$$(39) \quad \int_{x_1}^{x_1'} \sum_i \sum_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_{\sigma}} R_{\sigma,\nu} + \sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j} + \sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k} \Lambda_{k,\nu} \right) dx_i = 0,$$

$$(40) \left\{ \begin{aligned} & \int^{x_1} \sum_i \sum_{\sigma} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial y_{\sigma}} R_{\sigma,v} + \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l} L_v + \sum_j \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}} \frac{\partial R_{\sigma,i}}{\partial x_j} \right) = 0, \\ & \int^{x_1} \sum_i \sum_{\sigma} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial y_{\sigma}} R_{\sigma,v} + \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l} L_v + \sum_j \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}} \frac{\partial R_{\sigma,v}}{\partial x_j} \right) = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(41) \quad \sum_{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial y_{\sigma}} R_{\sigma,v} + \sum_i \sum_{\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial q_{\sigma,i}} \frac{\partial R_{\sigma,v}}{\partial x_i} = 0;$$

d'où l'on doit conclure que les valeurs des R , Λ et L sont les solutions des équations (34), (36), (39), (40) et (41), analogues à celles dont les intégrales sont connues par le théorème de Jacobi (*Journal de Crelle*, t. 17). Le déterminant D des expressions (28) ou (29) n'étant pas égal à zéro, on peut exprimer les s variations tronquées ω_s en fonctions d'autant de variables indépendantes t_n ou t_v , en prenant les expressions (28) ou (29) pour coefficients de ces variables, savoir

$$(42) \quad \omega_s = \sum_n R_{s,n} t_n,$$

$$(43') \quad \omega_{\sigma} = \sum_v R_{\sigma,v} t_v,$$

où les variables t_n ou t_v doivent être considérées comme fonctions arbitraires de $x_1, x_2, \dots, x_i$.

Avant de faire les substitutions de ces expressions des ω , dans celle de $\partial^2 V$, nous démontrerons deux égalités qui nous seront nécessaires dans la transformation de $\partial^2 V$, que nous avons en vue. La première de ces égalités est

$$(44) \left\{ \begin{aligned} & \sum_v \sum_s \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k} \Lambda_{k,v} t_v \omega_s \right) \\ & + \sum_n \sum_v \sum_s R_{s,n} t_n t_v \left[\sum_k \frac{\partial N_s}{\partial \lambda_k} \Lambda_{k,v} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k} \Lambda_{k,v} \right) \right] \\ & + \sum_n \sum_v \sum_i t_n \frac{\partial t_v}{\partial x_i} \left[\sum_{\sigma} \left(\sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k} \Lambda_{k,n} \right) R_{\sigma,v} \right. \\ & \quad \left. - \sum_r \left(\sum_k \frac{\partial P_{r,i}}{\partial \lambda_k} \Lambda_{k,v} \right) R_{s,n} \right] = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(45) \left\{ \begin{aligned} & \sum_v \sum_s \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l} L_v t_v \omega_s \right) \\ & + \sum_n \sum_v \sum_s R_{s,n} t_n t_v \left[\frac{\partial M_s}{\partial l} L_v - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l} L_v \right) \right] \\ & + \sum_n \sum_v \sum_i t_n \frac{\partial t_v}{\partial x_i} \left(\sum_\sigma \frac{\partial Q_{\sigma,i}}{\partial l} L_n R_{\sigma,v} - \sum_s \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l} L_v R_{s,n} \right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour démontrer la formule (44), multiplions d'abord l'équation (5) par $\Lambda_{k,v} t_v$; faisons ensuite la sommation par rapport aux indices k et v , et nous aurons

$$(46) \left\{ \begin{aligned} 0 = & \sum_v \sum_s \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k} \Lambda_{k,v} t_v \omega_s \right) \\ & + \sum_n \sum_v \sum_s R_{s,n} t_n t_v \left[\sum_k \frac{\partial N_s}{\partial \lambda_k} \Lambda_{k,v} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k} \Lambda_{k,v} \right) \right] \\ & - \sum_n \sum_v \sum_i t_n \frac{\partial t_v}{\partial x_i} \left[\sum_s \left(\sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k} \Lambda_{k,v} \right) R_{s,n} \right]. \end{aligned} \right.$$

