

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

R. LIPSCHITZ

**Extrait de six mémoires publiés dans le Journal
de mathématiques de Borchardt**

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 4
(1873), p. 142-157

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1873__4__142_1>

© Gauthier-Villars, 1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EXTRAIT
DE SIX MÉMOIRES PUBLIÉS DANS LE JOURNAL DE MATHÉMATIQUES DE BORCHARDT;
PAR M. R. LIPSCHITZ.
(Analyse rédigée par l'Auteur.)

II.

*Suite des recherches sur les fonctions entières homogènes
de n différentielles ⁽¹⁾.*

Pour l'étude de la *classe de formes* à laquelle appartient une forme donnée $f(dx)$, du $p^{\text{ième}}$ degré, il est bon de combiner avec la conception *du type normal* $\varphi(du)$, défini par l'équation (20), I ⁽²⁾, les considérations introduites dans le calcul des variations par Ha-

⁽¹⁾ *Journal de Borchardt*, t. 72, p. 1-56.

⁽²⁾ C'est-à-dire l'équation (20) du Mémoire I.

milton dans le travail déjà cité, et par Jacobi dans son Mémoire : *Ueber die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung*, etc. (*Journal de Crelle*, t. 17, p. 97-162), et dans une série de travaux postérieurs. Partons du problème de la variation de l'intégrale (9), I,

$$\Theta = \int_{t_0}^t f(x') dt,$$

et supposons le système d'équations différentielles (11), I, intégré de la manière indiquée ci-dessus. La valeur de l'intégrale Θ , considérée comme fonction des éléments $x_a^{(0)}$, $x_a'^{(0)}$, t , donnera pour sa variation complète

$$(1) \quad \delta\Theta = -(p-1)f(x')\delta t + \sum_a \frac{\partial f(x')}{\partial x_a'} \delta x_a - \sum_a \frac{\partial f_0(x'^{(0)})}{\partial x_a'^{(0)}} \delta x_a^{(0)}.$$

Les valeurs d'intégration sont des fonctions des seuls éléments $x_a^{(0)}$ et des *variables normales*

$$(t - t_0)x_b'^{(0)} = u_b,$$

introduites par la formule (18), I. Nous admettrons maintenant que le déterminant fonctionnel

$$(2) \quad \left| \frac{\partial x_a}{\partial u_b} \right|$$

ne s'annule pas, et que les x_a sont des *fonctions* des u_b , *indépendantes entre elles*. Le déterminant (2) prend pour valeur l'unité, toutes les fois que l'on a les équations $x_a = x_a^{(0)}$, et l'hypothèse en question peut être satisfaite lorsque, dans la *variété* du premier ordre, déterminée par l'intégration de (11), I, on ne fait pas varier le système de valeurs x_a au delà d'une certaine limite à partir du système initial $x_a^{(0)}$. On peut alors, réciproquement, considérer les quantités u_b comme des fonctions des éléments $x_a^{(0)}$ et $x_a^{(1)}$. Les

(1) Relativement aux conditions qui doivent être satisfaites ici, voir le Mémoire intitulé : *Beiträge zur Theorie der Umkehrung eines Functionensystems* (*Nachrichten der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen*, année 1870, 12 nov.; publié en italien dans les *Annali di Matematica*, 2^e série, t. IV, fasc. III, p. 231-259). Les considérations établies dans ce Mémoire sur les *variétés* des différents ordres ne se rapportent pas, comme on le fait observer dans l'art. 3, à une forme de n différentielles, et se distinguent par là, dès le principe, de celles dont il est actuellement question.

combinaisons

$$(3) \quad (t - t_0) x'_b = v_b,$$

qui satisfont aux équations

$$(3^*) \quad v_b = \frac{\partial x_b}{\partial u_1} u_1 + \dots + \frac{\partial x_b}{\partial u_n} u_n,$$

sont des fonctions des mêmes quantités. De (13), I, résulte l'équation

$$(4) \quad f(v) = f_0(u),$$

et cette fonction dépend, en vertu de l'équation (8*), I,

$$R = \sqrt[p]{p f_0(u)},$$

de l'intégrale R, définie par (8), I. En multipliant actuellement l'équation (8) par le facteur $(t - t_0)^{p-1}$, on obtient l'expression suivante de la différentielle exacte de la fonction $f(v) = f_0(u)$ qui dépend des éléments x_a et $x_a^{(0)}$,

$$(5) \quad \delta f(v) = \delta f_0(u) = \sum_a \frac{\partial f(v)}{\partial v_a} \delta x_a - \sum_a \frac{\partial f_0(u)}{\partial u_a} \delta x_a^{(0)}.$$

