BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue des publications périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 10 (1876), p. 170-203

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1876__10__170_0>

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

TIDSKRIFT FÖR MATEMATIK OCH FYSIK (¹).

5e année; 1874.

HULTMAN (F.-W.). — *Histoire de l'Arithmétique en Suède.* Suite (3e art.; 45 p.)

LINDMAN (C.-F.). — *Quelques théorèmes sur les polygones réguliers.* (12 p.)

LUNDBERG (P.). — *Sur les angles trièdres et les triangles sphériques.* (8 p.)

PH(RAGMÉN) (L.). — *Sur l'évaluation numérique d'un logarithme sous forme de fraction continue.* (3 p.)

Méthode connue appliquée à l'exemple log 3, log désignant un logarithme dont la base est 10.

ALMQVIST (P.-W.). — *Deux théorèmes de Géometrie.*

Démonstrations de deux théorèmes des *Éléments d'Euclide.*

HOLST (E.-B.). — *Une petite étude géométrique.*

DAUG (H.-Th.). — *Sur la position limite du cercle circonscrit au triangle, dont les côtés sont deux tangentes et leur corde de contact.* (4 p.)

L'auteur démontre que le centre de la position limite de ce cercle est situé sur la normale de la courbe donnée, et que son rayon est la moitié du rayon de courbure de cette courbe. Il obtient ce résultat d'abord par le calcul, et ensuite par un raisonnement très-simple.

Dans cet article, M. Daug corrige une erreur qui se trouve « dans un des meilleurs Traités sur les sections coniques qui aient été publiés dans ces derniers temps ».

DILLNER (G.). — *Essai d'une théorie des fonctions elliptiques, fait au point de vue des besoins pratiques.* (4e art.; 42 p.)

Il est impossible de faire en peu de mots une exposition satis-

(¹) Voir *Bulletin*, t. III, p. 219.

faisante de ce travail intéressant. Nous donnerons peut-être, une autre fois, une analyse suffisamment détaillée de ce Mémoire.

FALK (M.). — *Sur la démonstration de quelques formules de Calcul différentiel.* (10 p.)

L'auteur démontre, par des considérations géométriques, la formule connue

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h),$$

avec l'observation de M. Bonnet (1); de cette formule il déduit ensuite, par un changement de variable indépendante, la formule de Cauchy

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}=\frac{f'(a')}{\varphi'(a')}, \quad (a \lesseqgtr a' \lesseqgtr a+h).$$

Comme conséquences de ces formules, l'auteur établit quelques résultats sur les maxima et minima, obtenus par Kleinfeller (2) et par H. Holmgren (3).

Quelques réflexions sur les formes indéterminées des fonctions, et sur la formule de Taylor, terminent l'article.

GYLDÉN (H.). — *Méthode pour calculer les distances relatives des étoiles fixes d'après leur éclat apparent et leur nombre.* (5 p.)

Extrait d'une Note de l'auteur insérée dans l'*Öfversigt af Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar.*

RUBENSON (R.). — *Notices météorologiques.* (4e art.; 22 p.)

Sur la direction des vents dans les cyclones tropiques. — L'hygromètre à acide sulfurique. — Comparaison des baromètres employés dans divers pays. — Sur la dépendance entre la densité de la vapeur d'eau et la hauteur au-dessus du niveau de la mer.

HULTMAN (F.-W.) et GEIJER (B. v.). — *Arithmétique politique.* (5 p.)

Les auteurs traitent cinq questions d'économie politique.

---

(1) *Voir* SERRET, *Calcul différentiel*, § 14.

(2) *Zeitschrift für Math. u. Phys.*, 13e annee, 1868, p. 515.

(3) *Tidskrift for Matematik och Fysik*, 1re annee, 1868.

LUNDBERG (P.). — *Sur les équations symétriques.* (9 p.)

Résolution élémentaire des équations réciproques par la réduction à des équations de degré inférieur.

PULLICH (A.). — *Question de Géométrie.* (3 p.)

A....R (J.). — *Même question.* (1 p.)

HULTMAN (F.-W.). — *Solution analytique de la même question.*

AKERLUND (J.-R.). — *Sur les séries*

$$1 + \cos v + \cos 2v + \ldots + \cos nv,$$
$$\sin v + \sin 2v + \ldots + \sin nv.$$

(1 p.)

L'auteur obtient les sommes de ces séries par de simples considérations géométriques.

FALK (M.). — *Sur la méthode d'approximation de Newton.* (11 p.)

Partant de la formule

$$h^2 f''(a+\theta h) + 2hf'(a) + 2f(a) = 0,$$

obtenue en appliquant la formule de Taylor à l'équation $f(a+h)=0$, l'auteur déduit immédiatement la valeur approchée connue h_1 de h, savoir

$$h_1 = -\frac{f(a)}{f'(a)},$$

avec la condition $f(a)f''(a) > 0$, trouvée par Fourier. Il obtient, de plus, la formule nouvelle d'approximation (k étant une valeur approchée de h)

$$k = -\frac{2f(a)}{f'(a)\left\{1+\sqrt{1-\frac{2f(a)f''(a)}{[f'(a)]^2}}\right\}},$$

avec la condition que l'on ait

$$hf(a)f'''(a) > 0.$$

La racine cherchée doit être simple, et comprise dans un intervalle à l'intérieur duquel ne doit se trouver aucune racine des équations $f'(x)=0, f''(x)=0$ et $f'''(x)=0$. Comme application, l'auteur traite l'équation de Kepler

$$x - e \sin x - m = 0,$$

pour des valeurs numériques données de e et de m.

Hildebrandsson (H.-H.). — *Sur la résistance de l'air à la propagation du son.* (4 p.)

L'auteur résume le Rapport de M. Tyndall sur les expériences faites par celui-ci, en 1873, sur le sujet en question.

Hildebrandsson (H.-H.). — *Sur la température de la surface de la mer entre la Norvége et le Spitzberg.* (4 p.)

Extrait du Mémoire de M. Mohn : Alberts *Expedition til Spidsbergen i November og December* 1872, *og dens videnskabelige Resultater.* (Christiania, Vidensk. Selsk. Forh., 1873.)

Kielldahl (A.-M.). — *Extrait de ses papiers posthumes.* (7 p.)

Réflexions sur l'enseignement des Mathématiques.

Hultman (F.-W.). — *Sur les cabanes des Lapons et les tentes des soldats.* (11 p.)

Étude géométrique sur leurs diverses formes.

Almqvist (P.-W.). — *Solution de la question* 102 *du* Tidskrift för Matematik och Fysik (1re *année,* 1868). (5 p.)

Le problème dont l'auteur se propose la solution est celui-ci : « Construire un carré dont les côtés soient tangents à quatre cercles donnés ».

Falk (M.). — *Sur les déterminants fonctionnels.* (14 p.)

L'auteur démontre, en passant de $n-1$ à n, et sans faire usage de la règle de multiplication des déterminants, le théorème connu sur la dépendance entre les fonctions, quand leur déterminant fonctionnel s'évanouit. Il donne aussi une démonstration du théorème, ordinairement admis comme évident, que les équations qui expriment les variables dépendantes en fonction des variables indépendantes peuvent, quand le déterminant fonctionnel n'est pas nul, être résolues par rapport à ces dernières variables. Pour terminer, il donne une règle, à l'aide de laquelle on peut s'assurer qu'une des variables dépendantes désignée pourra s'exprimer en fonction des autres.

HAMBERG (H.-E.). — *Extrait de l'histoire du thermomètre.* (10 p.)

WICKSEN (K.). — *Sur l'essai des valeurs dans les équations à radicaux.* (4 p.)

Méthode élémentaire pour trouver si une valeur calculée de l'inconue satisfait à l'équation donnée.

MALMSTEN (C.-J.). — *Développement de $u = f(xe^{\rho x})$ en série, ordonnée suivant les puissances entières et ascendantes de x.* (7 p.)

L'auteur obtient la formule

$$f(xe^{\rho x}) = f(0) + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m + \ldots,$$

où

$$a_m = \frac{1}{\Gamma(p+1)} \mathop{\mathrm{S}}_{p=1}^{p=m} m_p (p\rho)^{m-p} f^{(p)}(0).$$

Cette série est convergente, quel que soit x, si

$$\lim \frac{(M_0)^{\frac{1}{m}}}{\log m} = 0,$$

M_0 étant le plus grand des modules des quantités $f'(0), f''(0), \ldots$.

MALMSTEN (C.-J.). — *Problème de Calcul des probabilités.* (4 p.)