Les expressions (42) des ω_s étant substituées dans l'équation (5), il en résulte

$$\sum_s \sum_n t_n \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_s} R_{s,n} + \sum_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_{s,i}} \frac{\partial R_{s,n}}{\partial x_i} \right) + \sum_i \sum_s \sum_n \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k} R_{s,n} \frac{\partial t_n}{\partial x_i} = 0,$$

ce qui devient, en vertu de l'équation (36),

$$(47) \quad \sum_i \sum_s \sum_n \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k} R_{s,n} \frac{\partial t_n}{\partial x_i} = 0.$$

Si, après avoir multiplié cette dernière équation par $\Lambda_{k,v} t_v$, nous faisons les sommations par rapport aux indices k et v , nous aurons

$$\sum_i \sum_s \sum_n \sum_v \sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k} R_{s,n} \frac{\partial t_n}{\partial x_i} \Lambda_{k,v} t_v = 0,$$

ou, en remplaçant respectivement s, n, v par σ, ν, n ,

$$\sum_i \sum_n \sum_\nu t_n \frac{\partial t_\nu}{\partial x_i} \left[\sum_\sigma \left(\sum_k \frac{\partial P_{\sigma,i}}{\partial \lambda_k} \Lambda_{k,n} \right) R_{\sigma,\nu} \right] = 0.$$

Cette équation, jointe à l'équation (46), donne l'égalité (44).

Nous déduirons de la même manière l'égalité (45) et la suivante :

$$(48) \quad \sum_i \sum_s \sum_n \frac{\partial \omega_{s,i}}{\partial l} R_{s,n} \frac{\partial t_n}{\partial x_i} = 0.$$

Nous introduirons encore dans le calcul les expressions

$$(49) \quad \tau_{s,i} = \sum_n R_{s,n} \frac{\partial t_n}{\partial x_i}, \quad \tau_{\sigma,j} = \sum_v R_{\sigma,v} \frac{\partial t_v}{\partial x_j},$$

que l'on obtiendra en remplaçant, dans les expressions (42) et (43) des ω_s et ω_σ , les variables t_n, t_v par leurs dérivées respectives $\frac{\partial t_n}{\partial x_i}, \frac{\partial t_v}{\partial x_j}$.

Il est évident que

$$(50) \quad \tau_{s,i} = \frac{\partial \omega_s}{\partial x_i} - \sum_n t_n \frac{\partial R_{s,n}}{\partial x_i}, \quad \tau_{\sigma,j} = \frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j} - \sum_v t_v \frac{\partial R_{\sigma,v}}{\partial x_j},$$

et les équations (42) et (43) donnent

$$-t_n = \sum_\sigma \frac{\frac{\partial D}{\partial R_{\sigma,n}}}{D} \omega_\sigma, \quad t_v = \sum_s \frac{\frac{\partial D}{\partial R_{s,v}}}{D} \omega_s;$$

par conséquent

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_{s,i} = \frac{\partial \omega_s}{\partial x_i} - \sum_n \sum_\sigma \frac{\partial R_{s,n}}{\partial x_i} \frac{\frac{\partial D}{\partial R_{\sigma,n}}}{D} \omega_\sigma, \\ \tau_{\sigma,j} = \frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j} - \sum_v \sum_s \frac{\partial R_{\sigma,v}}{\partial x_j} \frac{\frac{\partial D}{\partial R_{s,v}}}{D} \omega_s. \end{array} \right.$$

Au moyen de ces formules, les équations (47) et (48) peuvent être mises sous la forme

$$(52) \quad \sum_i \sum_s \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k} \tau_{s,i} = 0, \quad \text{ou} \quad \sum_j \sum_\sigma \frac{\partial P_{\sigma,j}}{\partial \lambda_k} \tau_{\sigma,j} = 0,$$

$$(53) \quad \sum_i \sum_s \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l} \tau_{s,i} = 0, \quad \text{ou} \quad \sum_j \sum_\sigma \frac{\partial P_{\sigma,j}}{\partial l} \tau_{\sigma,j} = 0.$$

