BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Correspondance mathématique entre Legendre et Jacobi

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 9 (1875), p. 38-47

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1875__9__38_1>

MÉLANGES.

CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE ENTRE LEGENDRE ET JACOBI (¹).

(Suite.)

Jacobi à Legendre.

Königsberg, le 12 janvier 182

MONSIEUR,

Je chercherais en vain à vous décrire quels furent mes ments en recevant votre Lettre du 30 novembre et en même le numéro du *Globe*, qui contient la Communication que vo bien voulu faire à l'Académie des Sciences de mes essais. sentis confus, accablé de cet excès des bontés que vous m'ave et du sentiment que jamais de vie je n'en saurai mériter de pa Comment vous rendre grâce? Quelle satisfaction pour m l'homme que j'admirais, tout en dévorant ses écrits, a bie accueillir mes travaux avec une bonté si rare et si précieus en manquant de paroles qui soient de dignes interprètes sentiments, je n'y saurai répondre qu'en redoublant mes e pousser plus loin les belles théories dont vous êtes le créate

---

(¹) Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 287.

J'avais déjà appris, il y a quelques mois, que vous avez publié un nouvel Ouvrage sur les *Fonctions elliptiques,* en deux volumes. Aussitôt j'ai donné à un libraire de Berlin l'ordre de me le faire parvenir; mais, à mon grand dépit, je ne l'ai pas encore reçu. J'attends donc avec une impatience extrême le cadeau brillant que vous m'en avez voulu faire, et pour lequel je vous rends mille grâces.

Depuis ma dernière Lettre, des recherches de la plus grande importance ont été publiées sur les *Fonctions elliptiques,* de la part d'un jeune géomètre, qui peut-être vous sera connu personnellement. C'est la première partie d'un Mémoire de M. Abel, à Christiania, qu'on m'a dit avoir été à Paris il y a deux ou trois ans, inséré dans le second cahier du second volume du *Journal des Mathématiques pures et appliquées,* publié à Berlin par M. Crelle. La continuation doit avoir été publiée dans ces jours dans le cahier troisième dudit Journal; mais elle ne m'est parvenue pas encore. Comme je suppose que ce Mémoire ne vous soit pas encore connu, je vous en veux raconter les détails les plus intéressants. Mais, pour plus de commodité, j'avancerai le mode de notation dont je me sers ordinairement.

Si l'on pose $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1+x^2\sin^2\varphi}} = \Xi$, l'angle φ étant l'amplitude de Ξ, je le désigne par $\operatorname{am}\Xi$; K étant la fonction entière $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}}$, je mets, au lieu de $\operatorname{am}(K-\Xi)$, cette autre expression $\operatorname{coam}\Xi$ (c'est-à-dire *complementi amplitudo*). Je désigne, avec vous,

$$\sqrt{1-x^2\sin^2(\operatorname{am}\Xi)} = \frac{d\operatorname{am}\Xi}{d\Xi} \quad \text{par} \quad \Delta\operatorname{am}\Xi.$$

Le module sera mis à côté, si on le juge convenable; toutes les fois qu'il sera supprimé dans le suivant, les formules se rapportent au module x. Du reste, je désignerai le complément de x par x' et la fonction entière qui répond à x' par K'.

M. Abel commence par donner l'expression analytique de toutes les racines des équations élevées desquelles dépend la division des fonctions elliptiques. En effet, soit $\sin\varphi = i\operatorname{tang}\psi$, i étant $\sqrt{-1}$, on aura

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}=\frac{i\,d\psi}{\sqrt{1-\varkappa'^2\sin^2\psi'}},$$

d'où l'on tire

$$\sin\operatorname{am}(i\Xi,\varkappa)=i\operatorname{tang}\operatorname{am}(\Xi,\varkappa'),$$

théorème fondamental de M. Abel.

