BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

G. DARBOUX

Sur la théorie de l'élimination entre deux équations à une inconnue

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 10 (1876), p. 56-64

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1876__10__56_1>

MÉLANGES.

SUR LA THÉORIE DE L'ÉLIMINATION ENTRE DEUX ÉQUATIONS A UNE INCONNUE;

PAR M. G. DARBOUX.

Étant données deux équations algébriques

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m = 0, \tag{1}$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n = 0, \tag{2}$$

on sait depuis longtemps exprimer la condition pour que ces deux équations aient une racine commune. Cette condition s'obtient en égalant à zéro un déterminant auquel on peut donner bien des formes différentes. On sait aussi que la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations aient p racines communes, c'est que le déterminant et tous ses mineurs, jusqu'à ceux de l'ordre $p-1$ inclusivement, soient nuls; mais peut-être n'a-t-on pas de démonstration simple et rigoureuse de cette dernière proposition. Je vais donner ici celle que j'ai fait connaître en 1874 dans mon enseignement de l'École Normale.

Considérons les équations (1) et (2), et, si m et n sont inégaux, supposons $m>n$. Formons les identités suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} (a_1+a_2x+\ldots+a_mx^{m-1})\,g(x)-(b_1+b_2x+\ldots+b_nx^{n-1})\,f(x) \\ \quad = c_{00}+c_{01}x+\ldots+c_{0,m-1}x^{m-1}=\varphi_0(x), \\ (a_2+\ldots+a_mx^{m-2})\,g(x)-(b_2+\ldots+b_nx^{n-2})\,f(x) \\ \quad = c_{10}+c_{11}x+\ldots+c_{1,m-1}x^{m-1}=\varphi_1(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (a_n+\ldots+a_mx^{m-n})\,g(x)-b_nf(x) \\ \quad = c_{n-1,0}+c_{n-1,1}x+\ldots+c_{n-1,m-1}x^{m-1}=\varphi_{n-1}(x), \end{cases}$$

auxquelles nous ajouterons les suivantes, si m est plus grand que n :

$$(4)\quad \begin{cases} g(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n, \\ x\,g(x)=b_0x+\ldots+b_nx^{n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x^{m-n-1}g(x)=b_0x^{m-n-1}+\ldots+b_nx^{m-1}. \end{cases}$$

Si les équations (1) et (2) sont vérifiées par une même valeur de x, cette valeur de x satisfera en même temps aux équations qu'on obtient en égalant les seconds membres des identités (3) et (4) à zéro :

$$\varphi_0(x)=0,\ldots,\quad \varphi_{n-1}(x)=0,\quad g(x)=0,\ldots,\quad x^{m-n-1}g(x)=0.$$

On obtient ainsi un système de m équations, qu'on peut considérer comme étant du premier degré, si l'on détruit la dépendance qui existe entre les différentes puissances de x, et si l'on y considère $x, x^2,\ldots,x^{m-1}$ comme des inconnues distinctes. Ces équations étant en nombre supérieur d'une unité à celui des inconnues, il faut, pour qu'elles admettent une solution commune, que leur déterminant soit égal à zéro. Soit A ce déterminant

$$
\text{(A)}\qquad \begin{vmatrix}
c_{00} & c_{01} & \ldots & \ldots & c_{0m-1} \\
c_{10} & c_{11} & \ldots & \ldots & c_{1,m-1} \\
\cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & \ldots & \cdot\cdot & c_{n-1,m-1} \\
b_0 & b_1 & \ldots & \ldots & 0 \\
0 & b_0 & \ldots & \cdot\cdot & 0 \\
\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \ldots & \cdot \\
0 & 0 & b_0 & \ldots & b_n
\end{vmatrix}.
$$

