BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

ED. DEWULF

Notes sur l'homographie et l'homologie des figures à trois dimensions

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 1, nº 1 (1877), p. 137-140

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1877_2_1_1_137_1>

MÉLANGES.

NOTES SUR L'HOMOGRAPHIE ET L'HOMOLOGIE DES FIGURES A TROIS DIMENSIONS;

PAR M. ED. DEWULF,
Chef de bataillon du Génie.

On sait que deux figures homographiques planes peuvent toujours être placées de manière à former deux figures homologiques (CHASLES, *Géom. sup.*, n^os 567 et 573). Dans la seconde Partie du Mémoire de Géométrie qui fait suite à l'*Aperçu historique*, M. Chasles pose la même question relativement aux figures homographiques à trois dimensions, et il démontre (n^os 447 et 448) que deux figures homographiques à trois dimensions ne peuvent pas, en général, être placées de manière à être homologiques; mais l'illustre géomètre n'établit pas la règle qui permet de reconnaître dans quels cas le problème admet des solutions.

Painvin, notre regretté collaborateur, s'est occupé de cette question dans un Mémoire publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1870), et il est parvenu, par une voie analytique assez longue, à la règle suivante : « Pour que deux figures homographiques de l'espace puissent être placées homologiquement, il faut et il suffit que la courbe qui, dans l'une d'elles, correspond au cercle imaginaire de l'infini de l'autre, soit également un cercle;

et alors il y a deux manières et deux seulement d'amener les figures à être homologiques.

Depuis, le même problème a encore été résolu par M. Schoute, jeune géomètre hollandais, dans une thèse remarquable qui a pour titre : *Homologie, en hare toepassing op de theorie der oppervlakken van den tweeden graad,* Leyden, 1870 ([1]). La règle proposée par Painvin ne nous paraissant pas très-commode dans les applications graphiques, nous allons en proposer une autre à laquelle nous parviendrons par une voie purement géométrique et que l'on peut déduire aussi de la solution de M. Schoute.

Désignons par F et F′ deux figures homographiques à trois dimensions, par Π, Π′ deux plans correspondants quelconques, par I (ou I′) le plan de la figure F (ou F′) qui correspond au plan de l'infini de F′ (ou F), et appliquons les mêmes lettres, mais minuscules, aux figures homologiques.

Nous allons d'abord rappeler succinctement quelques propriétés de ces figures qui se déduisent immédiatement de leur définition, et sur lesquelles nous nous appuierons.

Les sections ΠF, Π′F′ sont homographiques ; à un plan Φ (ou Φ′) de F, parallèle à I (ou de F′, parallèle à I′) correspond un plan Φ′ (ou Φ) de F′ parallèle à I′ (ou de F parallèle à I) ; les sections ΦF, Φ′F′ sont homologiques par affinité ([2]), c'est-à-dire qu'à un point de la droite à l'infini de ΦF correspond un point de la droite à l'infini de Φ′F′, et réciproquement ; que, par suite, ces deux ponctuelles à l'infini sont homographiques.

Dans les figures homologiques, les sections πf, $\pi' f'$ sont homologiques ; les plans i et i' et, par conséquent, les plans φ et φ' sont parallèles entre eux et au plan d'homologie ; les sections φf et $\varphi' f'$ sont homothétiques, c'est-à-dire qu'elles ont même ponctuelle à l'infini.

Passons maintenant à la question qui nous occupe. Si nous déplaçons la figure F′, par rapport à la figure F, de manière à rendre les plans I et I′ parallèles entre eux, les ponctuelles à l'infini de ΦF, Φ′F′ se superposent et ont, en général, deux points communs.

([1]) *Homographie et ses applications à la théorie des surfaces du second degré.* Leyde, 1870.

([2]) CREMONA, *Éléments de Géométrie projective*, p. 15. — CHASLES, *Aperçu historique*, p. 218 et 553.

Mais, quel que soit le déplacement que l'on fasse subir à F', les plans I et I' restant toujours parallèles, ces ponctuelles ne pourront, en général, jamais avoir trois points communs, et ne pourront, par suite, se confondre.