Je remarque encore les formules suivantes :

$$\cos\operatorname{am}(i\Xi,\varkappa)=\operatorname{séc}\operatorname{am}(\Xi,\varkappa'),$$

$$\Delta\operatorname{am}(i\Xi,\varkappa)=\frac{\Delta\operatorname{am}(\Xi,\varkappa')}{\cos\operatorname{am}(\Xi,\varkappa')}=\operatorname{coséc}\operatorname{coam}(\Xi,\varkappa').$$

Aussi on aura

$$\sin\operatorname{am}(2iK',\varkappa)=0,$$

$$\sin\operatorname{am}(\Xi+iK')=\frac{1}{\varkappa\sin\operatorname{am}\Xi},$$

$$\cot\operatorname{am}(\Xi+iK')=-i\Delta\operatorname{am}\Xi,$$

$$\Delta\operatorname{am}(\Xi+iK')=-i\cot\operatorname{am}\Xi,\ldots.$$

Comme on a

$$\operatorname{tang}\operatorname{am}(2m'K',\varkappa')=0,$$

m' étant un nombre entier, on aura aussi

$$\sin(2m'iK',\varkappa)=0,$$

d'où suit qu'on aura en général

$$\sin\operatorname{am}(\Xi+4mK+4m'iK')=\sin\operatorname{am}\Xi,$$

m et m' étant des nombres positifs ou négatifs. On voit donc que les racines de l'équation élevée qui sert à la division de la fonction elliptique Ξ en n parties seront de la forme

$$\sin\operatorname{am}\frac{\Xi+4m'\,K+4m'\,iK}{n},$$

formule qui embrasse toutes les racines au nombre de n^2, si l'on donne à m, m' successivement les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

M. Abel ramène ensuite la division d'une fonction elliptique quelconque Ξ à la division de la fonction entière K. En effet, soient α, β des racines quelconques de l'équation $x^n = 1$, l'expression

$$\left(\Sigma\alpha^m\beta^{m'} \sin \mathrm{am} \frac{\Xi + 4m\mathrm{K} + 4m'\mathrm{K}'}{n}\right)^n \quad (^1),$$

où l'on donne à m, m' toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$, ne changera pas si l'on met, au lieu de $\sin \mathrm{am} \frac{\Xi}{n}$, une autre racine quelconque $\sin \mathrm{am} \frac{\Xi + 4\mu\mathrm{K} + 4\mu' i\mathrm{K}'}{n}$. Cette expression sera donc symétrique par rapport à ces racines et pourra, par conséquence, être exprimée par

$$\sin \mathrm{am} \Xi \quad (^2).$$

A présent, si l'on donne à α, β toutes leurs valeurs possibles, ce qui donne n^2 combinaisons, on tire de là les valeurs de toutes les racines. M. Abel suit une autre méthode, qui, si je ne me trompe pas, rend le problème plus compliqué qu'il n'est en lui-même.

La division de la fonction entière, laquelle dépend en général d'une équation du degré $\frac{n^2-1}{2}$, est ramenée à une équation du degré $n+1$, n étant un nombre premier. En effet, soient

$$\frac{4\mu\mathrm{K} + 4\mu'\mathrm{K}'}{n} = \omega,$$

g une racine primitive de la congruence $x^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, $\varphi(\omega)$ une fonction trigonométrique quelconque de l'amplitude ω, α une racine de l'équation $x^{n-1} = 1$; on y parvient en considérant l'expression

$$[\varphi(\omega) + \alpha\varphi(g\omega) + \alpha^2\varphi(g^2\omega) + \ldots + \alpha^{n-3}\varphi(g^{n-2}\omega)]^{n-1},$$

symétrique en $\varphi(\omega)$, $\varphi(g\omega)$, $\varphi(g^2\omega), \ldots,$ $\varphi(g^{n-2}\omega)$. Or les fonctions symétriques de ces quantités ne sauront avoir que

---

(1) On entend par Σ la somme des expressions formees de ladite manière.

(2) Il faut ajouter : Et par des quantites constantes, mais irrationnelles, de la forme $\sin \mathrm{am} \frac{4m\mathrm{K} + 4m' i\mathrm{K}'}{n}$.

des valeurs différentes au nombre $n+1$, qui répondent à $\mu=0$, $\mu'=1$, $\mu=1$; $\mu'=0$, $\mu'=1,2,3,\ldots,n-1$. Donc elles seront données au moyen d'une équation algébrique du degré $n+1$. Je vais ajouter à présent les propres paroles de M. Abel, en remarquant qu'il considère dans son Mémoire les fonctions elliptiques sous la forme $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}$.

