BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 1, nº 1 (1877), p. 377-384

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1877_2_1_1_377_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GÜNTHER (Dr SIEGMUND). — LEHRBUCH DER DETERMINANTEN-THEORIE FÜR STUDIRENDE. — Erlangen, Ed. Besold, 1877. — 1 vol. in-8°, XII-209 pages (¹).

Cet Ouvrage, que nous avons analysé dans un précédent volume du *Bulletin* (¹), est parvenu aujourd'hui à sa deuxième édition, et, comme on le voit, en très-peu de temps. Cette édition, comparée à la première, se recommande par de nouveaux développements apportés aux données historiques, et aux applications de la théorie des déterminants, afin de la tenir au courant des derniers travaux des géomètres contemporains.

Le Livre se termine par un recueil de 66 exercices ou problèmes, empruntés aux publications récentes, et par un résumé bibliographique indiquant les principaux travaux ou Traités relatifs à la théorie des déterminants.

On y a conservé généralement l'ordre et le sujet des Chapitres de la première édition, à l'exception du Chapitre IV (*Déterminants cubiques*), renvoyé à la fin du volume. L'indication des matières que renferment les divers paragraphes a été donnée dans une précédente analyse. Elle a été trop peu modifiée pour que nous ayons à y revenir. Toutefois nous croyons devoir dire que le premier Chapitre, consacré à l'historique des déterminants, a reçu quelques développements additionnels : un paragraphe spécial traite des recherches de Reiss et de Grassmann.

Près de quatre cents Notes ou citations d'auteurs, répandues dans le corps de cet Ouvrage, témoignent du soin extrême qui a présidé à sa préparation. Le premier Chapitre, dont nous venons de parler, est une sorte d'aperçu historique très-détaillé, qui sera consulté avec fruit. Il est juste de dire que les recherches de ce genre sont poursuivies avec succès par les mathématiciens d'Allemagne; l'auteur de cet Ouvrage, en particulier, a publié déjà de nombreuses monographies qui dénotent de patients efforts et une profonde érudition.

Le succès de ce Livre justifie le vœu que nous avons formulé et

---

(¹) Voir *Bulletin*, t. X, p. 131.

que nous exprimons encore, à propos d'une traduction, sinon de la partie didactique bien connue par des ouvrages spéciaux tout récents, au moins de la partie historique, qui préciserait plus d'une donnée sur laquelle les appréciations ne semblent pas encore bien fixées.

H. B.

KÖNIGSBERGER (L.). — UEBER DIE REDUCTION HYPERELLIPTISCHER INTEGRALE AUF ALGEBRAISCH-LOGARITHMISCHE FUNCTIONEN [1].

On sait, depuis les travaux de Clebsch, que, si x et y sont liés par une équation d'ordre n,

$$F(x, y) = 0, \tag{α}$$

telle que x et y puissent être exprimés rationnellement au moyen d'une variable t, la courbe (α) possède le plus grand nombre de points doubles qu'elle puisse avoir, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2),$$

et que, réciproquement, si la courbe qui figure la relation algébrique entre x et y admet ce nombre de points doubles, x et y peuvent s'exprimer rationnellement au moyen d'une seule variable, en sorte que, dans ce cas, l'intégrale

$$\int f(x, y)\,dx,$$

où le signe $\int$ porte sur une fonction rationnelle de t, peut être ramenée à une fonction algébrico-logarithmique de cette variable, et par suite s'exprime aussi en fonction algébrico-logarithmique de x et de y; mais il y a lieu de se poser une autre question lorsque, au lieu de s'en prendre aux intégrales abéliennes les plus générales, on se restreint à des intégrales spéciales des différentes classes. En ce sens, on peut se demander quelles sont, dans l'espèce des intégrales hyperelliptiques des différents ordres, celles qui peuvent se ramener à des fonctions algébrico-logarithmiques.

[1] *Mathematische Annalen*, t. XI, p. 118-144.