Ainsi, pour que les équations aient une racine commune, on doit avoir

$$A = 0.$$

Cette condition est nécessaire, je dis qu'elle est suffisante. En effet, si elle est satisfaite, on pourra, d'après un théorème connu, trouver au moins un système d'arbitraires $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$, vérifiant les équations suivantes :

$$
(5)\quad \begin{cases}
\lambda_0 c_{00} + \lambda_1 c_{10} + \lambda_2 c_{20} + \ldots + \lambda_{n-1} c_{n-1,0} + \lambda_n b_0 = 0, \\
\lambda_0 c_{01} + \lambda_1 c_{11} + \lambda_2 c_{21} + \ldots + \lambda_{n-1} c_{n-1,1} + \lambda_n b_1 + \lambda_{n+1} b_0 = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\lambda_0 c_{0,m-1} + \ldots + \lambda_{n-1} c_{n-1,m-1} + \ldots + \lambda_{m-1} b_n = 0\,;
\end{cases}
$$

car le résultat de l'élimination des arbitraires λ entre ces équations donne encore le déterminant A, dans lequel les lignes seraient changées en colonnes et les colonnes en lignes.

Cela posé, multiplions les identités (3) et (4), dans l'ordre où elles sont écrites, par les arbitraires, $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ satisfaisant aux équations (5), et ajoutons toutes ces identités. Dans le second membre, les coefficients de toutes les puissances de x seront nuls, et l'on obtiendra une nouvelle identité de la forme

$$
(6)\qquad f_1(x)\,g(x) - f(x)\,g_1(x) = 0,
$$

où l'on a

$$
\begin{aligned}
g_1(x) &= \lambda_0(b_1 + \ldots + b_n x^{n-1}) + \lambda_1(b_2 + \ldots + b_n x^{n-2}) + \ldots + \lambda_{n-1} b_n, \\
f_1(x) &= \lambda_0(a_1 + \ldots + a_m x^{m-1}) + \lambda_1(a_2 + \ldots + a_m x^{m-2}) + \ldots \\
&\quad + \lambda_{n-1}(a_n + \ldots + a_m x^{m-n-1}) + \lambda_n + \lambda_{n+1} x + \ldots - \lambda_{m-1} x^{m-n-1}.
\end{aligned}
$$

Il ressort de ces expressions de $f_1(x)$, $g_1(x)$ que ces polynômes sont de degré inférieur respectivement à $f(x)$ et à $g(x)$.

Or, en vertu de l'identité (6), toutes les racines de $f(x)$ sont racines de l'équation

$$f_1(x)\,g(x) = 0;$$

et, comme $f_1(x)$ est de degré inférieur à $f(x)$, une au moins des racines de $f(x)$ appartient à $g(x)$, ce qu'il fallait démontrer.

Je dis maintenant que, si les mineurs de A sont nuls jusqu'à ceux de l'ordre $p-1$ sans que tous ceux de l'ordre p le soient, les équations proposées auront p racines communes. Je m'appuierai sur le lemme suivant :

« Étant donné un système d'équations homogènes du premier degré, en nombre égal à celui des inconnues, si le déterminant de ces équations et tous ses mineurs jusqu'à l'ordre p *exclusivement* sont nuls, ces équations admettront une solution dans laquelle p des inconnues, *convenablement choisies,* pourront être prises arbitrairement. »

« Il y aura toujours au moins une solution pour laquelle $p-1$ des inconnues, *choisies comme on voudra,* seront nulles, sans que toutes les autres le soient. »

« Réciproquement, si un tel système admet des solutions dans lesquelles p des inconnues peuvent être choisies arbitrairement, tous les mineurs, jusqu'à l'ordre $p-1$ *au moins,* seront nuls. »

Remettant à la fin de cette Note la démonstration de ce lemme, je remarque que, si le déterminant A et tous ses mineurs, jusqu'à l'ordre p exclusivement, sont nuls, on pourra, d'après le lemme, trouver une solution des équations (5), dans laquelle $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{p-2}$ seront nuls; alors $g_1(x)$ sera, au plus, du degré $n-p$, $f_1(x)$ au plus du degré $m-p$. Or nous savons que toutes les racines de $f(x)$ appartiennent à l'équation

$$f_1(x)\,g(x) = 0.$$

Comme $f_1(x)$ est, au plus, du degré $m-p$, p de ces racines au moins appartiennent à $f(x)$, et les deux équations ont au moins p racines communes. Je vais démontrer qu'elles n'en ont pas davantage.