« Donc, en dernier lieu, la résolution de l'équation $P_n=0$ est réduite à celle d'une seule équation de degré $n+1$; mais cette équation ne paraît pas en général être résoluble algébriquement. Néanmoins, on peut la résoudre complétement dans plusieurs cas particuliers, par exemple lorsque $e=c$, $e=c\sqrt{3}$, $e=c(2\pm\sqrt{3})$, etc. Dans le cours de ce Mémoire (¹), je m'occuperai de ces cas, dont le premier est surtout remarquable, tant par la simplicité de la solution que par sa belle application dans la Géométrie. En effet, entre autres, je suis parvenu à ce théorème : *On peut diviser la circonférence entière de la lemniscate, par la règle et le compas seuls, en m parties égales, si m est de la forme* 2^n *ou* 2^n+1, *le dernier nombre étant en même temps premier ; ou bien si m est un produit de plusieurs nombres de ces deux formes*. Ce théorème est, comme on voit, précisément le même que celui de M. Gauss, relativement au cercle. »

Connaissant les racines des équations mentionnées, M. Abel les résout en facteurs; ensuite, dans les formules qui en résultent, il pose $n=\infty$, d'où il tire des expressions très-remarquables; mais cela n'a plus aucune difficulté.

Vous m'avez permis, Monsieur, de vous communiquer l'analyse dont je me sers. Une démonstration rigoureuse du théorème général concernant les transformations s'imprime à présent dans le Journal de M. Schumacher; elle vous sera envoyée aussitôt qu'elle sera imprimée. Mes recherches ultérieures sont encore loin d'être finies; cependant j'en embrasserai une partie dans un Mémoire que je crois pouvoir publier sous peu. Il s'y trouvera, entre autres, un résultat curieux qui m'a d'abord frappé un peu; c'est le cas suivant : Si l'on peut transformer un module $\varkappa$ dans un autre λ, on a entre

(¹) Qui n'est pas encore publie.

ces deux modules une équation algébrique du degré $n+1$, si la transformation se rapporte au nombre n, qu'on suppose être premier. Ces équations symétriques en $\varkappa$ et λ sont, par exemple, pour $n=3$, $n=5$,

$$u^4 - v^4 \pm 2uv(1-u^2v^2) = 0,$$
$$u^6 - v^6 + 5u^2v^2(u^2-v^2) \pm 4uv(1-u^4v^4) = 0,$$

où l'on a supposé $u=\sqrt[4]{\varkappa}$, $v=\sqrt[4]{\lambda}$. Il paraît remarquable que ces équations, qu'on pourrait appeler *équations modulaires*, ont leur forme la plus simple entre les quatrièmes racines des modules. Or toutes ces équations algébriques en nombre infini satisfont à une même équation différentielle du troisième degré, savoir :

$$\begin{aligned}3(d\varkappa^2 d^2\lambda^2 - d\lambda^2 d^2\varkappa^2) - 2\,d\varkappa\, d\lambda\,(d\varkappa\, d^3\lambda - d\lambda\, d^3\varkappa)\\ + d\varkappa^2 d\lambda^2\left[\left(\frac{1+\varkappa^2}{\varkappa-\varkappa^3}\right)^2 d\varkappa^2 - \left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda-\lambda^3}\right)^2 d\lambda^2\right] = 0,\end{aligned}$$

où l'on n'a supposé constante aucune différentielle. Aussi j'ai trouvé que, dans certains cas, on retombe sur le même module, de sorte que la transformation devient multiplication ; ainsi $\varkappa$, étant $\sqrt{\frac{1}{2}}$, on aura deux racines de l'équation

$$u^6 - v^6 + 5u^2v^2(u^2-v^2) - 4uv(1-u^4v^4) = 0,$$

égales à $(1\pm i)u^5$, d'où l'on tire $v^8=\lambda^2=\varkappa^2=\frac{1}{2}$. Ce sera, dans les cas où le nombre n est la somme de deux carrés, $n=a^2+4b^2$, $\varkappa$ étant $\sqrt{\frac{1}{2}}$; la fonction elliptique se trouve alors multipliée par $a\pm 2bi$. On remarque des choses semblables dans les modules qui sont liés d'après une échelle quelconque avec $\varkappa=\sqrt{\frac{1}{2}}$. C'est un genre de multiplication qui n'a pas son analogie dans les arcs de cercle. Je suis très-curieux de savoir votre avis sur ma démonstration, laquelle à la vérité est un peu compliquée. La nouvelle d'une troisième édition de la *Théorie des nombres* m'a charmé. Je n'ai travaillé sur cette science que très-peu de temps ; quand je m'aurai pris la liberté de vous communiquer un petit Mémoire qui va être publié sur la *Théorie des résidus*, vous verrez que mes idées ne méritent pas la place brillante que vous leur avez offerte. Aussi les recherches sur les fonctions elliptiques doivent être en quelque sorte finies avant qu'elles soient dignes de former un Supplément à un Ouvrage sans doute parfait dans toutes ses parties.

