

# THÈSES D'ORSAY

XIANGYU LIANG

**Ensembles et cônes minimaux de dimension 2 dans les espaces euclidiens**

*Thèses d'Orsay, 2010*

<[http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11\\_2010\\_0808\\_P0\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_2010_0808_P0_0)>

L'accès aux archives de la série « Thèses d'Orsay » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



NUMDAM

*Thèse numérisée par la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016  
et diffusée dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>*



N° d'ordre: 10060

UNIVERSITÉ PARIS-SUD 11  
FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI

Spécialité: Mathématiques

par

Xiangyu LIANG



Ensembles et cônes minimaux de  
dimension 2 dans les espaces euclidiens

Soutenue le 7 Décembre 2010 devant la Commission d'examen:

M.	Guy DAVID	(Directeur de thèse)
M.	Thierry DE PAUW	(Rapporteur)
Mme.	Françoise DIBOS	(Examinateuse)
M.	Nicola FUSCO	(Rapporteur)
M.	Jean-Pierre KAHANE	(Président du jury)
M.	Filippo SANTAMBROGIO	(Examinateur)



南大给我最美的是你的爸爸妈妈

献给我无怨无悔的青春岁月



---

## Remerciements

C'est vraiment impossible d'exprimer tout ce que je dois à mon directeur de thèse, Guy David, en n'importe quelle langue. Avec ses riches expériences, il est toujours volontaire et prêt à m'aider pour trouver un moyen à moi pour avancer dans le monde mystérieux et joli des maths. Je ne sais pas si je suis digne de tous ses efforts. Pour sa patience, son soutien constant, pour tout ce qu'il m'appris sur les mathématiques, sur la langue et la culture française, ainsi que sur la vie, pour tous mes erreurs qu'il a corrigées, et pour tout ce que j'ai oublié, je voulais lui dire mille fois merci !

Mes plus vifs remerciements s'adressent à Zhiying Wen. C'est la première personne qui m'a montré la beauté des mathématiques, qui m'a convaincu que je suis aussi capable de faire des mathématiques, et qui m'a soutenue et encouragée tout au long de ces années. Je n'ai jamais trouvé un bon moyen pendant ces 7 ans pour lui dire merci.

Je tiens à remercier Jean-Pierre Kahane de m'avoir fait l'honneur de présider le jury. Merci à Thierry De Pauw et Nicola Fusco, qui ont accepté la lourde tâche de rapporter sur cette thèse, à Françoise Dibos et Filippo Santambrogio pour avoir accepté de faire partie du jury.

Merci à Laurent Siebenmann et Pierre Vogel, pour leurs aides enthousiastes et discussions utiles sur la topologie algébrique. C'est vraiment gentil de leur part de discuter des problèmes avec une jeune étudiante avec tant de patience.

Des remerciements spéciaux à Jacques Peyrière, pour m'avoir donné la chance de venir poursuivre mes études ici, et m'avoir accueilli à l'aéroport à ma première arrivé en France ; à Antoine et Vincent, anciens étudiants de Guy, pour les discussions utiles avec eux et leur aide enthousiaste.

Des remerciements émus à tous mes amis chinois en France. Vos amitiés et soutien constant sont vraiment inestimables, sans lesquels je ne serais jamais ce que je suis aujourd'hui.

Enfin, je ne pourrais jamais dire exactement tout ce que je dois à mes parents.....

Je suis tellement heureuse d'avoir connu toutes ces personnes, pour les mathématiques, et encore plus important, pour la vie.

## Résumé.

On s'intéresse dans cette thèse aux ensembles minimaux.

Dans la première partie on étudie les cônes minimaux au sens d'Almgren de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^4$ , ce qui est une première étape obligée et utile dans l'étude des ensembles minimaux. La minimalité au sens d'Almgren de l'union de deux plans presque orthogonaux est établie. La méthode est généralisée pour montrer que l'union presque orthogonale de plusieurs plans ou hyperplans, et l'union presque orthogonale d'un plan et un  $Y$  sont minimales.

Dans la seconde partie on introduit une définition de minimiseur topologique, qui généralise celle de minimiseur de Mumford-Shah. On montrera des propriétés des minimiseurs topologiques, et fera un premier pas dans la direction d'une caractérisation des minimiseurs topologiques. On restreindra aussi la classe potentielle des Almgren-minimiseurs de  $\mathbb{R}^3$  qui ne seraient pas des cônes.

## Abstract.

In the thesis we discuss the theory of minimal sets.

In the first part we study 2-dimensional Almgren minimal cones in  $\mathbb{R}^4$ , which is the first useful and necessary step to study Almgren minimal sets. We establish the Almgren minimality of the union of a pair of almost orthogonal planes in  $\mathbb{R}^4$ . The method is also generalized to prove the minimality of the almost orthogonal union of several planes or hyperplanes, as well as the almost orthogonal union of a plane and a  $Y$  in  $\mathbb{R}^5$ .

In the second part we introduce a definition of topological minimal sets, which is a generalization of that of Mumford-Shah-minimal sets. We prove some properties of topological minimal sets, and make a first step towards a characterisation of topological minimal sets. We restrict also the potential class of those Almgren minimal sets in  $\mathbb{R}^3$  which are not cones.

## Table des matières

<b>0 Introduction générale</b>	<b>5</b>
<b>I Minimalité d'une union de deux plans</b>	<b>12</b>
<b>1 Introduction de la première partie</b>	<b>14</b>
<b>2 Discussions sur le cas orthogonal et des cas presque orthogonaux</b>	<b>23</b>
2.1 Estimation des projections sur l'union de 2 plans transverses pour tout 2-vecteur simple	24
2.2 Comparaison de la mesure d'un ensemble rectifiable avec la somme de celles de ses projections sur deux plans . . . . .	29
<b>3 Unicité de <math>P_0</math></b>	<b>31</b>
<b>4 L'existence d'ensembles minimaux</b>	<b>43</b>
<b>5 Rayons critiques</b>	<b>57</b>
<b>6 Propriétés de projection et régularité de <math>E_k</math></b>	<b>61</b>
<b>7 Argument d'extension harmonique</b>	<b>75</b>
<b>8 Conclusion</b>	<b>82</b>
<b>9 Généralisation aux dimensions plus hautes</b>	<b>89</b>
9.1 Estimations algébriques pour la somme des projecteurs de deux hyperplans (parallèle au paragraphe 2) . . . . .	89
9.2 Unicité de $P_0$ . . . . .	92
9.3 L'argument de l'extension harmonique par les harmoniques sphériques . . . . .	98
<b>10 Généralisation au cas de plusieurs plans et hyperplans</b>	<b>104</b>
<b>11 L'union presque orthogonale d'un plan et un <math>\mathbb{Y}</math> dans <math>\mathbb{R}^5</math></b>	<b>111</b>
11.1 Discussions générales . . . . .	111

---

11.2 L'unicité de $Z_0$ . . . . .	113
11.3 Remarques sur d'autres préparatifs . . . . .	124
11.4 Conclusion . . . . .	129
<b>12 Produit et calibration</b>	<b>133</b>
<b>II Minimiseurs topologiques</b>	<b>140</b>
<b>13 Introduction de la deuxième partie</b>	<b>141</b>
<b>14 Minimiseurs A1 dans <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>143</b>
<b>15 Contrôler la topologie par mesure</b>	<b>152</b>
<b>16 Préliminaires sur la topologie</b>	<b>160</b>
16.1 Topologie algébrique . . . . .	160
16.2 Transversalité . . . . .	164
<b>17 L'image réciproque d'une chaîne lisse par une application transverse</b>	<b>166</b>
<b>18 Minimiseur topologique</b>	<b>170</b>
<b>19 Une discussion sur <math>T</math></b>	<b>177</b>

## 0 Introduction générale

L'un des objets d'étude de prédilection de la théorie géométrique de la mesure est la théorie des ensembles ou des surfaces minimales, qui donna lieu notamment à des progrès importants dans la compréhension de la régularité des surfaces minimales, et des résultats d'existence pour le problème de Plateau. Rappelons que dans sa version la plus simple, le problème de Plateau consiste à se donner une courbe dans l'espace, ou plus généralement un bord, et à chercher une surface s'appuyant sur ce bord et dont l'aire soit minimale. Voir les travaux de Besicovitch, Federer, Fleming, De Giorgi, etc.

Le sujet principal de cette thèse est l'étude des ensembles minimaux de dimension 2 dans un espace euclidien. On utilisera plusieurs notions de minimalité, mais la principale est la suivante, qui a été introduite par F. Almgren [2], et qui donne la meilleure modélisation des films de savon. Nous donnons directement la définition d'un ensemble minimal de dimension  $d$  dans un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , qui n'est pas plus compliquée.

**Définition 0.1** (ensembles minimaux (d'Almgren)). *Soit  $0 < d < n$  des entiers,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . L'ensemble  $E$  fermé dans  $U$  est dit minimal de dimension  $d$  dans  $U$  si  $H^d(E \cap B) < \infty$  pour toute boule compacte  $B \subset U$  et*

$$(0.2) \quad H^d(E \setminus F) \leq H^d(F \setminus E)$$

*pour tout ensemble  $F$  tel que  $F = \varphi_1(E)$ , où  $\varphi_t, 0 \leq t \leq 1$  est une famille à un paramètre de fonctions continues  $\varphi_t : U \rightarrow U$  vérifiant*

- 1)  $\varphi_0(x) = x$  pour  $x \in U$  ;
- 2) l'application  $(t, x) \rightarrow \varphi_t(x)$  de  $[0, 1] \times U$  dans  $U$  est continue ;
- 3)  $\varphi_1$  est Lipschitzienne,

*et si on pose  $W_t = \{x \in U ; \varphi_t(x) \neq x\}$  et  $\widehat{W} = \bigcup_{t \in [0, 1]} [W_t \cup \varphi_t(W_t)]$ , alors  $\widehat{W}$  est relativement compact dans  $U$ .*

*Une telle  $\varphi_1$  sera appelée une déformation de  $E$  dans  $U$ .*



Pour une description d'ensembles un peu plus généraux, comme des bulles de savon (donc, où la pression est différente dans les différentes composantes connexes du complémentaire), ou en présence de gravité, on peut utiliser une notion semblable d'ensembles presques minimaux, avec des résultats souvent identiques de régularité. Voir la remarque 1.29.

La première partie de la thèse s'inscrit dans un plan assez large d'étude de la régularité intérieure des ensembles minimaux au sens d'Almgren.

Rappelons que dans ce cadre, assez peu de résultats de régularité sont connus. Les premiers résultats ont été donnés par Frederick Almgren [2] (rectifiabilité, Ahlfors régularité en dimension quelconque),

puis généralisés par Guy David et Stephen Semmes [11] (rectifiabilité uniforme, morceaux de graphes Lipschitziens), Guy David [7] (minimalité d'une limite d'une suite de minimiseurs). Dans [32], Jean Taylor a donné un théorème essentiel de régularité pour les ensembles minimaux de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^3$ , qui consiste à dire que tous ces ensembles minimaux sont localement  $C^1$  équivalents à un cône minimal (c'est à dire, un ensemble minimal dans  $\mathbb{R}^n$ , qui est en même temps un cône).

La situation ici est moins bonne que pour la régularité des courants minimiseurs de masse, ou des surfaces minimales classiques, et d'ailleurs les ensembles minimaux au sens d'Almgren admettent des singularités dès la dimension 1. Rappelons que pour étudier les surfaces minimales, le point de vue le plus souvent utilisé consiste à voir les surfaces minimales comme des courants minimisant la masse ou la taille (voir [29] pour les définitions), sous certains contraintes de bord. Rappelons qu'il existe de très bons résultats d'existence et de régularité pour les courants minimiseurs de masse, mais en fait un minimiseur de masse est souvent un objet assez loin de décrire une solution du problème de Plateau pour les films de savon. En gros la masse est un objet plutôt algébrique (ce qui rend aussi le problème plus facile, on peut bien se servir des méthodes de dualité, calibration et compacité). Par exemple quand on pince deux morceaux de surface ensemble, on compte toujours deux fois la surface obtenue par le pincement, ce qui preserve la cohérence algébrique, mais en même temps ne parvient pas à décrire raisonnablement le comportement des films de savons. Parce que déjà aucune des singularités dans les films de savon observées par Plateau n'est un minimiseur de masse.

Donc le problème de Plateau pour les films de savon est plutôt un problème de minimiseurs de taille, pour lesquels beaucoup moins de résultats sont connus (voir [28] pour certains résultats d'existence). Mais le support d'un minimiseur de taille est automatiquement un minimiseur d'Almgren, de sorte que les résultats de régularité ci-dessous s'appliquent également au support d'un minimiseur de taille.

Revenons à la régularité des ensembles minimaux d'Almgren. D'abord on va faire une petite simplification. On va se restreindre aux ensembles réduits définis comme suit.

**Définition 0.3.** Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert,  $E$  un sous ensemble fermé de  $U$ . Notons

$$E^* = \{x \in E ; H^d(E \cap B(x, r)) > 0 \text{ pour tout } r > 0\}$$

le support fermé (dans  $U$ ) de la restriction de  $H^d$  à  $E$ . On dit que  $E$  est réduit si  $E = E^*$ .

Il est facile à voir que

$$H^d(E \setminus E^*) = 0.$$

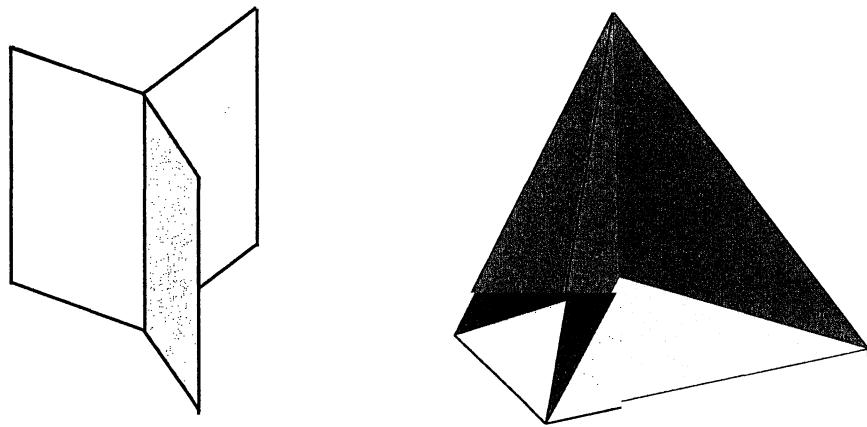
En effet on peut couvrir  $E \setminus E^*$  par un nombre dénombrable de boules  $B_j$  tel que  $H^d(E \cap B_j) = 0$ .

