BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

P. TCHEBYCHEF

Sur les expressions approchées, linéaires par rapport à deux polynômes

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 1, nº 1 (1877), p. 289-312
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1877_2_1_1_289_1>

© Gauthier-Villars, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MÉLANGES.

SUR LES EXPRESSIONS APPROCHÉES, LINÉAIRES PAR RAPPORT A DEUX POLYNOMES;

PAR M. P. TCHEBYCHEF ([2]).

(Traduit du russe.)

§ 1.

Dans une Lettre à M. Braschmann ([3]), nous avons montré de quelle manière, en développant une fonction u en une fraction continue

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ldots}}$$

([1]) *Mathematische Annalen*, t. X.

([2]) Lu dans la séance du 8-20 mars 1877 de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg (t. XXX, Supplément, des *Mémoires* de cette Académie).

([3]) *Journal de Mathématiques de Liouville*, 2e Série, t. X.

et déterminant ses fractions convergentes

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{q_0}{1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{q_1 q_0 + 1}{q_1}, \quad \ldots,$$

on peut trouver les valeurs des polynômes X, Y, pour lesquels l'expression

$$uX - Y$$

diffère le moins possible d'une fonction donnée v. Ainsi que nous l'avons indiqué dans la Lettre que nous venons de citer, et démontré dans le Mémoire intitulé : *Sur le développement d'une fonction en série au moyen des fractions continues* [1], les polynômes X, Y, qui satisfont à cette condition, sont déterminés par les séries

$$(1) \qquad \begin{cases} X = \omega_1 Q_1 + \omega_2 Q_2 + \omega_3 Q_3 + \ldots, \\ Y = -Ev + \omega_1 P_1 + \omega_2 P_2 + \omega_3 P_3 + \ldots, \end{cases}$$

où nous désignons par E la partie entière d'une fonction et par

$$\omega_1, \ \omega_2, \ \omega_3, \ \ldots$$

des fonctions entières, que l'on obtient au moyen de la valeur de la fonction v et des dénominateurs

$$\begin{array}{cccc} Q_1, & Q_2, & Q_3, & \ldots, \\ q_1, & q_2, & q_3, & \ldots, \end{array}$$

fournis par le développement ci-dessus de la fonction u en fraction continue, au moyen de la formule générale

$$\omega_i = (-1)^{i-1} E[q_i(vQ_i - EvQ_i)],$$

que l'on peut écrire, d'une manière plus abrégée,

$$(2) \qquad \omega_i = (-1)^{i-1} E[q_i F(vQ_i)],$$

en représentant par la notation

$$F(vQ_i)$$

[1] *О разложеніи функцій въ ряды при помощи непрерывныхъ дробей* (*Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. IX, 1866).

l'ensemble de tous les termes du développement de la fonction $v Q_i$ qui renferment des puissances négatives de la variable.

En arrêtant les séries ci-dessus aux termes correspondants quelconques

$$\omega_m Q_m, \quad \omega_m P_m,$$

on trouve le système des polynômes X, Y, tel que X est d'un degré inférieur à Q_{m+1}, et que la différence entre l'expression $uX - Y$ et la fonction v est du degré le moins élevé compatible avec la supposition que X est un polynôme de degré moindre que Q_{m+1}. En outre, le degré du polynôme X est déterminé par le degré du terme

$$\omega_m Q_m,$$

le dernier des termes conservés dans le développement de X, et le degré de la différence

$$uX - Y - v$$

est déterminé par le degré du premier terme de la série

$$\omega_{m+1}(uQ_{m+1} - P_{m+1}) + \omega_{m+2}(uQ_{m+2} - P_{m+2}) + \ldots,$$

qui ne se réduit pas à zéro ([1]). En supposant que le premier de ces termes soit

$$\omega_{m+n}(uQ_{m+n} - P_{m+n}),$$

et désignant par ρ le degré de la fonction

$$\omega_{m+n},$$

on conclura de ce qui vient d'être dit que, en général, le degré d'approximation de l'expression $uX - Y$ par rapport à v est déterminé par le degré du produit

$$x^\rho(uQ_{m+n} - P_{m+n}),$$

et conséquemment par le degré de la fraction

$$\frac{x^\rho}{Q_{m+n+1}},$$

([1]) *Voir* les articles cités plus haut, et notre Mémoire intitulé: *О наибольшихъ*... *Sur les valeurs maxima et minima des sommes formées avec les valeurs d'une fonction entière et de ses dérivées* (*Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. XII, 1867).

de même que, d'après les propriétés des fractions convergentes, le degré de la différence

$$uQ_{m+n} - P_{m+n}$$

est égal au degré de la fraction

$$\frac{1}{Q_{m+n+1}}.$$

On voit d'après cela que l'expression

$$uX - Y,$$

X, Y étant des fonctions entières, et X étant d'un degré qui ne surpasse pas celui de $x^\sigma Q_m$, peut représenter la fonction v avec une exactitude poussée jusqu'aux termes du degré de

$$\frac{x^\rho}{Q_{m+n+1}},$$

dans le cas seulement où les équations suivantes sont satisfaites :

$$\omega_{m+1} = 0, \quad \omega_{m+2} = 0, \quad \ldots, \quad \omega_{m+n-1} = 0,$$
$$\delta\omega_m \leqq \sigma, \quad \delta\omega_{m+n} \leqq \rho,$$

où nous désignons, suivant la notation d'Abel, par δ le degré d'une fonction.