Adieu, Monsieur, daignez recevoir les respects les plus profonds que m'inspirent la supériorité de vos lumières et la générosité de vos sentiments. Jamais de ma vie je n'oublierai cette bonté de père avec laquelle vous avez voulu m'encourager dans la carrière des sciences.

Votre dévoué serviteur,

C.-G.-J. Jacobi.

P.-S. Le troisième cahier du *Journal de Crelle*, que je viens de recevoir, ne contient pas encore la suite du Mémoire de M. Abel.

Legendre à Jacobi.

Paris, le 9 février 1828.

Monsieur,

Lorsque j'ai reçu votre lettre du 12 janvier, M. Schumacher m'avait déjà envoyé le n° 127 de son Journal, où se trouve votre démonstration du théorème sur les transformations des fonctions elliptiques. J'ai pris infiniment de plaisir à votre démonstration, où brille votre sagacité et que je trouve fort courte relativement à la grande étendue de son objet; elle m'a suggéré quelques remarques dont j'ai envoyé un précis à M. Schumacher, pour être imprimé dans son Journal, suivant le désir qu'il m'en avait témoigné. La manière dont vous passez de la valeur de $1 - y$ à celle de y, décomposée également en facteurs, m'a paru très-élégante; mais ce qui, à mes yeux, fait le grand mérite de votre démonstration, c'est l'heureuse idée que vous avez eue de substituer à la fois $\frac{1}{\varkappa x}$ à x et $\frac{1}{\lambda y}$ à y. Cette double substitution, qui satisfait à l'équation différentielle. doit satisfaire aussi aux intégrales qui la représentent; par ce moyen, vous pouvez vérifier d'un trait de plume la valeur $y = \frac{U}{V}$, et vous trouvez pour seule condition la valeur du module λ exprimée en fonction du module donné $\varkappa$; dès lors le théorème est démontré dans toute sa généralité, sans aucun calcul pénible et par une sorte d'enchantement; vous verrez dans ma Note que cette belle démonstration m'aurait paru plus satisfaisante si vous y eussiez joint quelques détails sur la série des idées qui vous ont conduit à la valeur supposée pour $1-y$; vous pourrez avoir égard à mon observation dans les autres parties de vos recherches qui vous restent à publier. J'ai indiqué aussi une vérification de votre théorème qu'il serait curieux d'effectuer, et qui mettrait dès à présent cette découverte dans tout son jour. Par vos formules, il est facile de trouver la valeur de la fonction T en facteurs; ensuite l'idée vient naturellement de faire les substitutions dans l'équation

$$\frac{dU}{U\,dx} - \frac{dV}{V\,dx} = \frac{1}{M}\,\frac{T}{UV},$$

afin de voir si elle est satisfaite. L'équation mise sous cette forme se décompose dans les deux membres en fractions partielles dont les dénominateurs sont les facteurs binômes des fractions U et V, et il est facile d'avoir l'expression générale du numérateur correspondant à un facteur quelconque de U, et celle du numérateur correspondant à un facteur quelconque de V.

L'identité de l'équation fournira donc deux conditions générales qui devront être satisfaites. Depuis l'envoi de ma Note, j'ai observé que ces deux conditions se réduisent à une seule, que je présente ici sous la forme la plus simple. Soit α_m l'amplitude telle que $F(\alpha_m) = \frac{m}{2n+1}K$; la condition dont il s'agit, et qui doit avoir lieu pour toute valeur de i depuis 1 jusqu'à n, est celle-ci :

$$\begin{aligned}
&2\cos\alpha_{2i}\left(\frac{\sin^2\alpha_{2i}}{\sin^2\alpha_2}-1\right)\left(\frac{\sin^2\alpha_{2i}}{\sin^2\alpha_4}-1\right)\cdots\left(\frac{\sin^2\alpha_{2i}}{\sin^2\alpha_{2i-2}}-1\right)\\
&\quad\times\left(1-\frac{\sin^2\alpha_{2i}}{\sin^2\alpha_{2i+2}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\alpha_{2i}}{\sin^2\alpha_{2n}}\right)\\
&=(1-\varkappa^2\sin^2\alpha_{2i}\sin^2\alpha_1)(1-\varkappa^2\sin^2\alpha_{2i}\sin^2\alpha_3)\\
&\quad\times(1-\varkappa^2\sin^2\alpha_{2i}\sin^2\alpha_5)\ldots(1-\varkappa^2\sin^2\alpha_{2i}\sin^2\alpha_{2n-1}).
\end{aligned}$$

