Ed. Dewulf

Note sur un théorème de M. G. Bruno

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 7 (1874), p. 142-143

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1874__7__142_0>

MÉLANGES.

NOTE SUR UN THÉORÈME DE M. G. BRUNO [1].

On donne dans l'espace deux formes projectives : une ponctuelle A_1, A_2, A_3,... sur une droite a, et un faisceau de droites b_1, b_2, b_3,..., de centre B dans un plan β. D'un point quelconque A_n, de a on abaisse une perpendiculaire $A_n B_n$ sur le rayon correspondant b_n; le lieu géométrique Σ de toutes les perpendiculaires $A_n B_n$ est une surface du quatrième ordre dont la trace sur le plan β se compose d'une droite et d'une courbe du troisième ordre.

La perpendiculaire $A_n B_n$ est l'intersection du plan perpendiculaire à b_n mené par A_n, et du plan déterminé par le rayon b_n et la droite BA_n. Le premier de ces plans enveloppe un cylindre parabolique dont les génératrices sont perpendiculaires au plan β ; le plan b_n, BA_n enveloppe un cône du second degré, dont le sommet est B. La surface Σ est donc aussi le lieu des intersections des plans tangents correspondant au cylindre parabolique et au cône du second ordre. L'application du principe de correspondance à la recherche du nombre des points où Σ coupe une droite quelconque montre que cette surface est du quatrième ordre.

Si nous nommons b le rayon du faisceau B qui correspond au point $a\beta$, la perpendiculaire abaissée du point $a\beta$ sur b appartient tout entière à la trace de Σ sur β : cette trace se décompose donc en une courbe du troisième ordre et une droite.

Supposons que le rayon b_p du faisceau B qui est perpendiculaire au plan qui projette a sur β corresponde au point à l'infini de a. Toutes les parallèles à a, qui s'appuient sur b_p, sont perpendiculaires à cette droite et passent au point à l'infini de a; elles forment un plan qui appartient tout entier à Σ. Cette surface se décompose donc en un plan et une surface du troisième ordre, dont la trace sur β se compose d'une droite et d'une conique.

Si nous supposons que le rayon du faisceau B, qui correspond au point $a\beta$ de a, soit le rayon B, $a\beta$, le plan perpendiculaire à la droite B, $a\beta$ au point $a\beta$ appartient tout entier à la surface Σ, qui se décompose en un plan et une surface du troisième ordre.

---

[1] Voir *Bulletin*, t. V, p. 272.

Si le rayon B, $a\beta$ correspond au point $a\beta$ et si, en même temps, le rayon b_p, perpendiculaire au plan qui projette a sur β, correspond au point à l'infini de a, la surface Σ se décompose en un système de deux plans et une surface du second ordre. Mais alors les plans menés par A_n, perpendiculairement aux rayons correspondants b_n, se coupent tous suivant une droite c perpendiculaire à β, et le lieu des points B_m est un cercle décrit sur ($c\beta$, B) comme diamètre. La surface Σ peut être considérée comme engendrée par une droite s'appuyant sur le cercle $c\beta$, B et sur les directrices rectilignes a et c qui s'appuient toutes les deux sur le cercle, et dont l'une est perpendiculaire à son plan ; la surface du second ordre est donc un hyperboloïde gauche, dont les sections parallèles à β sont circulaires.

Supposons maintenant que le centre B du faisceau coïncide avec le point $a\beta$, le rayon b qui correspond à $a\beta$ passe toujours par ce point et la surface Σ se décompose en une surface du troisième ordre et un plan. Ce résultat peut s'énoncer ainsi, en admettant que le plan β soit horizontal, ce qui n'enlève rien à la généralité de la question : si des différents points d'une génératrice a d'une surface gauche, on mène les lignes de plus grande pente des plans tangents correspondants, le lieu géométrique de ces droites se compose d'un plan et d'une surface du troisième ordre.

Supposons que le centre B du faisceau b coïncide avec $a\beta$ et qu'en même temps le rayon b_p perpendiculaire au plan projetant de a sur β corresponde au point à l'infini de a, le lieu Σ se décompose en un système de deux plans et un hyperboloïde réglé. Si a est une génératrice d'une surface gauche, le plan ab_p est le plan tangent à la surface gauche au point à l'infini de a et, par suite de notre hypothèse, le plan central de a est perpendiculaire au plan β, c'est-à-dire vertical, et nous trouvons ainsi que : si des différents points d'une génératrice a d'une surface gauche, dont le plan austral est vertical, on mène les lignes de plus grande pente des plans tangents correspondants, le lieu géométrique de ces droites se compose d'un système de deux plans et d'un hyperboloïde gauche, dont les sections horizontales et les sections perpendiculaires à a sont circulaires.

ED. DEWULF,
Commandant du Génie.