**Remarque 0.4.** Si  $E$  est minimal (resp. localement minimal), alors  $E^*$  aussi, car si  $\varphi$  est comme dans la définition 0.1, alors elle est Lipschitzienne, et donc  $H^d(\varphi(E \setminus E^*)) = H^d(E \setminus E^*) = 0$ . Donc la condition (0.2) est la même pour  $E^*$  que pour  $E$ . Et à cause de cela, il suffit d'étudier les ensembles minimaux réduits.

Il se trouve qu'à cause de la monotonie du rapport  $r^{-d}H^d(E \cap B(x, r))$ , les ensembles minimaux admettent un ou plusieurs ensembles tangents en chaque point, et ces ensembles tangents sont des cônes minimaux. Voir la discussion concernant les limites par explosion au paragraphe 1 (autour de (1.28)).

De ce fait, la première étape utile et obligée du programme doit être l'étude des cônes minimaux.

Dans  $\mathbb{R}^3$ , la liste des cônes minimaux est connue. Elle a été donnée par plusieurs mathématiciens il y a plus d'un siècle. (Voir par exemple [21] ou [19]). Ce sont les plans, les ensembles  $\mathbb{Y}$  et  $\mathbb{T}$ . (voir le dessin ci dessous pour avoir une idée).



Dans la première partie de ma thèse, nous nous intéresserons essentiellement aux cônes de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^4$ . L'idéal serait d'en obtenir une liste complète, mais nous n'en sommes pas encore là.

Bien sûr tous les cônes minimaux de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^3$  deviennent automatiquement des cônes minimaux dans  $\mathbb{R}^4$ . Après, un argument de projection donne la minimalité de l'union de 2 plans orthogonaux. C'est le premier exemple qui n'était pas déjà connu dans  $\mathbb{R}^3$ . On peut se demander si c'est le seul cône minimal sous forme de l'union de deux plans, ou sinon sous quelle condition d'angle est-il vrai que l'union de deux plans est minimale.

La même question a aussi été posée pour les courants minimisant la masse et minimisant la taille. Mais comme avant, ce problème a déjà été résolu pour les minimiseurs de masse. L'union de deux  $m$ -plans dans  $\mathbb{R}^{2m}$  est un minimiseur de masse si et seulement si les  $m$  angles caractéristiques (voir l'introduction de la première partie pour la définition précise)  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_m$  vérifient

$$1) \alpha_m \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_{m-1}; \quad 2) \alpha_1 + \dots + \alpha_m \geq \pi.$$

La nécessité est donnée par Gary Lawlor [22], et la suffisance par Dana Nance [27]. En particulier en dimension 2, l'union d'une paire de plans est minimale si et seulement si les deux plans sont orthogonaux.

Par contre du côté de minimiseurs d'Almgren et minimiseurs de taille, en générale, la question est toujours ouverte (mais en dimension 2, seule l'union de deux plans orthogonaux donne un courant

minimiseur de taille).

Dans [26], Frank Morgan a donné la conjecture suivante, énoncée en termes d'angles entre les plans.

L'union de deux  $m$ -plans  $P_1 \cup P_2$ , dont angles caractéristiques  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , est Almgren-minimale si et seulement si les 2 conditions ci-dessous sont vérifiées :

$$1) \alpha_m \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_{m-1} + \frac{\pi}{3}; \quad 2) \alpha_1 + \dots + \alpha_m \geq \frac{2\pi}{3}.$$

Elle définit un minimiseur de taille si et seulement si

$$3) \alpha_m \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_{m-1}; \quad 4) \alpha_1 + \dots + \alpha_m \geq \pi.$$

Revenons aux minimiseurs d'Almgren. En fait 2) est une condition nécessaire comme l'a démontré Gary Lawler [23]. Mais l'autre partie est encore ouverte. Notons que pour notre cas où  $m = 2$ , 2) implique 1), parce que  $\alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$ , et donc 2) implique que  $\alpha_1 \geq \frac{\pi}{6}$ , auquel cas 1) est automatiquement vrai. Donc ces conditions se traduisent en

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq \frac{2\pi}{3}.$$

Le résultat principal de la première partie est que si on change un peu l'angle autour de  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , l'union des deux plans est encore un ensemble minimal :

**Théorème 0.5** (minimalité de l'union de deux plans presque orthogonaux). *Il existe  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , tel que si  $P^1$  et  $P^2$  sont deux plans dans  $\mathbb{R}^4$  avec des angles caractéristiques  $(\alpha_1, \alpha_2)$  tels que  $\alpha_2 \geq \alpha_1 \geq \theta$ , alors leur union  $P^1 \cup P^2$  est un cône minimal.*

Autrement dit, on montre qu'il existe  $a > 0$ , tel que si pour tout  $v_1 \in P^1, v_2 \in P^2$ ,

$$(0.6) \quad |\langle v_1, v_2 \rangle| \leq a \|v_1\| \|v_2\|$$

alors  $P^1 \cup P^2$  est minimal. Notons que (0.6) est presque équivalent à dire que  $\alpha_1, \alpha_2 > \frac{\pi}{2} - Ca$  quand  $a$  est petit. On obtient donc une famille de cônes minimaux avec un paramètre continu, et dont les intersections avec la boule unité sont de mesures égales.

La démonstration du théorème 0.5 utilise des arguments de passage à la limite, un théorème d'existence de Vincent Feuvrier, des estimations sur les fonctions harmoniques et les techniques générales de la théorie géométrique de la mesure.

Dans la seconde partie de la thèse, on s'intéressera également à deux autres types d'ensembles minimaux, les ensembles minimaux de Mumford-Shah et les ensembles minimaux topologiques. Dans les deux cas, il s'agit encore de minimiser la mesure de Hausdorff, mais c'est la liste des compétiteurs qui sera différente.

Commençons par définir les ensembles minimaux de Mumford-Shah, mais seulement dans le contexte plus simple où l'on se place dans l'ouvert  $U = \mathbb{R}^n$ . Dans ce contexte, on se place en codimension 1 (donc,  $d = n - 1$ ).

**Définition 0.7** (ensembles minimaux de Mumford-Shah). *L'ensemble  $E$  fermé dans  $\mathbb{R}^n$  est dit minimal au sens Mumford-Shah (MS) dans  $\mathbb{R}^n$  si  $H^{n-1}(E \cap B) < \infty$  pour toute boule compacte  $B \subset \mathbb{R}^n$ , et*

$$H^{n-1}(E \setminus F) \leq H^{n-1}(F \setminus E)$$

*pour tout ensemble  $F$  qui vérifie*

- 1) *Il existe une boule  $B$  telle que  $F \setminus B = E \setminus B$  ;*
- 2) *Pour tous  $y, z \in \mathbb{R}^n \setminus (B \cup E)$  qui sont séparés par  $E$ ,  $y, z$  sont aussi séparés par  $F$ .*

*Ici "y, z sont séparés par E" veut dire que y et z appartiennent à deux composantes connexes différentes de  $\mathbb{R}^n \setminus E$ .*

Le nom de Mumford-Shah vient de ce que la condition de séparation 2) intervient naturellement dans l'étude des segmentations minimisantes dans la fonctionnelle de Mumford-Shah. Rappelons, sans écrire cette fonctionnelle (voir [8] pour des définitions précises, et tout renseignement utile), qu'elle est a été introduite par D. Mumford et J. Shah [12] pour proposer une méthode automatique de segmentation d'image. Dans ce cadre, la fonctionnelle a deux arguments  $u$  et  $K$ , où  $K$  est un fermé du domaine  $U$  considéré, et  $u$  est une fonction de classe  $C^1$  sur  $U \setminus K$ . Et l'un des termes principaux de la fonctionnelle à minimiser est  $H^{n-1}(K)$ .

Dans l'étude de cette fonctionnelle aussi, comme l'a montré A. Bonnet [3], la notion de limite par explosion est utile et importante, et les limites par explosion de segmentations minimisantes sont ce qu'on appelle des minimiseurs globaux, qui sont encore des paires  $(v, K)$  où  $K$  est un fermé de  $\mathbb{R}^n$  et  $v$  une fonction classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n \setminus K$ . En gros, les minimiseurs globaux jouent dans l'étude de la fonctionnelle de Mumford-Shah le même rôle que les cônes minimaux dans l'étude des ensembles minimaux.

La définition de minimiseur global fait intervenir la même condition de séparation que ci-dessus (également dans la définition des compétiteurs), et par exemple, si  $v$  est constante,  $(v, K)$  est un minimiseur global si et seulement si  $K$  est un ensemble minimal de Mumford-Shah (d'où le nom). Ainsi, le théorème ci-dessous donne la liste des minimiseurs globaux de  $\mathbb{R}^3$  pour lesquels  $v$  est constante.

**Théorème 0.8** ([9], Thm 1.9). *Soit  $E$  un ensemble minimal au sens de Mumford-Shah dans  $\mathbb{R}^3$ , alors il existe un ensemble  $E^* \subset E$ ,  $H^2(E \setminus E^*) = 0$ , tel que  $E^*$  est soit l'ensemble vide, soit un plan, soit un cône de type  $\mathbb{Y}$  ou  $\mathbb{T}$ .*

Le théorème 0.8 laisse un certain nombre de questions en suspens, que l'on abordera dans la seconde partie de la thèse.

D'abord, on ne sait pas si son analogue pour les ensembles minimaux au sens d'Almgren est vrai : est-ce que tout ensemble minimal d'Almgren dans  $\mathbb{R}^3$  tout entier est un cône ? G. David vérifie dans la remarque 1.8 de [9] que tout ensemble minimal de Mumford-Shah est ensemble minimal d'Almgren, mais

la réciproque semble difficile à établir autrement qu'en montrant d'abord que tout ensemble minimal d'Almgren dans  $\mathbb{R}^3$  est un cône.

La démonstration du théorème 0.8 est basé sur un argument topologique, qui ne marche pas dans le cas des minimiseurs d'Almgren. G. David propose même un exemple (possiblement déjà utilisé auparavant par Taylor, Hardt, ou Morgan) d'ensemble  $E \subset \mathbb{R}^3$  qui est topologiquement compatible avec les propriétés des minimiseurs d'Almgren, et qui est asymptotiquement proche à l'infini d'un cône  $T$ , sans en avoir la topologie.

Au chapitre 14 on vérifiera (par un argument métrique de déformation et comparaison) qu'aucun ensemble ayant cette topologie ne peut être minimal au sens d'Almgren. On proposera également un exemple, à la topologie plus compliquée qui pourrait éventuellement l'être, au sens où la même objection ne s'applique pas.

Il serait sans doute intéressant de disposer d'un analogue de la fonctionnelle de Mumford-Shah, avec des ensembles singuliers de codimension supérieure à 1, mais il semble que le bon équilibre avec les singularités de la fonction  $u$  est encore à trouver.

Il est cependant plus simple de généraliser la définition 0.7 à des codimensions plus grandes. C'est ce que nous faisons au paragraphe 18 en remplaçant la condition de séparation 2) (de la définition 0.7) par une condition portant sur l'homologie des sphères euclidiennes de dimension  $n - d - 1$  contenues dans  $\mathbb{R}^n \setminus (B \cup E)$ . On appelle minimiseurs topologiques les ensembles minimaux ainsi définis.

On montre au corollaire 18.17 que tout minimiseur topologique est également Almgren-minimal, ce qui permet de lui appliquer toute la théorie de régularité connue à ce jour.

Ensuite on essaie de généraliser le théorème 0.8 à des minimiseurs topologiques de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^4$ , mais on n'y arrive qu'en ajoutant une condition topologique supplémentaire sur  $E$ . Voir le corollaire 19.20.

On construit également, à l'aide de bouteilles de Klein, un exemple d'ensemble de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^4$  qui est asymptotiquement proche à l'infini d'un cône  $T$ , n'en a pas la topologie, mais a les propriétés que devrait avoir un minimiseur topologique. Voir l'introduction de la deuxième partie pour plus d'informations.

### Quelques notations utiles

$[a, b]$  désigne le segment d'extrémités  $a$  et  $b$  ;

$[a, b)$  est la demi-droite émise du point  $a$  et passant par  $b$  ;

$B(x, r)$  désigne la boule ouverte de rayon  $r$  et centrée en  $x$  ;

$\overline{B}(x, r)$  la boule fermée de rayon  $r$  et centrée en  $x$  ;

$\vec{ab}$  le vecteur  $b - a$  ;

Pour une chaîne singulière  $\gamma$ , notons  $[\gamma]$  l'élément dans le groupe d'homologie représenté par  $\gamma$  ;

$H^d$  : la mesure de Hausdorff de dimension  $d$  ;

$d_H : d_H(E, F) = \max\{\sup\{d(y, F) : y \in E, \sup\{d(y, E) : y \in F\}\} \text{ la distance de Hausdorff entre deux ensembles } E \text{ et } F.$

$d_{x,r}$  : la distance relative par rapport à la boule  $B(x, r)$ , définie par

$$d_{x,r}(E, F) = \frac{1}{r} \max\{\sup\{d(y, F) : y \in E \cap B(x, r)\}, \sup\{d(y, E) : y \in F \cap B(x, r)\}\}.$$

## Première partie

# Minimalité d'une union de deux plans

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction de la première partie</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>Discussions sur le cas orthogonal et des cas presque orthogonaux</b>	<b>23</b>
2.1	Estimation des projections sur l'union de 2 plans transverses pour tout 2-vecteur simple . . . . .	24
2.2	Comparaison de la mesure d'un ensemble rectifiable avec la somme de celles de ses projections sur deux plans . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Unicité de <math>P_0</math></b>	<b>31</b>
<b>4</b>	<b>L'existence d'ensembles minimaux</b>	<b>43</b>
<b>5</b>	<b>Rayons critiques</b>	<b>57</b>
<b>6</b>	<b>Propriétés de projection et régularité de <math>E_k</math></b>	<b>61</b>
<b>7</b>	<b>Argument d'extension harmonique</b>	<b>75</b>
<b>8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>82</b>
<b>9</b>	<b>Généralisation aux dimensions plus hautes</b>	<b>89</b>
9.1	Estimations algébriques pour la somme des projecteurs de deux hyperplans (parallèle au paragraphe 2) . . . . .	89
9.2	Unicité de $P_0$ . . . . .	92
9.3	L'argument de l'extension harmonique par les harmoniques sphériques	98
<b>10</b>	<b>Généralisation au cas de plusieurs plans et hyperplans</b>	<b>104</b>
<b>11</b>	<b>L'union presque orthogonale d'un plan et un <math>\mathbb{Y}</math> dans <math>\mathbb{R}^5</math></b>	<b>111</b>
11.1	Discussions générales . . . . .	111

11.2 L'unicité de $Z_0$ . . . . .	113
11.3 Remarques sur d'autres préparatifs . . . . .	124
11.4 Conclusion . . . . .	129
<b>12 Produit et calibration</b>	<b>133</b>

---

# 1 Introduction de la première partie

Dans cette première partie, un ensemble minimal est un fermé dont la mesure de Hausdorff ne peut être rendue plus petite par aucune déformation Lipschitzienne locale. Plus précisément on a la définition ci-dessous, où l'on note  $H^d$  la mesure de Hausdorff de dimension  $d$ .

