BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

CHARVES

Démonstration de la périodicité des fractions continues, engendrées par les racines d'une équation du deuxième degré

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 1, nº 1 (1877), p. 41-43

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1877_2_1_1_41_1>

DÉMONSTRATION DE LA PÉRIODICITÉ DES FRACTIONS CONTINUES, ENGENDRÉES PAR LES RACINES D'UNE ÉQUATION DU DEUXIÈME DEGRÉ;

Par M. CHARVES.

Soit x une racine réelle et positive de l'équation

$$(1)\qquad ax^2 + bx + c = 0,$$

où l'on suppose a, b, c entiers.

J'imagine qu'on développe x en fraction continue. J'appelle y l'un des quotients complets et $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$ les deux dernières réduites obtenues avant d'arriver à ce quotient; on a

$$x = \frac{Py + P'}{Qy + Q'},$$

et, en portant cette valeur de x dans (1), on obtient une équation en y,

$$a'y^2 + b'y + c' = 0. \tag{2}$$

Je vais démontrer que les nombres entiers a', b', c' ne peuvent dépasser en valeur absolue des nombres déterminés A, B, C.

En effet, on a

$$a' = aP^2 + bPQ + cQ^2 = Q^2\left(a\frac{P^2}{Q^2} + b\frac{P}{Q} + c\right);$$

je pose

$$\frac{P}{Q} = x + \varepsilon;$$

a' devient alors, en tenant compte de (1),

$$a' = \varepsilon Q^2(2ax + b) + a\varepsilon^2 Q^2,$$

et, comme ε est plus petit que $\frac{1}{Q^2}$ en valeur absolue, on obtient, en ne prenant pour chaque terme que sa valeur absolue,

$$a' < 2ax + b + \frac{a}{Q^2}.$$

Il existe donc un nombre A auquel la valeur absolue de a' est constamment inférieure, quel que soit le quotient complet y auquel on s'arrête.

La même démonstration s'applique évidemment à c'. Quant à b', on peut l'écrire

$$b' = QQ'\left[2a\frac{P}{Q}\frac{P'}{Q'} + b\left(\frac{P}{Q} + \frac{P'}{Q'}\right) + 2c\right],$$

et si l'on pose

$$\frac{P}{Q} = x + \varepsilon, \quad \frac{P'}{Q'} = x + \varepsilon',$$

il vient, en tenant compte de (1),

$$b' = (2ax + b)(\varepsilon' + \varepsilon')QQ' + 2a\varepsilon\varepsilon' QQ'.$$

Mais ε et ε' sont l'un et l'autre, en valeur absolue, plus petits que $\frac{1}{QQ'}$; donc, en se bornant aux valeurs absolues, on obtient

$$b' < 2(2ax + b) + \frac{2a}{QQ'};$$

donc b' reste inférieur à un nombre donné B.

Il résulte de là que les équations analogues à (2), obtenues en prenant successivement chaque quotient complet, ne seront pas indéfiniment distinctes, et qu'on finira par trouver une équation déjà obtenue; on arrivera donc à un quotient complet identique à l'un des précédents, à partir duquel les quotients incomplets se reproduiront périodiquement.

Remarque. — On pourrait établir l'inégalité $b' < B$ en partant de la relation

$$b'^2 - 4a'c' = b^2 - 4ac;$$

mais j'ai préféré la démonstration précédente, parce qu'elle montre que la périodicité des fractions continues engendrées par les racines d'une équation du second degré tient uniquement au degré d'approximation des réduites.