Lorsque ces conditions sont remplies, les séries (1), arrêtées aux termes $\omega_m Q_m$, $\omega_m P_m$, donnent, comme on l'a vu, une valeur de X d'un degré au plus égal à celui de $x^\sigma Q_m$, et l'expression $uX - Y$ diffère de v par des termes d'un degré au plus égal à celui de

$$\frac{x^\rho}{Q_{m+n+1}}.$$

D'après cela, les conditions nécessaires et suffisantes pour que la formule

$$uX - Y$$

puisse représenter la fonction v avec une exactitude poussée jusqu'à x^{-N}, le degré de X ne surpassant pas M, s'écriront ainsi

$$\omega_{m+1} = 0, \quad \omega_{m+2} = 0, \quad \ldots, \quad \omega_{m+n-1} = 0,$$
$$\delta\omega_m \leqq \sigma, \quad \delta\omega_{m+n} \leqq \rho,$$

en désignant par

$$Q_m,\ Q_{m+n}$$

les derniers dénominateurs des fractions convergentes

$$\frac{P_1}{Q_1},\ \frac{P_2}{Q_2},\ \frac{P_3}{Q_3},\ \ldots,$$

dont les degrés ne dépassent pas les limites M et N — 1, et par σ, ρ les degrés des fractions

$$\frac{x^M}{Q_m},\ \frac{Q_{m+n+1}}{x^N}.$$

§ 2.

Nous allons maintenant démontrer que ces conditions peuvent être remplacées par celles-ci, qui sont plus simples :

$$(4)\qquad \delta F(\nu Q_{l-1}) \leqq \delta \frac{x^M}{Q_l},\quad \delta F(\nu Q_l) \leqq \delta \frac{Q_l}{x^N},$$

dans lesquelles

$$Q_{l-1},\ Q_l$$

sont les deux derniers termes de la série

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ \ldots,$$

qui, étant multipliés entre eux, donnent un produit de degré moindre que M + N.

Pour cela, trouvons d'abord une limite supérieure des degrés

$$\delta F(\nu Q_m),\quad \delta F(\nu Q_{m+1}),\quad \ldots,\quad \delta F(\nu Q_{m+n}),$$

dans le cas où les conditions (3) sont satisfaites. Après nous être convaincus, d'après cela, de la nécessité que les conditions (4) soient vérifiées, nous démontrerons que celles-ci, de leur côté, supposent l'existence de chacune des conditions (3).

D'après la liaison qui existe entre les fractions convergentes

$$\frac{P_1}{Q_1},\ \frac{P_2}{Q_2},\ \frac{P_3}{Q_3},\ \ldots$$

de l'expression

$$u = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ldots}},$$

on a

$$Q_{i+1} = Q_i q_i + Q_{i-1},$$

ce qui donne, en multipliant par ν,

$$\nu Q_{i+1} = \nu Q_i q_i + \nu Q_{i-1}.$$

En passant de l'égalité des fonctions à l'égalité de leurs parties fractionnaires, on trouve, d'après notre notation,

$$(5) \qquad F(\nu Q_{i+1}) = F(\nu Q_i q_i) + F(\nu Q_{i-1}).$$

En décomposant maintenant les fonctions

$$\nu Q_i, \quad \nu Q_i q_i$$

en une partie entière et une partie fractionnaire, il vient

$$\nu Q_i = E(\nu Q_i) \quad + F(\nu Q_i),$$
$$\nu Q_i q_i = E(\nu Q_i q_i) + F(\nu Q_i q_i),$$

ce qui donne, par l'élimination de Q_i,

$$F(\nu Q_i q_i) = q_i F(\nu Q_i) + q_i E(\nu Q_i) - E(\nu Q_i q_i).$$

Portant cette valeur de

$$F(\nu Q_i q_i)$$

dans l'égalité (5), et désignant, pour abréger, par U_i la fonction entière

$$E(\nu Q_i q_i) - q_i E(\nu Q_i),$$

on obtient l'égalité

$$q_i F(\nu Q_i) = F(\nu Q_{i+1}) - F(\nu Q_{i-1}) + U_i.$$

Si nous remarquons que les fonctions

$$F(\nu Q_{i+1}), \quad F(\nu Q_{i-1})$$

ne contiennent que des termes avec des puissances négatives de la variable, on en conclut

$$E[q_i F(\nu Q_i)] = U_i,$$

ce qui, d'après la formule (2),

$$\omega_i = (-1)^{i-1}\mathrm{E}[q_i \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_i)],$$

nous donne

$$\mathrm{U}_i = (-1)^{i-1}\omega_i,$$

et, en conséquence, l'expression trouvée plus haut de la fonction $q_i \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_i)$ est fournie par l'égalité

$$q_i \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_i) = \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_{i+1}) - \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_{i-1}) + (-1)^{i-1}\omega_i,$$

qui nous servira à obtenir la limite supérieure des degrés des fonctions

$$\mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_m), \quad \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_{m+1}), \quad \ldots, \quad \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_{m+n}),$$

dans le cas où l'on a

$$\omega_{m+1} = 0, \quad \omega_{m+2} = 0, \quad \ldots, \quad \omega_{m+n-1} = 0,$$
$$\delta\omega_m \leqq \tau, \quad \delta\omega_{m+n} \leqq \rho.$$