**Définition 1.1** (ensembles minimaux). *Soit  $0 < d < n$  des entiers,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . L'ensemble  $E$  fermé dans  $U$  est dit minimal de dimension  $d$  dans  $U$  si*

$$(1.2) \quad H^d(E \cap B) < \infty \text{ pour toute boule compacte } B \subset U$$

et

$$(1.3) \quad H^d(E \setminus F) \leq H^d(F \setminus E)$$

pour tout compétiteur d'Almgren  $F$  de  $E$  dans  $U$ .

On pourrait en générale donner plusieurs classes différentes de compétiteurs, qui donnent des définitions différentes d'ensembles minimaux. Mais dans cette partie, on n'utilisera que les compétiteurs d'Almgren dont la définition suit.

**Définition 1.4** (compétiteurs d'Almgren). *Un compétiteur d'Almgren de  $E$  dans  $U$  est un ensemble  $F = \varphi_1(E)$ , où  $\varphi_t, 0 \leq t \leq 1$  est une famille à un paramètre de fonctions continues  $\varphi_t : U \rightarrow U$  vérifiant*

$$(1.5) \quad \varphi_0(x) = x \text{ pour } x \in U,$$

$$(1.6) \quad \text{l'application } (t, x) \mapsto \varphi_t(x) \text{ de } [0, 1] \times U \text{ dans } U \text{ est continue,}$$

$$(1.7) \quad \varphi_1 \text{ est Lipschitzienne,}$$

et si on pose

$$(1.8) \quad W_t = \{x \in U ; \varphi_t(x) \neq x\} \text{ et } \widehat{W} = \bigcup_{t \in [0, 1]} [W_t \cup \varphi_t(W_t)],$$

alors

$$(1.9) \quad \widehat{W} \text{ est relativement compact dans } U.$$

Une telle  $\varphi_1$  sera appelée une déformation de  $E$  dans  $U$ .

**Remarque 1.10.** Dans cette partie on appellera un ensemble minimal d'Almgren un ensemble minimal.

**Définition 1.11** (déformation locale). *Une déformation locale de  $E$  dans  $U$  est un ensemble  $F = f(E)$ , où :*

$$(1.12) \quad f = id \text{ hors d'une boule } B \text{ telle que } \overline{B} \subset U,$$

$$(1.13) \quad f(B) \subset B,$$

et où on demande aussi que  $f$  soit Lipschitzienne.

**Remarque 1.14.** 1) On dit aussi qu'un ensemble  $F$  défini comme ci-dessus est une déformation locale de  $E$  dans  $B$ . Et dans ce cas (1.3) est équivalent à

$$(1.15) \quad H^d(E \cap B) \leq H^d(F \cap B).$$

**Définition 1.16** (ensembles localement minimaux). *Un ensemble  $E$  défini dans 1.1 en prenant pour classe de compétiteurs la classe des déformations locales est appelé un ensemble localement minimal dans  $U$ .*

**Remarque 1.17.** La classe des déformations locales de  $E$  dans  $U$  est contenue dans la classe des compétiteurs d'Almgren, puisqu'une déformation dans une boule est toujours homotope à l'identité. Par conséquent un ensemble minimal est toujours un ensemble localement minimal. Par contre en général un compétiteur d'Almgren n'est pas toujours une déformation locale. En fait cela dépend des propriétés géométriques de l'ouvert  $U$ . Par exemple si  $U$  est  $\mathbb{R}^n$  ou une boule, alors les deux classes sont égales, et en particulier un ensemble localement minimal dans  $\mathbb{R}^n$  est un ensemble minimal dans  $\mathbb{R}^n$ .

En un certain sens, la minimalité d'un ensemble ne dépend pas de la dimension ambiante. Par exemple, si  $E \subset U(\subset \mathbb{R}^m)$  est un ensemble minimal dans  $U'$  :  $= U \times \mathbb{R}^n$ , alors on déduit toute de suite de la définition que  $E$  est minimal dans  $U$  aussi. La réciproque est aussi vraie, par le lemme suivant.

**Lemme 1.18.** Si  $E$  est un ensemble minimal dans  $U(\subset \mathbb{R}^m)$ , alors il est aussi minimal dans  $U \times \mathbb{R}^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Démonstration. Soit  $E$  un ensemble minimal dans  $U$ ,  $F$  un compétiteur d'Almgren de  $E$  dans  $U \supset \mathbb{R}^n$ , alors par la définition 1.4, il existe une famille de fonctions  $\varphi_t : U \rightarrow U$  qui vérifie (1.5)-(1.9) dans  $U \times \mathbb{R}^n$  et telle que  $F = \varphi_1(E)$ . Notons  $\pi$  la projection orthogonale de  $U \times \mathbb{R}^n$  sur  $U$ , alors  $g_t = \pi \circ \varphi_t$  est une famille de fonctions qui vérifie (1.5)-(1.9) dans  $U$ . Notons  $B' = B \cap \mathbb{R}^n$  et  $F' = g_1(E)$ ; alors  $F'$  est un compétiteur d'Almgren  $E$  dans  $U$ . Par la minimalité de  $E$  dans  $U$  on sait que

$$(1.19) \quad H^d(E \setminus F') \leq H^d(F' \setminus E).$$

D'un autre côté puisque  $\pi$  est 1-Lipschitzienne, on a

$$(1.20) \quad H^d(F' \setminus F) \leq H^d(F \setminus F'),$$

d'où

$$(1.21) \quad H^d(E \setminus F) \leq H^d(F \setminus E).$$

Par conséquent  $E$  est minimal dans  $U \times \mathbb{R}^n$ , puisque (1.21) est vrai pour tout compétiteur d'Almgren  $F$  de  $E$  dans  $U \times \mathbb{R}^n$ .

Fin de la démonstration du lemme.

On utilise ces définitions pour aborder d'un point de vue ensembliste la solution du problème de Plateau, qui consisterait à montrer, un bord étant donné, l'existence d'une surface minimale s'appuyant sur le bord. Le concept d'ensemble minimal a été introduit par Frederick J. Almgren, par exemple pour décrire le comportement des films de savon, qui sont des "surfaces" de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^3$ , mais qui peuvent avoir certains types de singularités. En effet c'est l'existence potentielle des points de singularité, et donc les types de singularités et de régularité autour de ces points-là, qui nous intéressent le plus, parce que dans les parties loin des singularités, l'ensemble n'est qu'une vraie surface minimale du point de vue de la géométrie différentielle.

Soyons plus précis.

D'abord on va faire une petite simplification. On va se restreindre aux ensembles réduits définis comme suit.

**Définition 1.22.** Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert,  $E$  un sous ensemble fermé de  $U$ . Notons

$$(1.23) \quad E^* = \{x \in E ; H^d(E \cap B(x, r)) > 0 \text{ pour tout } r > 0\}$$

le support fermé (dans  $U$ ) de la restriction de  $H^d$  à  $E$ . On dit que  $E$  est réduit si  $E = E^*$ .

Il est facile à voir que

$$(1.24) \quad H^d(E \setminus E^*) = 0.$$

En effet on peut couvrir  $E \setminus E^*$  par un nombre dénombrable de boules  $B_j$  tel que  $H^d(E \cap B_j) = 0$ .

**Remarque 1.25.** Si  $E$  est minimal (resp. localement minimal), alors  $E^*$  aussi, car si  $\varphi$  est comme dans la définition 1.4 (resp. 1.11), alors elle est Lipschitzienne, et donc  $H^d(\varphi(E \setminus E^*)) = H^d(E \setminus E^*) = 0$ . Donc la condition (1.3) est la même pour  $E^*$  que pour  $E$ . Et à cause de cela, il suffit d'étudier les ensembles minimaux réduits.

Maintenant fixons n'importe quel point  $x$  d'un ensemble minimal réduit  $E$ , et faisons exploser localement notre ensemble minimal en ce point, ce qui veut dire que l'on considère, pour  $r \rightarrow 0$ , les ensembles

$$(1.26) \quad E(r, x) = [\frac{1}{r}(E - x)].$$

Alors pour toute sous-suite  $\{r_k\}_{k \geq 1}$  telle que  $r_k \rightarrow 0$  et  $E(r_k, x)$  converge pour la distance de Hausdorff dans tout compact quand  $k$  tend vers l'infini (des sous-suites convergentes existent toujours, voir par exemple [8] paragraphe 34, Proposition 6), sa limite  $F$  (appelée une limite d'explosion de  $E$  en  $x$ ) est aussi minimale, parce que la limite d'une suite d'ensembles minimaux est automatiquement un ensemble minimal (voir, par exemple, [9] lemme 4.7). D'un autre côté, la fonction de densité de  $F$  à l'origine

$$(1.27) \quad \theta(0, r) = r^{-d} H^d(F \cap B(0, r))$$

est une constante qui est égale à la densité de  $E$  en  $x$

$$(1.28) \quad \theta(x) = \lim_{r \rightarrow 0} r^{-d} H^d(E \cap B(x, r)),$$

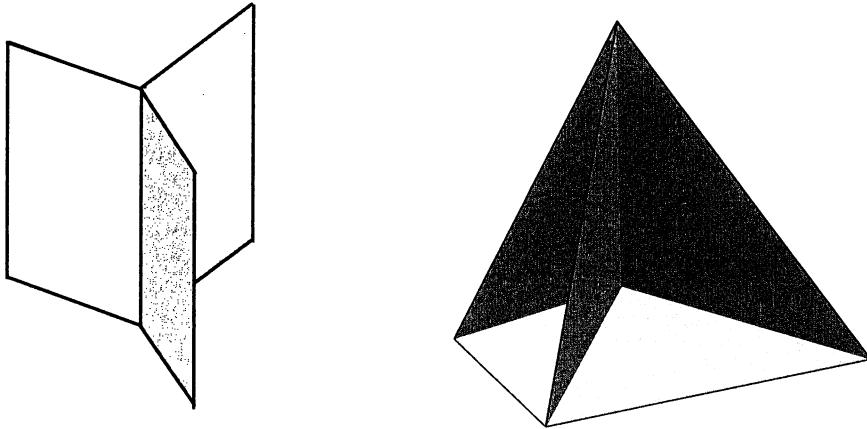
ce qui implique que  $F$  est un cône (c.f.[9], Thm 6.2) ; bref,  $F$  est un cône minimal. Par conséquent on sait que quand on s'approche de chaque point  $x$  et regarde  $E$  à une échelle de plus en plus petite,  $E$  ressemble de plus en plus à un cône minimal. Donc chercher tous les cônes minimaux est presque équivalent à chercher tous les types possibles de singularités.

**Remarque 1.29.** *Tous les arguments ci-dessus marchent pareil pour des ensembles presque minimaux, qui forment une classe un peu plus grande que la classe des ensembles minimaux. Il y a plusieurs définitions des ensembles presque minimaux, qui sont un peu différentes, sans toutefois changer grand chose à leurs propriétés. Voir [9] paragraphe 4 pour les définitions et des détails. Ici pour avoir une idée, disons qu'une des définition demande que*

$$(1.30) \quad H^d(E \cap W_1) \leq H^d(\varphi_1(E \cap W_1)) + h(\delta)\delta^d$$

*pour toute déformation telle que  $\text{diam}(\widehat{W}) < \delta$ , où  $\varphi_t$ ,  $W_t$ ,  $\widehat{W}$  sont définis dans la définition 1.4, et on demande aussi que la fonction de jauge  $h$  tends vers 0 quand  $\delta$  tend vers 0.*

La liste des cônes minimaux de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^3$  a été donnée par plusieurs mathématiciens il y a plus d'un siècle. (Voir par exemple [21] ou [19]). L'enjeu consiste à trouver des réseaux d'arcs de grands cercles sur la sphère unité qui vérifient que les bouts de chaque arc sont des points de jonctions triple avec des angles de  $120^\circ$ . Un cône minimal est forcément un cône sur un réseau de cette forme. On obtient donc une liste finie (en fait, de 10 cônes). Et après, on élimine un par un les cônes qui ne sont pas minimaux, en trouvant des déformations qui diminuent la mesure. Alors il ne reste que trois cônes qui sont minimaux : un plan, un  $\mathbb{Y}$  (l'union de 3 demi-plans qui se rencontrent en une droite avec des angles de  $120^\circ$ ), et un  $\mathbb{T}$  (le cône sur l'union des arêtes d'un tétraèdre régulier centré à l'origine). Voir le dessin 1-1.



1-1

Du côté de la régularité, dans son article [32], Jean Taylor a donné un théorème essentiel de régularité pour les ensembles minimaux de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^3$ , qui consiste à dire que tous ces ensembles minimaux sont localement  $C^1$  équivalents à un cône minimal, donc un plan, un  $\mathbb{Y}$  ou un  $\mathbb{T}$ .

La notion d'ensemble minimal est définie dans des dimensions et codimensions plus élevées. Par contre peu de choses aussi précises sont connues en grandes dimensions et codimensions.

Du côté de la régularité, Guy David a généralisé le résultat de Jean Taylor aux ensembles minimaux de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^n$ , mais avec seulement une équivalence bi-hölderienne (voir, [9]). Il dit aussi dans son article [10] que la  $C^1$  régularité pourrait dépendre du type des cônes minimaux obtenus par explosion. Si un tel cône vérifie aussi une condition de "full-length", on obtiendra la  $C^1$  régularité, sinon on pourrait la perdre.

La liste des cônes minimaux est toujours loin d'être connue, même pour les cônes minimaux de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^4$ . Bien sûr tous les cônes minimaux de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^3$  deviennent automatiquement des cônes minimaux dans  $\mathbb{R}^4$ . Après, un argument de projection donne la minimalité de l'union de 2 plans orthogonaux. C'est le premier exemple qui n'était pas déjà connu dans  $\mathbb{R}^3$ . On peut se demander si c'est le seul cône minimal sous forme de l'union de deux plans, ou sinon sous quelle condition d'angle est-il vrai que l'union de deux plans est minimale. Dans son article [26], Frank Morgan a donné la conjecture suivante, énoncée en termes d'angles entre les plans.