Supposons, en effet, que q soit le nombre des racines communes, et soit

$$h_0 x^q + h_1 x^{q-1} + \ldots + h_q$$

le produit des facteurs du premier degré correspondants à ces racines communes. Ce polynôme entre en diviseur dans les polynômes $\varphi(x)$ et $x^p g(x)$, définis par les identités (3) et (4). Un quelconque de ces polynômes pourra donc s'écrire

$$(\alpha_0 x^{m-q-1} + \alpha_1 x^{m-q-2} + \ldots + \alpha_{m-q-1})\,(h_0 x^q + h_1 x^{q-1} + \ldots + h_q).$$

On voit que l'un quelconque de ces polynômes est une combinaison linéaire des expressions suivantes :

$$\begin{array}{l} h_0 x^{m-1} + h_1 x^{m-2} + \ldots + h_q x^{m-q-1}, \\ h_0 x^{m-2} + h_1 x^{m-3} + \ldots + h_q x^{m-q-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ h_0 x^q + h_1 x^{q-1} + \ldots + h_q x^0; \end{array}$$

d'où il suit que les $m - 1$ équations (devenues homogènes si l'on introduit x^0), que l'on obtient en égalant ces polynômes à zéro et en considérant les puissances de x comme des inconnues séparées, sont vérifiées si les $m - q$ fonctions linéaires précédentes sont nulles; or, en égalant à zéro ces $m - q$ fonctions linéaires, on établit seulement $m - q$ relations entre les m inconnues

$$x^{m-1}, x^{m-2}, \ldots, x, x^0.$$

On peut prendre arbitrairement q de ces inconnues, par exemple

$$x^{q-1}, x^{q-2}, \ldots, x^0;$$

donc, d'après le lemme, le déterminant A et tous ses mineurs, jusqu'à l'ordre $q - 1$ au moins, sont nuls.

Revenons à notre hypothèse : nous avons supposé que le déterminant et ses mineurs, jusqu'à l'ordre $p - 1$, sont tous nuls, sans que ceux d'ordre p le soient, et nous en avons conclu qu'il y a au moins p racines communes. Nous voyons maintenant qu'il n'y en a pas davantage, puisque, s'il y en avait $p + h$, d'après ce que nous venons de démontrer, tous les mineurs de l'ordre $p + h - 1$ seraient nuls, ce qui n'a pas lieu. Nous avons donc établi la proposition que nous avions en vue, et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que les équations (1) *et* (2) *aient au moins une racine commune s'obtient en égalant à zéro le déterminant* A.

Si tous les mineurs de ce déterminant sont nuls, jusqu'à l'ordre p exclusivement, il y a p et seulement p racines communes.

Je passe maintenant à la démonstration du lemme sur lequel je me suis appuyé.

Soit un système d'équations homogènes

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{array}\right.$$

Considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \mathrm{R},$$

et supposons que tous ses mineurs, jusqu'à ceux de l'ordre $p-1$ soient nuls, ceux de l'ordre p ne l'étant pas tous. Par exemple, le mineur

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,n-p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-p,1} & \ldots & a_{n-p,n-p} \end{vmatrix} = \mathrm{B}$$

sera différent de zéro; alors tirons des $n-p$ premières équations $x_1, \ldots, x_{n-p}$ et portons-les dans l'une quelconque des suivantes, celle de rang $n-p+q$. Le résultat de la substitution sera

$$\frac{1}{\mathrm{B}}\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,n-p} & a_{1,n-p+1}x_{n-p+1} + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-p,1} & \ldots & a_{n-p,n-p} & a_{n-p,n-p+1}x_{n-p+1} + \ldots + a_{n-p,n}x_n \\ a_{n-p+q,1} & \ldots & a_{n-p+q,n-p}, & a_{n-p+q,n-p+1}x_{n-p+1} + \ldots + a_{n-p+q,n}x_n \end{vmatrix}.$$