M. Tchebychef s'est occupé, dans le tome XVIII du *Journal de Liouville*, 1re série (1), de la réduction à des fonctions algébrico-logarithmiques des intégrales de la forme

$$\int \frac{F_0(x)}{f_0(x)} \frac{dx}{\sqrt[m]{\Theta(x)}},$$

et a montré comment, lorsque cette réduction est possible, on peut déterminer la partie algébrique de cette intégrale, ainsi que le nombre et la forme des diverses expressions logarithmiques. Dans un travail inséré dans le même Recueil, il a, toujours dans la même hypothèse, montré comment on pouvait réaliser le calcul des expressions logarithmiques, dans le cas simple des intégrales elliptiques. Dans les *Monatsberichte* de l'Académie de Berlin (1857), M. Weierstrass s'est occupé des recherches de M. Tchebychef. Il ne regardait pas la voie suivie par ce dernier comme étant la plus naturelle; mais, considérant la question relative aux intégrales elliptiques comme éclaircie par les principes qu'Abel a développés dans son dernier travail, laissé inachevé, sur les relations générales entre les intégrales elliptiques et les fonctions algébrico-logarithmiques, il indiquait un moyen de la résoudre, moyen qui pouvait s'appliquer à la même question relativement aux intégrales hyperelliptiques. L'essence des recherches de M. Weierstrass consiste à décomposer l'intégrale elliptique proposée, d'après le procédé connu, en une partie linéaire en u, et une somme de $E(u)$, d'une suite de fonctions de la forme $\Pi(u, a_\alpha)$, et d'une partie rationnelle en $\sin\operatorname{am} u$ et $\frac{d \sin\operatorname{am} u}{du}$, u représentant l'intégrale elliptique de première espèce; alors, en supposant que l'intégrale peut être ramenée à une fonction algébrico-logarithmique, la comparaison des périodes des fonctions elliptiques et des logarithmes donne les conditions nécessaires et suffisantes pour la réduction.

M. Königsberger entreprend la recherche de la réduction des intégrales elliptiques d'ordre quelconque, sans se servir de l'inversion des intégrales abéliennes de cette espèce, mais directement,

(1) Afin d'éviter la multiplicité des dénominations d'un même recueil périodique, nous le désignerons, à l'avenir, constamment par le nom de son fondateur (*Journal de Liouville*, *Journal de Crelle*, *Archives de Grunert*, etc.). (*Note de la Rédaction.*)

en utilisant les formules établies par lui dans les *Mathematische Annalen*, pour la réduction des intégrales hyperelliptiques générales à des intégrales des trois espèces et à une partie algébrique; en s'appuyant sur le moyen, exposé par lui dans le *Journal de Crelle*, de ramener le problème général de la transformation à une relation rationnelle, établie dans le même Mémoire, entre les intégrales hyperelliptiques, il parvient aux conditions nécessaires et suffisantes pour la réduction d'une intégrale hyperelliptique d'ordre quelconque à des fonctions algébrico-logarithmiques.

M. Fuchs a, le premier, établi sans restriction que le déterminant des intégrales de première et de seconde espèce, prises entre les points d'embranchement, était toujours différent de zéro et avait une valeur indépendante de ces points. Au moyen de ce théorème, on peut trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour la réduction à une fonction algébrique de l'intégrale hyperelliptique

$$\int \frac{F(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}},$$

où l'on a posé

$$R(z) = A(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_{2p+1}),$$

et où

$$z_1,\ z_2,\ \dots,\ z_n$$

sont les valeurs de z qui rendent $F(z)$ infinie; ces conditions, en employant des notations bien connues, peuvent être mises sous la forme