Comme, dans ce cas, pour toutes les valeurs de i, depuis $i = m+1$ jusqu'à $i = m+n-1$ inclusivement, la fonction ω_i se réduit à zéro, il s'ensuit que, pour toutes ces valeurs, l'égalité que nous venons de trouver se réduira à la suivante :

$$(6) \qquad q_i \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_i) = \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_{i+1}) - \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_{i-1}).$$

En remarquant que la fonction q_i est d'un degré non inférieur au premier, on conclura de cette égalité que, dans la suite

$$\mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_m), \quad \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_{m+1}), \quad \ldots, \quad \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_{m+n}),$$

parmi trois termes consécutifs

$$\mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_{i+1}), \quad \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_i), \quad \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_{i-1}),$$

la fonction du milieu

$$\mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_i)$$

devra dans tous les cas être d'un degré moindre que celui d'une des fonctions extrêmes

$$\mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_{i+1}), \quad \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_{i-1}).$$

On voit par là que, dans la suite

$$\delta F(\nu Q_m), \quad \delta F(\nu Q_{m+1}), \quad \ldots, \quad \delta F(\nu Q_{m+n}),$$

aucun des termes intermédiaires ne peut présenter un maximum, et par suite il ne peut y avoir qu'un minimum.

En supposant que

$$\delta F(\nu Q_\lambda)$$

soit le premier terme de la suite

$$\delta F(\nu Q_m), \quad \delta F(\nu Q_{m+1}), \quad \ldots, \quad \delta F(\nu Q_{m+n}),$$

qui donne une valeur minimum, nous remarquerons que, pour toutes les valeurs de i, depuis $i = m + 1$ jusqu'à $i = \lambda - 1$, la fonction

$$F(\nu Q_{i-1})$$

sera d'un degré plus élevé que

$$F(\nu Q_{i+1}),$$

et par suite, d'après l'égalité (6), son degré déterminera le degré de l'expression

$$q_i F(\nu Q_i).$$

On tire de là, pour les i grandeurs considérées, l'égalité

$$\delta F(\nu Q_i) = \delta \frac{F(\nu Q_{i-1})}{q_i}.$$

En y faisant

$$i = m + 1, \quad m + 2, \quad \ldots, \quad \lambda - 1,$$

on obtiendra une suite d'équations qui serviront à passer successivement de la fonction

$$F(\nu Q_m)$$

aux fonctions

$$F(\nu Q_{m+1}), \quad F(\nu Q_{m+2}), \quad \ldots, \quad F(\nu Q_{\lambda-1}).$$

Ces équations nous donnent

$$\delta F(\nu Q_{m+1}) = \delta \frac{F(\nu Q_m)}{q_{m+1}},$$

$$\delta F(\nu Q_{m+2}) = \delta \frac{F(\nu Q_m)}{q_{m+1}\, q_{m+2}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\delta F(\nu Q_{\lambda-1}) = \delta \frac{F(\nu Q_m)}{q_{m+1}\, q_{m+2} \cdots q_{\lambda-1}}.$$

En passant aux termes de la suite

$$(7) \quad \delta F(\nu Q_m), \quad \delta F(\nu Q_{m+1}), \quad \ldots, \quad \delta F(\nu Q_\lambda), \quad \ldots, \quad \delta F(\nu Q_{m+n}),$$

qui suivent le premier terme mentionné

$$\delta F(\nu Q_\lambda),$$

nous remarquerons qu'aucun de ces termes ne peut être moindre que le terme en question, et par suite nous aurons ou

$$\delta F(\nu Q_{\lambda+1}) = \delta F(\nu Q_\lambda), \quad \text{ou} \quad \delta F(\nu Q_{\lambda+1}) > \delta F(\nu Q_\lambda),$$

selon que le terme en question devra, ou non, être suivi d'un terme qui lui soit égal.

Pour ce qui est du troisième terme

$$\delta F(\nu Q_{\lambda+2}),$$

il ne peut avoir la même valeur que le terme en question; autrement il se trouverait, dans la suite

$$F(\nu Q_m), \quad F(\nu Q_{m+1}), \quad \ldots, \quad F(\nu Q_{m+n}),$$

trois termes du même degré, ce qui a été démontré impossible par ce qui précède. On voit par là que, après le terme

$$\delta F(\nu Q_{\lambda+1})$$

de la suite (7), les termes doivent aller nécessairement en croissant, et par conséquent, pour toutes les valeurs de i, depuis

$i = \lambda + 1$ jusqu'à $i = m + n - 1$, on aura

$$\delta F(\nu Q_{i+1}) > \delta F(\nu Q_{i-1}).$$

Il s'ensuit de là, en vertu de (6), que, pour ces valeurs de i, le degré du terme

$$q_i F(\nu Q_i)$$

sera déterminé par le degré du terme $F(\nu Q_{i+1})$, ce qui suppose l'égalité

$$\delta F(\nu Q_i) = \delta \frac{F(\nu Q_{i+1})}{q_i}.$$

En y faisant tour à tour

$$i = m + n - 1, \quad m + n - 2, \quad \ldots, \quad \lambda + 1,$$

on obtient une suite d'équations, qui serviront à passer successivement de la fonction

$$F(\nu Q_{m+n})$$

aux fonctions

$$F(\nu Q_{m+n-1}), \quad F(\nu Q_{m+n-2}), \quad \ldots, \quad F(\nu Q_{\lambda+1}).$$

De ces équations on tire

$$\begin{aligned}
\delta F(\nu Q_{m+n-1}) &= \delta \frac{F(\nu Q_{m+n})}{q_{m+n-1}}, \\
\delta F(\nu Q_{m+n-2}) &= \delta \frac{F(\nu Q_{m+n})}{q_{m+n-1}\, q_{m+n-2}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\delta F(\nu Q_{\lambda+1}) &= \delta \frac{F(\nu Q_{m+n})}{q_{m+n-1}\, q_{m+n-2} \cdots q_{\lambda+1}}.
\end{aligned}$$

§ 3.