Les $\tau_{s,i}$ qui se trouvent dans les équations (53) se rapportent aux limites des intégrations; il est évident que les équations (5), et par suite les équations (52), n'ont pas d'influence sur les valeurs limites des ω_s , et par conséquent sur les $\tau_{s,i}$ qui se trouvent dans les équations (53). En effet, si nous désignons par ω'_s la partie de ω_s qui ne résulte que du changement de forme de γ_s par rapport aux fonctions arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, nous aurons

$$\omega_s = \omega'_s + \sum_\alpha \frac{\partial \gamma_s}{\partial \alpha} \delta \alpha.$$

Or l'intégration des équations (19) et (3) donnera la forme de γ_s par rapport aux fonctions arbitraires α , et cette forme ainsi déterminée restera invariable, quelles que soient les variations des valeurs limites de γ_s ; d'où il suit que les ω'_s , aux limites des intégrations, s'annulent, et en vertu de cela les variations tronquées ω_s , aux limites des intégrations, se réduiront à

$$(54) \quad \omega_s = \sum_{\alpha} \frac{\partial \gamma_s}{\partial \alpha} \delta \alpha.$$

Mais ces ω , donnés par (54) satisfont identiquement à chacune des équations (5).

4. Revenons maintenant à la transformation de la variation $\delta^2 V$.

Si nous ajoutons à la troisième intégrale de l'expression (26) l'intégrale de l'équation (44), nous aurons

$$(55) \quad \delta^2 V_1 = A + B,$$

où

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} A = & \int \sum_i \sum_{\sigma} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial \gamma_{\sigma}} \omega_s \omega_{\sigma} \right) dx_1 \dots dx_i \\ & + \int \sum_i \sum_{\sigma} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial \omega_s}{\partial x_j} \omega_{\sigma} \right) dx_1 \dots dx_i \\ & + \int \sum_i \sum_{\nu} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k} \Lambda_{k,\nu} t_{\nu} \omega_s \right) dx_1 \dots dx_i, \end{aligned} \right.$$

$$(57) \quad \left\{ \begin{aligned} h_{s,\sigma}^{(\nu)} = & \frac{\partial N_s}{\partial \gamma_{\sigma}} R_{s,\nu} t_{\nu} + \sum_i \frac{\partial N_s}{\partial p_{\sigma,i}} \frac{\partial (R_{s,\nu} t_{\nu})}{\partial x_i} \\ & - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial \gamma_{\sigma}} R_{s,\nu} t_{\nu} \right) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial (R_{s,\nu} t_{\nu})}{\partial x_j} \right], \end{aligned} \right.$$

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} \beta = & \sum_n \sum_{\nu} \sum_i \sum_{\sigma} h_{s,\sigma}^{(\nu)} R_{s,n} t_n \\ & + \sum_n \sum_{\nu} \sum_i R_{s,n} t_n t_{\nu} \left[\sum_k \frac{\partial N_s}{\partial \lambda_k} \Lambda_{k,\nu} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k} \Lambda_{k,\nu} \right) \right] \\ & + \sum_n \sum_{\nu} \sum_i t_n \frac{\partial t_{\nu}}{\partial x_i} \left[\sum_{\sigma} \left(\sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k} \Lambda_{k,n} \right) R_{s,\nu} \right] \\ & - \sum_n \sum_{\nu} \sum_i t_n \frac{\partial t_{\nu}}{\partial x_i} \left[\sum_s \left(\sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k} \Lambda_{k,\nu} \right) R_{s,n} \right], \end{aligned} \right.$$

$$(59) \quad B = \int \beta dx_1 \dots dx_i.$$

De même, si nous ajoutons à la troisième intégrale de l'expression (27) l'intégrale de l'équation (45), nous aurons

$$(60) \quad \partial^2 V_2 = A_1 + B_1,$$

où

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} A_1 = & \int \sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial y_\sigma} \omega_s \omega_\sigma \right) dx_1 \dots dx_i \\ & + \int \sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}} \frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j} \right) dx_1 \dots dx_i \\ & + \int \sum_s \sum_v \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l} L_v t_v \omega_s \right) dx_1 \dots dx_i, \end{aligned} \right.$$