L'auteur cherche la probabilité pour que, de deux joueurs également habiles, l'un gagne m parties sur n. La probabilité cherchée du gain est

$$\frac{n_m}{2^n}, \quad \text{où} \quad n_m = \frac{n(n-1)\ldots(n+1-m)}{1.2\ldots m}.$$

Ce résultat est ensuite appliqué au jeu de whist. M. F.

MATHEMATISCHE ANNALEN, in Verbindung mit C. NEUMANN begründet durch R.-F.-A. CLEBSCH, gegenwärtig herausgegeben von C. NEUMANN.

T. VIII; 1875 (¹).

ZEUTHEN (G.). — *Étude des propriétés de situation des surfaces cubiques.* (31 p.; fr.)

Dans toute la Géométrie de situation, la méthode des projections et le principe de continuité, qui, dans les ouvrages de Poncelet, jouent le rôle essentiel, ont une importance considérable. La première méthode permet de ramener les unes aux autres les formes qui se déduisent l'une de l'autre par collinéation; le principe de continuité permet de passer d'un cas à un autre par une variation continue des constantes.

Le travail de M. Zeuthen condense divers travaux antérieurs fondés sur ces deux méthodes, entre autres un travail de M. Zeuthen lui-même sur les courbes du quatrième ordre et un travail de M. Klein sur les surfaces du troisième ordre. (*Math. Ann.*, t. VII; *Math. Ann.* t. VI). On peut encore en rapprocher un Mémoire de M. Schläfli inséré dans le tome V des *Annali di Matematica.*

Dans ses recherches sur les quartiques, M. Zeuthen a discuté la réalité des tangentes doubles et établi l'important théorème que voici : « Une courbe quartique sans points multiples a, à côté des tangentes communes à deux branches (dites de seconde espèce), quatre tangentes doubles réelles (de première espèce), dont les deux points de contact se trouvent sur la même branche ou sont imaginaires. » Il s'est servi de ces résultats pour démontrer à nouveau les théorèmes de M. Schläfli (*Philosophical Transactions*, t. CLIII) concernant la réalité des vingt-sept droites d'une surface cubique. La connexion entre ces deux ordres de questions consiste en ce que, si l'on projette stéréographiquement sur un plan une surface cubique, en prenant pour point de vue un point de la surface, le contour apparent est, comme l'a montré M. Geiser, une courbe quartique; les vingt-huit tangentes doubles de cette quar-

---

(¹) Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 209.

tique sont les projections des vingt-sept droites de la surface et la droite d'intersection du plan tableau et du plan tangent à la surface cubique au centre de projection. M. Zeuthen a établi qu'effectivement on pouvait déduire de cette façon une courbe quartique réelle quelconque d'une surface cubique.

M. Zeuthen démontre par cette méthode une suite de théorèmes, donnés par M. Klein dans le travail déjà cité, relativement aux surfaces cubiques admettant vingt-sept droites réelles, et il complète d'ailleurs cette étude et s'occupe en particulier des surfaces cubiques admettant un moindre nombre de droites réelles; nous citerons comme exemples quelques-uns des théorèmes auxquels il parvient.

Les droites à points doubles imaginaires d'une surface de la première espèce forment un double six.

La courbe parabolique d'une surface cubique de la première espèce est composée de dix branches d'ordre pair, inscrites à dix triangles formés par les droites de la surface.

Les vingt-sept droites d'une surface cubique de la première espèce se décomposent en dix triangles circonscrits à la courbe parabolique, en trente pentagones, en quatre-vingts tétragones de première espèce et en soixante tétragones de seconde espèce.

Une surface cubique de la première espèce a dix ouvertures. Toute droite rencontrant la surface en un seul point passe par une seule de ces dix ouvertures. En un point quelconque de la surface passent des droites de quatre de ces dix collections.

Frahm (W.). — *Note sur la rotation d'un corps solide.* (4 p.)

Dans son Mémoire *Sur la rotation d'un corps*, Jacobi détermine, au moyen des fonctions ϑ, la position d'un corps solide qui tourne autour d'un point fixe et qui n'est soumis à aucune force, par rapport à un certain système d'axes mobiles. M. Frahm, dont le travail est malheureusement défiguré par quelques fautes d'impression, montre qu'on peut arriver au même résultat, en prenant un système fixe et arbitraire d'axes de coordonnées dans l'espace.

Frahm (W.). — *Sur certaines équations différentielles.* (5 p.)

Partant d'une remarque de Cayley (*J. de Crelle*, t. 32, p. 123), M. Frahm pose un système d'équations différentielles à n variables qui, dans le cas de $n = 3$, coïncide avec les équations différentielles relatives au problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe; il en déduit $\frac{n(n-1)}{2}$ équations différentielles qui correspondent aux équations bien connues, dues à Euler, qui donnent les projections de la vitesse angulaire sur les axes principaux. Au moyen d'une transformation originale, M. Frahm parvient à une suite d'intégrales de ces équations qui s'expriment toutes à l'aide d'un déterminant unique.

Weber (L.). — *Note sur les surfaces de potentiel constant* (4 p.)

Si une sphère métallique isolée est induite par un point électrique, elle représente, après la production de l'équilibre électrique, une surface de niveau du potentiel total. Cela est, en apparence, contradictoire, quand la sphère possède des densités électriques de signes contraires sur la région de la sphère qui regarde un point et sur celle qui lui est opposée. L'auteur s'occupe de ce cas intéressant : la sphère métallique n'est une surface de niveau que tout autant qu'elle se trouve enveloppée entre deux surfaces de niveau consécutives comme une pierre entre deux couches de terre.

Weber (H.). — *Nouvelle démonstration du théorème d'Abel.* (5 p.)

Dans la théorie que Riemann a donnée des fonctions abéliennes, la considération de l'intégrale $\int I\,dI'$ (où I et I' représentent deux intégrales quelconques relatives à une même fonction algébrique), prise le long des coupures faites convenablement dans la surface de Riemann qui correspond à cette fonction, joue, comme on sait, un grand rôle; c'est ainsi que Riemann a obtenu les relations bilinéaires entre les périodes de l'intégrale de première espèce, et que Clebsch et Gordan ont établi le théorème relatif à l'inversion du paramètre et de l'argument dans l'intégrale normale de troisième espèce. M. Weber montre que la même méthode conduit à une démonstration simple du théorème d'Abel.

Voss (A.). — *Sur la théorie des surfaces gauches.* (81 p.)

La génération systématique des figures géométriques au moyen des éléments les plus simples constitue le fondement de toutes les recherches géométriques les plus récentes. Le caractère de chaque étude géométrique est déterminé, d'une part, par le choix de l'élément de l'espace, d'autre part, au point de vue analytique par le système de coordonnées qui sert à déterminer la position de cet élément. Depuis longtemps, on a pris l'habitude de traiter la géométrie du plan en même temps que celle du point; les recherches de Cayley et de Plücker ont conduit à ajouter à ces deux géométries une troisième, dans laquelle la ligne droite est considérée comme élément de l'espace.

Cette discipline, que nous désignerons sous le nom de *géométrie de la ligne droite,* peut être traitée sous le point de vue suivant. On peut faire correspondre toutes les droites de l'espace aux points d'une surface du second degré dans un espace à cinq dimensions, de telle manière que deux droites qui se coupent soient représentées par deux points sur la même génératrice rectiligne de cette surface. Ainsi l'étude de la ligne droite dans l'espace se ramène à celle des invariants d'un système de formes homogènes à six variables, dont l'une est une forme quadratique.

En partant de ce point de vue, qui se trouve complétement développé dans les §§ I et II, l'auteur traite, comme introduction à une série d'autres travaux sur le même sujet, la théorie des surfaces réglées en prenant comme point de départ l'équation canonique (¹)

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0,$$

qui relie les coordonnées homogènes. Les méthodes générales de l'Algèbre moderne sont ici remplacées par d'autres plus particulières, appropriées au caractère de cette forme quadratique. Le travail se partage en deux Parties. Dans l'une se trouve traitée la théorie générale des surfaces réglées qui sont l'intersection complète de trois complexes généraux. L'auteur traite en particulier des tangentes principales, des lignes asymptotiques algébriques, des courbes formées par les points des contacts de celles des tangentes qui ont avec la surface un contact du troisième ordre. Cette dernière courbe se compose, dans les surfaces réglées, d'un certain nombre de lignes droites, nommées par l'auteur *génératrices hyperboloïdiques,* qui sont à l'intersection de la surface proposée et d'une autre dont l'auteur donne l'équation.

(¹) Voir *Bulletin*, t. II, p. 179.