Appelons maintenant l'attention sur le type normal $\varphi(du)$, et en particulier sur la différence

$$(6) \quad \varphi(du) - f_0(du).$$

En supposant qu'une forme $g(dy)$ appartient à la même classe que la forme $f(dx)$, on a établi précédemment les équations (16), I,

$$u_a = c_{a,1}^{(0)} z_1 + \dots + c_{a,n}^{(0)} z_n,$$

et (23*), I,

$$\varphi(du) - f_0(du) = \chi(dz) - g_0(dz).$$

De ces équations il résulte que, si l'on développe la différence (6) suivant les puissances positives des variables normales u_a , et la différence $\chi(dz) - g_0(dz)$ suivant les puissances positives des variables normales z_k , les sommes des termes du $q^{\text{ème}}$ ordre dans les deux développements donneront respectivement les équations

$$(7) \quad [\varphi(du) - f_0(du)]_q = [\chi(dz) - g_0(dz)]_q.$$

On voit facilement que la différence (6) s'annule, lorsqu'on y remplace chaque différentielle du_b par le u_b correspondant. Or l'application de l'équation (5) conduit à ce théorème, que *chacune des n dérivées partielles de la différence (6), par rapport aux différentielles du_a , s'annule pareillement, lorsqu'on remplace dans cette dérivée chaque différentielle du_b par le u_b correspondant*. La même chose a lieu pour l'expression

$$(8) \quad f_0(du) - [d^p \sqrt[p]{f_0(du)}]^p,$$

et par suite aussi pour l'expression

$$(9) \quad \varphi(du) - [d^p \sqrt[p]{\varphi_0(u)}]^p.$$

Le quotient des deux déterminants relatifs aux formes $\varphi(du)$ et $f_0(du)$,

$$(10) \quad \frac{\left| \frac{\partial^2 \varphi(du)}{\partial du_a \partial du_b} \right|}{\left| \frac{\partial^2 f_0(du)}{\partial du_a \partial du_b} \right|},$$

lorsqu'on y remplace chaque différentielle du_c par le u_c correspondant, se change dans l'expression

$$(11) \quad \frac{\left| \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v_a \partial v_b} \right| \cdot \left| \frac{\partial x_a}{\partial u_b} \right|^2}{\left| \frac{\partial^2 f_0(u)}{\partial u_a \partial u_b} \right|},$$

laquelle peut être regardée comme une fonction des éléments x_a et $x_a^{(0)}$. De l'équation (5) résulte cette proposition : que *cette fonction n'est pas altérée, lorsqu'on y échange tous les x_a avec les $x_a^{(0)}$ correspondants*.

Nous omettrons ici, pour abrégé, une représentation normale de la seconde variation de l'intégrale Θ , qui est fondée sur la supposition énoncée tout à l'heure, que les quantités x_a sont des fonctions *indépendantes entre elles* des quantités u_b , et que nous avons fait connaître dans notre Mémoire.

Nous allons maintenant supposer que le degré p est $= 2$; soit, comme dans (29), I,

$$2f(dx) = \sum_{a,b} a_{a,b} dx_a dx_b, \quad \Delta = |a_{a,b}|.$$

Pour le type normal correspondant $\varphi(du)$ prenons les notations

$$(12) \quad 2\varphi(du) = \sum_{a,b} p_{a,b} du_a du_b, \quad \Pi = |p_{a,b}|.$$

Désignons, de plus, par r la valeur de l'intégrale R tirée de (8), I, et par h la constante $f_0(x'^{(0)})$, de sorte que l'on ait

$$(13) \quad r = \sqrt{2f_0(u)} = \sqrt{2h}(t - t_0).$$

En outre, par la supposition de $p = 2$, l'expression (10) devient égale à l'expression (11), et peut, en posant $\Delta_0 = |a_{a,b}^{(0)}|$, être représentée par la formule

$$(10^*) \quad \frac{\Pi}{\Delta_0}.$$

Comme précédemment, la substitution $x_a = x_a^{(0)}$ dans ces expressions est indiquée par l'addition du signe $^{(0)}$.