De cette manière on déterminera, au moyen des deux fonctions extrêmes de la suite

$$F(\nu Q_m), \quad F(\nu Q_{m+1}), \quad \ldots, \quad F(\nu Q_{m+n-1}), \quad F(\nu Q_{m+n}),$$

les degrés de toutes les autres, à l'exclusion d'une seule fonction

$$F(\nu Q_\lambda).$$

Pour déterminer le degré de cette fonction, remarquons que la formule (6) donne, pour $i = \lambda$,

$$q_\lambda \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_\lambda) = \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_{\lambda+1}) - \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_{\lambda-1}).$$

Comme, en vertu du paragraphe précédent, les termes

$$\mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_{\lambda+1}), \quad \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_{\lambda-1})$$

sont des mêmes degrés que les expressions

$$\frac{\mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_{m+n})}{q_{m+n-1} q_{m+n-2} \cdots q_{\lambda+1}}, \quad \frac{\mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_m)}{q_{m+1} q_{m+2} \cdots q_{\lambda-1}},$$

l'une au moins de ces expressions sera d'un degré non inférieur à celui de

$$q_\lambda \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_\lambda),$$

et par suite nous aurons

$$\delta \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_\lambda) \overline{\underline{<}}\, \delta \frac{\mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_m)}{q_{m+1} q_{m+2} \cdots q_{\lambda-1} q_\lambda},$$

ou

$$\delta \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_\lambda) \overline{\underline{<}}\, \delta \frac{\mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_{m+n})}{q_{m+n-1} q_{m+n-2} \cdots q_{\lambda+1} q_\lambda}.$$

Comme, en vertu du paragraphe précédent, pour

$$i = m+1, \quad m+2, \quad \ldots, \quad \lambda - 1,$$
$$i = \lambda + 1, \quad \lambda + 2, \quad \ldots, \quad m + n - 1,$$

on a ou l'égalité

$$\delta \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_i) = \delta \frac{\mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_m)}{q_{m+1} q_{m+2} \cdots q_i}$$

ou l'égalité

$$\delta \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_i) = \delta \frac{\mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_{m+n})}{q_{m+n-1} q_{m+n-2} \cdots q_i},$$

et qu'alors il est évident qu'une au moins des conditions

$$\delta \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_i) \overline{\underline{>}}\, \delta \frac{\mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_m)}{q_{m+1} q_{m+2} \cdots q_i},$$

$$\delta \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_i) \overline{\underline{<}}\, \delta \frac{\mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_{m+n})}{q_{m+n-1} q_{m+n-2} \cdots q_i},$$

que nous avons trouvées ci-dessus pour

$$i = \lambda,$$

est satisfaite, nous en conclurons que, pour toutes les valeurs de i depuis $i = m + 1$ jusqu'à $i = m + n - 1$, on aura l'une ou l'autre des conditions

$$\delta F(\nu Q_i) \overset{=}{<} \delta \frac{F(\nu Q_m)}{q_{m+1} q_{m+2} \ldots q_i}$$

ou

$$\delta F(\nu Q_i) \overset{=}{<} \delta \frac{F(\nu Q_{m+n})}{q_{m+n-1} q_{m+n-2} \ldots q_i}.$$

Pour ce qui est des limites supérieures des degrés des fonctions

$$F(\nu Q_m), \quad F(\nu Q_{m+n}),$$

elles peuvent être déduites des dernières conditions (3),

$$\delta \omega_m \overset{=}{<} \sigma, \quad \delta \omega_{m+n} \overset{=}{<} \rho.$$

Pour cela, nous remarquerons que, d'après la formule (2), qui détermine les fonctions

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3, \quad \ldots,$$

on a

$$\omega_m = (-1)^{m-1} E[q_m F(\nu Q_m)],$$
$$\omega_{m+n} = (-1)^{m+n-1} E[q_{m+n} F(\nu Q_{m+n})];$$

d'où il s'ensuit que les conditions précédemment démontrées, relativement aux degrés des fonctions

$$\omega_m, \quad \omega_{m+n},$$

supposent que les fonctions

$$q_m F(\nu Q_m), \quad q_{m+n} F(\nu Q_{m+n})$$

ne sont pas de degrés supérieurs à

$$\sigma, \quad \rho,$$

et que, par suite,

$$\delta F(\nu Q_m) \leqq \delta \frac{x^\sigma}{q_m}, \quad \delta F(\nu Q_{m+n}) \leqq \delta \frac{x^\rho}{q_{m+n}}.$$

En conséquence, les limites trouvées plus haut du degré de $F(\nu Q_\lambda)$ se réduisent à celles-ci,

$$\delta F(\nu Q_l) \leqq \delta \frac{x^\sigma}{q_m q_{m+1} \ldots q_l}$$

ou

$$\delta F(\nu Q_l) \leqq \delta \frac{x^\rho}{q_{m+n-1}\, q_{m+n-2} \ldots q_l}.$$

Ces formules sont susceptibles d'une simplification notable.

