BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

HERMITE

Sur la construction géométrique de l’équation relative à l’addition des intégrales elliptiques de première espèce

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 2 (1871), p. 21-23

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__21_1>

MÉLANGES.

SUR LA CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DE L'ÉQUATION RELATIVE A L'ADDITION DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES DE PREMIÈRE ESPÈCE;

PAR M. HERMITE.

La première construction connue de cette équation et qui a été donnée par Lagrange, résulte du rapprochement de la relation :

$$\cos \operatorname{am} a = \cos \operatorname{am}(x + a) \cos \operatorname{am} x + \sin \operatorname{am}(x + a) \sin \operatorname{am} x \Delta \operatorname{am} a$$

avec la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique. On en

(¹) Il paraît chaque année un volume in-4°. En langue italienne.

déduit aussi une construction plane en posant,

$$X = \cos \operatorname{am}(x + a),$$
$$Y = \sin \operatorname{am}(x + a),$$

et déterminant les points de rencontre de la droite

$$\cos \operatorname{am} a = X \cos \operatorname{am} x + Y \sin \operatorname{am} x \, \Delta \operatorname{am} a$$

avec le cercle

$$X^2 + Y^2 = 1.$$

Cette droite est une tangente à l'ellipse

$$\left(\frac{X}{\cos \operatorname{am} a}\right) + \left(\frac{Y \Delta \operatorname{am} a}{\cos \operatorname{am} a}\right)^2 = 1,$$

dont les axes ont pour valeurs

$$A = \cos \operatorname{am} a,$$
$$B = \frac{\cos \operatorname{am} a}{\Delta \operatorname{am} a} = \sin \operatorname{am}(K - a).$$

Ayant donc construit cette ellipse ainsi que le cercle, l'un des points d'intersection aura pour coordonnées

$$X = \cos \operatorname{am}(x + a),$$
$$Y = \sin \operatorname{am}(x + a),$$

et l'autre, en remarquant que l'équation de la droite ne change point si l'on change a en $-a$, les quantités

$$X_0 = \cos \operatorname{am}(x - a),$$
$$Y_0 = \sin \operatorname{am}(x - a).$$

On voit donc qu'en menant l'une des deux tangentes à l'ellipse par le point

$$X_0 = \cos \operatorname{am}(x - a),$$
$$Y_0 = \sin \operatorname{am}(x - a),$$

cette construction donnera d'abord celui-ci

$$X = \cos \operatorname{am}(x + a),$$
$$Y = \sin \operatorname{am}(x + a),$$

puis, en continuant dans le même sens,

$$X_1 = \cos \operatorname{am}(x + 3a),$$
$$Y_1 = \sin \operatorname{am}(x + 3a);$$

et, en général, le $n^{ième}$ côté du polygone inscrit au cercle et circonscrit à l'ellipse conduira à la construction des quantités

$$\cos \operatorname{am}[x + (2n + 1)a],$$
$$\sin \operatorname{am}[x + (2n + 1)a].$$

En opérant en sens inverse, on trouverait, pour les coordonnées des sommets, les expressions

$$\cos \operatorname{am}[x - (2n + 1)a],$$
$$\sin \operatorname{am}[x - (2n + 1)a].$$

Ces résultats pourraient, sans doute, se démontrer directement, en déterminant, sur la figure, le rapport des variations des coordonnées des points de rencontre, avec le cercle, de deux tangentes infiniment voisines, mais je ne m'y arrêterai point, m'étant seulement proposé de rapprocher l'une de l'autre deux constructions géométriques de nature bien différente.