Hermite

Sur une équation transcendante

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 4 (1873), p. 61-64

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1873__4__61_0>

MÉLANGES.

SUR UNE ÉQUATION TRANSCENDANTE;

PAR M. HERMITE.

Soit $f(x)$ une fonction rationnelle de la formule suivante :

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{L}{x-l},$$

les quantités $a, b, \ldots, l$ étant toutes réelles, et les coefficients A, $B, \ldots, L$ réels et positifs; je dis en premier lieu que l'équation

$$\log \alpha \frac{1+x}{1-x} - f(x) = 0,$$

où α est une constante positive, possède $n+1$ racines réelles, n désignant le nombre des quantités $a, b, \ldots l$, comprises entre -1 et $+1$. Soit, en effet, pour un instant,

$$F(x) = \log \alpha \frac{1+x}{1-x} - f(x),$$

et désignons par g et h deux termes consécutifs de la série

$$a, \quad b, \quad c, \ldots, \quad l,$$

en supposant les termes rangés par ordre croissant de grandeur, de sorte que la fonction rationnelle $f(x)$ soit finie et continue lorsque la variable est comprise entre les limites g et h.

Cela étant, la fonction $\log \alpha \frac{1+x}{1-x}$, et, par suite, $F(x)$ sera elle-même réelle et continue entre ces limites, si on les suppose inférieures en valeur absolue à l'unité; or, ayant pour ε infiniment petit et positif

$$F(g+\varepsilon) = -\frac{G}{\varepsilon}, \quad F(h-\varepsilon) = +\frac{H}{\varepsilon},$$

c'est-à-dire deux résultats de signes contraires, nous en concluons pour l'équation proposée l'existence d'une racine réelle comprise entre g et h. J'ajoute qu'il n'y en a qu'une; car, en prenant la dérivée de $F(x)$, on obtient cette expression positive pour toutes les valeurs de x entre -1 et $+1$, savoir

$$F'(x) = \frac{2}{1-x^2} + \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{L}{(x-l)^2},$$

de sorte que $F(x)$ va continuellement en croissant depuis $-\frac{G}{\varepsilon}$ jusqu'à $+\frac{H}{\varepsilon}$, et ne s'annule par conséquent qu'une seule fois. En désignant donc par n le nombre des quantités $a, b, \ldots, l$, qui sont comprises entre -1 et $+1$, nous prouvons ainsi que l'équation proposée possède $n-1$ racines réelles; mais ayant

$$F(-1+\varepsilon) = \log\alpha \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon},$$

quantité infiniment grande et négative, on voit de plus qu'il existe encore une racine comprise entre -1 et le terme le plus voisin de la suite $a, b, \ldots, l$; enfin une dernière racine se trouve pareillement entre le terme le plus voisin de l'unité et l'unité, attendu que l'expression

$$F(1-\varepsilon) = \log\alpha \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$$

est infiniment grande et positive.

En second lieu, je dis que l'équation proposée ne peut admettre aucune racine imaginaire dont le module soit inférieur à l'unité. Soit, en effet, $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ une telle racine; on trouvera d'abord

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \frac{A(\alpha - a)}{(\alpha - a)^2 + \beta^2} + \frac{B(\alpha - b)}{(\alpha - b)^2 + \beta^2} + \ldots$$
$$- \beta\sqrt{-1}\left[\frac{A}{(\alpha - a)^2 + \beta^2} + \frac{B}{(\alpha - b)^2 + \beta^2} + \ldots\right].$$

Pour calculer ensuite la valeur, que l'on sait être unique et entièrement déterminée, de l'expression $\log\frac{1+x}{1-x}$, lorsque, conformément à la supposition faite, le module de $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ est inférieur à l'unité, j'emploierai la relation, aisée à vérifier,

$$\log\frac{1+x}{1-x}=\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{\frac{1}{x}-z}.$$

Or on en déduit, en faisant, pour un moment,

$$\frac{1}{\rho}=\alpha^2+\beta^2,$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{\frac{1}{x}-z}=\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{\rho(\alpha-\beta\sqrt{-1})-z}$$

$$=\int_{-1}^{+1}\frac{(\rho\alpha-z)dz}{(\rho\alpha-z)^2+\beta^2}+\rho\beta\sqrt{-1}\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{(\rho\alpha-z)^2+\beta^2},$$

et l'on voit ainsi que le coefficient de $\beta\sqrt{-1}$ est la quantité essentiellement positive

$$\rho\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{(\rho\alpha-z)^2+\beta^2}.$$

Ayant donc, pour ce même coefficient dans l'expression de

$$-f(\alpha+\beta\sqrt{-1}),$$

une quantité qui est également positive, à savoir

$$\frac{A}{(\alpha-a)^2+\beta^2}+\frac{B}{(\alpha-b)^2+\beta^2}+\ldots,$$

nous reconnaissons que la partie imaginaire de $F(\alpha+\beta\sqrt{-1})$ ne peut jamais s'évanouir, de sorte que notre équation n'admet, comme nous voulions l'établir, que des racines réelles.

La relation précédemment employée, à savoir

$$\log\frac{1+x}{1-x}=\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{\frac{1}{x}-z},$$

donne lieu à cette remarque que, en posant

$$\frac{1+x}{1-x}=a,$$

d'où

$$\log a = \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\frac{a-1}{a+1} - z},$$

celle des valeurs en nombre infini du logarithme qui se trouve ainsi représentée par l'intégrale définie est l'intégrale $\int_1^a \frac{dz}{z}$, en supposant que la variable z décrive la ligne droite joignant les deux points qui ont pour affixes 1 et a.