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}} = 0, \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_2)^{-1}} = 0, \quad \dots, \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_n)^{-1}} = 0,$$

$$\sum_1^n{}_\alpha \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_\infty\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t-1} = 0,$$

où, en faisant

$$R(z) = Az^{2p+1} + B_0 z^{2p} + B_1 z^{2p-1} + \dots + B_{2p-1} z + B_{2p},$$

on suppose

$$F_r(t) = \frac{2p-2r-1}{2} A t^r + \frac{2p-2r}{2} B_0 t^{r-1} + \dots$$
$$+ \frac{2p-r-2}{2} B_{r-2} t + \frac{2p-r-1}{2} B_{r-1},$$

et où l'on doit prendre successivement

$$r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1,\ p,\ \ldots,\ 2p-1;$$

la valeur algébrique de l'intégrale peut alors s'écrire

$$\left\{\sum_1^n{}_\alpha \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_\infty\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}}\right\}\sqrt{R(t)}.$$

Pour trouver de la même façon les conditions nécessaires et suffisantes pour la réduction d'une intégrale hyperelliptique à une fonction algébrico-logarithmique, on partage cette intégrale en une somme d'une partie algébrique, de p intégrales de première espèce, de p intégrales de deuxième, et de n intégrales de troisième; puis on montre que, si cette somme peut se ramener à une fonction algébrico-logarithmique, il faut que, après l'élimination des coefficients non indépendants les uns des autres des intégrales de troisième espèce, un certain complexe formé avec ces intégrales, multipliées par des coefficients entiers, soit égal au logarithme d'une certaine fonction rationnelle de z et de $R(z)$, et que (en vertu du théorème de l'inversion des points d'embranchement et des limites des intégrales de troisième espèce) les points d'embranchement relatifs à ce complexe soient les racines d'une équation de la forme

$$p^2 - q^2 R(z) = 0,$$

équation où p et q représentent des fonctions rationnelles de r. M. Königsberger donne le moyen de reconnaître s'il en est ainsi. Il faut chercher si, d'une part, les coefficients des intégrales de seconde espèce qui résultent de la réduction s'annulent, et si, de l'autre, les coefficients obtenus de la même façon, pour les intégrales de première espèce, sont égaux et de signe contraire aux coefficients des intégrales de première espèce, qu'on introduit en appliquant le théorème sur l'inversion des points de discontinuité et des limites des intégrales de troisième espèce; car cette inversion, sans changement de valeur, convient seulement pour les intégrales hyperelliptiques principales de troisième espèce, dont les modules de périodicité s'annulent pour un système complet de coupures; on trouve d'ailleurs plusieurs formes pour ces derniers coefficients. Ces conditions étant toutes satisfaites, on obtient immédiatement les fonctions logarithmiques et la partie algébrique, en sorte qu'on obtient d'un seul coup et les conditions à remplir et le résultat de la transformation. Ces résultats peuvent être résumés comme il suit :

Formant l'équation

$$T_1\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}}+T_2\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_2)^{-1}}+\ldots+T_n\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_n)^{-1}}=0,$$

on cherche à y satisfaire par un système de nombres entiers T_1, T_2, ..., T_n. Supposons qu'on trouve $n-k$ systèmes indépendants

$$\begin{array}{llll} T_{1,1}, & T_{1,2}, & \ldots, & T_{1,n}, \\ T_{2,1}, & T_{2,2}, & \ldots, & T_{2,n}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ T_{n-k,1}, & T_{n-k,2}, & \ldots, & T_{n-k,n}, \end{array}$$

et que les $n-k$ équations qui en résultent conduisent aux relations suivantes :

$$D\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_{k+1})^{-1}}=\lambda_{1,1}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}}+\ldots+\lambda_{1,k}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_k)^{-1}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$D\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_n)^{-1}}=\lambda_{n-k,1}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}}+\ldots+\lambda_{n-k,k}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_k)^{-1}},$$

on cherchera le plus grand commun diviseur δ_i entre les nombres

$$D,\ \lambda_{1,i},\ \lambda_{2,i},\ \ldots,\ \lambda_{n-k,i},$$

i étant un des nombres 1, 2, ..., k. Posant maintenant

$$\frac{D}{\delta_i}=t_0^{(i)},\quad \frac{\lambda_{1,i}}{\delta_i}=t_1^{(i)},\quad \ldots,\quad \frac{\lambda_{n-k,i}}{\delta_i}=t_{n-k}^{(i)},$$