$$(62) \quad \left\{ \begin{aligned} g_{s,\sigma}^{(v)} = & \frac{\partial M_s}{\partial y_\sigma} R_{\sigma,v} t_v + \sum_i \frac{\partial M_s}{\partial q_{\sigma,i}} \frac{\partial (R_{\sigma,v} t_v)}{\partial x_i} \\ & - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial y_\sigma} R_{\sigma,v} t_v \right) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_j \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}} \frac{\partial (R_{\sigma,v} t_v)}{\partial x_j} \right], \end{aligned} \right.$$

$$(63) \quad \left\{ \begin{aligned} \beta_1 = & \sum_n \sum_v \sum_s \sum_\sigma g_{s,\sigma}^{(v)} R_{s,n} t_n \\ & + \sum_n \sum_v \sum_s R_{s,n} t_n t_v \left[\frac{\partial M_s}{\partial l} L_v - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l} L_v \right) \right] \\ & + \sum_n \sum_v \sum_i t_n \frac{\partial t_v}{\partial x_i} \left[\sum_\sigma \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l} L_n R_{\sigma,v} \right] \\ & - \sum_n \sum_v \sum_i t_n \frac{\partial t_v}{\partial x_i} \left[\sum_s \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l} L_v R_{s,n} \right], \end{aligned} \right.$$

$$(64) \quad B_1 = \int \beta_1 dx_1 \dots dx_i.$$

Pour la transformation de $\partial^2 V$ que nous avons en vue, on doit faire des réductions d'abord dans l'expression (58) de β , et ensuite dans l'expression (63) de β_1 .

Nous allons maintenant démontrer l'égalité suivante :

$$(65) \quad \beta = \rho + c + f + \sum_n \sum_v \sum_s R_{s,n} t_n \hbar_{s,v},$$

où

$$(66) \quad \rho = \sum_n \sum_v \sum_i t_n \frac{\partial t_v}{\partial x_i} \left\{ \begin{aligned} & \sum_\sigma \left(\sum_s \frac{\partial P_{\sigma,i}}{\partial y_s} R_{s,n} + \sum_k \frac{\partial P_{\sigma,i}}{\partial \lambda_k} \Lambda_{k,n} + \sum_s \sum_j \frac{\partial P_{\sigma,i}}{\partial p_{s,j}} \frac{\partial R_{s,n}}{\partial x_j} \right) R_{\sigma,v} \\ & - \sum_s \left(\sum_\sigma \frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma} R_{\sigma,v} + \sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k} \Lambda_{k,v} + \sum_\sigma \sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial R_{\sigma,v}}{\partial x_j} \right) R_{s,n} \end{aligned} \right\}$$

$$(67) \quad c = - \sum_n \sum_v \sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{\sigma,v} \frac{\partial t_v}{\partial x_j} R_{s,n} t_n \right),$$

$$(68) \quad f = \sum_n \sum_v \sum_s \sum_\sigma \sum_i \sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{\sigma,v} \frac{\partial t_v}{\partial x_j} R_{s,n} \frac{\partial t_n}{\partial x_i},$$

$h_{s,v}$ étant le second membre de l'équation (35). Pour établir la formule (65), observons que

$$(69) \quad \left. \begin{aligned} R_{s,n} h_{s,\sigma}^{(v)} &= R_{s,n} R_{\sigma,v} t_v \frac{\partial N_s}{\partial y_\sigma} + \sum_i R_{s,n} \frac{\partial (R_{\sigma,v} t_s)}{\partial x_i} \frac{\partial N_s}{\partial p_{\sigma,i}} \\ &\quad - \sum_i R_{s,n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma} R_{\sigma,v} t_v \right) \\ &\quad - \sum_i R_{s,n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial (R_{\sigma,v} t_v)}{\partial x_j} \right] \\ &= R_{s,n} t_v \left[\frac{\partial N_s}{\partial y_\sigma} R_{\sigma,v} + \sum_i \frac{\partial N_s}{\partial p_{\sigma,i}} \frac{\partial R_{\sigma,v}}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma} R_{\sigma,v} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial R_{\sigma,v}}{\partial x_j} \right) \right] \\ &\quad + \sum_i \frac{\partial N_s}{\partial p_{\sigma,i}} R_{s,n} R_{\sigma,v} \frac{\partial t_v}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma} R_{s,n} R_{\sigma,v} \frac{\partial t_v}{\partial x_i} \\ &\quad - \sum_i \sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{s,n} \frac{\partial R_{\sigma,v}}{\partial x_j} \frac{\partial t_v}{\partial x_i} \\ &\quad - \sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \right) R_{s,n} R_{\sigma,v} \frac{\partial t_v}{\partial x_j} \\ &\quad - \sum_i \sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{s,n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R_{\sigma,v} \frac{\partial t_v}{\partial x_j} \right), \end{aligned} \right\}$$

