BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

F. KLEIN

Sur les équations différentielles linéaires

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 1, nº 1 (1877), p. 180-184

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1877_2_1_1_180_1>

MÉLANGES.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES [1];

PAR M. F. KLEIN.

Je me propose d'exposer une méthode qui permette de *distinguer si une équation différentielle linéaire donnée du second ordre à coefficients rationnels peut ou non être intégrée complétement au moyen des fonctions algébriques*. Je parviens à former toutes les équations différentielles de cette nature, et l'on n'a plus, pour ce qui est de l'étude d'une équation différentielle donnée, qu'à effectuer une comparaison de coefficients : ce dernier point est l'objet de recherches d'Algèbre particulières, que je n'ai point encore terminées.

Soit

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1\frac{dy}{dx} + p_0 y = 0$$

une équation différentielle linéaire du second ordre. On sait [3] que le quotient de deux solutions particulières indépendantes y_1, y_2

$$\eta = \frac{y_1}{y_2},$$

(1) *Mathematische Annalen*, t. V, p. 437.

(2) Extrait et traduit des *Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen*. (Séance du 26 juin 1876.)

(3) *Voir* le travail de M. Schwarz, dont je me sers d'ailleurs plus loin : *Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes ist*. (*Journal de Borchardt*, t. 75, p. 292-335.)

satisfait à l'équation différentielle du troisième ordre

$$[\eta] = \frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = 2p_0 - \frac{1}{2}p_1^2 - \frac{dp_1}{dx} = \text{P}.$$

Cette équation différentielle jouit de cette propriété que son intégrale générale η s'exprime par une fraction dont les termes sont des fonctions linéaires d'une intégrale particulière η_0, à savoir

$$\eta = \frac{\alpha\eta_0 + \beta}{\gamma\eta_0 + \delta};$$

il en résulte évidemment que son intégrale est complétement algébrique si l'intégrale de l'équation différentielle du second ordre est aussi complétement algébrique; la réciproque aussi est vraie, pourvu que

$$e^{\int p_1 dx}$$

soit une fonction algébrique. J'écrirai désormais cette équation du troisième ordre sous la forme

$$[\eta] = \text{P},$$

P étant une fonction rationnelle de x, en vertu de la supposition analogue qui a été faite au début sur p_0 et p_1.

Soit η_0 une solution particulière de cette équation. Faisons décrire à x un chemin fermé en partant d'une valeur arbitraire; η_0 reprendra la même valeur, ou se changera en une fonction linéaire

$$\eta_1 = \frac{\alpha\eta_0 + \beta}{\gamma\eta_1 + \delta},$$

les rapports des quantités α, β, γ, δ ne dépendant que du chemin décrit, non des valeurs initiales de x ou de η_0. Si η_0 est une branche d'une fonction algébrique, η_1 doit être une branche de la même fonction algébrique, et l'on passe d'une façon continue de l'une à l'autre. Soit maintenant

$$\eta_0, \ \eta_1, \ \eta_2, \ \ldots, \ \eta_n$$

l'ensemble des valeurs que l'on déduit ainsi de η_0. Formons l'équation algébrique

$$o = (\eta - \eta_0)(\eta - \eta_1)\ldots(\eta - \eta_n).$$

Elle possède deux propriétés essentielles qui permettront de former toutes les équations de la même nature : premièrement ses coefficients, étant des fonctions symétriques de toutes les valeurs que η_0 peut prendre, lorsque x se meut dans le plan, sont des fonctions rationnelles de x; secondement elle ne change pas quand on fait subir à η certaines transformations linéaires, et, de plus, ces transformations sont en nombre tel qu'elles changent chaque racine η_i en une autre racine η_k.

Je me suis occupé précédemment, dans différents travaux communiqués à la *Société de Physique et de Médecine* d'Erlangen, en juillet et en décembre 1874, en juillet 1875 et dans un Mémoire plus étendu, inséré dans le t. IX des *Mathematische Annalen*, p. 183-208, de la détermination des équations qui possèdent la dernière propriété. Ces équations, abstraction faite des transformations linéaires que l'on peut faire subir à l'argument η, sont contenues dans le tableau suivant. La lettre R représente un paramètre arbitraire; en outre, les coefficients numériques que l'on introduit sont choisis de façon que, dans les résultats définitifs que nous donnerons plus tard, les termes soient le plus simples possible.