D'après notre notation, la fraction convergente du développement

$$u = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots + \cfrac{1}{q_k + \ddots}}},$$

correspondante au quotient incomplet q_k, est

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}},$$

et par suite le produit des quotients incomplets

$$q_1 q_2 q_3 \ldots q_k$$

sera du même degré que le dénominateur Q_{k+1}.

En vertu de cela, on trouve que les produits

$$q_m q_{m+1} \ldots q_l,$$

$$q_{m+n} q_{m+n-1} \ldots q_l$$

seront de mêmes degrés que les fractions

$$\frac{Q_{l+1}}{Q_m}, \quad \frac{Q_{m+n+1}}{Q_l}.$$

Par conséquent, les égalités que nous avons trouvées plus haut donnent

$$\delta F(\nu Q_l) \leqq \delta \frac{x^\sigma Q_m}{Q_{l+1}},$$

$$\delta F(\nu Q_l) \leqq \delta \frac{x^\rho Q_l}{Q_{m+n+1}}.$$

Et comme, d'après cette notation (§ 1),

$$x^\sigma Q_m, \quad \frac{x^\rho}{Q_{m+n+1}}$$

sont de mêmes degrés que

$$x^M, \quad x^{-N},$$

ces inégalités conduiront à la suivante:

$$\delta F(\nu Q_i) \leqq \delta \frac{x^M}{Q_{i+1}}, \quad \text{ou} \quad \leqq \delta \frac{Q_i}{x^N}.$$

On voit par là que la limite supérieure du degré de chacune des fonctions

$$F(\nu Q_m), \quad F(\nu Q_{m+1}), \quad \ldots, \quad F(\nu Q_{m+n})$$

sera déterminée par la plus grande des deux quantités

$$\delta \frac{x^M}{Q_{i+1}}, \quad \delta \frac{Q_i}{x^N},$$

pour la valeur correspondante de i.

En supposant que, dans la suite

$$Q_1, \quad Q_2, \quad Q_3, \quad \ldots,$$

les deux dernières fonctions qui, étant multipliées l'une par l'autre, donnent un produit d'un degré inférieur à M + N soient

$$Q_{l-1}, \quad Q_l,$$

nous remarquerons qu'elles devront satisfaire aux inégalités

$$(8) \qquad \begin{cases} \delta(Q_{l-1}.Q_l) < M + N, \\ \delta(Q_l.Q_{l+1}) \geqq M + N; \end{cases}$$

et comme

$$\delta \frac{x^M}{Q_{i+1}} - \delta \frac{Q_i}{x^N} = M + N - \delta(Q_i.Q_{i+1}),$$

ces égalités supposent que l'on a

$$\delta \frac{x^M}{Q_{i+1}} > \delta \frac{Q_i}{x^N},$$

si $i = l - 1$, et que

$$\delta \frac{Q_i}{x^N} \geqq \delta \frac{x^M}{Q_{i+1}},$$

si $i = l$; par conséquent, d'après ce que nous avons trouvé relativement à la limite supérieure du degré

$$\delta F(\nu Q_i),$$

nous aurons, pour $i = l - 1$ et $i = l$,

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\delta F(\nu Q_{l-1}) \leqq \delta \frac{x^M}{Q_l}, \\ &\delta F(\nu Q_l) \quad \leqq \delta \frac{Q_l}{x^N}. \end{aligned} \right.$$

Nous allons maintenant démontrer que ces inégalités, déduites, comme on l'a vu, des conditions (3), supposent à leur tour nécessairement que chacune des conditions (3) soit satisfaite.

§ 4.

D'après notre système de notations,

$$\frac{P_{l-1}}{Q_{l-1}}, \quad \frac{P_l}{Q_l}, \quad \frac{P_{l+\mu}}{Q_{l+\mu}}$$

représentent les fractions convergentes du développement

$$u = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \ldots + \cfrac{1}{q_{l-2} + \cfrac{1}{q_{l-1} + \cfrac{1}{q_l + \cfrac{1}{q_{l+1} + \ldots + \cfrac{1}{q_{l+\mu-1} + \ldots}}}}}},$$

qui correspondent aux quotients incomplets

$$q_{l-2}, \quad q_{l-1}, \quad q_{l+\mu-1}.$$

En représentant par

$$\frac{S}{T}$$

la fraction ordinaire à laquelle se réduit la fraction continue

$$q_l + \cfrac{1}{q_{l+1} + \cdots + \cfrac{1}{q_{l+\mu-1}}},$$

on trouve, en vertu des propriétés des fractions continues,

$$Q_{l+\mu} = Q_l S + Q_{l-1} T.$$

Multipliant cette égalité par ν, on a

$$\nu Q_{l+\mu} = \nu Q_l S + \nu Q_{l-1} T,$$

ce qui suppose l'égalité

$$F(\nu Q_{l+\mu}) = F(\nu Q_l S) + F(\nu Q_{l-1} T).$$

En décomposant les fonctions

$$\nu Q_l,\quad \nu Q_l S,\quad \nu Q_{l-1},\quad \nu Q_{l-1} T$$

en une partie entière et une fraction, il vient

$$\begin{aligned}
\nu Q_l &= E(\nu Q_l) + F(\nu Q_l),\\
\nu Q_l S &= E(\nu Q_l S) + F(\nu Q_l S),\\
\nu Q_{l-1} &= E(\nu Q_{l-1}) + F(\nu Q_{l-1}),\\
\nu Q_{l-1} T &= E(\nu Q_{l-1} T) + F(\nu Q_{l-1} T);
\end{aligned}$$