La seconde Partie se compose des surfaces réglées de genre o. Les coordonnées de leurs génératrices peuvent être représentées comme fonctions rationnelles d'un paramètre λ, de sorte que l'on a

$$\rho x_i = \varphi_i(\lambda).$$

Ces surfaces sont développables si l'identité

$$\sum_1^6 \left(\frac{d\varphi_i}{d\lambda}\right)^2 = 0$$

est satisfaite, etc.

Comme exemple, l'auteur traite les surfaces rationnelles des quatre premiers degrés. Nous signalerons, en particulier, l'étude de la surface réglée du troisième ordre à deux directrices infiniment rapprochées.

GUNDELFINGER (S.). — *Sur l'interprétation géométrique de certaines formes algébriques qui entrent dans la théorie des courbes du troisième ordre.* (9 p.)

M. Gundelfinger donne, pour une suite de formes et de relations algébriques qui entrent dans la théorie des courbes du troisième ordre, des interprétations géométriques simples; en particulier, pour la combinante du sixième ordre de Brioschi $\Psi = 0$, et pour la conjuguée $\Pi = 0$ de la troisième classe d'Aronhold.

LÜROTH (J.). — *L'imaginaire en Géométrie et le calcul des racines. Exposition et développement de la théorie de v. Staudt.* (69 p.)

Le grand géomètre v. Staudt a, comme on sait, dans ses *Beiträge zur Geometrie der Lage* (Nürnberg, 1856-60), créé une théorie complète, purement géométrique, de l'imaginaire dans la voie de la Géométrie moderne. Cependant cette théorie a été plus souvent citée qu'étudiée, en sorte que l'on pourrait méconnaître son importance. Cela tient, d'une part, à la complication des notions employées, d'autre part, à la forme pénible de l'exposition. MM. August et Stolz se sont déjà proposé de rendre cette théorie plus claire et plus abordable : le premier (*Programm der Friedrichs-Realschule zu Berlin,* 1872), en employant seulement des notions élémentaires et les disposant sous une forme plus attrayante, le second (*Math. Ann.*, t. IV), en cherchant à développer la théorie au point de vue analytique.

Dans le présent travail, au contraire, l'auteur s'est proposé de développer la théorie complète de v. Staudt dans la voie synthétique ouverte par l'inventeur, d'y ajouter, et aussi d'en donner une exposition plus claire. Nous devons faire remarquer que l'auteur a égard aux recherches importantes de Grassmann sur les courbes algébriques. Grassmann (*Ausdehnungslehre*, 1862, p. 189; *Journal de Crelle*, t. 31, 36, 42, 44, 49) a donné la définition suivante, purement géométrique, d'une courbe algébrique :

Si la position d'un point variable $\mathfrak{P}$ dans un plan est assujettie à cette condition, qu'un certain point α doit se trouver sur une droite d, le point α et la droite d étant déduits de $\mathfrak{P}$ par des constructions qui n'emploient que la règle, alors le point $\mathfrak{P}$ décrit une courbe d'ordre d'ordre n, s'il a été employé n fois dans ces constructions. Réciproquement, toute courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre peut être engendrée de cette manière.

M. Lüroth déduit de cette définition, et par une voie purement géométrique, le théorème de Bézout, qui est regardé si volontiers comme un axiome par les géomètres synthétiques.

Il sera utile, croyons-nous, de donner les points principaux de la théorie de v. Staudt, tels qu'ils sont développés dans le présent travail.

Il s'agit d'abord de donner une définition de l'élément imaginaire : du point, du plan, de la droite imaginaire.

Un point imaginaire est représenté par la droite réelle qui le relie au point imaginaire conjugué, par l'involution qui se trouve sur cette ligne droite et qui a pour points doubles les deux points imaginaires, et par un sens fixé sur la droite, qui distingue l'un des points de son conjugué, en sorte que les deux points répondent a des sens opposés. Le plan imaginaire a une définition analogue, qu'on déduit de la précédente par la théorie des polaires réciproques.

Pour les droites imaginaires, il y a deux cas à distinguer. Une telle droite peut avoir un point réel, et alors elle est représentée par un faisceau de rayons (droites d'un plan passant par un point), par une involution, et par un sens qui l'accompagne. Elle peut aussi n'avoir aucun point réel; alors elle est dite *droite de seconde espèce*, et elle est représentée par les droites réelles, prises encore avec un sens déterminé, qui coupent cette droite en même temps que sa conjuguée.

Von Staudt, dans sa *Geometrie der Lage* (Nürnberg, 1847), avait défini la projectivité dans les figures à une dimension, en se bornant aux éléments réels, de la manière suivante. Il avait d'abord défini la situation harmonique de quatre éléments, par l'emploi du quadrilatère complet, et il posa ensuite la définition suivante : « Deux figures à une dimension sont dites *projectives* (homographiques), si leurs éléments se correspondent de telle manière qu'à quatre éléments harmoniques de l'une correspondent toujours quatre éléments harmoniques de l'autre » (*voir* à ce sujet une Note, *Math. Annal.*, t. VII, p. 531, à laquelle M. Lüroth a égard). Une telle définition est suffisante, aussi suffisante pour les éléments imaginaires, comme M. Lüroth le prouve à l'aide de quelques lemmes.

Tel est le contenu de la première Section du travail actuel. Le second Chapitre est consacré au calcul avec des racines; v. Staudt désigne sous le nom de *Wurf* [1] le rapport anharmonique de quatre éléments d'une figure à une dimension; ce rapport ne se présentant pas ici comme *quotient de segments*, et même n'étant pas d'abord introduit comme numériquement exprimable, mais simplement comme une propriété de quatre éléments, dépendant à la vérité de leur ordre, mais subsistant après leur déformation homographique. L'addition des racines, leur multiplication doivent donc être définies seulement par des opérations géométriques pour lesquelles on a à démontrer, afin de justifier la dénomination choisie, les propriétés de commutativité et de distributivité qui caractérisent l'addition et la multiplication arithmétiques ordinaires. Les constructions, dans lesquelles on considère une conique comme renfermant les éléments sur lesquels on opère, sont très-élégantes. Elles permettent, pour les éléments imaginaires aussi bien que pour les éléments réels, de constituer un calcul géométrique avec les racines, qui a la même généralité que le calcul algébrique ordinaire. Ainsi M. Lüroth démontre de cette manière qu'une équation algébrique du $n^{\text{ième}}$ ordre a n racines, et il obtient aussi, comme il a été indiqué plus haut, en partant de la définition de Grassmann, une démonstration du théorème de Bézout.

---

(1) *Wurf*, mot intraduisible.

LIE (S.). — *Fondements de la théorie des transformations de contacts.* (89 p.)

Les importantes recherches qui sont réunies dans ce Mémoire avaient été publiées séparément dans les *Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania;* elles concernent la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Sans doute, on ne peut pas en extraire une nouvelle méthode d'intégration, ni en retirer quelque avantage pratique. Elles sont, au contraire, indépendantes des méthodes employées pour l'intégration de ces sortes d'équations, et, tant qu'on cherchera à ramener celles-ci aux équations différentielles ordinaires, elles garderont leur valeur; mais l'auteur place avec raison en première ligne, non l'utilité que ses recherches peuvent présenter pour l'intégration des équations aux dérivées partielles, mais une connaissance plus approfondie de l'essence même de ces équations.

Son Mémoire est divisé en trois Parties, relatives à la théorie de la transformation de contact, à la théorie des groupes et à la théorie des groupes homogènes.

La transformation de contact, dont le nom indique l'origine géométrique, peut être définie de la manière suivante :

Soient $Z, X_1, X_2, \ldots, X_n;\ P_1, P_2, \ldots, P_n$ *des fonctions des variables indépendantes* $z, x_1, x_2, \ldots, x_n;\ p_1, p_2, \ldots, p_n$, *satisfaisant identiquement à l'équation*

$$dZ - \sum_{k=1}^{k=n} P_n dX_n = \rho\left(dz - \sum_{k=1}^{k=n} p_n dx_n\right);$$

la substitution définie par les $2n+1$ *équations*

$$z' = Z,\quad x'_i = X_i,\quad p'_i = P_i$$

constitue une transformation de contact.

La recherche de toutes les transformations de contact apparaît ainsi comme un cas particulier du problème de Pfaff, et l'on peut la poser dans les termes suivants :

L'expression

$$dz - \sum_{k=1}^{k=n} p_k dx_k$$

ayant naturellement la forme canonique, on demande de la mettre, de la façon la plus générale possible, sous une nouvelle forme canonique.

La théorie du problème de Pfaff conduit à deux modes de solutions.