on formera les équations

$$P^{(1)2}-Q^{(1)2}R(z)=0,\quad P^{(2)2}-Q^{(2)2}R(z)=0,\quad \ldots,\quad P^{(k)2}-Q^{(k)2}R(z)=0,$$

qui, parmi les valeurs

$$\begin{array}{llll} z_1, & z_{k+1}, & \ldots, & z_n, \\ z_2, & z_{k+1}, & \ldots, & z_n, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ z_k, & z_{k+1}, & \ldots, & z_n, \end{array}$$

auxquelles correspondent les degrés de multiplicité

$$\begin{array}{llll} t_0^{(1)}, & t_1^{(1)}, & \ldots, & t_{n-k}^{(1)}, \\ t_0^{(2)}, & t_1^{(2)}, & \ldots, & t_{n-k}^{(2)}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ t_0^{(k)}, & t_1^{(k)}, & \ldots, & t_{n-k}^{(k)}, \end{array}$$

admettent comme solutions celles-là seules qui sont encore des valeurs critiques; puis on formera la somme

$$\begin{aligned} &\frac{1}{t_0^{(1)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-t_1)^{-1}} \log\left[\frac{P^{(1)}-Q^{(1)}\sqrt{R(z)}}{P^{(1)}+Q^{(1)}\sqrt{R(z)}}\right] \\ &+\frac{1}{t_0^{(2)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_2)^{-1}} \log\left[\frac{P^{(2)}-Q^{(2)}\sqrt{R(z)}}{P^{(2)}+Q^{(2)}\sqrt{R(z)}}\right] \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+\frac{1}{t_0^{(k)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_k)^{-1}} \log\left[\frac{P^{(k)}-Q^{(k)}\sqrt{R(z)}}{P^{(k)}+Q^{(k)}\sqrt{R(z)}}\right] = L(z). \end{aligned}$$

$L(z)$ sera l'ensemble des termes logarithmiques provenant de la réduction de l'intégrale hyperelliptique. Soit maintenant

$$\begin{aligned} &\frac{dL(z)}{dz} \\ &= \sum_{1}^{k}{}_i \left\{ \frac{1}{t_0^{(i)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_i)^{-1}} \frac{2R(z)\left[Q^{(i)}\dfrac{dP^{(i)}}{dz}-P^{(i)}\dfrac{dQ^{(i)}}{dz}\right]-P^{(i)}Q^{(i)}\dfrac{dR(z)}{dz}}{\sqrt{R(z)}} \right\} \\ &= \frac{\varphi(z)}{\sqrt{R(z)}}; \end{aligned}$$

il faudra que les conditions suivantes soient remplies :

$$\sum_{1}^{n}{}_\alpha \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = 0,$$

r prenant les valeurs successives $0, 1, 2, \ldots, p-1$,

$$\sum_{1}^{n}{}_\alpha \left[\frac{F(t)-\varphi(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)-\varphi(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = 0,$$

r prenant les valeurs successives $p, p+1, \ldots, 2p-1$. Ces conditions étant toutes remplies,

$$\left\{\sum_{n}^{n}{}_{\alpha}\left[\frac{\mathrm{F}(t)}{\sqrt{\mathrm{R}(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{\mathrm{R}(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)},-\left[\frac{\mathrm{F}(t)}{\sqrt{\mathrm{R}(t)}}\int_{\infty}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{\mathrm{R}(t)}}\right]_{t-1}\right\}\sqrt{\mathrm{R}(z)}$$

sera la partie algébrique qui, jointe à $\mathrm{L}(z)$, donne la valeur algébrico-logarithmique de l'intégrale hyperelliptique.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME PREMIER.