et, en vertu de

$$\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} = \frac{\partial P_{\sigma,j}}{\partial p_{s,i}},$$

nous aurons

$$\begin{aligned} &- \sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \right) R_{s,n} R_{\sigma,v} \frac{\partial t_v}{\partial x_j} - \sum_i \sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{s,n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R_{\sigma,v} \frac{\partial t_v}{\partial x_j} \right) \\ &= - \sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{s,n} \right) R_{\sigma,v} \frac{\partial t_v}{\partial x_j} \\ &\quad - \sum_i \sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{s,n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R_{\sigma,v} \frac{\partial t_v}{\partial x_j} \right) + \sum_i \sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial R_{s,n}}{\partial x_i} R_{\sigma,v} \frac{\partial t_v}{\partial x_j} \\ &= - \sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{s,n} R_{\sigma,v} \frac{\partial t_v}{\partial x_j} \right) + \sum_i \sum_j \frac{\partial P_{\sigma,j}}{\partial p_{s,i}} \frac{\partial R_{s,n}}{\partial x_i} R_{\sigma,v} \frac{\partial t_v}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Or, les indices i, j étant les mêmes, on a

$$\sum_i \sum_j \frac{\partial P_{\sigma,j}}{\partial p_{s,i}} \frac{\partial R_{s,n}}{\partial x_i} R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j} = \sum_i \sum_j \frac{\partial P_{\sigma,i}}{\partial p_{s,j}} \frac{\partial R_{s,n}}{\partial x_j} R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_i};$$

par conséquent,

$$(70) - \sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \right) R_{s,n} R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j} - \sum_i \sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{s,n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j} \right)$$

$$(71) = - \sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{s,n} R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j} \right) + \sum_i \sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial R_{s,n}}{\partial x_j} R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_i}.$$

Si, dans la formule (69), nous remplaçons l'expression (70), qui s'y trouve, par (71), nous aurons

$$\begin{aligned} R_{s,n} h_{s,\sigma}^{(\nu)} = R_{s,n} t_n & \left[\frac{\partial N_s}{\partial y_\sigma} R_{\sigma,\nu} + \sum_i \frac{\partial N_s}{\partial p_{\sigma,i}} \frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_i} \right. \\ & - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma} R_{\sigma,\nu} \right) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j} \right) \Big] \\ & - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{s,n} R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j} \right) \\ & + \sum_i \frac{\partial t_\nu}{\partial x_i} \left[\left(\frac{\partial P_{\sigma,i}}{\partial y_s} R_{s,n} + \sum_j \frac{\partial P_{\sigma,i}}{\partial p_{s,j}} \frac{\partial R_{s,n}}{\partial x_j} \right) R_{\sigma,\nu} \right. \\ & \left. - \left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma} R_{\sigma,\nu} + \sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j} \right) R_{s,n} \right]. \end{aligned}$$

Multipliant cette dernière expression par t_n , faisant ensuite les sommations relatives aux indices s, σ, n, ν , et remplaçant

$$- \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{s,n} R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j} \right) t_n$$

par

$$- \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{s,n} R_{\sigma,\nu} t_n \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j} \right) + \sum_i \sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} R_{s,n} \frac{\partial t_n}{\partial x_i} R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j},$$

nous obtiendrons l'égalité (65).