Partant des relations connues entre deux formes canoniques d'une expression différentielle linéaire, on voit que, en posant une suite d'équations arbitraires entre

$$z, x_1, x_2, \ldots, x_n; \quad z', x'_1, x'_2, \ldots, x'_n,$$

on peut, au moyen de simples différentiations et d'une élimination, parvenir à des équations qui déterminent complétement une transformation de contact.

La seconde méthode repose sur la réduction, donnée par Clebsch, du problème de Pfaff à une série d'équations aux dérivées partielles simultanées; elle conduit aux équations aux dérivées partielles auxquelles doivent satisfaire les fonctions $Z, X_1, X_2, \ldots, X_n$, pour que les équations

$$z' = Z, \quad x'_i = X_i$$

définissent une transformation de contact. Si l'on prend $n+1$ fonctions indépendantes, satisfaisant à ces équations, les n fonctions P_i s'obtiendront par la résolution d'équations linéaires.

Bornons-nous à ce genre de transformations de contact, particulièrement important à considérer, que l'auteur désigne sous le nom de *transformations entre* x, p; dans ces transformations, les X_i et les P_i ne contiennent pas z. La première méthode montre que des relations posées arbitrairement entre

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \quad x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \quad z' - Az,$$

où A est une constante, conduisent toujours à une transformation de contact déterminée entre x, p. La seconde méthode montre que les fonctions $X_1, \ldots, X_n$ satisfont aux équations

$$(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_j}{\partial p_k} - \frac{\partial X_i}{\partial p_k} \frac{\partial X_j}{\partial x_k} \right) = 0.$$

Inversement, n fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$, indépendantes entre elles, satisfaisant à ces équations, fournissent toujours une transformation de contact. On devra prendre Z sous la forme

$$Z = Az + \Pi,$$

A étant une constante, et Π une fonction ne contenant que les x et les p, et complétement déterminée à une constante additive près. L'auteur est ainsi conduit au théorème fondamental que voici :

Pour que les 2n équations

$$x'_i = X_i, \quad p'_i = P_i$$

définissent une transformation de contact entre x, p, il faut et il suffit que les équations

$$(X_i, X_j) = (X_i, P_j) = (P_i, P_j) = 0, \ (i \gtrless j),$$
$$(X_1, P_1) = (X_2, P_2) = \ldots = (X_n, P_n) = \text{const.}$$

soient satisfaites.

Il applique ensuite ces résultats à une classe particulièrement importante de transformations de contact, dites *homogènes;* elles transforment les fonctions des $x'_1, \ldots, p'_n$, homogènes par rapport aux p', en fonctions des $x_1, \ldots, p$, homogènes par rapport aux p. Les transformations homogènes correspondent à des équations de la forme

$$Z' = Az + B, \quad \Omega_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

et l'on a le théorème suivant :

Si les n équations $x'_i = X_i$ répondent à une transformation de contact qui soit homogène, les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ doivent être des fonctions homogènes, par rapport aux p, d'ordre nul, et satisfaire aux relations

$$(X_i, X_j) = 0.$$

Inversement, n fonctions X, remplissant ces conditions et indépendantes entre elles, déterminent complétement une transformation homogène de contact, définie par les équations

$$Z' = Az + B, \quad x'_i = X_i.$$

M. Lie désigne sous le nom de *transformations infinitésimales* des transformations de contact définies par des équations de la forme

$$x'_i = x_i + \varepsilon M_i, \quad p'_i = p_i + \varepsilon \Pi_i,$$

où ε est une quantité infiniment petite. Si l'on fait

$$x'_i - x_i = dx_i, \quad p'_i - p_i = dp_i, \quad \varepsilon = dt,$$

les équations qui définissent une pareille transformation de contact prennent la forme canonique

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

où H est une fonction homogène du premier ordre.

L'auteur termine la première Section en donnant le lien des diverses méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles données par Jacobi dans sa *Nova methodus*. On obtient une solution complète de l'équation

$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) = \text{const.},$$

où les p ont été mis à la place des $\frac{\partial z}{\partial x}$, au moyen de $n-1$ fonctions $X_2, X_3, \ldots, X_n$, indépendantes entre elles et indépendantes de la fonction X_1, qui doivent satisfaire aux équations

$$(X_i, X_j) = 0.$$

Les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ doivent être indépendantes par rapport aux p; il y avait là une difficulté qu'aucune méthode n'avait encore permis de lever. M. Lie rapproche la méthode d'intégration de Cauchy, pour les équations qui contiennent la fonction inconnue, des résultats obtenus par Clebsch dans la théorie du problème de Pfaff, qui se rapportent au cas particulier d'une équation aux dérivées partielles, et parvient à montrer que cette condition d'in dépendance des fonctions relativement aux p est complétement superflue. En même temps, il donne la solution du problème général de la transformation des équations aux dérivées partielles du premier ordre, c'est-à-dire de la question suivante : « Etant donnée la solution complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, en déduire la solution complète des équations aux dérivées partielles qui résultent de la première par une transformation de contact. »

La seconde Section commence par la définition de ce que M. Lie appelle un *groupe*.

r fonctions indépendantes $u_1, u_2, \ldots, u_r$ des $2n$ variables $x_1, \ldots, p_n$ forment un *groupe*, si les expressions (u_i, u_j) peuvent être exprimées au moyen des fonctions u; en particulier, le groupe est dit en *involution*, si les expressions (u_i, u_j) sont nulles. Une fonction U appartient au groupe $u_1, \ldots, u_r$ ou en fait partie, si elle est fonction des quantités $u_1, u_2, \ldots, u_r$.

Soient $v_1, \ldots, v_r$ des fonctions indépendantes, appartenant au groupe $u_1, \ldots, u_r$; elles constituent un groupe *équivalent*, ou une autre forme de groupe. Enfin toute transformation de contact appliquée aux éléments d'un groupe fournit aussi un groupe.

Ces définitions et ces théorèmes préliminaires sont essentiels pour préciser le but principal de cette Section. On peut le formuler ainsi : *Trouver toutes les propriétés d'un groupe qui sont indépendantes de la forme de ce groupe, et qui ne sont pas altérées par une transformation de contact quelconque.* On arrive ainsi à se poser le problème suivant : *Trouver toutes les relations entre une suite de fonctions des x et des p, qui restent invariables par les transformations de contact.* Naturellement, ces transformations doivent être des transformations entre x, p. Cette recherche aboutit à simplifier l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Comme point de départ, M. Lie établit le théorème suivant :

« Soit $u_1, \ldots, u_r$ un groupe; les r équations linéaires

$$(u, V) = 0, \quad \ldots, \quad (u_r, V) = 0$$

forment un système complet et possèdent $2n - r$ solutions indépendantes. »

D'après le théorème de Poisson et de Jacobi, ces solutions constituent un second groupe, qui sera dit le *groupe polaire* du premier. Le groupe polaire de ce groupe polaire est équivalent au premier groupe; deux groupes sont équivalents, s'ils possèdent le même groupe polaire. Les fonctions *particularisées* (*ausgezeichnete Funktionen*) d'un groupe sont les solutions du système complet d'équations correspondant à ce groupe, qui peuvent s'exprimer en fonction des éléments de ce groupe; elles appartiennent aussi au groupe polaire, et inversement; on peut toujours déterminer algébriquement combien un groupe donné admet de fonctions particularisées. Si un groupe en contient m, leur détermination complète exige l'intégration d'un système de m équations différentielles ordinaires.

Dans le nombre infini de formes équivalentes qu'un groupe donné peut revêtir, il y en a une particulière qui est dite la *forme canonique*. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_r$; $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ les éléments de cette forme du groupe; on devra avoir

$$(X_i, X_j) = (P_i, P_j) = (X_i, P_j) = 0, \quad (X_i, P_i) = 1,$$

M. Lie montre que, par des intégrations successives, on peut toujours amener un groupe à prendre cette forme; il est conduit en même temps à cette proposition importante : *La différence entre le nombre de termes d'un groupe et le nombre des fonctions particularisées de ce groupe est toujours un nombre pair.* Si $X_1, X_2, \ldots, X_r$; $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ sont les éléments d'un groupe canonique, on peut toujours trouver d'autres fonctions $X_{r+1}, \ldots, X_n$; $P_{\mu+1}, \ldots, P_n$, telles que $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ forment aussi un groupe canonique.