Soit  $S$  l'union de deux plans  $P, Q$  de dimension  $m$  dans  $\mathbb{R}^{2m}$ . On peut décrire leur position géométrique relative par des angles caractéristiques  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  avec  $0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_m \leq \frac{\pi}{2}$  :

Parmi toutes les paires de vecteurs unité  $v \in P, w \in Q$ , choisissons  $v_1, w_1$  qui minimisent l'angle entre eux. Et ensuite on choisit  $v_2 \in P, w_2 \in Q$  avec  $v_2 \perp v_1, w_2 \perp w_1$ , qui minimisent l'angle parmi les telles paires. On répète ceci  $m$  fois. Pour chaque  $i$ , notons  $\alpha_i$  l'angle entre  $v_i$  et  $w_i$ . Ce sont les angles caractéristiques entre  $P$  et  $Q$ .

La conjecture de Morgan dit que  $S$  est minimal si et seulement si les 2 conditions ci-dessous sont vérifiées :

$$1) \alpha_m \leq \alpha_1 + \cdots + \alpha_{m-1} + \frac{\pi}{3}; 2) \alpha_1 + \cdots + \alpha_m \geq \frac{2\pi}{3}.$$

En fait 2) est une condition nécessaire comme l'a démontré Gary Lawler [23]. Mais l'autre partie est encore ouverte. Notons que pour notre cas où  $m = 2$ , 2) implique 1), parce que  $\alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$ , et donc 2) implique que  $\alpha_1 \geq \frac{\pi}{6}$ , auquel cas 1) est automatiquement vrai. Donc ces conditions se traduisent en

$$(1.31) \quad \alpha_1 + \alpha_2 \geq \frac{2\pi}{3}.$$

Le résultat principal de cette thèse est que si on change un peu l'angle autour de  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , l'union des deux plans est encore un ensemble minimal :

**Théorème 1.32** (minimalité de l'union de deux plans presque orthogonaux). *Il existe  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , tel que si  $P^1$  et  $P^2$  sont deux plans dans  $\mathbb{R}^4$  avec des angles caractéristiques  $(\alpha_1, \alpha_2)$  tels que  $\alpha_2 \geq \alpha_1 \geq \theta$ , alors leur union  $P^1 \cup P^2$  est un cône minimal.*

Autrement dit, on montre qu'il existe  $a > 0$ , tel que si pour tout  $v_1 \in P^1, v_2 \in P^2$ ,

$$(1.33) \quad |\langle v_1, v_2 \rangle| \leq a \|v_1\| \|v_2\|$$

alors  $P^1 \cup P^2$  est minimal. Notons que (1.33) est presque équivalent à dire que  $\alpha_1, \alpha_2 > \frac{\pi}{2} - Ca$  quand  $a$  est petit. On obtient donc une famille de cônes minimaux avec un paramètre continu, et dont les intersections avec la boule unité sont de mesures égales.

La stratégie de la démonstration du théorème 1.32 est la suivante :

Puisque nos objets sont des cônes centrés à l'origine, on peut se satisfaire de regarder seulement des déformations dans la boule unité, et donc on se place dans la boule unité fermée  $\overline{B}(0, 1)$ . Notons d'abord  $P_\theta$  avec  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  l'union des 2 plans avec angles caractéristiques  $\theta$ . On commencera par vérifier que  $P_{(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$  est minimal, et de plus est l'unique minimiseur local parmi tous les ensemble avec le même bord et les projections surjectives sur les deux plans. Ici le bord d'un ensemble fermé  $E \subset \overline{B}(0, 1)$  désigne seulement  $E \cap \partial\overline{B}(0, 1)$ .

Donc raisonnons par l'absurde et supposons que l'énoncé du théorème n'est pas vrai. Alors il existe une suite  $\theta_k$  qui converge vers  $\theta_0 := (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  telle que  $P_{\theta_k}$  n'est pas minimal. Notons  $P_k = P_{\theta_k}$ . Notons aussi  $P_0 = P_0^1 \cup_{\theta_0} P_0^2 = P_0^1 \cup_{\perp} P_0^2$ . Et donc on sait que

$$(1.34) \quad \inf\{H^2(F) : F \subset \overline{B}(0, 1) \text{ est une déformation de } P_k \text{ dans } B(0, 1)\} < H^2(P_k) = 2\pi.$$

L'étape suivante serait plus facile si on pouvait trouver, pour chaque  $k$ , une déformation  $E_k$  de  $P_k$  qui minimise  $H^2(E \cap B(0, 1))$  parmi les déformations de  $P_k$  dans  $B(0, 1)$ . Malheureusement, on ne connaît pas de théorème d'existence qui donne un tel  $E_k$ .

En revanche, Vincent Feuvrier a obtenu un résultat partiel dans sa thèse de 2008 (voir [15]), qui dit qu'étant donné un ensemble initial  $E$  dans  $\overline{B}(0, 1)$ , il existe un certain ensemble  $F$  qui est minimal dans  $B(0, 1)$ , et qui est la limite d'une suite minimisante de déformations de l'ensemble initial  $E$  dans  $B(0, 1)$ , et tel que

$$(1.35) \quad H^2(F) \leq \inf\{H^2(E') : E' \subset \overline{B}(0, 1) \text{ est une déformation de } E \text{ dans } B(0, 1)\}.$$

Ici on risque d'avoir un problème au bord, en considérant que personne ne peut empêcher la suite minimisante d'avoir d'autres points adhérents sur  $\partial B(0, 1)$  que ceux de  $E \cap \partial B(0, 1)$ . Donc un nouveau bord peut se produire, et alors le bord de notre ensemble  $F \cap \partial B(0, 1)$  n'est plus le bord initial  $E \cap \partial B(0, 1)$ , et par conséquent il n'est pas forcément un compétiteur d'Almgren de  $E$ . Par ailleurs, même sans le problème au bord, on ne peut pas non plus dire que l'ensemble minimal  $F$  obtenu ainsi est une déformation de l'ensemble initial  $E$ , parce que la limite d'une suite de déformations n'est pas forcément une déformation.

Mais heureusement dans notre cas, on peut se débrouiller pour éviter les deux obstacles. On peut montrer que le  $E_k$  obtenu comme ci-dessus à partir de  $P_k$  a le même bord que  $P_k$ . D'un autre côté, bien qu'on ne puisse pas dire que  $E_k$  est une déformation de  $P_k$ , on peut collecter assez d'informations sur  $E_k$ , surtout la propriété de projection, pour qu'on puisse enfin faire marcher notre démonstration sans savoir que  $E_k$  est une déformation de  $P_k$ .

Donc une fois qu'on a obtenu notre suite  $E_k$ , dont les bords  $E_k \cap \partial B(0, 1)$  tendent vers le bord  $P_0 \cap \partial B(0, 1)$  de  $P_0$  (rappelons que  $P_0 = P_0^1 \cup \perp P_0^2$ ), on peut extraire une sous-suite qui converge par rapport à la distance de Hausdorff, sous-suite que nous notons encore  $\{E_k\}$ . Alors puisque les  $E_k$  sont localement minimaux, leur limite, notons-la  $E_\infty$ , est automatiquement localement minimale. Mais puisque son bord  $E_\infty \cap \partial B(0, 1) = P_0 \cap \partial B(0, 1)$ , par l'unicité de  $P_0$ ,  $E_\infty$  n'est autre que  $P_0$  lui-même. De plus la distance de Hausdorff entre chaque  $E_k$  et  $P_k$  tend vers 0 aussi, puisque  $P_k$  tend vers  $P_0$ . Voir les détails dans le paragraphe 4.

Maintenant on va faire une  $\epsilon$ -décomposition de chaque  $E_k$ . On va trouver un rayon  $r_k = r_k(\epsilon)$  pour chaque  $k$ , tel que  $E_k$  est  $\epsilon$  proche de  $P_k$  hors d'une boule  $B(o_k, r_k)$  avec  $o_k$  assez proche de l'origine. Et de plus dans  $B(o_k, r_k)$ ,  $E_k$  commence à s'éloigner un peu de  $P_k$ . Autrement dit,  $r_k$  est l'échelle où  $E_k$  commence à s'éloigner de  $P_k$ , bien qu'on ne sache pas exactement comment.

On montre qu'un tel  $r_k$  existe.

Pourtant on n'arrive pas encore à notre décomposition. Il faut travailler encore un peu plus. On sait que hors de la boule  $B(o_k, r_k)$ ,  $E_k$  est assez proche d'un plan localement. Alors quand  $\epsilon$  est suffisamment petit, par la régularité des ensembles minimaux, on arrive à montrer qu'autour de chaque tel point,  $E_k$  est localement un graphe de classe  $C^1$  sur  $P_k^1$  ou  $P_k^2$ , où les  $P_k^i$  sont les plans qui font partie de  $P_k$ . On montre même que hors de la boule  $B(o_k, r_k)$ ,  $E_k$  est l'union de deux graphes de classe  $C^1$  respectivement sur  $P_k^1$  et  $P_k^2$ . De plus, puisque  $r_k$  est le premier rayon où  $E_k$  n'est pas  $\epsilon r_k$  proche de

$P_k$ , on sait encore qu'à l'échelle  $2r_k$  l'ensemble  $E_k$  est  $2\epsilon r_k$  proche de  $P_k$ . Alors la régularité se prolonge encore un peu dans la boule  $B(o_k, r_k)$  quand  $\epsilon$  est assez petit : on arrive à montrer que hors la boule  $B(o_k, \frac{1}{4}r_k)$ ,  $E_k$  est l'union de 2 graphes de classe  $C^1$ . En particulier pour chaque  $\frac{1}{4}r_k < t < r_k$  et  $i = 1, 2$ ,  $\Gamma_t^i := p_k^{i-1}(P_k^i \cap \partial B(p_k^i(o_k), t))$  est une courbe de classe  $C^1$ , qui est de plus le graphe d'une fonction de classe  $C^1$  du cercle  $P_k^i \cap \partial B(p_k^i(o_k), t)$  vers  $P_k^{i,\perp}$ .

D'un autre côté, on peut montrer par un argument de compacité que, pour chaque  $\epsilon$ , il existe un  $\delta$  (qui pourrait être beaucoup plus petit que  $\epsilon$ ) tel que pour  $k$  assez grand, si  $E_k$  est  $\delta r_k$  proche d'une translation de  $P_k$  dans  $B(o_k, r_k) \setminus B(o_k, \frac{1}{4}r_k)$ , alors il est  $\epsilon r_k$  proche d'une translation de  $P_k$  dans  $B(o_k, r_k)$ . Mais on sait que  $E_k$  n'est  $\epsilon r_k$  proche d'aucune translation de  $P_k$  dans  $B(o_k, r_k)$ , et donc n'est  $\delta r_k$  proche d'aucune translation de  $P_k$  dans  $B(o_k, r_k) \setminus B(o_k, \frac{1}{4}r_k)$ . Il existe alors  $i \in \{1, 2\}$  tel qu'il existe

soit un rayon  $\frac{1}{4}r_k < t_k < r_k$ , tel que  $\Gamma_{t_k}$  lui-même est assez différent d'un cercle horizontal ;

soit deux rayons  $\frac{1}{4}r_k < t_k < t'_k < r_k$  tels que les deux courbes  $\Gamma_{t_k}$  et  $\Gamma_{t'_k}$  sont très plates elles-mêmes, mais à des hauteurs différentes.

Dans les deux cas, on décompose notre  $E_k$  en deux morceaux :  $E_k \cap B(o_k, t_k)$  et  $E_k \cap (B(0, 1) \setminus B(o_k, t_k))$ . C'est notre  $\epsilon$ -décomposition.

Alors pour la partie extérieure, par un argument d'extension harmonique, on peut montrer que

$$(1.36) \quad H^2(E_k \cap B(0, 1) \setminus B(o_k, t_k)) \geq H^2(P_k \cap (B(0, 1) \setminus B(o_k, t_k))) + C(\delta)t_k^2$$

où  $C(\delta)$  ne dépend que de  $\delta$  et donc de  $\epsilon$ . Et pour la partie intérieure, par un argument de projection on peut montrer que

$$(1.37) \quad \begin{aligned} H^2(E_k \cap B(o_k, t_k)) &\geq (1 - C \times (\frac{\pi}{2} - \theta_k))H^2(P_k \cap B(o_k, t_k)) \\ &= H^2(P_k \cap B(o_k, t_k)) - C \times (\frac{\pi}{2} - \theta_k)t_k^2 \end{aligned}$$

où  $\frac{\pi}{2} - \theta_k \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ .

En sommant les deux estimations on obtient

$$(1.38) \quad H^2(E_k) \geq H^2(P_k \cap B(0, 1)) + [C(\delta) - C \times (\frac{\pi}{2} - \theta_k)]t_k^2$$

pour tout  $\epsilon$  assez petit tel que toutes les propriétés de régularités ci-dessus sont vraies. Alors fixons un tel  $\epsilon$ , et donc le  $C(\delta)$  qui ne dépend de  $\epsilon$  et aussi fixé. On fait tendre  $k$  vers l'infini, alors  $[C(\delta) - C(\frac{\pi}{2} - \theta_k)] \rightarrow C(\delta) > 0$ , et donc on gagne une mesure positive  $\frac{1}{2}C(\delta)t_k^2$  de  $E_k$  sur  $P_k$ , quand  $k$  est assez grand.

On obtient donc une contradiction, puisqu'on a supposé que  $E_k$  est de mesure strictement plus petite que  $P_k$ .

Cette sorte d'argument peut se généraliser un peu, soit à l'union presque orthogonaux de deux plans de dimension plus élevée, soit à l'union presque orthogonale dans  $\mathbb{R}^5$  d'un plan et un  $\mathbb{Y}$ . Et aussi,

un autre corollaire facile est que l'union presque orthogonale de  $m$  plans de dimension  $n$  dans  $\mathbb{R}^{nm}$  est minimale. On discutera de ces généralisations aux paragraphes 9 à 11.

Par contre, cet argument utilise plusieurs fois des arguments de compacité. La première fois est au début de la preuve, où on suppose que l'énoncé du théorème n'est pas vrai, et en déduit qu'il existe la suite  $E_k$  qui tend vers  $P_0$ . Mais on ne peut rien dire sur la vitesse de cette convergence. L'autre endroit est quand on démontre que si  $E_k$  est  $\delta r_k$  proche de  $P_k$  dans  $B(o_k, r_k) \setminus B(o_k, \frac{1}{4}r_k)$ , alors il doit être  $\epsilon r_k$  proche de  $P_k$  dans  $B(o_k, r_k)$ . Ici pour estimer  $\delta$  à partir de  $\epsilon$ , il faudrait peut-être mieux comprendre l'unicité de  $P_0$ . Mais en fait bien que l'unicité de  $P_0$  a l'air plus ou moins crédible, sa démonstration est loin d'être simple.

Le plan de la première partie de cette thèse est le suivant.