Or il est aisé de voir que ρ (66), par la substitution aux variables t_n et t_ν des fonctions de nouvelles variables, se réduit identiquement à zéro. En effet, en remettant dans le second membre de l'égalité (66), pour $R_{s,n}$, $\Lambda_{h,n}$, $R_{\sigma,\nu}$, $\Lambda_{h,\nu}$ leurs expressions (28), (29),

(30), (32), l'égalité (66) prendra la forme suivante :

$$(72) \quad \left\{ \rho = \sum_n \sum_v \sum_i t_n \frac{\partial t_v}{\partial x_i} \left[\sum_\sigma \sum_m \sum_\mu \left(\frac{\partial P_{\sigma,i}}{\partial a_m} \frac{\partial \gamma_\sigma}{\partial a_\mu} b_{n,m} b_{v,\mu} \right) - \sum_s \sum_m \sum_\mu \left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial a_\mu} \frac{\partial \gamma_s}{\partial a_m} b_{n,m} b_{v,\mu} \right) \right] \right\}.$$

Les constantes $b_{n,\mu}$ ou $b_{v,m}$, parfaitement arbitraires, n'étant assumées qu'à la condition d'être des quantités réelles et positives, on peut toujours leur attribuer des valeurs pour lesquelles le déterminant des s^2 quantités $\sqrt{b_{n,\mu}}$ ou $\sqrt{b_{v,m}}$ ne soit pas égal à zéro, et par conséquent on peut exprimer les variables t_n ou t_v en fonctions d'autant de variables arbitraires et indépendantes t_μ ou t_m , en prenant les radicaux positifs $\sqrt{b_{n,\mu}}$ ou $\sqrt{b_{v,m}}$ pour coefficients de ces variables t_μ ou t_m , c'est-à-dire qu'on peut poser

$$(73) \quad t_n = \sum_\mu t_\mu \sqrt{b_{n,\mu}}, \quad t_v = \sum_m t_m \sqrt{b_{v,m}}.$$

En remplaçant, dans le second membre de l'égalité (72), les variables t_n et t_v par leurs expressions (73), nous aurons

$$(74) \quad \rho = \sum_m \sum_\mu \sum_i t_\mu \frac{\partial t_m}{\partial x_i} \left\{ \sum_\sigma \sum_n \sum_v \left(\frac{\partial P_{\sigma,i}}{\partial a_m} \frac{\partial \gamma_\sigma}{\partial a_\mu} b_{n,m} b_{v,\mu} \sqrt{b_{n,\mu}} \sqrt{b_{v,m}} \right) - \sum_s \sum_n \sum_v \left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial a_\mu} \frac{\partial \gamma_s}{\partial a_m} b_{n,m} b_{v,\mu} \sqrt{b_{n,\mu}} \sqrt{b_{v,m}} \right) \right\}.$$

De même, en posant

$$(75) \quad t_\mu = \sum_n T_n \sqrt{b_{n,\mu}}, \quad t_m = \sum_v T_v \sqrt{b_{v,m}},$$

et, en portant ces valeurs (75) de t_μ et t_m dans le second membre de l'égalité (74), l'expression de ρ devient

$$(76) \quad \rho = \sum_n \sum_v \sum_i T_n \frac{\partial T_v}{\partial x_i} \left\{ \sum_\sigma \sum_m \sum_\mu \left(\frac{\partial P_{\sigma,i}}{\partial a_m} \frac{\partial \gamma_\sigma}{\partial a_\mu} b_{n,m} b_{v,\mu} b_{n,\mu} b_{v,m} \right) - \sum_s \sum_m \sum_\mu \left(\frac{\partial P_{s,i}}{\partial a_\mu} \frac{\partial \gamma_s}{\partial a_m} b_{n,m} b_{v,\mu} b_{n,\mu} b_{v,m} \right) \right\}.$$