Parvenant enfin à la solution de la question principale posée dans la seconde section, M. Lie établit que *les seules propriétés d'un groupe qui ne dépendent pas de la forme de ce groupe, et restent invariables après une transformation de contact quelconque, sont le nombre des termes et le nombre des fonctions particularisées.*

M. Lie cherche de la même façon les relations invariantes qui existent entre un groupe et un sous-groupe que l'on y suppose contenu. Relativement aux systèmes en involution contenus dans un groupe, il parvient à l'important théorème qui suit : « Si un groupe de $2q + m$ termes contient m fonctions particularisées, on peut trouver des systèmes en involution ayant au plus $m + q$ termes et contenus dans le groupe donné. » La recherche d'un tel système exige les opérations

$$m, m-1, \ldots, 2, 1, \quad 2q-2, \quad 2q-4, \ldots, 2.$$

(Pour M. Lie, l'opération m signifie la découverte d'une intégrale de m équations différentielles ordinaires). Ce théorème conduit l'auteur à montrer, relativement à l'intégration des équations aux dérivées partielles, comment, dans chaque cas particulier, on peut utiliser certaines circonstances partielles; mais, avant de mettre en lumière ces simplifications en les appliquant, M. Lie aborde l'important problème que voici : « Étant données r fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_r$ de $x_1, \ldots, p_n$, et r fonctions $F'_1, F'_2, \ldots, F'_r$ de $x'_1, \ldots, p'_n$, sous quelles conditions existe-t-il une transformation de contact qui change chaque fonction F_i en la fonction correspondante F'_i ? »

Voici maintenant la substance de ce qui concerne les méthodes d'intégration.

Étant donnée une équation aux dérivées partielles

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = \text{const.},$$

il faut d'abord chercher une solution f de l'équation linéaire

$$(F_1, f) = 0.$$

Dans les applications à la Dynamique, on connaît le plus souvent, non-seulement une, mais plusieurs solutions. Les méthodes habituelles ne tirent aucun profit de cette circonstance, que les recherches précédentes permettent d'utiliser. Soient, en effet, $f_1, f_2, \ldots$ plusieurs solutions : ou elles forment un groupe, ou elles permettent de constituer un groupe par la suite des opérations $(f_1, f_2), \ldots$. D'après le théorème de Poisson et de Jacobi, chaque terme de ce groupe est en involution avec la fonction F_1. Les théorèmes précédents permettent de trouver combien de termes possèdent les systèmes en involution contenus dans ce groupe, et combien d'intégrations nécessite la formation d'un tel système en involution; on obtient ainsi une suite de fonctions $F_2, F_3, \ldots, F_q$, qui sont en involution entre elles et avec la fonction F_1. La méthode d'intégration de Lie (*Math. Annalen*, t. VI, p. 162; t. VIII, p. 313) permet alors de substituer à l'équation donnée, où les variables indépendantes étaient au nombre de n, une autre équation où il n'entre plus que $n - (q - 1)$ variables indépendantes. Cette méthode, en bénéficiant des circonstances que nous avons dites, exige évidemment moins d'intégrations que les méthodes ordinaires. L'auteur montre comment, dans chaque cas particulier, il conviendra le mieux d'utiliser les intégrales connues, et fait un usage intéressant de son extension de la méthode de Cauchy. L'utilité de son procédé apparaît dans l'exemple qu'il donne, le problème des trois corps. Par la transformation de Jacobi, ce problème est ramené à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, à six variables indépendantes. Soit

$$H = h$$

cette équation; le théorème des aires fournit trois solutions de l'équation $(H, F) = 0$; ces trois solutions forment un groupe, qui n'est pas en involution. Le nombre m des fonctions particularisées de ce groupe doit être tel que $3 - m$ soit un nombre pair; on a donc $m = 1$. Le groupe en question contient donc un système en involution de deux termes, et ce système peut être obtenu par une opération 1. Cette opération s'effectue, et la solution du problème des trois corps est ramenée à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre à quatre variables indépendantes, c'est-à-dire, d'après les méthodes de Lie et de Mayer, qu'elle nécessite seulement les opérations 6, 4, 2.

La troisième Section est consacrée à l'étude des équations aux dérivées partielles, telles que

$$(1) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0,$$

qui ne contiennent pas la fonction inconnue. Le cas général se ramène, comme on le sait, à ce cas particulier, et c'est ici qu'apparaît l'importance de transformations homogènes de contact. Si, en effet, dans l'équation

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, \frac{\partial x_n}{\partial x_1}, \frac{\partial x_n}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}\right) = 0,$$

on met, à la place de x_n, une fonction inconnue z, liée à x_n par une équation de la forme

$$Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const.},$$

l'équation donnée prend la forme

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, \frac{-p_1}{p_n}, \frac{-p_2}{p_n}, \ldots, \frac{p_{n-1}}{p_n}\right) = 0,$$

qui est un cas particulier de l'équation (1).

Au lieu des groupes généraux de la Section précédente, interviennent des groupes homogènes; au lieu des transformations de contact générales, des transformations homogènes.

Un groupe est dit *homogène* quand il peut être mis sous une forme telle que chaque terme soit une fonction homogène par rapport aux p. Si toutes les fonctions sont de degré zéro, le groupe est en involution. Le groupe polaire d'un groupe homogène est homogène, et les fonctions particularisées des deux groupes sont homogènes. Les groupes homogènes sont susceptibles de *formes canoniques* où chaque terme est homogène, et qui sont ou non distinctes, selon que les fonctions particularisées du groupe sont toutes, ou ne sont pas toutes d'ordre nul. Par une voie analogue à celle qui a été suivie dans la deuxième Section, on parvient à ce théorème : *Les seules propriétés d'un groupe homogène qui soient indépendantes de la forme de ce groupe, et qui ne soient pas changées par une transformation homogène, sont le nombre des termes, le nombre des fonctions particularisées et le nombre des fonctions particularisées d'ordre nul.*

M. Lie applique ensuite ces propositions à l'intégration des équations aux derivées partielles qui ne contiennent pas la fonction inconnue.

La fin de ce travail concerne le théorème de Poisson et de Jacobi; on peut la résumer en ces termes : *Il n'existe pas d'opérations algébriques indépendantes de la forme de la fonction donnée f, qui permettent de déduire de deux ou plusieurs solutions de l'équivalent $(f, \varphi) = 0$ de nouvelles solutions non susceptibles d'être fournies par une application répétée du théorème de Poisson et de Jacobi.*

Cette proposition montre en particulier que l'intéressant théorème de M. Laurent (*Journal de Liouville*, 2e série, t. XVII, p. 422) ne donne pas de solutions distinctes de celles que fournit le théorème de Poisson et de Jacobi.

Mayer (A.). — *Sur une extension de la méthode de Lie.* (4 p.)

Sous sa forme primitive, la méthode de M. Lie exige, pour ramener l'intégration d'une équation

$$H_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) = \text{const.}$$

à une équation où les variables indépendantes soient au nombre de $m-1$, que l'on connaisse des fonctions $H_2, H_3, \ldots, H_m$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_m$, qui soient indépendantes entre elles, qui satisfassent aux conditions

$$(H_i, H_j) = 0,$$

et qui, en outre, de même que dans la méthode de Jacobi, soient indépendantes entre elles quand on les regarde seulement comme des fonctions des p.

La Note de M. Mayer montre que cette dernière restriction est superflue; elle fournit, par conséquent, cette même extension de la méthode de M. Lie, que M. Lie lui-même avait, dans le Mémoire précédent, donnée pour la méthode de Jacobi.

MAYER (A.). — *Établissement direct de la théorie des transformations de contact.* (9 p.)

Dans le Mémoire de M. Lie, la théorie des transformations de contact est établie indirectement, en partant des résultats obtenus par Clebsch dans l'étude du problème général de Pfaff, problème qui est beaucoup plus compliqué. M. Mayer établit directement les formules fondamentales, et rend ainsi le travail de M. Lie indépendant de la solution du problème de Pfaff.

MEUTZNER (P.). — *Recherches relatives au potentiel logarithmique.* (40 p.)

Étant donnés dans un plan deux points de masses m, μ, et de distance r, attirés l'un vers l'autre par une force $P = \frac{m\mu}{r}$, la fonction $V = m \log r$, dont les dérivées partielles changées de signe donnent les projections de la force P sur les axes de coordonnées, prend, comme on le sait, le nom de potentiel logarithmique du point m relativement à la masse $\mu = 1$.