Donc, en général, *deux figures homographiques à trois dimensions ne peuvent être placées de manière à être homologiques.*

Admettons maintenant que les deux figures homographiques proposées satisfassent à cette condition particulière, que, les plans I et I' ayant été placés parallèlement, on puisse par un nouveau déplacement (I et I' restant parallèles) amener trois points de la ponctuelle à l'infini de ΦF à se confondre avec les trois points correspondants (de la ponctuelle à l'infini) de Φ'F', alors ces deux figures ont même ponctuelle à l'infini. En d'autres termes, nous admettons que, dans deux plans correspondants parallèles à I et à I', deux triangles correspondants soient semblables et puissent, par conséquent, être amenés par un déplacement à être homothétiques; alors toutes les figures correspondantes tracées dans les plans Φ et Φ' sont semblables [1]; je dis que cette condition est suffisante pour que les figures à trois dimensions F et F' puissent devenir homologiques par un simple déplacement de l'une d'elles.

Supposons, en effet, que la correspondance homographique entre les figures F et F' soit déterminée par celle des cinq plans Π_1, Π_2, Π_3, Π_4, Π_5 et Π'_1, Π'_2, Π'_3, Π'_4, Π'_5. Considérons les deux trièdres correspondants Π_1, Π_2, Π_3 et Π'_1, Π'_2, Π'_3, et nommons S et S' leurs sommets. Construisons les plans I et I', puis le plan Φ' correspondant à un plan quelconque Φ, parallèle à I. D'après notre hypothèse, le triangle dont les côtés sont $\Phi\Pi_1$, $\Phi\Pi_2$, $\Phi\Pi_3$ est semblable au triangle $\Phi'\Pi'_1$, $\Phi'\Pi'_2$, $\Phi'\Pi'_3$. Les arêtes correspondantes $\Pi_1\Pi_2$ et $\Pi'_1\Pi'_2$ des trièdres S et S' sont des ponctuelles homographiques; il est donc aisé de construire un point P_n de $\Pi_1\Pi_2$ tel qu'en menant par ce point et son correspondant deux plans Φ_n, Φ'_n respectivement parallèles à I et à I', ces plans coupent les deux trièdres S et S' suivant deux triangles égaux et superposables (congruents).

Cela fait, déplaçons la figure F' de manière à faire coïncider les deux triangles congruents; alors, dans le plan commun à ces deux triangles, nous avons plus de trois points, non en ligne droite, qui

(1) D'où la solution de Painvin.

se confondent avec leurs correspondants, savoir les trois sommets des triangles congruents et les points de la droite à l'infini; donc tous les points correspondants de ces deux plans superposés se confondent et les deux figures sont homologiques : leur plan d'homologie est le plan commun des triangles congruents.

Le plan symétrique du plan Φ_n par rapport à S et son correspondant coupent aussi les tétraèdres suivant deux triangles congruents. Donc, quand il existe une solution du problème, il en existe toujours une seconde.

Il est facile de voir que la règle pratique qui résulte des considérations précédentes peut être énoncée ainsi :

Les données des deux figures fournissant toujours immédiatement deux trièdres correspondants S *et* S', *il faut construire les plans* I *et* I', *et, si les triangles* SI *et* S'I' *sont semblables, les deux figures homographiques à trois dimensions peuvent être placées de manière à être homologiques.*

Cette règle nous permet de résoudre la question suivante, qui a été proposée par M. Darboux dans le *Bulletin* (t. I, 1870, p. 159) : « Étant données deux figures homographiques, peut-on, en transformant l'une d'elles homographiquement, l'amener à être homologique à l'autre ? »

Soit F'' la transformée de F' cherchée. Pour déterminer F'', prenons un plan I'' parallèle à I', et trois plans Π''_1, Π''_2, Π''_3 respectivement parallèles à Π'_1, Π'_2, Π'_3, et faisons correspondre ces quatre plans respectivement au plan de l'infini et aux plans Π_1, Π_2, Π_3 de F.

La figure F'', déterminée par le plan de l'infini et les plans I'', Π''_1, Π''_2, Π''_3, sera homographique à F, et comme le triangle $\Phi''\Pi''_1$, $\Phi''\Pi''_2$, $\Phi''\Pi''_3$ est semblable au triangle $\Phi'\Pi'_1$, $\Phi'\Pi'_2$, $\Pi'\Pi'_3$, une simple translation amènera F'' à être homologique à F'.

Si l'on voulait arriver directement à cette seconde position de F'', il suffirait de déterminer F'' par le plan de l'infini et les positions prises par les plans I'', Π''_1, Π''_2, Π''_3 après leur translation.

Donc : *deux figures homographiques étant données, on peut toujours, en transformant l'une d'elles homographiquement, l'amener à être homologique à l'autre.*

Toulon, 6 mars 1877.