Or ce résultat est identiquement nul, puisque le coefficient de chaque inconnue est un mineur d'ordre $p-1$. Ainsi toutes les équations qui suivent la $(n-p)^{\text{ième}}$ sont des conséquences des premières, et l'on tire de ces premières des valeurs de $x_1, \ldots, x_{n-p}$ de la forme suivante :

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 = \alpha_{11}x_{n-p+1} + \ldots + \alpha_{1p}x_n, \\ x_2 = \alpha_{21}x_{n-p+1} + \ldots + \alpha_{2p}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-p} = \alpha_{n-p,1}x_{n-p+1} + \ldots + \alpha_{n-p,n}x_n. \end{array}\right.$$

On voit que la solution générale permettra de prendre arbitrairement les p inconnues $x_{n-p+1}, \ldots, x_n$.

En général les p inconnues que l'on peut prendre arbitrairement ne doivent pas être choisies d'une manière quelconque. Par exemple, dans le système indéterminé

$$x_1 = 0,$$
$$x_2 + x_3 + x_4 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

on peut choisir arbitrairement deux des inconnues, pourvu qu'aucune d'elles ne soit x_1. La règle à suivre est la suivante :

On peut donner des valeurs quelconques à p inconnues, si les mineurs d'ordre p, obtenus en supprimant des lignes quelconques et toujours les mêmes colonnes, celles qui contiennent les coefficients de ces inconnues, ne sont pas tous nuls.

Je dis maintenant que, dans tous les cas, il y aura au moins une solution dans laquelle $p - 1$ quelconques des inconnues seront nulles. On pourrait déduire cette proposition d'une autre plus générale, relative aux équations homogènes en nombre supérieur à celui des inconnues; mais on peut aussi raisonner comme il suit : supposons, pour plus de généralité, que les inconnues qu'on veut annuler appartiennent en partie à chacun des deux groupes

$$x_1, \ldots, x_{n-p}; \quad x_{n-p}, \ldots, x_n.$$

Soient

$$x_1, x_2, \ldots, x_{h-1}; \quad x_{n-p+1}, \ldots, x_{n-h},$$

les inconnues qui doivent être nulles. Les $h - 1$ premières équations (8) deviendront

$$0 = \alpha_{1p} x_n + \alpha_{1,p-1} x_{n-1} + \ldots + \alpha_{1,p-h+1} x_{n-h+1},$$
$$0 = \alpha_{2p} x_n + \ldots + \alpha_{2,p-h+1} x_{n-h+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$0 = \alpha_{h-1,p} x_n + \ldots + \alpha_{h-1,p-h+1} x_{n-h+1}.$$

Elles sont au nombre de $h - 1$ et contiennent h inconnues, x_n, $x_{n-1}, \ldots, x_{n-h+1}$. Donc elles admettront au moins un système de solutions dans lequel toutes les inconnues ne seront pas nulles; en portant ces valeurs dans les autres équations (8), on aura toutes les inconnues. Il y aura donc un système de valeurs dans lequel les inconnues désignées seront nulles, les autres ne l'étant pas toutes.