Les paragraphes 2 à 8 contiennent différents théorèmes sur le potentiel logarithmique d'un anneau elliptique limité par deux ellipses homofocales, et sur celui de la surface d'une ellipse : l'auteur se sert de coordonnées elliptiques, qu'il introduit au moyen de l'équation

$$x + iy = C\cos(\omega - i\theta),$$

où les deux paramètres ω et θ définissent les hyperboles et les ellipses du système de coordonnées, et où C est une constante. La surface d'un anneau elliptique I_r et la surface I_f d'une ellipse sont données par les formules

$$I_r = \frac{C^2\pi}{2}(e^{2\theta} + e^{-2\theta})\,d\theta, \quad I_f = \frac{C^2\pi}{4}(e^{2\theta} - e^{-2\theta}).$$

Le développement du logarithme de la distance de deux points par la série de Fourier conduit, pour le potentiel d'un anneau elliptique infiniment étroit et pour le potentiel de la surface d'une ellipse, à des formules auxquelles on peut substituer les théorèmes suivants :

« Relativement à un anneau elliptique, les courbes de potentiel constant sont d'une nature transcendante pour les points extérieurs, et pour les points intérieurs des hyperboles équilatères.

» Le potentiel de la surface d'une ellipse par rapport à un point intérieur θ_i, ω_i est, abstraction faite d'une constante, donné par la formule

$$\frac{9\pi C^2}{4}\left[\frac{e^{2\theta_i} + e^{-2\theta_i}}{2} + \cos 2\omega_i\left(1 - \frac{e^{2\theta_i} + e^{-2\theta_i}}{2e^{2\theta}}\right)\right].$$

» Pour un point extérieur θ_a, ω_a, le potentiel s'obtient en multipliant la masse M de la surface elliptique par

$$\log\frac{Ce^{\theta_a}}{2} + \frac{\cos 2\omega_a}{2e^{2\theta_a}}. \text{ »}$$

Les potentiels de deux surfaces homogènes limitées par des ellipses homofocales, relativement à un point qui leur est extérieur, sont proportionnels aux masses de ces deux ellipses.

Le § 8 contient deux théorèmes sur les anneaux elliptiques, qui correspondent à deux théorèmes de Steiner donnés dans le *Journal de Crelle*, t. 12, p. 142.

La seconde Partie (§§ 9-20) contient la solution, par quatre méthodes différentes, d'un problème qui se présente dans la théorie de la chaleur. En particulier, on demande de trouver la densité q, qui définit la distribution de la masse sur l'ellipse (θ), de façon que son action sur un point extérieur quelconque soit la même que l'action d'un point (θ_r, ω_r) intérieur à l'ellipse donnée. La comparaison des valeurs des potentiels relatifs à la masse répandue sur la circonférence de l'ellipse et à la masse du point intérieur donné, pour cette densité, la valeur

$$q_s = \frac{m}{2\pi}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^{n\theta_r} + e^{-n\theta_r}}{e^{n\theta} + e^{-n\theta}} \cos n\omega_r - \cos n\omega \right.$$
$$\left. + \frac{e^{n\theta_r} - e^{-n\theta_r}}{e^{n\theta} + e^{-n\theta}} \sin n\omega_r - \sin n\omega \right) \frac{d\omega}{ds}.$$

Supposant $m = 1$ et remplaçant alors q_s par $\eta_s^{(r)}$, le problème en question sera, pour un point intérieur (θ_r, ω_r), résolu par la formule

$$\Phi_r = \int_A \eta_s^{(r)} \Phi_s ds,$$

où A est le contour qui limite la surface donnée, Φ_s la valeur sur le contour de la fonction cherchée Φ, et ds un élément d'arc de ce contour. En remplaçant Φ_s par une série de Fourier,

$$\Phi_r = P_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (P_n \cos n\omega + Q_n \sin n\omega),$$

on aura, pour la valeur de la fonction Φ au point r,

$$\Phi_r = P_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(P_n \frac{e^{n\theta_r} + e^{-n\theta_r}}{e^{n\theta} + e^{-n\theta}} \cos n\omega_r + Q_n \frac{e^{n\theta_r} + e^{-n\theta_r}}{e^{n\theta} + e^{-n\theta}} \sin n\omega_r\right).$$

La forme de cette solution conduit aux questions suivantes : Les fonctions

$$\varphi = 1, \quad \psi = \frac{C}{2}(e^{n\theta} + e^{-n\theta}) \cos n\omega, \quad \chi = \frac{C}{2}(e^{n\theta} - e^{-n\theta}) \sin n\omega$$

sont-elles, ainsi que leurs premières dérivées, uniformes et continues, et satisfont-elles à l'équation

$$\Delta \ldots = \frac{\partial^2 \ldots}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ldots}{\partial y^2} = 0,$$

sur l'ellipse donnée? La réponse affirmative à cette question montre qu'il est possible de résoudre directement le problème en question, en posant

$$\Phi = A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{C}{2} A_n (e^{n\theta} + e^{-n\theta}) \cos n\omega + \frac{C}{2} B_n (e^{n\theta} + e^{-n\theta}) \sin n\omega \right],$$

et en déterminant les coefficients A, B de façon que, sur le contour de l'ellipse, la fonction Φ coïncide avec Φ_s; d'un autre côté, on a un moyen de déterminer les fonctions de Green $G_{\theta,\omega}^{(p)}$, relatives à la surface de l'ellipse. Ces fonctions (§ 15) sont données par la formule

$$G_{(p)}^{\theta,\omega} = \log \frac{Ce^{\theta}}{2} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \frac{e^{n\theta_r} + e^{-n\theta_r}}{e^{n\theta} + e^{-n\theta}} \frac{e^{n\theta} + e^{-n\theta}}{e^{n\theta}} \cos n\omega_r \cos n\omega$$
$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \frac{e^{n\theta_r} - e^{-n\theta_r}}{e^{n\theta} - e^{-n\theta}} \frac{e^{n\theta} - e^{-n\theta}}{e^{n\theta}} \sin n\omega_r \sin n\omega.$$

On se trouve ainsi en mesure (§ 16) de résoudre le problème d'une troisième façon. Enfin les paragraphes qui suivent contiennent une quatrième solution. Le principe de cette méthode, dite de la *moyenne arithmétique*, est dû à M. Neumann.

Dans le § 18, qu'on peut regarder comme un appendice aux §§ 5 et 13, on cherche si les six fonctions

$$\varphi_1 = 1, \qquad \psi_1 = \frac{C}{2} e^{n\theta} \cos n\omega, \quad \chi_1 = \frac{C}{2} e^{n\theta} \sin n\omega,$$
$$\varphi_2 = \log \frac{Ce^{\theta}}{2}, \quad \psi_2 = \frac{C}{2} e^{-n\theta} \cos n\omega, \quad \chi_2 = \frac{C}{2} e^{-n\theta} \sin n\omega,$$

satisfont aux conditions d'uniformité et de continuité pour les points intérieurs à l'ellipse et vérifient l'équation

$$\frac{\partial^2 \ldots}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ldots}{\partial y^2} = 0.$$

Les fonctions

$$\varphi = \varphi_1, \quad \psi = \psi_1 + \psi_2, \quad \chi = \chi_1 - \chi_2$$

permettent, d'après cela, de résoudre le problème posé précédemment pour une ellipse pleine. Enfin, dans le § 19 et dans le § 20, on résout le même problème pour la surface annulaire comprise entre deux ellipses confocales, et l'on donne la fonction de Green pour cette surface.

Cayley (A.). — *Sur le groupe de points* G_4^1 *sur une courbe du sixième ordre à cinq points doubles.* (3 p.; angl.)

Parmi les systèmes de points d'intersection d'une courbe algébrique plane C_n du $n^{\text{ième}}$ ordre et d'une autre courbe, il y en a un particulièrement intéressant, qui est déterminé par une courbe C_{n-3}, passant par les points doubles et les points de rebroussement de C_n. Ce groupe de points dans toutes les transformations rationnelles conserve la propriété qui lui sert de définition.

Entre les points d'un tel système il existe certaines conditions, et la position de quelques-uns d'entre eux peut être telle qu'une portion des autres (mais non tous les autres) se détermine au moyen des premiers. Ceux-ci forment alors avec les premiers, d'après les définitions introduites par Brill et Nöther, un *groupe spécial.* C'est un tel groupe que considère l'auteur. Il y a, sur une courbe C_6 avec cinq points doubles, des groupes spéciaux de quatre points de telle nature, que chaque courbe C_3 qui passe par les points doubles et trois des quatre points passe par le quatrième. Pour que cette condition soit remplie, il faut qu'il y ait trois équations entre ces quatre points, en sorte que l'un d'eux seulement peut être pris arbitrairement. L'auteur montre que, l'un des points étant connu, les trois autres se déterminent de cinq manières différentes. Il s'appuie pour cela sur un théorème qu'il nomme *Geiser-Cotterill-Theorem,* et qui traite du lieu géométrique du neuvième point d'intersection d'un faisceau de courbes du troisième ordre, dont sept points sont fixes et dont le huitième décrit une courbe déterminée.