En changeant, dans le terme $\sum_\sigma \sum_m \sum_\mu \frac{\partial P_{\sigma,i}}{\partial a_m} \frac{\partial \gamma_\sigma}{\partial a_\mu} b_{n,m} b_{v,\mu} b_{n,\mu} b_{v,m}$, les indices m, μ, σ respectivement en μ, m, s , il est évident que le

second membre de l'égalité (76) sera égal à zéro, ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi les procédés que nous avons suivis dans la transformation de l'expression (58) de β montrent que cette expression se réduit à la suivante :

$$(77) \quad \beta = c + f + \sum_n \sum_v \sum_i R_{s,n} h_{s,v} t_n t_v.$$

Les mêmes procédés, étant appliqués, sans aucun changement, à l'expression (63) de β_1 , montreront aussi que cette expression se réduit à la suivante :

$$(78) \quad \beta_1 = c_1 + f_1 + \sum_n \sum_v \sum_i R_{s,n} g_{s,v} t_n t_v,$$

où

$$(79) \quad c_1 = - \sum_n \sum_v \sum_i \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}} R_{\sigma,v} \frac{\partial t_v}{\partial x_j} R_{s,n} t_n \right),$$

$$(80) \quad f_1 = \sum_n \sum_v \sum_i \sum_\sigma \sum_i \sum_j \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}} R_{\sigma,v} \frac{\partial t_v}{\partial x_j} R_{s,n} \frac{\partial t_n}{\partial x_i},$$

$g_{s,v}$ étant le second membre de l'équation (38).

Or, dans l'égalité (77), le coefficient $h_{s,v}$ de $R_{s,n} t_n t_v$ étant nul en vertu de l'équation (34), il en résulte l'égalité

$$(81) \quad \beta = c + f.$$

Si, pour abréger, nous faisons

$$(82) \quad C = \int c dx_1 dx_2 \dots dx_i,$$

$$(83) \quad F = \int f dx_1 dx_2 \dots dx_i,$$

$$(84) \quad C_1 = \int c_1 dx_2 \dots dx_i,$$

$$(85) \quad F_1 = \int f_1 dx_2 \dots dx_i,$$

$$(86) \quad G = \int \sum_n \sum_v \sum_i R_{s,n} g_{s,v} t_n t_v dx_2 \dots dx_i,$$

en vertu des formules (23), (55), (56), (59), (81), (82), (83), (60), (61), (64), (78), (84), (85) et (86), nous trouverons

$$(87) \quad \delta^2 V = A + C + G + A_1 + C_1 + F + F_1.$$

Remplaçant, dans l'intégrale (82), la valeur $R_{\sigma,\nu} \frac{\partial t_\nu}{\partial x_j}$ par

$$\frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j} - t_\nu \frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j},$$

on a

$$(88) \left\{ \begin{aligned} C &= \int \sum_n \sum_\nu \sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j} R_{s,n} t_n t_\nu \right) dx_1 dx_2 \dots dx_i \\ &\quad - \int \sum_s \sum_\sigma \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x_j} \omega_s \right) dx_1 dx_2 \dots dx_i. \end{aligned} \right.$$

Nous voyons que les secondes intégrales des expressions (56) A et (88) C disparaissent; d'ailleurs, si, dans la première intégrale de A (56), nous substituons la somme $\sum_\nu R_{\sigma,\nu} t_\nu$ à ω_σ , et si nous ajoutons le résultat à la première intégrale de C (88) et à la troisième de A (56), nous aurons

$$(89) \left\{ \begin{aligned} A + C &= \int \sum_s \sum_\nu \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\sum_\sigma \frac{\partial P_{s,i}}{\partial y_\sigma} R_{\sigma,\nu} + \sum_k \frac{\partial P_{s,i}}{\partial \lambda_k} \Lambda_{k,\nu} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_\sigma \sum_j \frac{\partial P_{s,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j} \right) t_\nu \omega_s \right] dx_1 \dots dx_i. \end{aligned} \right.$$

De la même manière, nous trouverons

$$(90) \left\{ \begin{aligned} A_1 + C_1 &= \int \sum_s \sum_\nu \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\sum_\sigma \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial y_\sigma} R_{\sigma,\nu} + \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial l} L_\nu \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_\sigma \sum_j \frac{\partial Q_{s,i}}{\partial q_{\sigma,j}} \frac{\partial R_{\sigma,\nu}}{\partial x_j} \right) t_\nu \omega_s \right] dx_2 \dots dx_i. \end{aligned} \right.$$