Soit d'abord le nombre $n = 2$, et supposons que la forme quadratique $2f(dx)$ désigne, comme dans (29*), I, le carré de l'élément linéaire pour une surface. Pour appliquer la propriété générale en question des différences (6), (8), (9), remarquons que, lorsque les dérivées d'une forme quadratique des deux différentielles du_1, du_2 , prises par rapport à ces différentielles, s'évanouissent dès que l'on remplace du_1 par u_1 , du_2 par u_2 , la forme doit être égale au produit d'une quantité finie par l'expression $(u_1 du_2 - u_2 du_1)^2$. On a, par suite, l'équation

$$(14) \quad 4f_0(u)f_0(du) - [d\sqrt{f_0(u)}]^2 = \Delta_0(u_1 du_2 - u_2 du_1)^2.$$

De plus, le quotient

$$\frac{\varphi(du) - [d\sqrt{f_0(u)}]^2}{f_0(du) - [d\sqrt{f_0(u)}]^2}$$

doit être égal à une grandeur finie, et si l'on désigne celle-ci par $\frac{m^2}{2f_0(u)}$, il en résulte l'équation

$$(15) \quad \varphi(du) - [d\sqrt{f_0(u)}]^2 = \frac{m^2}{2f_0(u)} \{f_0(du) - [d\sqrt{f_0(du)}]^2\}.$$

D'après les développements donnés plus haut, la quantité $r = \sqrt{2f_0(u)}$ mesure la longueur de la ligne la plus courte tracée

sur la surface, du point $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ au point (x_1, x_2) . Pour l'angle Φ , que fait l'élément initial de cette ligne avec l'élément dx_1 , on a les équations

$$(16) \quad \tan \Phi = \frac{\sqrt{\Delta_0} \cdot u_2}{a_{1,1}^{(0)} u_1 + a_{1,2}^{(0)} u_2}, \quad d\Phi = \frac{\sqrt{\Delta_0} (u_1 du_2 - u_2 du_1)}{2f_0(u)},$$

et, partant, l'équation (15) se change dans l'équation

$$(17) \quad 2\varphi(du) = dr^2 + m^2 d\Phi^2,$$

établie par Gauss dans le Mémoire cité, art. 19. Pour le quotient (10*) on a en même temps l'expression

$$(18) \quad \frac{\Pi}{\Delta_0} = \frac{m^2}{2f_0(u)},$$

et la proposition qui a lieu pour le quotient $\frac{\Pi}{\Delta_0}$, que sa valeur n'est pas altérée par l'échange mutuel de x_a avec $x_a^{(0)}$, se change dans le théorème que M. Christoffel a donné, relativement à l'expression $\frac{m^2}{2f_0(u)}$, dans sa *Théorie générale des triangles géodésiques* (1), art. 9.

Dans les formes quadratiques $f(dx)$ d'un nombre quelconque de différentielles, la forme quadrilinéaire $\Psi(d^1x, \delta^1x, dx, \delta x)$ va être maintenant considérée d'un nouveau point de vue. Admettons que les variables x_a parcourent la *variété* du premier ordre, déterminée par l'intégration du système (11), I, et que les différentielles dx_a et dx_g prennent les valeurs correspondant à ce mode de variation, $(t - t_0)x'_a = \nu_a$ et $(t - t_0)x'_g = \nu_g$, lesquelles sont, comme on l'a vu, fonctions des seuls systèmes $x_c^{(0)}$ et x_c . Les différentielles δ^1x_b et δx_h ont été supposées, dans notre Mémoire, indépendantes les unes des autres; mais attendu que, dans les deux applications dont il s'agit, la généralité ne perd rien à ce que l'on remplace le signe δ^1 par le signe δ , nous introduirons cette simplification dans ce qui va suivre. Si l'on désigne par

$$\Xi(d^1u, \delta^1u, du, \delta u)$$

(1) *Abhandlungen der Berliner Akademie vom Jahre 1868. Voir Bulletin, t. I, p. 169.*

la forme quadrilinéaire dans laquelle se change

$$\Psi(d^1x, \delta^1x, dx, \delta x)$$

par l'introduction des variables normales u_a , on aura, en vertu des relations (3*), l'équation

$$(19) \quad (t - t_0)^2 \Psi(x', \delta x, x', \delta x) = \Xi(u, \delta u, u, \delta u).$$