Du Bois-Reymond (P.). — *Sur les valeurs asymptotiques. Sur les approximations infinitaires et la résolution infinitaire des équations.* (52 p.)

Dans de précédents Mémoires (*Annali di Matematica,* série 2, t. IV, p. 338; *Journal de Borchardt,* t. 74, p. 294), l'auteur s'est occupé des relations qui peuvent exister entre les infinis des fonctions et ceux de leurs dérivées. Le but pratique de ces recherches était la détermination de la convergence de certaines formules de haute analyse, notamment des séries dites *de Fourier*

Les problèmes relatifs à la convergence de telles séries conduisent souvent à la question suivante : « Déterminer le degré d'infinité d'une fonction donnée par une équation transcendante. » L'auteur s'est attaché à résoudre cette question dans les cas les plus simples. Ces fonctions inconnues sont comparées à des fonctions simples devenant aussi infinies; il y a, selon la façon de parler de M. Du Bois-Reymond, égalité infinitaire entre deux fonctions qui deviennent infinies lorsque leur rapport a une limite finie. Les fonctions qui servent de termes de comparaison, qui jouent par rapport aux fonctions inconnues le rôle des nombres dans la résolution des équations numériques, pourront être, par exemple, les fonctions

$$x^m, \quad e^x, \quad \log x,$$

et les fonctions obtenues par la répétition de la fonction exponentielle ou de la fonction logarithmique

$$e^{e^{\cdot^{e^x}}}, \quad \log\log\ldots\log x.$$

Il y a d'ailleurs, naturellement, des différences essentielles entre la *résolution infinitaire* des équations et la résolution des équations numériques : on remarquera, en particulier, que les fonctions répétées

$$e^{e^{e^x}}, \quad \log\log\ldots\log x$$

n'embrassent pas tout le champ de l'infini et ne peuvent servir à résoudre complétement le problème; il existe des fonctions croissant plus vite que

$$e^{e^{\cdot^{\cdot^{e^x}}}},$$

ou plus lentement que

$$\log\log\ldots\log x,$$

quel que soit le nombre de fois que la fonction exponentielle ou logarithmique ait été répétée. Cette difficulté ne tient pas d'ailleurs à la nature des fonctions choisies.

Quoi qu'il en soit, le problème de la détermination du degré d'infinité d'une fonction n'est pas aussi élevé que le problème de la détermination d'une fonction satisfaisant à une équation donnée. On a affaire, en quelque sorte, à un problème intermédiaire entre celui de la résolution des équations numériques et celui de la résolution des équations à plusieurs variables. Les méthodes dont se sert l'auteur reviennent le plus souvent à une application variée de la formule donnée par Lagrange pour exprimer le reste de la série de Taylor. Les théorèmes dont l'ensemble constitue la méthode de M. Du Bois-Reymond ont ceci de curieux, qu'ils ne sont ordinairement valables qu'entre des limites restreintes des infinis des fonctions. En général, on découvre dans ce genre de recherches une foule de points de vue nouveaux, qui permettent d'entrevoir une métaphysique analytique toute particulière.

Stolz (O.). — *Sur les points singuliers des courbes algébriques.* (29 p.)

La discussion des singularités d'une courbe algébrique, ou l'étude d'une fonction algébrique d'une seule variable dans le voisinage d'une valeur singulière, a été faite pour la première fois par M. Puiseux. Il est avantageux, pour mieux caractériser géométriquement ces singularités, de la relier aux recherches de Plücker (*Theorie der algebraischen Curven,* 2e Section). C'est ce qu'a fait M. Stolz : il a étudié tous les cas qui peuvent se présenter et a été conduit à la démonstration de ce théorème de Cayley : « Tout point singulier équivaut à un nombre entier et déterminé de points doubles, de points de rebroussement, de tangentes doubles et de tangentes d'inflexion. »

Wiederhold (P.). — *Sur les formes binaires qui sont les polaires d'une forme* (9 p.)

L'auteur cherche les conditions pour que deux formes binaires du $n^{\text{ième}}$ ordre soient les premières polaires d'une forme du $(n+1)^{\text{ième}}$ ordre, et, en supposant ces conditions remplies, comment on peut obtenir cette forme du $n+1^{\text{ième}}$ ordre.

Hankel (H.). — *Intégrales définies relatives aux fonctions cylindriques.* (14 p.)

Hankel donne les valeurs de diverses intégrales définies, dans lesquelles les fonctions cylindriques I^n et Y^n de première et de seconde espèce entrent sous le signe $\int$; citons, par exemple, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{n+h} \frac{Y^n(ax) - \pi i I^n(ax)}{(x^2 - r^2)^{m+1}} dx,$$

dont la valeur est

$$\frac{\pi i}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^m r^{n+h-1}[Y^n(ar) - \pi i I^n(ar)],$$

en supposant que n, m, h soient des nombres entiers satisfaisant à l'inégalité

$$2(m+1) > n + h - \frac{1}{2},$$

que la partie réelle et le coefficient de la partie imaginaire de a soient positifs, ainsi que le coefficient de la partie imaginaire de r.

Quelques-unes de ces intégrales conduisent l'auteur à l'étude de cas intéressants de discontinuité. Plusieurs intégrales sont obtenues au moyen de la série hypergéométrique.

Hankel (H.). — *Sur les séries d'intégrales cylindriques analogues à la série de Fourier.* (24 p.)

Fourier avait déjà remarqué que les fonctions $I^n(x)$ de Bessel pouvaient servir à développer une fonction quelconque $f(x)$ en série analogue à celles qui procèdent suivant les cosinus et sinus des multiples d'un arc.

En désignant par k les racines réelles et positives de l'équation

$$I^n(ka) = 0,$$

on peut poser l'égalité

$$f(\xi) = \sum_k A_k I^n(k\xi),$$

où le second membre est une série indéfinie dans laquelle les coefficients sont donnés par la formule

$$A_k = \frac{2}{[a I^{n+1}(ka)]^2} \int_0^\infty x f(x) I^n(kx)\,dx.$$

Hankel s'est efforcé d'établir rigoureusement la légitimité de ces développements, comme Dirichlet l'a fait pour les séries trigonométriques : il montre que les fonctions qui peuvent se développer ainsi doivent satisfaire aux conditions que Dirichlet a données pour les fonctions qui peuvent se développer en séries trigonométriques.

NÖTHER (M.). — *Sur la théorie de la correspondance rationnelle des figures algébriques*. Deuxième Mémoire. (38 p.)

Les transformations rationnelles qui font correspondre deux figures de l'espace point par point ne sont pas, en général, directement réversibles [1] ou plutôt l'inversion ne peut avoir lieu qu'avec l'aide des équations des deux figures correspondantes. Dans l'étude de cette question, on doit étudier avec soin les éléments exceptionnels de chaque figure qui correspondent à plusieurs éléments de l'autre, et les relations entre les nombres caractéristiques de la transformation et ceux qui se rapportent aux figures elles-mêmes. Il faut aussi étudier avec détail les caractères qui permettent de reconnaître si deux figures peuvent être transformées l'une dans l'autre. Ce dernier point de vue, qui réunit les figures d'après leurs irrationnalités algébriques, est l'objet du travail actuel. Ce Mémoire est la continuation d'un autre, paru avec le même titre [2], dans lequel un critérium numérique, l'égalité du genre pour les deux figures correspondantes, était reconnu une des conditions nécessaires pour que les deux figures puissent se transformer l'une dans l'autre. Ce nombre lui-même se déduit d'une manière déterminée de l'ordre et du nombre des singularités de la figure.

Depuis, dans un Mémoire commun à l'auteur et à M. Brill [3], ont été considérés, non plus des nombres, mais des fonctions invariantes dans la théorie des transformations rationnelles, mais pour les courbes seulement. Cette conception est, dans le travail actuel, étendue aux surfaces et obtenue par la formation d'identités algébriques.

Pour une surface f du $n^{\text{ième}}$ ordre avec des courbes multiples d'ordre i et des points multiples d'ordre j, l'auteur appelle *surfaces adjointes* celles qui sont d'ordre $n-4$, qui ont pour courbe multiple d'ordre $i-1$ chaque courbe multiple d'ordre i de la surface,

---

(1) *Voir* le travail de M. DEWULF : *Sur les transformations rationnelles réciproques de l'espace* (*Bulletin*, t. V et VII).