L'expression $A + C$ (89) se réduira, au moyen de transformations connues, à deux intégrales de l'ordre $i - 1$, et l'expression $A_1 + C_1$ (90) à deux intégrales de l'ordre $i - 2$. Chacune des deux intégrales obtenues pour l'expression $A_1 + C_1$ sera égale à zéro, en vertu des équations (40); une des deux intégrales obtenues pour l'expression $A + C$, savoir, celle dans laquelle x_1 reçoit la valeur limite x'_1 , sera seule égale à zéro, en vertu des équations (39), et l'autre, savoir celle dans laquelle x_1 reçoit la valeur limite x''_1 , étant jointe à l'intégrale G (86), sera aussi égale à zéro, en vertu des équations (37); donc la formule (87) deviendra

$$(91) \quad \delta^2 V = \int f dx_1 dx_2 \dots dx_i + \int f_i dx_2 \dots dx_i.$$

En ayant égard aux formules (68), (80) et (91), et en y remplaçant $R_{s,n} \frac{\partial t_n}{\partial x_i}$ et $R_{\sigma,n} \frac{\partial t_n}{\partial x_j}$ respectivement par $\tau_{s,i}$ et $\tau_{\sigma,j}$, la formule (91) deviendra

$$(92) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta^2 V = & \int \sum_i \sum_\sigma \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial P_{i,i}}{\partial p_{\sigma,j}} \tau_{s,i} \tau_{\sigma,j} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_i \\ & + \int \sum_i \sum_\sigma \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial Q_{i,i}}{\partial q_{\sigma,j}} \tau_{s,i} \tau_{\sigma,j} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_i. \end{aligned} \right.$$

On sait d'ailleurs que la discussion de la variation seconde de l'intégrale définie multiple, qui contient sous le signe $\int$ les dérivées partielles d'ordre quelconque des fonctions inconnues, peut toujours, au moyen des équations de condition, se ramener à la discussion de la variation seconde de l'intégrale définie multiple qui renferme sous le signe $\int$ les dérivées partielles du premier ordre seulement des fonctions inconnues. D'après cela, la formule (92) conduit au théorème suivant :

1° Dans le cas où il n'y a pas d'équations de condition, telles que (9), qui ne se rapportent qu'aux limites des intégrations, la discussion de la variation seconde de l'intégrale définie multiple se ramènera à la discussion d'une seule partie de la variation seconde, savoir, de la partie intégrable.

2° Dans le cas où l'on donne des équations de condition, telles que (9), qui ne se rapportent qu'aux limites des intégrations, on devra discuter les deux parties de la variation seconde, savoir, la partie non intégrable et celle qui ne se rapporte qu'aux limites des intégrations, et chacune des deux fonctions qui se trouvent l'une dans la première partie et l'autre dans la seconde est l'expression différentielle entière, homogène et du second degré par rapport à des variables arbitraires.

Pour l'élimination d'une ou de plusieurs des quantités $\tau_{s,i}$ qui ne se rapportent qu'aux limites des intégrations, on emploiera une ou plusieurs des équations telles que l'équation (53); pour l'élimination des k quantités $\tau_{s,i}$ qui se trouvent dans la partie non intégrable, on emploiera les k équations (52). Cette élimination.

étant faite, la discussion de la variation $\delta^2 V$ (92) se ramènera, en général, à celle de deux expressions différentielles entières, homogènes et du second degré par rapport à des variables arbitraires et indépendantes entre elles $\tau_{s,i}$.

Le théorème énoncé se rapporte à la discussion de la variation seconde de l'intégrale définie multiple qui ne renferme pas explicitement sous le signe $\int$ les dérivées partielles des valeurs limites des fonctions inconnues; mais les procédés exposés, qui servent à déduire le théorème énoncé, montrent la marche à suivre pour discuter la variation seconde de l'intégrale définie multiple qui renferme explicitement sous le signe $\int$ les dérivées partielles des valeurs limites des fonctions inconnues, et, dans ce cas sans doute, la discussion de la variation seconde se ramènera à celle de deux expressions différentielles entières, homogènes et du second degré par rapport à des variables telles que $\tau_{s,i}$.