Dans le paragraphe 2 on va d'abord faire une première estimation entre la mesure d'un ensemble rectifiable quelconque et celles de ses projections sur deux plans, qui dépend bien sûr des angles caractéristiques des deux plans. Cette estimation est plutôt algébrique, si bien qu'on peut la faire sans savoir la structure précise de l'ensemble. On établit aussi la minimalité de  $P_0$ .

Dans le paragraphe 3 on établit l'unicité de  $P_0$ .

A partir du paragraphe 4 on va commencer à démontrer le théorème par l'absurde. On établit l'existence des ensembles localement minimaux  $E_k$ , ainsi que quelques propriétés dont on a besoin.

Le paragraphe 5 consiste à trouver le rayon critique  $r_k$ , et établir quelques propriétés des  $E_k$  hors de la boule  $D(o_k, \frac{1}{4}r_k)$ .

Dans le paragraphe 6 on montre que les projections orthogonales de  $E_k$  sur  $P_k^1$  et  $P_k^2$  sont surjectives, dans  $B(0, 1)$  et dans  $D(o_k, t)$  pour tout  $t \in [\frac{1}{4}r_k, r_k]$ . On donne aussi la  $C^1$ -régularité de  $E_k$  hors de la boule  $D(o_k, \frac{1}{4}r_k)$ .

Le paragraphe 7 donne un argument d'extension harmonique, qui donne une borne inférieure pour la mesure du graphe d'une fonction (définie sur un anneau) en fonction de la taille de ses oscillations près du bord.

Et on arrive à notre conclusion au paragraphe 8, en sommant tous les informations qu'on a collecté pendant les paragraphes précédents.

Dans les trois paragraphes qui suivent, on utilise le même genre d'idées pour obtenir quelques résultats semblables. On montre la minimalité de l'union presque orthogonale de deux plans de dimension plus élevée au paragraphe 9, la minimalité de l'union presque orthogonale de  $m$  plans de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) dans  $\mathbb{R}^{mn}$  dans le paragraphe 10, et finalement dans le paragraphe 11 la minimalité de l'union presque orthogonale d'un plan de dimension 2 et un  $\mathbb{Y}$  de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^5$ .

Dans le paragraphe 12 on montre deux petits résultats. 1) on montre par calibration que le produit de deux  $\mathbb{Y}$  de dimension 1 est minimal si la classe des compétiteurs est restreint à des déformations

injectives. 2) On montre que si le produit de deux ensembles est minimal dans  $\mathbb{R}^n$ , alors chacun est minimal aussi.

## 2 Discussions sur le cas orthogonal et des cas presque orthogonaux

Dans ce paragraphe, on va faire quelques premières estimations pour l'union de deux plans transverses. Ces estimations sont plutôt algébriques, et n'utilisent que l'estimation des projections des 2-vecteurs simples dans  $\mathbb{R}^4$ . Donc dans ce paragraphe on va exprimer des plans de dimension 2 par des 2-vecteurs. Mais ici les 2-vecteurs sont seulement utilisés pour exprimer les positions relatives entre des plans, ou traités comme des élément de surface ou la dérivée d'une applications différentiable entre deux ensembles rectifiables quand on essaye de faire une intégration. Donc dans notre démonstrations l'orientation des 2-vecteurs ne compte jamais, autrement dit on n'aura pas besoin de distinguer  $x \wedge y$  et  $y \wedge x$ .

Donc soit  $x, y$  deux vecteurs dans  $\mathbb{R}^4$ , on note  $x \wedge y$  leur produit extérieur, qui appartient à  $\wedge_2(\mathbb{R}^4)$ , l'espace des 2-vecteurs dans  $\mathbb{R}^4$ . Et si  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq 4}$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^4$ , alors  $\{e_i \wedge e_j\}_{1 \leq i < j \leq 4}$  forme une base de  $\wedge_2(\mathbb{R}^4)$ . On dit qu'un élément  $v \in \wedge_2(\mathbb{R}^4)$  est simple si on peut l'écrire comme le produit extérieur de deux vecteurs :  $v = x \wedge y, x, y \in \mathbb{R}^4$ .

La norme sur l'espace  $\wedge_2(\mathbb{R}^4)$ , notée  $|\cdot|$ , est simplement définie par

$$(2.1) \quad \left| \sum_{i < j} \lambda_{ij} e_i \wedge e_j \right| = \sum_{i < j} |\lambda_{ij}|^2.$$

Alors  $\wedge_2(\mathbb{R}^4)$  est un espace hilbertien sous cette norme, et  $\{e_i \wedge e_j\}_{1 \leq i < j \leq 4}$  en est une base orthonormée. Et pour tout 2-vecteur simple  $x \wedge y$ , sa norme est

$$(2.2) \quad |x \wedge y| = \|x\| \|y\| \sin \langle x, y \rangle,$$

où  $\langle x, y \rangle \in [0, \pi]$  est l'angle entre les vecteurs  $x$  et  $y$ , et  $\|\cdot\|$  désigne la norme Euclidienne sur  $\mathbb{R}^4$ . Un 2-vecteur simple unitaire est un 2-vecteur simple dont la norme est 1. Notons que  $|\cdot|$  est engendrée par le produit scalaire  $\langle , \rangle$  défini sur  $\wedge_2(\mathbb{R}^4)$  comme suit : pour  $\xi = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} a_{ij} e_i \wedge e_j, \zeta = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} b_{ij} e_i \wedge e_j$ ,

$$(2.3) \quad \langle \xi, \zeta \rangle = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} a_{ij} b_{ij}.$$

On peut vérifier que si les sous-espaces (de dimension 2) engendrés par les 2 paires de vecteurs  $x, y$  et  $x', y'$  respectivement sont égaux, alors il existe  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tel que  $x \wedge y = r x' \wedge y'$ .

Maintenant étant donné un 2-vecteur unitaire simple  $\xi$ , on peut l'associer à un sous-espace  $P(\xi) \in G(4, 2)$  de dimension 2 de  $\mathbb{R}^4$ , où  $G(4, 2)$  est l'ensemble des sous-espaces de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^4$  (ou l'ensemble des 2-plans dans  $\mathbb{R}^4$  passant par l'origine),

$$(2.4) \quad P(\xi) = \{v \in \mathbb{R}^4, v \wedge \xi = 0\}.$$

Autrement dit  $P(x \wedge y)$  est le sous-espace engendré par  $x$  et  $y$ .

On écrit aussi, quand il n'y a pas d'ambiguïté,  $P = x \wedge y$ , où  $P \in G(4, 2)$  et  $x, y \in \mathbb{R}^4$  lorsque  $P = P(x \wedge y)$  et  $x \wedge y$  est unitaire. Mais notons que quand on écrit  $P = x \wedge y$  et  $P = x' \wedge y'$  où  $x \wedge y, x' \wedge y'$  sont deux 2-vecteur simple unitaire, cela ne veut pas dire du tout que  $x \wedge y = x' \wedge y' \in \wedge_2(\mathbb{R}^4)$ . (Par contre il existe  $\epsilon \in \{-1, 1\}$  tel que  $x \wedge y = \epsilon x' \wedge y'$ .)

Au niveau des applications linéaires, si  $f$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^4$ , alors on note  $\wedge_2 f$  (et aussi  $f$  s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'application linéaire de  $\wedge_2(\mathbb{R}^4)$  dans  $\wedge_2(\mathbb{R}^4)$  telle que

$$(2.5) \quad \wedge_2 f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y).$$

Et au niveau de  $G(4, 2)$  (l'ensembles des plans non-orientés), pour  $\xi \in \wedge_2 \mathbb{R}^4$  qui est simple unitaire, on a  $P(\xi) = P(-\xi)$ , de sorte qu'on peut définir  $|f(\cdot)| : G(4, 2) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  par

$$(2.6) \quad |f(P(\xi))| = |\wedge_2 f(\xi)|.$$

On peut vérifier facilement que la valeur de  $|f(P(\xi))|$  ne dépend pas du choix de  $\xi$  qui engendre  $P$ . Donc  $|f(\cdot)|$  est bien définie.

## 2.1 Estimation des projections sur l'union de 2 plans transverses pour tout 2-vecteur simple

Rappelons la définition des angles caractéristiques entre 2 plans. Soit  $P, Q$  deux plans de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^4$ . Parmi les paires de vecteurs unitaires  $(v, w), v \in P, w \in Q$ , on choisit  $v_1, w_1$  qui minimise l'angle entre eux. Et on note  $\alpha_1$  cet angle minimal. Ensuite on regarde les paires de vecteurs unitaires  $\{(v', w') : v' \in P, w' \in Q, v' \perp v_1, w' \perp w_1\}$ , et on choisit  $(v_2, w_2)$  qui minimise l'angle parmi toutes les telles paires (et en fait ici puisque  $P$  et  $Q$  sont de dimension 2, quand  $w_1, v_1$  sont fixé, en général il ne reste que 4 telle paires :  $(\pm v_2, \pm w_2)$ ). Notons  $\alpha_2$  l'angle entre  $v_2$  et  $w_2$ . Alors  $(\alpha_1, \alpha_2)$  (où  $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ) et le couple des angles caractéristiques entre  $P$  et  $Q$ .

Les angles caractéristiques caractérisent absolument la position relative entre les 2 plans de la façon suivante. On peut trouver une base orthonormée  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq 4}$ , telle que

$$(2.7) \quad P = e_1 \wedge e_2 \text{ et } Q = (\cos \alpha_1 e_1 + \sin \alpha_1 e_3) \wedge (\cos \alpha_2 e_2 + \sin \alpha_2 e_4).$$

Notons que deux plans  $P$  et  $Q$  sont orthogonaux si leur couple d'angles caractéristiques est  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

Maintenant étant donné une paire de plans  $P^1, P^2$  avec le couple des angles caractéristiques  $(\alpha_1, \alpha_2)$ , on veut estimer la somme des projections sur eux d'un 2-vecteur simple unitaire. On prend  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq 4}$  une base orthonormée telle que

$$(2.8) \quad P^1 = e_1 \wedge e_2 \text{ et } P^2 = (\cos \alpha_1 e_1 + \sin \alpha_1 e_3) \wedge (\cos \alpha_2 e_2 + \sin \alpha_2 e_4).$$

Notons également  $p^i$  la projection orthogonale sur  $P^i$ ,  $i = 1, 2$ . Alors les  $p^j$  sont des applications linéaires. Notons  $p^j$  l'application linéaire  $\wedge_2 p^j$  de  $\wedge_2(\mathbb{R}^4)$  dans lui-même définie par (2.5).

Maintenant soit  $\xi$  un 2-vecteur unitaire simple, alors il existe deux vecteurs unitaires  $x, y$  tels que  $\xi = x \wedge y$  et  $x \perp y$ . Ecrivons  $x, y$  dans la base :

$$(2.9) \quad x = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4, y = a'e_1 + b'e_2 + c'e_3 + d'e_4$$

avec

$$(2.10) \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2 = 1$$

et

$$(2.11) \quad aa' + bb' + cc' + dd' = 0.$$

On calcule ensuite les projections  $|p^j(\xi)|$ .

$$(2.12) \quad |p^1(\xi)| = |\langle e_1 \wedge e_2, \xi \rangle| = |ab' - a'b|,$$

et

$$(2.13) \quad \begin{aligned} |p^2(\xi)| &= |\langle (\cos \alpha_1 e_1 + \sin \alpha_1 e_3) \wedge (\cos \alpha_2 e_2 + \sin \alpha_2 e_4), \xi \rangle| \\ &= |(ab' - a'b) \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + (ad' - a'd) \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ &\quad + (cb' - c'b) \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + (cd' - c'd) \sin \alpha_1 \sin \alpha_2|. \end{aligned}$$

Alors quand  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ , on a

$$(2.14) \quad \begin{aligned} |p^1(\xi)| + |p^2(\xi)| &= |ab' - a'b| + |cd' - c'd| \\ &\leq \frac{1}{2}(a^2 + b'^2 + a'^2 + b^2) + \frac{1}{2}(c^2 + d'^2 + c'^2 + d^2) = 1 \end{aligned}$$

à cause de (2.10).

On a donc le lemme suivant.

**Lemme 2.15.** Soit  $P^1, P^2$  deux plans orthogonaux, alors pour chaque 2-vecteur unitaire simple  $\xi \in \wedge_2 \mathbb{R}^4$  on a

$$(2.16) \quad |p^1(\xi)| + |p^2(\xi)| \leq 1.$$

Mais on aura encore besoin de savoir quel est l'ensemble des vecteurs tels que l'inégalité dans (2.16) est une égalité.

Notons  $\Xi$  l'ensemble des 2-vecteurs simples unitaires  $\xi \in \Lambda_2 \mathbb{R}^4$  qui vérifient

$$(2.17) \quad |p^1(\xi)| + |p^2(\xi)| = 1.$$

Alors  $P(\Xi) = \{P(\xi), \xi \in \Xi\}$  est un compact dans l'ensemble  $G(4, 2)$  de tous les 2-vecteurs simples unitaires, où la topologie est la topologie engendrée par la distance classique sur notre Grassmannien  $G(4, 2)$  (c.f. [14], 1.6.2). Alors on a, par un calcul élémentaire, le lemme suivant :

**Lemme 2.18.**

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \Xi = & \{(\cos \alpha v_1 + \sin \alpha u_1) \wedge (\cos \alpha v_2 + \sin \alpha u_2) : \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ & v_i, u_i \text{ des vecteurs unitaires}, v_i \in P^1, u_i \in P^2, i = 1, 2, \text{ et } v_1 \perp v_2, u_1 \perp u_2\}. \end{aligned}$$

Démonstration. Prenons un  $\xi \in \Xi$ , puis écrivons-le sous la forme  $x \wedge y$  avec  $x \perp y$  qui vérifient (2.9)-(2.11). Alors  $\xi \in \Xi$  si et seulement si (2.14) est une égalité, ce qui veut dire

$$(2.20) \quad |ab' - a'b| = \frac{1}{2}(a^2 + b'^2 + a'^2 + b^2), \quad |cd' - c'd| = \frac{1}{2}(c^2 + d'^2 + c'^2 + d^2).$$

Par la première égalité on a

$$(2.21) \quad |ab'| = \frac{1}{2}(a^2 + b'^2), \quad |a'b| = \frac{1}{2}(a'^2 + b^2)$$

et

$$(2.22) \quad |ab' - a'b| = |ab'| + |a'b|.$$

Puis (2.21) donne

$$(2.23) \quad |a| = |b'|, \quad |a'| = |b|,$$

ce qui implique

$$(2.24) \quad a = \pm b', \quad a' = \pm b.$$

En combinant avec (2.22) on obtient

$$(2.25) \quad a = b', \quad a' = -b \text{ ou } a = -b', \quad a' = b.$$

Un argument semblable donne

$$(2.26) \quad c = d', \quad c' = -d \text{ ou } c = -d', \quad c' = d.$$

Donc

$$(2.27) \quad a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2, \quad c^2 + d^2 = c'^2 + d'^2 \text{ et } aa' + bb' = 0, \quad cc' + dd' = 0.$$

Alors si  $a^2 + b^2 = 0$  (resp.  $c^2 + d^2 = 0$ ), l'énoncé est automatiquement vrai, en posant directement  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  (resp.  $\alpha = 0$ ) et  $v_1 = e_1, v_2 = e_2$  ou  $-e_2, u_1 = e_3, u_2 = e_4$  ou  $-e_4$ .