par l'élimination de Q_l, Q_{l-1}, en tant qu'ils sont en dehors des signes E, F, on en tire

$$\begin{aligned}
F(\nu Q_l S) &= SF(\nu Q_l) + SE(\nu Q_l) - E(\nu Q_l S),\\
F(\nu Q_{l-1} T) &= TF(\nu Q_{l-1}) + TE(\nu Q_{l-1}) - E(\nu Q_{l-1} T).
\end{aligned}$$

En portant ces valeurs des fonctions

$$F(\nu Q_l S),\quad F(\nu Q_{l-1} T)$$

dans l'expression trouvée plus haut de la fonction

$$F(\nu Q_{l+\mu}),$$

et posant, pour abréger,

$$SE(\nu Q_l) - E(\nu Q_l S) + TE(\nu Q_{l-1}) - E(\nu Q_{l-1} T) = U,$$

il vient

$$(10) \qquad F(\nu Q_{l+\mu}) = SF(\nu Q_l) + TF(\nu Q_{l-1}) + U.$$

Comme S et T sont les termes de la fraction simple

$$\frac{S}{T},$$

à laquelle se réduit la fraction continue

$$q_l + \cfrac{1}{q_{l+1} + \cdots + \cfrac{1}{q_{l+\mu-1}}},$$

ces quantités seront des mêmes degrés que les produits

$$q_l \quad q_{l+1} \ldots q_{l+\mu-1},$$
$$q_{l+1}\, q_{l+2} \ldots q_{l+\mu-1},$$

et par suite des mêmes degrés que les fractions

$$\frac{Q_{l+\mu}}{Q_l}, \quad \frac{Q_{l+\mu}}{Q_{l+1}},$$

formées avec les dénominateurs des fractions convergentes.

$$\frac{P_l}{Q_l}, \quad \frac{P_{l+1}}{Q_{l+1}}, \quad \frac{P_{l+\mu}}{Q_{l+\mu}}$$

du développement

$$u = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cdots + \cfrac{1}{q_{l-2} + \cfrac{1}{q_{l-1} + \cdots + \cfrac{1}{q_{l+\mu-1} + \cdots}}}}$$

D'après cela nous aurons

$$\delta S = \delta \frac{Q_{l+\mu}}{Q_l}, \quad \delta T = \delta \frac{Q_{l+\mu}}{Q_{l+1}}.$$

En remarquant maintenant que, en vertu de (9),

$$\delta F(\nu Q_l) \leqq \delta \frac{Q_l}{x^N}, \quad \delta F(\nu Q_{l-1}) \leqq \frac{x^M}{Q_l},$$

on trouve

$$\delta S + \delta F(\nu Q_l) = \delta S F(\nu Q_l) \leqq \delta \frac{Q_{l+\mu}}{x^N},$$

$$\delta T + \delta F(\nu Q_{l-1}) = \delta T F(\nu Q_{l-1}) \leqq \delta \frac{x^M Q_{l+\mu}}{Q_l Q_{l+1}}.$$

Or, d'après (8), le produit

$$Q_l Q_{l+1}$$

est d'un degré non inférieur à M + N, d'où il s'ensuit que la dernière inégalité donne

$$\delta T F(\nu Q_{l-1}) \leqq \delta \frac{Q_{l+\mu}}{x^N}.$$

On voit par là que, dans l'expression de la fonction

$$F(\nu Q_{l+\mu}),$$

d'après la formule (10), les deux termes qui contiennent la variable à des degrés négatifs sont d'un degré non supérieur à

$$\frac{Q_{\lambda+\mu}}{x^N},$$

et par suite

$$\delta F(\nu Q_{l+\mu}) \leqq \delta \frac{Q_{l+\mu}}{x^N}.$$

Si l'on remarque maintenant que

$$\delta q_{\lambda+\mu} = \delta \frac{Q_{\lambda+\mu+1}}{Q_{\lambda+\mu}},$$

nous en conclurons que

$$\delta q_{l+\mu} F(\nu Q_{l+\mu}) \leqq \delta \frac{Q_{l+\mu+1}}{x^N}.$$

En y faisant successivement

$$\mu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n+m-l-1,$$

et remarquant que, pour trois de ces valeurs de μ, la fonction $Q_{l+\mu+1}$ atteint seulement la limite Q_{m+n}, dont le degré, d'après le § 1, ne surpasse pas N — 1, nous en conclurons que

$$\delta q_l F(\nu Q_l) < 0, \quad \delta q_{l+1} F(\nu Q_{l+1}) < 0, \quad \ldots, \quad \delta q_{m+n-1} F(\nu Q_{m+n-1}) < 0,$$

d'où il s'ensuit que, en déterminant les fonctions

$$\omega_l,\ \omega_{l+1},\ \ldots,\ \omega_{m+n-1},$$

par la formule

$$\omega_i = (-1)^{i-1} \mathrm{E}[q_i \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_i)],$$

on trouvera

$$\omega_l = 0, \quad \omega_{l+1} = 0, \quad \ldots, \quad \omega_{m+n-1} = 0.$$

