

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

O. HESSE

Des relations analytiques entre six points situés sur une conique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 1
(1870), p. 33-38

http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1870__1__33_1

© Gauthier-Villars, 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉLANGES.

DES RELATIONS ANALYTIQUES ENTRE SIX POINTS SITUÉS SUR UNE CONIQUE;

PAR M. O. HESSE.

Traduit de l'allemand. (Voir p. 11.)

Le théorème de l'hexagone de Pascal fournit un moyen très-simple de reconnaître, par la Géométrie, quand six points sont situés sur une conique; mais on ne connaît pas encore de relation analytique simple entre les équations (tangentiellles) de six points situés sur une conique. Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, d'établir de telles relations.

Soit $W = 0$ l'équation *tangentielle* d'un point pris arbitrairement sur une conique. Il est clair que cette équation peut se mettre sous la forme

$$(1) \quad W = A + B\lambda + C\lambda^2 = 0,$$

où A, B, C sont trois fonctions linéaires des coordonnées. En effet tous les points définis par l'équation précédente, quand on fait varier λ , se trouvent sur la conique dont l'équation tangentielle est

$$B^2 - 4AC = 0.$$

D'après cela, six points situés sur une conique, 1, 2, ..., 6 peuvent être déterminés par les équations

$$(2) \quad W_1 = 0, \quad W_2 = 0, \dots, \quad W_6 = 0,$$

Les systèmes (6) et (7), sont donc équivalents et le second, aussi bien que le premier, suffit à exprimer que les six points 1, 2, ..., 6 sont sur une conique.

Cela posé, multiplions les équations (7) par $u^2, v^2, w^2, 2vw, 2uv, 2wu$ respectivement, et ajoutons-les par lignes verticales. Le coefficient de $\frac{1}{\pi_i}$ sera $(ux_i + vy_i + wz_i)^2$. Posons $W_i = ux_i + vy_i + wz_i$, $W_i = 0$ sera l'équation tangentielle du point $x_i y_i z_i$, et l'on aura *identiquement*

$$\frac{W_1^2}{\pi_1} + \frac{W_2^2}{\pi_2} + \dots + \frac{W_6^2}{\pi_6} = 0.$$

C'est l'équation de condition (5). Si l'on exprime d'ailleurs que cette équation est identique, c'est-à-dire vérifiée, qu'elles que soient les valeurs du u, v, w , elle se décompose dans les six équations (7). On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si $W_1 = 0, W_2 = 0, \dots, W_6 = 0$ sont les équations de six points, et si les premiers membres de ces équations satisfont à une équation identique de la forme (5), les six points sont sur une conique.

L'équation (5) a été obtenue en remplaçant, dans l'équation (4), $\varphi(\lambda)$, qui est une fonction du quatrième degré au plus, par W^2 . On peut encore remplacer $\varphi(\lambda)$ par W ou λW ou $\lambda^2 W$, et l'on obtient les nouvelles équations identiques

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{1}{\pi_1} W_1 + \frac{1}{\pi_2} W_2 + \dots + \frac{1}{\pi_6} W_6 = 0, \\ \frac{\lambda_1}{\pi_1} W_1 + \frac{\lambda_2}{\pi_2} W_2 + \dots + \frac{\lambda_6}{\pi_6} W_6 = 0, \\ \frac{\lambda_1^2}{\pi_1} W_1 + \frac{\lambda_2^2}{\pi_2} W_2 + \dots + \frac{\lambda_6^2}{\pi_6} W_6 = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si $W_1 = 0, \dots, W_6 = 0$ sont les équations de six points d'une conique, on peut toujours trouver six arbitraires λ et six arbitraires π , telles, que les trois équations (8) aient lieu identiquement.

La réciproque de cette proposition est encore vraie :

Si $W_1 = 0, W_2 = 0, \dots, W_6 = 0$ sont les équations de six points, et

si l'on peut trouver six arbitraires λ , et six autres constantes π , telles, que les équations (8) aient lieu identiquement, les six points seront sur une conique.

Pour établir cette réciproque, nous montrerons que, lorsque les équations (8) ont lieu, les six points forment un hexagone de Pascal, c'est-à-dire un hexagone dont les côtés opposés se rencontrent en trois points p, q, r situés sur une même droite.

A cet effet, nous remarquerons qu'en éliminant deux des symboles W , les équations (8) fournissent de nouvelles identités, ne contenant que quatre de ces symboles. Multiplions, par exemple, pour éliminer W_5, W_6 , les trois équations respectivement par

$$\lambda_5 \lambda_6, \quad -(\lambda_5 + \lambda_6), \quad 1,$$

et ajoutons. Nous obtenons

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_6) \frac{W_1}{\pi_1} + (\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_6) \frac{W_2}{\pi_2} \\ + (\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_6) \frac{W_3}{\pi_3} + (\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_6) \frac{W_4}{\pi_4} = 0. \end{array} \right.$$

On obtient de cette manière, en éliminant W_5 et W_6 , W_1 et W_4 , W_2 et W_3 , les équations identiques

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_6) \frac{W_1}{\pi_1} + (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_6) \frac{W_2}{\pi_2} \\ + (\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_6) \frac{W_4}{\pi_4} + (\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_5 - \lambda_6) \frac{W_5}{\pi_5} = 0, \\ (\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_1) \frac{W_2}{\pi_2} + (\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_1) \frac{W_3}{\pi_3} \\ + (\lambda_5 - \lambda_4)(\lambda_5 - \lambda_1) \frac{W_5}{\pi_5} + (\lambda_6 - \lambda_4)(\lambda_6 - \lambda_1) \frac{W_6}{\pi_6} = 0, \\ (\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_2) \frac{W_3}{\pi_3} + (\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_2) \frac{W_4}{\pi_4} \\ + (\lambda_6 - \lambda_5)(\lambda_6 - \lambda_2) \frac{W_6}{\pi_6} + (\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_2) \frac{W_1}{\pi_1} = 0. \end{array} \right.$$

Soient maintenant les trois équations suivantes, qui ne sont plus

des identités et qui représentent trois points en coordonnées tangentielles :

$$\begin{aligned} p) \quad & (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_6) \frac{W_1}{\pi_1} + (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_6) \frac{W_2}{\pi_2} = 0, \\ q) \quad & (\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_1) \frac{W_2}{\pi_2} + (\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_1) \frac{W_3}{\pi_3} = 0, \\ r) \quad & (\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_2) \frac{W_3}{\pi_3} + (\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_2) \frac{W_4}{\pi_4} = 0. \end{aligned}$$

Considérons l'un de ces points, le premier par exemple. En vertu de la première des identités (10), son équation pourrait s'écrire

$$(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_6) \frac{W_4}{\pi_4} + (\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_5 - \lambda_6) \frac{W_5}{\pi_5} = 0.$$

On voit donc que ce point est à la fois sur les côtés (12) d'après la première équation, et (45) d'après la seconde. C'est donc le point d'intersection des deux cotés opposés (12) et (45) de l'hexagone. On verrait de même que le point q est à l'intersection des cotés (23) et (56) et le point r à l'intersection des cotés (34) et (61).

D'ailleurs si l'on multiplie les trois équations p), q), r), par

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_5), \quad (\lambda_2 - \lambda_6)(\lambda_3 - \lambda_5), \quad (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_6),$$

et qu'on les ajoute, on retrouve l'équation identique (9), multipliée par $(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_5)$. Puisque les équations des trois points ont une somme identiquement nulle, les trois points sont en ligne droite, ce qui est le théorème de Pascal (*).