(2) Voir *Bulletin*, t. II, p. 181.

(3) *Math. Annalen*, t. VII. *Bulletin*, t. VIII, p. 212.

et pour point multiple d'ordre $j-2$ chaque point multiple d'ordre j de la surface. *Ces surfaces adjointes d'ordre $n-4$ sont invariantes pour chaque transformation rationnelle de la surface,* en ce sens qu'à l'intersection de l'une d'elles φ_f avec f correspond une courbe qui, pour la surface transformée f', est l'intersection d'une adjointe $\varphi'_{f'}$ de f' avec f'. Il résulte de là une série de nombres invariants : d'abord le nombre p, défini auparavant comme genre et qui est ici égal au nombre des fonctions φ_f linéairement indépendantes l'une de l'autre. A ce nombre vient s'adjoindre un autre p_1, qui est le genre de la courbe variable, dans lequel f est coupé par une des adjointes φ_f, choisie parmi les plus générales. Ensuite vient un troisième nombre p_2, le nombre des points d'intersection variables de f avec deux des adjointes φ_f; mais il ne fournit aucun caractère nouveau, car on a

$$p_2 = p_1 - 1.$$

Les recherches de M. Zeuthen sur les relations numériques relatives aux transformations [1] sont reprises sous une forme différente, plus algébrique surtout, dans un but de comparaison avec les résultats obtenus par l'auteur. Le procédé géométrique de M. Zeuthen apparaît comme identique avec l'introduction successive de nouvelles variables. La transformation est composée au moyen de transformations *spéciales*, dans lesquelles il existe toujours un réseau de plans, qui se transforme linéairement en un réseau semblable dans la surface transformée.

Pour les transformations des courbes, Clebsch avait donné une démonstration simple, reproduite ici, pour la conservation du genre, qui est analogue à celle de Zeuthen. Les §§ 3 à 6 contiennent l'extension de cette démonstration aux surfaces. Des formules obtenues au moyen du passage par des transformations *spéciales,* l'une d'elles (III, chez M. Zeuthen) est le genre p. La seconde (II, Zeuthen) se distingue du critérium $12p - p_1$ par une propriété essentielle; il contient encore un terme dépendant des formules de transformation, à savoir la différence des points simples des deux surfaces qui sont les points fondamentaux de la transformation; ce

[1] *Math. Annalen.*, t. IV, p. 1. *Bulletin*, t. III, p. 327.

n'est donc pas un critérium. L'auteur montre alors que le terme numérique correspondant dans $12p - p_1$ provient de certaines courbes singulières qui peuvent se trouver sur les deux surfaces ; ce sont les courbes simples de f, par lesquelles passent d'elles-mêmes toutes les adjointes φ_f. Ces courbes sont aussi celles qui peuvent correspondre à des points simples de la surface transformée.

Après ces recherches générales en viennent quelques autres particulières : dans le § 2, une démonstration nouvelle de la conservation du genre pour les courbes planes ; dans le § 8, une démonstration analogue pour les courbes de l'espace. Dans cette dernière démonstration se trouvent considérées, pour chaque courbe C, des surfaces adjointes φ_c analogues à celles qui ont été définies plus haut pour les surfaces. Dans le § 11 sont indiqués les cas particuliers qui peuvent se présenter pour les valeurs les plus faibles de p et de p_2.

Enfin le § 13 contient une extension des résultats précédents aux figures algébriques à ∂ dimensions, pour lesquels l'auteur trouve ∂ nombres analogues aux nombres p, p_2, qu'il obtient par des considérations analogues aux précédentes.

Brill (A.). — *Sur les systèmes de courbes et de surfaces.* (5 p.)

La fécondité du *principe de correspondance* de M. Chasles, de la méthode par laquelle il parvient à déterminer le nombre de solutions d'un problème, est hors de doute ; mais, dans les questions les plus importantes, la rigueur des démonstrations laisse souvent à désirer. Depuis que M. de Jonquières a établi que le nombre de courbes d'un système ayant pour caractéristiques μ, ν, ou de surfaces d'un système ayant pour caractéristique μ, ν, ρ, qui touchent une courbe d'ordre m, de classe n, ou une surface d'ordre m, de classe n, de rang r, est $m\nu + n\mu$ ou $m\nu + n\mu + \nu\rho$, on s'est efforcé d'étendre à toutes les courbes ou à toutes les surfaces sa démonstration, qui est restreinte aux courbes et aux surfaces ne présentant aucune singularité. En partant du principe de correspondance, M. Brill parvient à établir ces deux théorèmes dans leur généralité et à donner une proposition semblable relativement au nombre de courbes dans l'espace qui touchent une surface donnée.

Krause (M.). — *Sur les discriminants des équations modulaires des fonctions elliptiques.* (16 p.)

Les racines d'une équation modulaire qui correspond à une transformation rationnelle du n^{ieme} degré, n étant un nombre impair sans diviseur carré, peuvent, comme on le sait, en introduisant la fonction φ de M. Hermite, être mises sous la forme

$$\left(\frac{2}{\delta}\right)\varphi\left(\frac{\delta\tau-16\xi}{\delta_1}\right),$$

où δ est un diviseur quelconque de n, où $\delta\delta_1 = n$, où ξ est un nombre entier plus petit que n, où enfin τ est le module primitif; M. Krause cherche pour quelles valeurs de τ deux racines deviennent égales. Ces valeurs sont racines d'une équation du second degré

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0,$$

dont les coefficients sont déterminés par certaines conditions nécessaires et suffisantes. Toutefois, le cas où P, Q, R ont avec n un diviseur commun n'est pas traité.

Neumann (C.). — *Recherches générales sur le théorème de Weber*. (12 p.)

D'après le théorème de Weber, deux petites masses électriques ε, η situées à une distance r l'une de l'autre se repoussent avec une force R donnée par la formule

$$(1)\qquad R = \varepsilon\eta\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial r} + 4A^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right),$$

où t est le temps, où $\varphi = \frac{1}{r}$, $\psi = \sqrt{r}$, où enfin A est une constante.

M. Neumann montre que les composantes rectangulaires X, Y, Z de la force R peuvent être mises sous la forme

$$X = \varepsilon\eta\left[-\frac{\partial(\varpi+\varphi)}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial(\varpi+\varphi)}{\partial x'}\right],$$

$$Y = \varepsilon\eta\left[-\frac{\partial(\varpi+\varphi)}{\partial y} + \frac{d}{dt}\frac{\partial(\varpi+\varphi)}{\partial y'}\right],$$

$$Z = \varepsilon\eta\left[-\frac{\partial(\varpi+\varphi)}{\partial z} + \frac{d}{dt}\frac{\partial(\varpi+\varphi)}{\partial z'}\right],$$

en faisant $\varpi = 2A^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$; x, y, z, x', y', z' sont les coordonnées et les composantes de la vitesse de la petite masse ε. Ces formules conduisent aux théorèmes suivants :

1° Quel que soit le mouvement des petites masses ε, η, le travail élémentaire accompli pendant le temps dt est toujours la différentielle exacte

$$\varepsilon\eta\, d(\varpi - \varphi).$$

Le théorème de Weber est, par conséquent, en harmonie avec le principe général de la conservation de l'énergie.

2° Les équations différentielles qui donnent le mouvement des petites masses ε, η peuvent, en supposant qu'il n'y ait pas de forces extérieures, être rassemblées dans l'équation

$$\delta \int [\mathfrak{T} - \varepsilon\eta(\varpi + \varphi)]\, dt = 0,$$

où $\mathfrak{T}$ est la force vive des deux petites masses. On reconnaît dans cette équation le principe d'Hamilton.

Il est utile de remarquer la différence $\varpi - \varphi$ et la somme $\varpi + \varphi$ qui entrent dans les formules précédentes. On peut appeler φ le potentiel électrostatique et ϖ le potentiel dynamique.

Enfin M. Neumann montre que le théorème de Weber se déduit du théorème de Newton, en supposant que le potentiel $\frac{\varepsilon\eta}{r}$, relatif à ce dernier théorème, met un certain temps à se transmettre d'un point à un autre.

Braun (W.). — *Sur les courbes de Lissajous.* (7 p.)

M. Braun a étudié les courbes bien connues de M. Lissajous au point de vue de la nouvelle Géométrie. Cette étude a été l'objet de sa dissertation inaugurale ; il donne ici un extrait de ses résultats. Les courbes en question appartiennent au genre $p = 0$; elles ont à l'infini un point multiple isolé, dont l'auteur étudie l'influence sur les formules de Plücker. F. K.