Cette équation doit être vraie d'après votre démonstration, mais il serait intéressant de la déduire des premiers principes de la théorie des fonctions elliptiques. C'est une recherche que je laisse à votre sagacité et qui me paraît assez importante, puisqu'elle confirmera d'une manière invincible l'exactitude de votre théorème. Je suis parvenu à cette équation au moyen d'un lemme que j'ai déduit de vos formules et qui, dans votre notation, serait exprimé ainsi :

$$\frac{1-\dfrac{x^2}{\sin^2\left(\operatorname{coam}\dfrac{2mK}{2n+1}\right)}}{1-\varkappa^2x^2\sin^2\left(\operatorname{am}\dfrac{2mK}{2n+1}\right)}=\frac{\operatorname{cosam}\left(\Xi+\dfrac{2mK}{2n+1}\right)\operatorname{cosam}\left(\Xi-\dfrac{2mK}{2n+1}\right)}{\cos\left(\operatorname{am}\dfrac{2mK}{2n+1}\right)}.$$

Je crois voir, en écrivant ceci, que ce même lemme donnera assez facilement la démonstration de mon équation.

J'avais déjà connaissance du beau travail de M. Abel inséré dans le *Journal de Crelle;* mais vous m'avez fait beaucoup de plaisir de m'en donner une analyse dans votre langage qui est plus rapproché du mien. C'est une grande satisfaction pour moi de voir deux jeunes géomètres, comme vous et lui, cultiver avec succès une branche d'Analyse qui a fait si longtemps l'objet de mes études favorites et qui n'a point été accueillie dans mon propre pays comme elle le méritait. Vous vous placez par ces travaux au rang des meilleurs analystes de notre époque; nous voyons au contraire ici les talents peu nombreux qui y restent se livrer à des recherches vagues qui ne laisseront que de faibles traces dans l'histoire. Ce n'est pas assez d'avoir du talent, il faut savoir choisir l'objet dont on doit s'occuper.

J'attends avec impatience la suite des recherches que vous ferez paraître dans le Journal de M. Schumacher, et particulièrement les relations que vous avez trouvées entre deux modules qui peuvent se transformer l'un dans l'autre. Vous me donnez, pour le cas $n=3$, l'équation

$$u^4-v^4\pm 2uv(1-u^2v^2)=0,$$

à laquelle j'ai ajouté le double signe $\pm$; j'ai, pour le même cas, donné dans mon *Traité* l'équation $1=\sqrt{cc_1}+\sqrt{bb_1}$ qui revient au même; mais vous êtes allé beaucoup plus loin.

Je ne m'occupe pas encore de ma troisième édition de la *Théorie des nombres;* ainsi vous avez tout le temps de me faire part de ce que vous aurez imprimé sur les résidus de différents degrés. J'ai déjà approuvé beaucoup votre démonstration de la loi de réciprocité, à laquelle pourtant il faut ajouter quelques développements; je pourrais vous indiquer dans cette partie des objets de recherche qui ont une difficulté digne de vous; mais j'aime mieux vous donner le conseil de ne pas donner trop de temps aux recherches de cette nature. Elles sont très-difficiles et ne mènent souvent à aucun résultat.

Je suis étonné de ce que vous n'avez pas encore reçu l'exemplaire que M. l'ambassadeur, le baron de Werther, avait promis de vous faire passer. Il faut le réclamer à Berlin, si vous éprouvez de nouveaux retards.

Agréez, Monsieur, l'assurance de mon estime bien sincère et de mon entier dévouement.

LEGENDRE.

Je vous prie de ne pas prendre la peine d'affranchir, quand vous m'écrivez : il ne faut pas que ma correspondance vous soit onéreuse.

(*A suivre.*)