Enfin, pour achever la démonstration du lemme, je vais prouver que l'on ne peut pas avoir une solution dans laquelle $p+q$ des inconnues désignées à l'avance aient une valeur quelconque. Soient en effet

$$x_1,\ x_2,\ldots,\ x_{h-1},$$
$$x_{n-p+1},\ldots,\ x_{n-h+q}$$

ces inconnues. Alors les $h-1$ premières équations du système (8), devraient être vérifiées par des valeurs des inconnues $x_n, x_{n-1},\ldots, x_{n-h+q+1}$ en nombre inférieur à celui des équations, ce qui est impossible, les termes constants de ces équations $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_{h-1}$ étant arbitraires. Donc :

Quand tous les mineurs seront nuls, jusqu'à ceux de l'ordre p exclusivement, on ne pourra pas prendre arbitrairement plus de p inconnues, et, par suite, si l'on sait que l'on peut prendre arbitrairement q inconnues, tous les mineurs sont nuls, au moins jusqu'à ceux de l'ordre $q-1$.

Notre lemme est ainsi complétement établi.

J'ajoute maintenant quelques remarques qui résultent de la démonstration.

D'abord, quand il y aura q racines communes, on voit qu'en combinant les équations entre les puissances $x,\ldots,x^{m-1}$ de l'inconnue, il sera toujours possible d'établir une relation entre $q+1$ puissances consécutives de cette inconnue, que cette relation se ramènera par la suppression d'une puissance de x à une équation toujours la même de degré q, qui donnera les q racines communes, ces racines pouvant être simples ou multiples.

En second lieu, pour ne pas compliquer notre analyse, nous n'avons pas parlé des racines infinies. Pour les comprendre dans notre discussion, il faudra rendre les équations homogènes et raisonner de la manière suivante :

Soient

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} f(x,y) &= a_0 y^m + a_1 y^{m-1} x + \ldots + a_m x^m,\\ g(x,y) &= b_0 y^n + b_1 y^{n-1} x + \ldots + b_n y^n \end{aligned}\right.$$

nos deux équations. On peut les écrire

$$f(x,y) = y^{m-p}(a_0 y^p + \ldots + a_p x^p) + x^{p+1}(a_{p+1} y^{m-p-1} + \ldots + a_m x^{m-p-1}),$$
$$g(x,y) = y^{n-p}(b_0 y^p + \ldots + b_p x^p) + x^{p+1}(b_{p+1} y^{n-p-1} + \ldots + b_n x^{n-p-1}).$$

Posons

$$\varphi_p(x,y) = (a_0 y^p + \ldots + a_p x^p)(b_{p-1} y^{n-p-1} + \ldots + b_n x^{n-p-1})\, y^{m-n}$$
$$- (a_{p+1} y^{m-p-1} + \ldots + a_m x^{m-p-1})(b_0 y^p + \ldots + b_p x^p).$$

On voit que $\varphi_p(x,y)$ est une fonction homogène de degré $m-1$, pareille à celle que nous avons désignée de la même manière dans les formules (3). Or on a identiquement

$$(b_{p+1} y^{n-p-1} + \ldots + b_n x^{n-p-1}) f(x,y)$$
$$- g(x,y)(a_{p+1} y^{m-p-1} + \ldots + a_m x^{m-p-1}) = y^{n-p} \varphi^p(x,y),$$
$$(b_0 y^p + \ldots + b_p x^p) f(x,y)$$
$$- g(x,y)(a_0 y^p + \ldots + a_p x^p) = -x^{p+1} \varphi_p(x,y).$$

On voit donc que, pour tout système (x,y) de valeurs correspondant à une racine commune,

$$y^{n-p} \varphi_p(x,y), \quad x^{p+1} \varphi_p(x,y)$$

doivent être nuls. Comme y et x ne sont pas nuls en même temps, on aura

$$\varphi_p(x,y) = 0.$$

On joindra à ces n équations les $m-n$ suivantes :

$$y^{m-n-1} g(x,y) = 0, \quad y^{m-n-2} x\, g(x,y) = 0, \ldots, \quad x^{m-n-1} g(x,y) = 0,$$

et l'on obtiendra ainsi, mais rendu homogène et sans avoir introduit ni supprimé de solution nulle ou infinie, le système de m équations sur lequel nous avons raisonné. Le reste de la discussion ne subira aucune modification essentielle.