En faisant maintenant $\mu = m + n - l$, on aura

$$\delta q_{m+n} \mathrm{F}(\nu \mathrm{Q}_{m+n}) < \delta \frac{\mathrm{Q}_{m+n+1}}{x^{\mathrm{N}}},$$

et par suite, en déterminant la fonction ω_{m+n} par la même formule, on remarquera qu'elle sera d'un degré non supérieur à celui de $\frac{\mathrm{Q}_{m+n+1}}{x^{\mathrm{N}}}$. Comme on a, d'après notre notation (§ 1),

$$\delta \frac{\mathrm{Q}_{m+n+1}}{x^{\mathrm{N}}} = \rho,$$

on en conclut que

$$\delta \omega_{m+n} \leqq \rho.$$

Ainsi nous sommes assurés que les inégalités (9) entraînent la vérification des conditions

$$\omega_l = 0, \quad \omega_{l+1} = 0, \quad \ldots, \quad \omega_{m+n-1} = 0,$$
$$\delta \omega_{m+n} \leqq \rho.$$

Pour démontrer maintenant que la même chose a lieu relativement aux autres conditions (3), représentons par

$$\frac{\mathrm{S}_1}{\mathrm{T}_1}, \quad \frac{\mathrm{S}_2}{\mathrm{T}_2}$$

les fractions convergentes du développement

$$q_{l-\lambda} + \cfrac{1}{q_{l-\lambda+1} + \ldots},$$

qui correspondent aux quotients incomplets q_{l-2}, q_{l-1}. A l'aide de ces fractions, les fractions convergentes du développement

$$u = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \ldots + \cfrac{1}{q_{l-\lambda-2} + \cfrac{1}{q_{l-\lambda-1} + \ldots}}},$$

correspondantes aux quotients incomplets

$$q_{l-\lambda-2},\quad q_{l-\lambda-1},\quad q_{l-2},\quad q_{l-1},$$

sont déterminées les unes par les autres, de la manière suivante :

$$\frac{P_{l-1}}{Q_{l-1}} = \frac{P_{l-\lambda}S_1 + P_{l-\lambda-1}T_1}{Q_{l-\lambda}S_1 + Q_{l-\lambda-1}T_1},$$

$$\frac{P_l}{Q_l} = \frac{P_{l-\lambda}S_2 + P_{l-\lambda-1}T_2}{Q_{l-\lambda}S_2 + Q_{l-\lambda-1}T_2}.$$

En résolvant maintenant les équations

$$Q_{l-1} = Q_{l-\lambda}S_1 + Q_{l-\lambda-1}T_1,$$
$$Q_l = Q_{l-\lambda}S_2 + Q_{l-\lambda+1}T_2$$

par rapport à

$$Q_{l-\lambda},\quad Q_{l-\lambda-1},$$

et remarquant que, d'après les propriétés des fractions convergentes,

$$S_1T_2 - S_2T_1 = \pm 1,$$

on trouve pour $Q_{l-\lambda}$ l'expression

$$\pm Q_{l-\lambda} = Q_{l-1}T_2 - Q_lT_1.$$

Multipliant cette expression par ν, et passant de l'égalité des fonctions à l'égalité de leurs parties fractionnaires, il vient

$$\pm F(\nu Q_{l-\lambda}) = F(\nu Q_{l-1}T_2) - F(\nu Q_lT_1).$$

Or, en vertu des égalités

$$\nu Q_{l-1}T_2 = E(\nu Q_{l-1}T_2) + F(\nu Q_{l-1}T_2),$$
$$\nu Q_{l-1} = E(\nu Q_{l-1}) + F(\nu Q_{l-1}),$$
$$\nu Q_lT_1 = E(\nu Q_lT_1) + F(\nu Q_lT_1),$$
$$\nu Q_l = E(\nu Q_l) + F(\nu Q_l),$$

on trouve

$$F(Q_{l-1}T_2 = T_2F(\nu Q_{l-1}) + T_2E(\nu Q_{l-1}) - E(\nu Q_{l-1}T_2)$$
$$F(\nu Q_lT_1) = T_1F(\nu Q_l) + T_1E(\nu Q_l) - E(\nu Q_lT_1).$$

Portant ces valeurs des fonctions

$$F(vQ_{l-1}T_2), \quad F(vQ_lT_1)$$

dans l'expression obtenue plus haut de la fonction

$$F(vQ_{l-\lambda})$$

et faisant, pour abréger,

$$T_2E(vQ_{l-1}) - E(vQ_{l-1}T_2) - T_1E(vQ_l) + E(vQ_lT_1) = V,$$

il vient

$$(11) \qquad \pm F(vQ_{l-\lambda}) = T_2F(vQ_{l-1}) - T_1F(vQ_l) + V.$$

Comme, d'après nos notations,

$$\frac{S_1}{T_1}, \quad \frac{S_2}{T_2}$$

sont les fractions convergentes du développement

$$q_{l-\lambda} + \cfrac{1}{q_{l-\lambda+1} + \cdots + \cfrac{1}{q_{l-2} + \cfrac{1}{q_{l-1} + \cdots}}},$$