La propriété fondamentale de la différence $\varphi(du) - f_0(du)$, établie ci-dessus, donne maintenant, pour l'expression du second membre, la formule

$$(20) \quad \left\{ \sum_{b,h} \left[(t - t_0)^2 \frac{d^2 p_{b,h}}{dt^2} + 2(t - t_0) \frac{dp_{b,h}}{dt} - \frac{(t - t_0)^2}{2} \sum_{c,d} \frac{P_{c,d}}{\Pi} \frac{dp_{c,h}}{dt} \frac{dp_{d,b}}{dt} \right] \delta u_b \delta u_h, \right.$$

où l'on a fait

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_{a,b}} = P_{a,b}.$$

Imaginons maintenant que la fonction $\Xi(u, \delta u, u, \delta u)$ soit développée suivant les puissances positives des quantités u_a , comme cela a eu lieu ci-dessus pour la différence $\varphi(du) - f_0(du)$. Pour la comparaison, on prend actuellement, au lieu de cette différence, la différence $\varphi(\delta u) - f_0(\delta u)$. On reconnaît alors que, dans les deux développements, le terme d'ordre zéro et l'ensemble des termes du premier ordre s'évanouissent, et que, pour l'ensemble des termes du second ordre, on a

$$(21) \quad [\varphi(\delta u) - f_0(\delta u)]_2 = \frac{1}{12} [\Xi(u, \delta u, u, \delta u)]_2.$$

Soit $\Psi_0(d^1x, \delta^1x, dx, \delta x)$ ce que devient la forme

$$\Psi(d^1x, \delta^1x, dx, \delta x)$$

par la substitution $x_a = x_a^{(0)}$; de (19) on tire l'équation

$$\Psi_0(u, \delta u, u, \delta u) = [\Xi(u, \delta u, u, \delta u)]_2,$$

et par suite, en vertu de (21), l'équation

$$(22) \quad [\varphi(\delta u) - f_0(\delta u)]_2 = \frac{1}{12} \Psi_0(u, \delta u, u, \delta u).$$

Cette équation caractérise la dépendance entre le type normal $\varphi(\delta u)$ et la forme $\Psi_0(u, \delta u, u, \delta u)$.

Dans le cas d'une forme quadratique de deux différent

présenter la mesure de courbure relative au système de valeurs x_a

drilinéaires $\$

dans les hypothèses actuelles, est

On doit pouvoir tirer, aussi bien de la forme $\$

Les

consiste en ce que l'expression

$$\Pi^{-\frac{1}{2}} \sum_a \frac{\partial \Pi^{\frac{1}{2}}}{\partial u_a} u_a,$$

où Π désigne, d'après (12), le déterminant relatif au type normal $\varphi(du)$, soit fonction de la seule quantité r . Cette condition étant remplie, on obtient l'expression de la fonction cherchée w au moyen de la formule

$$d \log \frac{dw}{dr} = - \sum_a \frac{\partial \log \left(\Pi^{\frac{1}{2}} r^{n-1} \right)}{\partial u_a} u_a d \log r.$$

Dès que la forme $f(dx)$ appartient au genre de formes caractérisé par l'équation (25), l'équation précédente se simplifie à l'aide de la relation suivante, qui est une conséquence de (26),

$$\Pi^{\frac{1}{2}} r^{n-1} = \Delta_0^{\frac{1}{2}} m^{n-1}.$$

Si, de plus, m est une fonction de r seulement, il vient

$$w = \text{const.} \int m^{-(n-1)} dr.$$

Cette condition est remplie par les formes pour lesquelles la mesure de courbure de Riemann a la valeur constante α , et la valeur de m est exprimée par l'équation (35). On a donc, dans le cas de ces formes, pour l'équation aux différentielles partielles $\Delta_2(w) = 0$, l'intégrale

$$W = \int \left[\frac{\sin \sqrt{2\alpha} f_0(u)}{\sqrt{\alpha}} \right]^{-(n-1)} d\sqrt{2f_0(u)},$$

laquelle, pour α convergeant vers zéro et pour $n = 3$, se change dans la fonction potentielle $\frac{-1}{\sqrt{2f_0(u)}}$.

(A suivre.)