(1) $$\eta^n = R,$$

(2) $$\eta^n + \eta^{-n} = 4R - 2$$ (n est un nombre entier arbitraire),

(3) $$Rjf^3 + 3H^3 = o,$$

f étant une forme biquadratique équianharmonique, H la hessienne correspondante, j l'invariante du troisième degré;

(4) $$RAf^4 + 18H^3 = o,$$

f étant le premier membre d'une équation octaédrique, A l'invariante du second degré (*voir* mon Mémoire des *Annalen* ou le livre de Clebsch sur les *Formes binaires*, p. 447 et suiv.);

(5) $$7RBf^5 - 720H^3 = o,$$

f étant le premier membre d'une équation icosaédrique, B l'invariante du premier degré.

Les intégrales de notre équation différentielle doivent donc, en désignant par R *une fonction rationnelle convenable de* x, *être représentées par une des équations* (1) *à* (5).

Je dis maintenant que l'on peut prendre pour R une fonction rationnelle quelconque : c'est ce que montre de suite la forme que nous allons faire connaître de l'équation différentielle correspondante.

Pour (1) on a immédiatement l'équation différentielle

$$\text{(I)} \qquad [\eta] = [\mathrm{R}] + \frac{n^2-1}{2n^2}\left(\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}\right)^2.$$

On peut d'ailleurs (comme je l'ai fait en réalité) obtenir pour (2) et (5) les équations différentielles correspondantes; on n'a besoin que d'un petit nombre de théorèmes sur le système des formes fondamentales f. Mais on peut se dispenser de ce calcul, en utilisant les résultats que M. Schwarz a obtenus dans le Mémoire déjà cité. M. Schwarz traite en particulier l'équation différentielle

$$[\eta] = \frac{1-\lambda^2}{2x^2} + \frac{1-\nu^2}{2(1-x)^2} - \frac{\lambda^2-\mu^2+\nu^2-1}{2x(1-x)},$$

et cherche les cas dans lesquels elle possède une intégrale algébrique. Cela a lieu avant tout dans le cas où λ, μ, ν sont supposés respectivement égaux à

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{2},$$

et les équations intégrales que l'on obtient alors sont précisément données par nos équations (2) à (5), pourvu que l'on y pose $\mathrm{R} = x$. On en déduit, réciproquement, les équations différentielles dont nous avons besoin, en substituant $\mathrm{R}_{(x)}$ à x dans l'équation différentielle traitée par M. Schwarz. On obtient ainsi

$$[\eta]=[\mathrm{R}]+\mathrm{R}'^2\left[\frac{1-\lambda^2}{2\mathrm{R}^2}+\frac{1-\nu^2}{2(1-\mathrm{R})^2}-\frac{\lambda^2-\mu^2+\nu^2-1}{2\mathrm{R}(1-\mathrm{R})}\right].$$

En remplaçant maintenant λ, μ, ν *par les valeurs précédentes, on aura les équations différentielles* (II) *et* (V) *qui correspondent aux équations intégrales* (2) *et* (5).

Le but que nous nous étions proposé au commencement de ce travail est atteint; reste seulement ce problème, déjà mentionné, de la théorie des transformations : une fonction rationnelle P_x peut-elle être mise à la place du second membre de l'une des équations (I) à (V), second membre où R représente une fonction rationnelle de x? S'il en est ainsi, comment déterminer R?

Je dois ajouter, en terminant, quelques remarques relatives à un travail de M. Fuchs sur le même sujet ([1]) : l'étude que j'en ai faite récemment m'a conduit à la méthode simple que je viens d'exposer. M. Fuchs donne une solution générale, mais, à ce qu'il me semble, plus prolixe. Sans insister davantage, je remarquerai seulement que les formes qu'il a appelées *formes primaires* (*Primformen*), sont identiques avec les formes binaires qui sont ramenées à elles-mêmes par des transformations linéaires, et que la liste des formes primaires de moindre degré que l'on trouve dans le Mémoire cité, p. 126, contient des formes superflues. Elle devrait maintenant contenir :

La forme biquadratique générale ;

La forme biquadratique équianharmonique;

Le premier membre de l'équation octaédrique ($n=6$);

Le premier membre de l'équation icosaédrique ($n=12$).

La première des deux formes données du sixième degré, ainsi que la forme du huitième et la forme du dixième degré, n'existe pas.

([1]) *Ueber diejenigen Differentialgleichungen 2. Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung des Invariantentheorie* (*Journal de Borchardt*, t. 81, p. 97-147); comparez les *Gött. Nachrichten*, 1875, p. 568-581, p. 612-613.