correspondantes aux quotients incomplets

$$q_{l-2}, \quad q_{l-1},$$

leurs dénominateurs T_1, T_2 devront être de mêmes degrés que les produits

$$q_{l-\lambda+1}q_{l-\lambda+2}\cdots q_{l-2},$$

$$q_{l-\lambda+1}q_{l-\lambda+2}\cdots q_{l-2}q_{l-1},$$

et par suite de mêmes degrés que les fractions

$$\frac{Q_{l-1}}{Q_{l-\lambda+1}}, \quad \frac{Q_l}{Q_{l-\lambda+1}},$$

formées au moyen des dénominateurs des fractions convergentes

$$\frac{P_{l-\lambda+1}}{Q_{l-\lambda+1}}, \quad \frac{P_{l-1}}{Q_{l-1}}, \quad \frac{P_l}{Q_l}$$

de la fraction continue

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{\ddots}{\; + \cfrac{1}{q_{l-\lambda} + \cfrac{\ddots}{\; + \cfrac{1}{q_{l-2} + \cfrac{1}{q_{l-1} + \ddots}}}}}};$$

par conséquent,

$$\delta T_1 = \delta \frac{Q_{l-1}}{Q_{l-\lambda+1}}, \quad \delta T_2 = \delta \frac{Q_l}{Q_{l-\lambda+1}}.$$

Mais on a, d'après (9),

$$\delta F(\nu Q_l) \overline{\overline{<}} \delta \frac{Q_l}{x^N}, \quad \delta F(\nu Q_{l-1}) \overline{\overline{<}} \delta \frac{x^M}{Q_l};$$

on tire de là

$$\delta T_1 F(\nu Q_l) \overline{\overline{<}} \delta \frac{Q_{l-1} Q_l}{x^N Q_{l-\lambda+1}}, \quad \delta T_2 F(\nu Q_{l-1}) \overline{\overline{<}} \delta \frac{x^M}{Q_{l-\lambda+1}}.$$

Comme, d'après (8), le produit $Q_{l-1} Q_l$ est de degré inférieur à $M+N$, la première de ces inégalités nous donne

$$\delta T_1 F(\nu Q_l) < \delta \frac{x^M}{Q_{l-\lambda-1}}.$$

On voit par là que les deux fonctions

$$T_2 F(\nu Q_{l-1}), \quad T_1 F(\nu Q_l)$$

sont de degré non inférieur à

$$\frac{x^M}{Q_{l-\lambda+1}},$$

et dans ce cas, d'après la formule (11) et en remarquant que V ne contient pas de puissances négatives de la variable, on trouve

$$\delta F(\nu Q_{l-\lambda}) \overline{\overline{<}} \delta \frac{x^M}{Q_{l-\lambda+1}},$$

ce qui, joint à l'égalité

$$\delta q_{l-\lambda} = \delta \frac{Q_{l-\lambda+1}}{Q_{l-\lambda}},$$

nous donne

$$\delta q_{l-\lambda} F(\nu Q_{l-\lambda}) \overline{\overline{<}} \delta \frac{x^M}{Q_{l-\lambda}}.$$

En faisant ici

$$\lambda = l - m - 1, \quad l - m - 2, \quad \ldots, \quad 1,$$

et remarquant que de plus, d'après le § 1, la fraction

$$\frac{x^M}{Q_{l-\lambda}}$$

reste de degré inférieur à zéro, il vient

$$\begin{gathered} \delta q_{m+1} F(\nu Q_{m+1}) < 0, \\ \delta q_{m+2} F(\nu Q_{m+2}) < 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \delta q_{l-1} F(\nu Q_{l-1}) < 0; \end{gathered}$$

d'où il s'ensuit que, en déterminant les fonctions

$$\omega_{m+1}, \quad \omega_{m+2}, \quad \ldots, \quad \omega_{l-1}$$

par la formule générale

$$\omega_i = (-1)^{i-1} E[q_i F(\nu Q_i)],$$

on trouvera

$$\omega_{m+1} = 0, \quad \omega_{m+2} = 0, \quad \ldots, \quad \omega_{l-1} = 0.$$

En posant, dans la formule précédente

$$\lambda = l - m,$$

et remarquant que, suivant notre notation (§ 1)

$$\delta \frac{x^M}{Q_m} = \sigma,$$

on trouve

$$\delta q_m F(\nu Q_m) \overline{\overline{<}} \sigma;$$

d'où l'on conclut, d'après la formule ci-dessus qui détermine la valeur de la fonction ω_i, que

$$\delta\omega_m \overline{\overline{<}} \sigma.$$

Ainsi nous sommes assurés de la vérification des conditions

$$\omega_{m+1} = 0, \quad \omega_{m+2} = 0, \quad \ldots, \quad \omega_{l-1} = 0,$$
$$\delta\omega_m \overline{\overline{<}} \sigma,$$

qui, avec les conditions démontrées plus haut

$$\omega_l = 0, \quad \omega_{l+1} = 0, \quad \ldots, \quad \omega_{m+n-1} = 0,$$
$$\delta\omega_{m+n} = \rho,$$

comprennent toutes les conditions (3).

On voit par là que les inégalités (4) constituent les conditions non-seulement nécessaires, mais encore suffisantes, pour que la formule

$$uX - Y,$$

X, Y étant entières, et X de degré non supérieur à m, puisse donner une expression approchée de la fonction ν aux quantités près de l'ordre x^{-N} exclusivement.