Si  $a^2 + b^2 \neq 0, c^2 + d^2 \neq 0$ , on pose

$$(2.28) \quad v_1 = \frac{ae_1 + be_2}{a^2 + b^2}, \quad v_2 = \frac{a'e_1 + b'e_2}{a'^2 + b'^2}, \quad u_1 = \frac{ce_3 + de_4}{c^2 + d^2}, \quad u_2 = \frac{c'e_3 + d'e_4}{c'^2 + d'^2},$$

et

$$(2.29) \quad \alpha = \arccos \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \arccos(a^2 + b^2),$$

alors  $\cos \alpha = a^2 + b^2, \sin \alpha = c^2 + d^2$  et  $v_i, u_i$  sont des vecteurs unitaires,  $v_i \in P^1, u_i \in P^2, i = 1, 2$ , et  $v_1 \perp v_2, u_1 \perp u_2$ . Par conséquent

$$(2.30) \quad x = \cos \alpha v_1 + \sin \alpha u_1 \text{ et } y = \cos \alpha v_2 + \sin \alpha u_2$$

et  $\xi$  peut être écrit sous la forme

$$(2.31) \quad \xi = (\cos \alpha v_1 + \sin \alpha u_1) \wedge (\cos \alpha v_2 + \sin \alpha u_2)$$

avec  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}], v_i, u_i$  des vecteurs unitaires,  $v_i \in P^1, u_i \in P^2, i = 1, 2$ , et  $v_1 \perp v_2, u_1 \perp u_2$ .

La réciproque est triviale. En effet, on a  $P(v_1 \wedge v_2) = P^1, P(u_1 \wedge u_2) = P^2, p^1(u_i \wedge v_j) = p^2(u_i \wedge v_j) = p^1(u_1 \wedge u_2) = p^2(v_1 \wedge v_2) = 0$ , et donc

$$(2.32) \quad |p^1(\xi)| = \cos^2 \alpha, \quad |p^2(\xi)| = \sin^2 \alpha.$$

Par conséquent

$$(2.33) \quad |p^1(\xi)| + |p^2(\xi)| = 1,$$

d'où  $\xi \in \Xi$ .

Fin de la démonstration du lemme.

Maintenant on regarde des plans dont les angles caractéristiques sont presque orthogonaux. On va démontrer la proposition suivante.

**Proposition 2.34.** Soit  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$ , et soit  $P^1, P^2 \subset \mathbb{R}^4$  deux plans qui font des angles caractéristiques  $\alpha_1 \leq \alpha_2$ . Si on note  $p^i$  la projection orthogonale sur  $P^i$ , alors pour tout vecteur simple unitaire  $\zeta \in \Lambda_2 \mathbb{R}^4$ , la somme des projections vers ces 2 plans satisfait à :

$$(2.35) \quad |p^1 \zeta| + |p^2 \zeta| \leq 1 + 2 \cos \alpha_1.$$

**Remarque 2.36.** Notons que quand  $\alpha_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , on a que  $\cos \alpha_1 \rightarrow 0$ . Donc le lemme implique que pour tout  $\epsilon$  petit, il existe un  $\theta = \theta(\epsilon) \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  tel que si  $\alpha_2 \geq \alpha_1 \geq \theta$  alors pour tout vecteur simple unitaire  $\zeta \in \Lambda_2 \mathbb{R}^4$ ,

$$(2.37) \quad |p^1 \zeta| + |p^2 \zeta| \leq 1 + \epsilon.$$

Démonstration.

Soit  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$  fixés quelconques, et soit  $P^1$  et  $P^2$  une paire de plans avec les angles caractéristiques  $\alpha_1, \alpha_2$ . Alors il existe une base orthonormée de  $\mathbb{R}^4$   $\{e_i\}_{1 \leq i \leq 4}$  telle que  $P^1 = e_1 \wedge e_2$ ,  $P^2 = (\cos \alpha_1 e_1 + \sin \alpha_1 e_3) \wedge (\cos \alpha_2 e_2 + \sin \alpha_2 e_4)$ .

Notons  $p$  la projection orthogonale vers le plan  $P(e_3 \wedge e_4)$ .

Pour tout  $\zeta \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)$  simple unitaire, on a

$$(2.38) \quad |p^1 \zeta| + |p^2 \zeta| = |p^1 \zeta| + |p \zeta| + (|p^2 \zeta| - |p \zeta|) \leq |p^1 \zeta| + |p \zeta| + |p^2 \zeta - p \zeta|.$$

Par le lemme 2.15, on sait déjà que

$$(2.39) \quad |p^1 \zeta| + |p \zeta| \leq 1.$$

Il ne reste donc qu'à regarder  $|(p^2 - p)\zeta|$ .

Mais

$$(2.40) \quad \begin{aligned} (p^2 - p)(\zeta) &= < (\cos \alpha_1 e_1 + \sin \alpha_1 e_3) \wedge (\cos \alpha_2 e_2 + \sin \alpha_2 e_4) - e_3 \wedge e_4, \zeta > \\ &= < \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 e_1 \wedge e_2 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 e_1 \wedge e_4 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 e_3 \wedge e_2 \\ &\quad + (\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - 1) e_3 \wedge e_4, \zeta >. \end{aligned}$$

Notons que  $\zeta$  est un 2-vecteur unitaire, donc

$$(2.41) \quad \zeta = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} a_{ij} e_i \wedge e_j$$

et

$$(2.42) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq 4} a_{ij}^2 = 1.$$

Alors

$$(2.43) \quad \begin{aligned} (p^2 - p)(\zeta) &= a_{12} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + a_{14} \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ &\quad - a_{23} \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + a_{34} (\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - 1). \end{aligned}$$

Maintenant on sait que  $a_{12}^2 + a_{14}^2 + a_{23}^2 + a_{34}^2 \leq 1$ , donc par Cauchy-Schwarz et  $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ,

$$(2.44) \quad \begin{aligned} &|(p^2 - p)(\zeta)| \\ &\leq [\cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_2 + (\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - 1)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq [\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + (1 - \sin^2 \alpha_1)]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq [3 \cos^2 \alpha_1 + \cos^4 \alpha_1]^{\frac{1}{2}} \leq [4 \cos^2 \alpha_1]^{\frac{1}{2}} = 2 \cos \alpha_1. \end{aligned}$$

Alors en sommant avec (2.38) et (2.39) on obtient la conclusion.

## 2.2 Comparaison de la mesure d'un ensemble rectifiable avec la somme de celles de ses projections sur deux plans

On va appliquer les estimations sur les 2-vecteurs qu'on vient d'obtenir à des ensembles rectifiables. Soit  $F$  un ensemble 2-rectifiable, alors pour presque tout  $x \in F$  le plan tangent approximatif de  $F$  en  $x$  existe (c.f.[24] Thm 15.11), notons le  $T_x F$ . Alors  $T_x F \in G(4, 2)$ , et pour chaque application linéaire  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $|f(T_x F)|$  est défini comme dans (2.6).

**Lemme 2.45.** *Soit  $P^1, P^2$  deux plans dans  $\mathbb{R}^4$ ,  $F \subset \mathbb{R}^4$  un ensemble 2-rectifiable. Notons  $p^i$  la projection orthogonale sur  $P^i$ . Soit  $\lambda$  tel que pour presque tout  $x \in F$ , le plan tangent  $T_x F \in G(4, 2)$  de  $F$  en  $x$  vérifie*

$$(2.46) \quad |p^1(T_x F)| + |p^2(T_x F)| \leq \lambda,$$

alors on a

$$(2.47) \quad H^2(p^1(F)) + H^2(p^2(F)) \leq \lambda H^2(F).$$

Démonstration.

Notons  $f$  la restriction de  $p^1$  à  $F$ , alors  $f$  est une fonction Lipschitzienne d'un ensemble 2-rectifiable vers un sous-ensemble d'un 2-plan  $P^1$ . Puisque  $F$  est 2-rectifiable, pour  $H^2$ -presque tout  $x \in F$ ,  $f$  a une différentielle approximative

$$(2.48) \quad apDf(x) : T_x F \rightarrow P^1$$

(c.f.[14], Thm 3.2.19). De plus cette différentielle est telle que  $\|\wedge_2 apDf(x)\| \leq 1$  presque partout, parce que  $f$  est 1-Lipschitzienne.

Maintenant on peut appliquer la formule de l'aire à  $f$ , (c.f. [14] Cor 3.2.20). Pour toute fonction  $g : F \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  qui est intégrable pour  $H^2|_F$  on a :

$$(2.49) \quad \int_F (g \circ f) \cdot \|\wedge_2 apDf(x)\| dH^2 = \int_{P^1} g(z) N(f, z) dH^2 z,$$

où

$$(2.50) \quad N(f, z) = \#\{f^{-1}(z)\},$$

et pour  $z \in p^1(F)$  on a  $N(f, z) \geq 1$ . On prend  $g \equiv 1$  et on obtient

$$(2.51) \quad \int_F \|\wedge_2 apDf(x)\| dH^2 = \int_{P^1} N(f, z) dH^2 z \geq \int_{p^1(F)} dH^2 = H^2(p^1(F)).$$

On rappelle que  $p^1$  est linéaire, et donc sa différentielle est elle-même. Donc  $apDf(x)$  est la restriction de  $p^1$  au 2-sous-espace  $T_x F$ , de sorte que si  $u, v$  est une base orthonormée de  $T_x F$ , alors

$$(2.52) \quad \|\wedge_2 apDf(x)\| = |\wedge_2 p^1(u \wedge v)| = |p^1(T_x F)|$$

par (2.6). On a donc par (2.51)

$$(2.53) \quad \int_F |p^1(T_x F)| dH^2(x) \geq H^2(p^1(F)).$$

Par un argument semblable on a aussi :

$$(2.54) \quad \int_F |p^2(T_x F)| dH^2(x) \geq H^2(p^2(F)).$$

En sommant sur  $i=1,2$  on obtient

$$(2.55) \quad \begin{aligned} H^2(p^1 F) + H^2(p^2 F) &\leq \int_F |p^1 T_x F| + |p^2 T_x F| dH^2(x) \\ &\leq \int_F \lambda dH^2(x) = \lambda H^2(F) \end{aligned}$$

puisque  $|p^1 T_x F| + |p^2 T_x F| \leq \lambda$ .

Fin de la démonstration du lemme.

Voici 2 corollaires du lemme.

**Corollaire 2.56.** *L'ensemble  $P_0 = P_0^1 \cup_{\perp} P_0^2 \subset \mathbb{R}^4$  est minimal.*

Démonstration.

Soit  $F$  un compétiteur de  $P_0$  dans  $B(0, 1)$ , alors par la remarque 1.17, ceci signifie qu'il existe une déformation Lipschitzienne  $\varphi$  dans  $\mathbb{R}^4$ , avec

$$(2.57) \quad \varphi|_{B(0,1)^C} = Id; \quad \varphi(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$$

et

$$(2.58) \quad \varphi(P_0) \cap B(0, 1) = F.$$

On va comparer la surface de  $F$  avec celle de  $P_0 \cap B(0, 1)$ .

Notons  $p_0^i, i = 1, 2$  les projections orthogonales de  $\mathbb{R}^4$  sur  $P_0^i$ . Puisque  $F$  est un ensemble 2-rectifiable, le 2-plan tangent  $T_x F \in G(4, 2)$  existe pour presque tout  $x \in F$ . En représentant les plans sous la forme de 2-vecteurs simples, et par le lemme 2.15,

$$(2.59) \quad |p_0^1(T_x F)| + |p_0^2(T_x F)| \leq 1.$$

D'après le lemme 2.45 on a

$$(2.60) \quad H^2(p_0^1(F)) + H^2(p_0^2(F)) \leq H^2(F).$$

On note  $F^i = p_0^i \circ \varphi(P_0^i \cap B(0, 1)), i = 1, 2$ , alors  $F^i$  est une déformation de  $P_0^i \cap B(0, 1)$ , et par la minimalité des plans (dans n'importe quelle dimension ambiante) on a

$$(2.61) \quad H^2(F^i) \geq H^2(P_0^i \cap B(0, 1)).$$

Maintenant puisque

$$(2.62) \quad p_0^i(F) = p_0^i \circ \varphi(P_0 \cap B(0, 1)) \supset p_0^i \circ \varphi(P_0^i \cap B(0, 1)) = F^i$$

on a

$$(2.63) \quad H^2(p_0^i(F)) \geq H^2(F^i) \geq H^2(P_0^i \cap B(0, 1)).$$

En sommant sur  $i$  on obtient :

$$(2.64) \quad \begin{aligned} H^2(F) &\geq H^2(p_0^1 F) + H^2(p_0^2 F) \\ &\geq H^2(P_0^1 \cap B(0, 1)) + H^2(P_0^2 \cap B(0, 1)) = H^2(P_0 \cap B(0, 1)). \end{aligned}$$

C'est à dire que  $P_0$  est minimal.  $\square$

**Corollaire 2.65.** Soit  $\epsilon > 0$  tel que  $\arccos(\epsilon/2) \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$ ,  $P^1, P^2$  deux plans d'angles caractéristiques  $(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $p^i$  leurs projecteurs respectifs, et  $E$  un ensemble fermé, 2-rectifiable, tel que  $p^i(E) \supset B(0, 1) \cap P^i$ . Alors on a

$$(2.66) \quad H^2(E) \geq \frac{2\pi}{1 + \epsilon}.$$

Démonstration. D'après la proposition 2.34, on a qu'en presque tout point  $x \in E$ , le plan tangent  $T_x E$  de  $E$  en  $x$  vérifie

$$(2.67) \quad |p^1(T_x E)| + |p^2(T_x E)| \leq 1 + \epsilon.$$

On applique le lemme 2.45, et on obtient notre conclusion.  $\square$

### 3 Unicité de $P_0$

Dans ce paragraphe, on va préciser le corollaire 2.56.

**Théorème 3.1.** /unicité de  $P_0/$  Soit  $P_0 = P_0^1 \cup_{\perp} P_0^2$ , comme dans le paragraphe précédent, et  $p_0^i$  la projection orthogonale sur  $P_0^i$ ,  $i = 1, 2$ . Soit  $E \subset \overline{B}(0, 1)$  un ensemble de dimension 2 fermé réduit qui est minimal dans  $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^4$ , et qui vérifie :

$$(3.2) \quad p_0^i(E \cap B(0, 1)) \supset P_0^i \cap B(0, 1) ;$$

$$(3.3) \quad E \cap \partial B(0, 1) = P_0 \cap \partial B(0, 1) ;$$

$$(3.4) \quad H^2(E \cap B(0, 1)) = 2\pi.$$

Alors  $E = P_0 \cap \overline{B}(0, 1)$ .

Démonstration. D'abord observons que  $p_0^i(E) = P_0^i \cap \overline{B}(0, 1)$ , puisque  $E \subset \overline{B}(0, 1)$  et  $p_0^i(E) \supset P_0^i \cap \overline{B}(0, 1)$ . Et on a donc

$$(3.5) \quad \begin{aligned} H^2(E) &= H^2(E \cap B(0, 1)) = 2\pi \\ &= H^2(P_0^1 \cap B(0, 1)) + H^2(P_0^2 \cap B(0, 1)) = H^2(p_0^1(E)) + H^2(p_0^2(E)). \end{aligned}$$

Comparé avec (2.55), sachant qu'ici on peut prendre  $\lambda = 1$  à cause du lemme 2.15, on a que toutes les inégalités dans (2.55), et donc aussi dans (2.51), sont en fait des égalités. On verra bientôt que cela exige qu'en presque tout point  $x \in E$ ,

$$(3.6) \quad |p_0^1(T_x E)| + |p_0^2(T_x E)| = 1$$

et pour  $i = 1, 2$ , pour presque tout  $z \in p_0^i(E)$ ,

$$(3.7) \quad N(p_0^i, z) = \#\{p_0^{i-1}(z) \cap E\} = 1.$$

Plus précisément on a le lemme suivant :

**Lemme 3.8.** 1) Pour presque tout  $x \in E$ ,  $T_x E \in P(\Xi)$ .

2) Pour chaque  $i = 1, 2$ , pour presque tout  $z \in P_0^i \cap B(0, 1) = p_0^i(E)$ , (3.7) est vrai.

Démonstration. 1) On a

$$(3.9) \quad E \setminus \{x \in E : T_x E \in P(\Xi)\} = \{x \in E : |p_0^1 T_x E| + |p_0^2 T_x E| < 1\} = \cup_{n=1}^{\infty} T_n$$

où  $T_n = \{x \in E : |p_0^1 T_x E| + |p_0^2 T_x E| < 1 - \frac{1}{n}\}$ . Les  $T_n$  sont mesurables. Donc il suffit de montrer que  $H^2(T_n) = 0$  pour tout  $n$ .

Supposons que ce n'est pas vrai. Il existe donc un  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $H^2(T_n) = \beta > 0$ . Alors en appliquant encore une fois le lemme 2.45 on a

$$(3.10) \quad H^2(p_0^1(T_n)) + H^2(p_0^2(T_n)) \leq (1 - \frac{1}{n})H^2(T_n).$$

D'un autre côté, pour presque tout  $x \in E \setminus T_n$  on a  $|p_0^1 T_x(E \setminus T_n)| + |p_0^2 T_x(E \setminus T_n)| \leq 1$ , donc (toujours à cause du lemme 2.45)

$$(3.11) \quad H^2(p_0^1(E \setminus T_n)) + H^2(p_0^2(E \setminus T_n)) \leq H^2(E \setminus T_n)$$

et par conséquent

$$(3.12) \quad \begin{aligned} H^2(E) &= H^2(T_n) + H^2(E \setminus T_n) = (1 - \frac{1}{n})H^2(T_n) + H^2(E \setminus T_n) + \frac{1}{n}H^2(T_n) \\ &\geq H^2(p_0^1(T_n)) + H^2(p_0^2(T_n)) + H^2(p_0^1(E \setminus T_n)) + H^2(p_0^2(E \setminus T_n)) + \frac{1}{n}\beta \\ &= [H^2(p_0^1(T_n)) + H^2(p_0^1(E \setminus T_n))] + [H^2(p_0^2(T_n)) + H^2(p_0^2(E \setminus T_n))] + \frac{1}{n}\beta \\ &\geq H^2(p_0^1(T_n) \cup p_0^1(E \setminus T_n)) + H^2(p_0^2(T_n) \cup p_0^2(E \setminus T_n)) + \frac{1}{n}\beta \\ &= H^2(p_0^1(T_n \cup (E \setminus T_n))) + H^2(p_0^2(T_n \cup (E \setminus T_n))) + \frac{1}{n}\beta \\ &= H^2(p_0^1(E)) + H^2(p_0^2(E)) + \frac{1}{n}\beta. \end{aligned}$$

On sait déjà que  $p_0^i(E) = P_0^i \cap B(0, 1)$ ,  $i = 1, 2$ , donc  $H^2(p_0^i(E)) = H^2(P_0^i \cap B(0, 1)) = \pi$ , et par conséquent

$$(3.13) \quad H^2(E) \geq H^2(p_0^1(E)) + H^2(p_0^2(E)) + \frac{1}{n}\beta \geq 2\pi + \frac{1}{n}\beta > 2\pi$$

en contradiction avec (3.4).

2) Montrons-le par l'absurde. Prenons  $i = 1$  par exemple. Notons  $B = \{z \in p_0^1(E) : \#\{p_0^{i-1}(z) \cap E\} \geq 2\}$ . Alors  $B$  est mesurable. Notons aussi  $p_0^{i-1}(B) \cap E = A$ .

Supposons que  $H^2(B) > 0$ . Alors  $A$  est aussi de mesure non nulle. Par (2.51)

$$(3.14) \quad \int_A |\wedge_2 apDp_0^1(x)| dH^2(x) = \int_B \#(p_0^{i-1}\{y\} \cap E) dH^2(y) \geq 2H^2(B),$$

et donc par (2.52)

$$(3.15) \quad \int_A |p_0^1(T_x A)| dH^2(x) \geq 2H^2(B).$$

Par conséquent

$$(3.16) \quad \begin{aligned} H^2(A) &\geq \int_A |p_0^1 T_x A| + |p_0^2 T_x A| dH^2(x) \\ &\geq 2H^2(p_0^1(A)) + H^2(p_0^2(A)) = 2H^2(B) + H^2(p_0^2(A)). \end{aligned}$$

D'un autre côté, on a par les lemmes 2.45 et 2.15

$$(3.17) \quad \begin{aligned} H^2(E \setminus A) &\geq H^2(p_0^1(E \setminus A)) + H^2(p_0^2(E \setminus A)) \\ &\geq H^2(P_0^1 \cap B(0, 1) \setminus B) + H^2(p_0^2(E \setminus A)). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$(3.18) \quad \begin{aligned} H^2(E) &= H^2(A) + H^2(E \setminus A) \\ &\geq 2H^2(B) + H^2(p_0^2(A)) + H^2(P_0^1 \cap B(0, 1) \setminus B) + H^2(p_0^2(E \setminus A)) \\ &\geq H^2(p_0^1(E)) + H^2(p_0^2(E)) + H^2(B) \\ &= H^2(P_0^1 \cap B(0, 1)) + H^2(P_0^2 \cap B(0, 1)) + H^2(B) \\ &\geq 2\pi + H^2(B) > 2\pi \end{aligned}$$

en contradiction avec (3.4).

Fin de la démonstration du lemme.

Nous allons maintenant utiliser ce résultat et le lemme 2.18 pour obtenir des propriétés locales de l'ensemble  $E$  du théorème 3.1. D'abord puisque  $E \cap B(0, 1)$  est un ensemble minimal réduit de dimension 2 dans  $B(0, 1)$ , on sait que pour tout  $x \in E \cap B(0, 1)$ , il existe  $r = r_x > 0$  tel que dans  $B(x, r)$ ,  $E$  est bi-Höldériennement équivalent à un cône minimal  $C_x$  (c.f.[9], Thm 16.1). On appelle une telle boule  $B(x, r)$  une boule bi-Höldérienne de  $x$ . Un tel  $C_x$  est obtenu comme limite d'une suite d'ensembles

$E(r, x)$  définis dans (1.26), ce qui est appelé une limite d'explosion de  $E$  en  $x$ . Il peut y avoir plusieurs limites d'explosions en un point, mais toutes ces limites sont bi-Höldériennement équivalentes, d'après le théorème qu'on vient de citer. Et on appelle  $x$  un point de type  $C_x$ . De plus si  $C_x$  admet la propriété de "full length" (voir [10] Définition 2.10), alors il est effectivement l'unique limite d'explosion, et l'équivalence entre  $E$  et  $C_x$  est en fait de classe  $C^1$  dans une boule  $B(x, r)$  (c.f.[10] Thm 1.15).

La propriété "full-length" est vérifiée par tous les cônes minimaux qu'on connaît. Par exemple, les plans ([10], Lemme 14.4) ; et ce qu'on appelle un  $\mathbb{Y}$ , qui est l'union de trois demi-plan qui se rencontrent le long d'une droite en faisant des angles de 120 degrés ([10], Lemme 14.6). En fait ils vérifient aussi la propriété "full-length à cause des angles", qui est un peu plus forte que "full-length" (c.f. [10], (14.2)). De plus si  $C_1, C_2$  sont des cônes minimaux "full-length à cause des angles" qui ne se croisent qu'à l'origine, et  $C_1 \cup C_2$  est un cône minimal, alors  $C_1 \cup C_2$  vérifie la propriété de "full-length à cause des angles" aussi (c.f.[10], Remarque 14.40).

D'un autre côté, ce qu'on sait en général pour un cône minimal, est que son intersection  $S$  avec la sphère unité est une union finie de cercles et d'arcs de cercles. Chaque cercle est disjoint du reste de  $S$ . Près de chaque extrémité  $x$  d'un arc de cercle,  $S$  est composé de 3 arcs qui font des angles de 120° en  $x$  (c.f.[9], Proposition 14.1). Alors si un cône minimal n'est pas une union des plans transverses, son intersection avec la sphère contient au moins un point qui est à la jonction de 3 arcs de cercle. En particulier il existe des points de type  $\mathbb{Y}$  arbitrairement proches de l'origine.

On peut déduire

**Lemme 3.19.** *Il n'y a pas de point de type  $\mathbb{Y}$  dans  $E \cap B(0, 1)$ .*

Démonstration. Soit  $x \in E$  un point de type  $\mathbb{Y}$ . Cela signifie que le cône tangent  $C_x$  est composé de 3 demi-plans fermés  $\{P_i\}_{1 \leq i \leq 3}$  qui se rencontrent le long d'une droite  $D$  passant par l'origine. Notons  $Q_i, 1 \leq i \leq 3$  le plan qui contient  $P_i$ . On affirme que

$$(3.20) \quad \text{au moins un des } Q_i \text{ n'appartient pas à } P(\Xi).$$

En effet si on note  $v$  le vecteur unitaire qui engendre  $D$ , alors il existe trois vecteurs unitaires  $w_i, 1 \leq i \leq 3$  tels que  $w_i \perp v$  et  $Q_i = P(v \wedge w_i)$ , et que les angles entre les  $w_i$  sont tous de 120 degré. Si  $Q_1 \notin P(\Xi)$ , notre affirmation (3.20) est automatiquement vraie. Sinon,  $Q_1 \in P(\Xi)$ , est donc  $v \wedge w_1 \in \Xi$ . D'après la démonstration du lemme 2.18 (qui démontre en fait que pour chaque paire de vecteurs unitaires perpendiculaires  $x, y$  tel que  $x \wedge y \in \Xi$ , (2.30) est vrai) , il existe  $v_j, u_j, j = 1, 2$  des vecteurs unitaires tels que,  $v_j \in P_0^1, u_j \in P_0^2, v_1 \perp v_2, u_1 \perp u_2$ , et  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$  tel que

$$(3.21) \quad v = \cos \alpha v_1 + \sin \alpha u_1, w_1 = \cos \alpha v_2 + \sin \alpha u_2.$$

Maintenant puisque les  $u_j, v_j$  engendent  $\mathbb{R}^4$ , il existe  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  avec  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$  tel que

$w_2 = av_1 + bv_2 + cu_1 + du_2$ . Alors

$$\begin{aligned}
 |p_0^1(Q_2)| + |p_0^2(Q_2)| &= |\wedge_2 p_0^1(v \wedge w_2)| + |\wedge_2 p_0^2(v \wedge w_2)| \\
 (3.22) \quad &= |b \cos \alpha| + |d \sin \alpha| \leq (b^2 + d^2)^{\frac{1}{2}} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} \\
 &= (b^2 + d^2)^{\frac{1}{2}} \leq 1.
 \end{aligned}$$

Donc pour que  $Q_2 \in P(\Xi)$ , il faut que toutes les inégalités dans (3.22) soient des égalités, et donc  $b^2 + d^2 = 1$ , et  $b : d = \pm \cos \alpha : \sin \alpha$ . Par conséquent on a  $(b, d) = (\pm \cos \alpha, \pm \sin \alpha)$ ,  $a^2 + c^2 = 0$ , et donc  $w_2 = \pm w_1$  ou  $\pm(\cos \alpha v_2 - \sin \alpha u_2)$ .

Pour que l'angle entre  $w_1$  et  $w_2$  soit de 120 degré, il ne reste que deux possibilités pour  $\alpha$ , à savoir  $\frac{\pi}{3}$  ou  $\frac{\pi}{6}$ .

Si  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ , alors on a que  $w_1 = \frac{1}{2}v_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}u_2$  et  $w_2 = \frac{1}{2}v_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}u_2$ . Mais l'argument ci-dessus est identique pour  $w_3$  si on veut que l'angle entre  $w_1$  et  $w_3$  soit de 120 degré. On a donc  $w_3 = w_2$ , ce qui contredit le fait que l'angle entre  $w_2$  et  $w_3$  est de 120° aussi.

Le cas où  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  est semblable.

On a donc prouvé notre affirmation (3.20).

Maintenant supposons par exemple que  $Q_1 \notin P(\Xi)$ . Alors puisque  $P(\Xi)$  est fermé dans  $G(4, 2)$ , il existe un ouvert  $U \subset G(4, 2)$  contenant  $Q_1$ , tel que  $U \cap P(\Xi) = \emptyset$ .

On sait que  $\mathbb{Y}$  est un cône de “full length” comme on l'a dit avant, donc, par le théorème de  $C^{1+\alpha}$  régularité des ensembles minimaux de dimension 2(c.f. [10], Thm 1.15), il existe  $r > 0$  tel que dans  $B(x, r)$ ,  $E$  est  $C^1$  équivalent à  $C_x + x$  (rappelons que  $C_x = \cup_{i=1}^3 P_i$ ). Notons  $\varphi$  cette application d'équivalence, qui est définie sur  $B(x, r)$ , et  $R = \varphi(Q_1)$ . Alors l'application  $T : R \rightarrow G(4, 2)$ ,  $T(x) = T_x R$  est continue. En effet, pour chaque  $x \in R$ , puisque  $R$  est une surface de classe  $C^1$  dans un voisinage de  $x$ , donc le plan tangent  $T(y) = T_y R$  pour  $y$  proche de  $x$  est une fonction continue de  $y$ .

Par conséquent  $T^{-1}(U)$  est un ouvert. Notons  $R_+ = \varphi(P_1)$ . Alors  $T^{-1}(U) \cap \varphi^{-1}(R_+) \neq \emptyset$  puisque  $x$  est dedans. Donc  $T^{-1}(U)$  est relativement ouvert dans  $R_+$ . Mais  $R_+$  est une  $C^1$  variété à bord (avec  $\varphi(D)$  son bord). Par conséquent un ouvert de  $R_+$  est de mesure non nulle. Donc  $T^{-1}(U) \cap R_+$  est de mesure non nulle. Mais  $\varphi(D)$  est de mesure nulle, donc  $T^{-1}(U) \cap R_+ \setminus \varphi(D)$  est de mesure non nulle. Maintenant pour tout  $y \in R_+ \setminus \varphi(D)$  on a que  $T_y R = T_y E$ , on obtient que dans  $E$ , l'ensemble de point  $y$  tel que  $T_y E \in U$ , et donc n'appartient pas à  $P(\Xi)$ , est de mesure non nulle, puisqu'il contient  $T^{-1}(U) \cap R_+ \setminus \varphi(D)$ . Cela contredit le lemme 3.8(1).

Fin de la démonstration du lemme.

Maintenant on peut arriver à décrire la structure locale en chaque point  $x$  de  $E$ , puisque  $E$  est réduit.

**Lemme 3.23.** *Pour chaque  $x \in E$ , chaque limite d'explosion de  $E$  en  $x$  est soit un plan appartenant à  $P(\Xi)$ , soit  $P_0$ .*

Démonstration. Soit  $X$  une limite d'explosion de  $E$  en  $x$ , on suppose aussi que  $x = 0$  pour abréger. On affirme d'abord que

$$(3.24) \quad X \text{ ne contient pas de point de type } \mathbb{Y}.$$

Supposons que non, il existe alors  $p \in X$  tel que  $p$  est de type  $\mathbb{Y}$ . Alors  $p$  n'est pas l'origine, parce que sinon  $X$  est de type  $\mathbb{Y}$  et donc 0 est de type  $\mathbb{Y}$ , ce qui contredit le lemme 3.19.

Mais  $X$  est un cône, donc pour tout  $r > 0$ ,  $rp \in X$  est un point de type  $\mathbb{Y}$ . On peut donc supposer que  $\|p\| = 1$ . Il existe alors  $0 < r < \frac{1}{2}$  tel que dans  $B(p, r)$ ,  $X$  coïncide avec un cône  $Y$  de type  $\mathbb{Y}$  centré en  $p$ .

Maintenant  $X$  est une limite d'explosion de  $E$  en 0, il existe donc  $s > 0$  (grand) tel que  $d_{0,2}(X, sE) < \frac{r\epsilon_2}{100}$ , où  $\epsilon_2$  est comme dans [9] proposition 16.24. Par conséquent,  $d_{p,\frac{r}{2}}(sE, X) < \frac{\epsilon_2}{50}$ .

On veut montrer que

$$(3.25) \quad d_{p,\frac{r}{2}}(sE, X) = d_{p,\frac{r}{2}}(sE, Y).$$

Une fois qu'on a cela, on prend un point  $z \in sE$  tel que  $d(z, p) < \frac{r}{2} \times \frac{\epsilon_2}{50}$ , alors on a  $d_{z,\frac{r}{4}}(sE, Y + z - p) < \frac{\epsilon_2}{10}$ . Ici  $Y + z - p$  est un cône de type  $\mathbb{Y}$  centré en  $z$ . Mais  $sE$  est minimal puisque  $E$  l'est, donc par la proposition 16.24 de [9], on obtient que  $sE$  contient un point de type  $\mathbb{Y}$ , ce qui contredit le lemme 3.19. On a donc notre affirmation (3.24).

Il faut encore monter (3.25). Par définition

$$(3.26) \quad d_{p,\frac{r}{2}}(sE, X) = \frac{2}{r} \max\left\{ \sup_{x \in sE \cap B(p, \frac{r}{2})} d(x, X), \sup_{x \in X \cap B(p, \frac{r}{2})} d(x, sE) \right\}.$$

Pour le deuxième terme, on a que  $X \cap B(p, \frac{r}{2}) = Y \cap B(p, \frac{r}{2})$ , et donc

$$(3.27) \quad \sup_{x \in X \cap B(p, \frac{r}{2})} d(x, sE) = \sup_{x \in Y \cap B(p, \frac{r}{2})} d(x, sE).$$

Pour le premier, on a que

$$(3.28) \quad d(x, X) = d(x, X \cap B(p, r)) \text{ pour tout } x \in sE \cap B(p, \frac{r}{2}).$$

En effet, puisque  $d_{p,\frac{r}{2}}(sE, X) < \frac{\epsilon_2}{50}$ , pour chaque  $x \in sE \cap B(p, \frac{r}{2})$ ,  $d(x, X) < \frac{\epsilon_2}{50} \times \frac{2}{r}$ , donc  $d(x, X) = d(x, X \cap B(x, \frac{\epsilon_2}{50} \times \frac{2}{r})) \leq d(x, X \cap B(p, r))$  puisque  $B(x, \frac{\epsilon_2}{50} \times \frac{2}{r}) \subset B(p, r)$ . D'un autre côté,  $X \cap B(p, r) \subset X$ , donc  $d(x, X) \geq d(x, X \cap B(p, r))$ . On a donc (3.28), et donc

$$(3.29) \quad \begin{aligned} \sup_{x \in sE \cap B(p, \frac{r}{2})} d(x, X) &= \sup_{x \in sE \cap B(p, \frac{r}{2})} d(x, X \cap B(p, r)) \\ &= \sup_{x \in sE \cap B(p, \frac{r}{2})} d(x, Y \cap B(p, r)) \geq \sup_{x \in sE \cap B(p, \frac{r}{2})} d(x, Y). \end{aligned}$$

En combinant avec (3.27) on obtient

$$(3.30) \quad d_{p,\frac{r}{2}}(sE, X) \leq d_{p,\frac{r}{2}}(sE, Y).$$

Mais un argument semblable donne aussi

$$(3.31) \quad d_{p,\frac{r}{2}}(sE, Y) \leq d_{p,\frac{r}{2}}(sE, X).$$

On a donc (3.25), d'où (3.24).

Mais  $X$  est un cône minimal, donc  $X \cap \partial B(0, 1)$  est l'union finie de cercles et d'arcs de cercles, qui ne se rencontrent qu'à leur extrémités, et toute extrémité est une extrémité commune de trois arcs qui se rencontrent avec angles 120 degré. Alors (3.24) implique qu'il n'y a pas de tels arcs, puisque  $X$  n'a pas de point de type  $\mathbb{Y}$ . Par conséquent  $X$  est une union de plans qui ne se rencontrent qu'à l'origine.

Alors par la remarque 14.40 dans [10],  $X$  est un cône de "full length", et donc par la régularité  $C^1$ , chaque plan de  $X$  doit être contenu dans  $P(\Xi)$ , juste comme on a dit pour  $\mathbb{Y}$  dans la démonstration du lemme 3.19, puisque  $P(\Xi)$  est un fermé.

Maintenant si  $X$  n'est pas un plan, alors  $X = \cup_{i=1}^n Q_n$  avec  $Q_n \in \Xi$  et  $n \geq 2$ .

Par (2.19), pour tout  $Q \in \Xi$  tel que  $Q \neq P_0^2$ , il existe un  $s = s_Q > 0$  tel que  $p_0^1(Q \cap B(0, 1)) \supset P_0^1 \cap B(0, s_Q)$ . S'il existe 2 plans  $Q_1, Q_2 \subset X$  tels que  $Q_i \neq P_0^2$ , alors il existe un  $s > 0$  tel que  $p_0^1(Q_1 \cap B(0, 1)) \cap p_0^1(Q_2 \cap B(0, 1)) \supset B(0, s) \cap P_0^1$ , ce qui implique que

$$(3.32) \quad (B(0, s) \setminus \{0\}) \cap P_0^1 \subset \{z \in P_0^1, \#(p_0^{1-1}\{z\} \cap X) \geq 2\}.$$

Maintenant par la régularité  $C^1$ , il existe un voisinage  $U$  de  $p_0^1(x)$  tel que

$$(3.33) \quad (U \setminus \{p_0^1(x)\}) \cap P_0^1 \subset \{z \in P_0^1, \#(p_0^{1-1}\{z\} \cap E) \geq 2\}.$$

Mais  $U$  est ouvert, donc  $U \cap P_0^1$  est de mesure non-nulle, ce qui contredit le lemme 3.8(2).

Donc dans  $X$ , on a au plus un plan qui n'est pas  $P_0^2$ . Un argument semblable donne aussi qu'on a au plus un plan qui n'est pas  $P_0^1$ . Mais  $X$  contient au moins deux plans, donc  $X = P_0^1 \cup P_0^2 = P_0$ .

Fin de la démonstration du lemme.

Par le lemme, on sait qu'il n'existe dans  $E$  que deux types de limites d'explosion, qui admettent tous les deux la propriété de "full-length". Par conséquent autour de chaque point  $x \in E$ ,  $E$  est localement  $C^1$  équivalent à un plan ou à  $P_0$ .

On va regarder plus précisément dans les deux lemmes suivants ce qui se passe localement autour de chaque type de singularité.

**Lemme 3.34.** Soit  $\{e_1, e_2 = ie_1, e_3, e_4 = ie_3\}$  une base orthonormée fixée de  $\mathbb{R}^4$ , avec  $P_0^1 = e_1 \wedge e_2$  et  $P_0^2 = e_3 \wedge e_4$ . Et soit  $x \in E$  un point de type  $\mathbb{P}$  tel que  $T_x E \neq P_0^2$ . Alors il existe  $r = r(x) > 0$  tel que dans  $B(x, r)$ ,  $E$  est (dans la base donnée) le graphe d'une fonction analytique ou anti-analytique complexe  $\varphi = \varphi_x : P_0^1 \rightarrow P_0^2$ . Plus précisément,

$$(3.35) \quad E \cap B(x, r) = \text{graphe}(\varphi) \cap B(x, r).$$

On a aussi une conclusion semblable pour  $x$  tel que  $T_x E \neq P_0^1$ , c'est à dire qu'autour de  $x$ ,  $E$  est le graphe d'une fonction analytique ou anti-analytique de  $P_0^2 \rightarrow P_0^1$ .

Démonstration. On va juste le montrer lorsque  $T_x E \neq P_0^2$ . L'autre cas est pareil.

Puisque  $x$  est un point de type  $\mathbb{P}$ , il existe  $r_1 > 0$  tel que dans  $B(x, r_1)$ ,  $E$  est le graphe d'une fonction  $\varphi_1 : T_x E + x \rightarrow T_x E^\perp$  de classe  $C^1$ . Si on note  $\pi$  la projection orthogonale de  $\mathbb{R}^4$  sur  $T_x E$ , et on définit  $F : \mathbb{R}^4 = P_0^1 \times P_0^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  par  $F(y) = y - \varphi_1(\pi(y))$  pour  $y = (y_1, y_2) \in P_0^1 \times P_0^2 \cap B(x, r_1)$ , alors  $F$  est de classe  $C^1$  et  $E \cap B(x, r_1) = \{y \in B(x, r_1) : F(y) = (0, 0)\}$ . Par conséquent,  $DF(x)$  est une application linéaire surjective qui envoie  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^2$  et telle que  $T_x E = \text{Ker } DF(x)$ .

Par hypothèse,  $T_x E \neq P_0^2$ , et donc par les lemmes 3.23 et 2.18, on sait que  $T_x E$  est de forme  $P((\cos \alpha v_1 + \sin \alpha u_1) \wedge (\cos \alpha v_2 + \sin \alpha u_2))$  avec  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$ ,  $v_i, u_i, i = 1, 2$  des vecteurs unitaires,  $v_i \in P_0^1, u_i \in P_0^2$  et  $v_1 \perp v_2, u_1 \perp u_2$ . En particulier,  $P_0^2 \cap \text{Ker } DF(x) = P_0^2 \cap T_x E = \{0\}$ . Cela implique que  $DF(x)|_{P_0^2}$  est inversible. Alors par le théorème des fonctions implicites, il existe  $r_2 > 0$  et  $\varphi : P_0^1 \rightarrow P_0^2$  de classe  $C^1$  telle que pour chaque  $y = (y_1, y_2) \in B(x, r_2)$ ,  $F(y) = 0 \Leftrightarrow y_2 = \varphi(y_1)$ . Par conséquent, dans  $B(x, r_2)$ ,  $E$  est le graphe de  $\varphi : P_0^1 \rightarrow P_0^2$ .

On va montrer que  $\varphi$  est analytique ou anti-analytique en utilisant le fait que  $T_y E \in P(\Xi)$  pour tout  $y \in E \cap B(x, r)$ .

Plus précisément, revenons à notre base orthonormée fixée :  $\{e_1, e_2 = ie_1, e_3, e_4 = ie_3\}$  avec  $P_0^1 = e_1 \wedge e_2$  et  $P_0^2 = e_3 \wedge e_4$ . Alors (2.25) et (2.26) impliquent que

$$(3.36) \quad \begin{aligned} \Xi = & \{\pm[ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4] \wedge [-be_1 + ae_2 \pm (-de_3 + ce_4)], \\ & a, b, c, d \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}, \end{aligned}$$

et donc

$$(3.37) \quad \begin{aligned} P(\Xi) = & \{P([ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4] \wedge [-be_1 + ae_2 \pm (-de_3 + ce_4)]), \\ & a, b, c, d \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Supposons que  $T_y E = [ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4] \wedge [-be_1 + ae_2 + (-de_3 + ce_4)]$ , cela veut dire que  $d\varphi(y)(a + bi) = c + di, d\varphi(y)(-b + ai) = -d + ci$ . Mais  $d\varphi(y)$  est linéaire (réel), et  $a^2 + b^2 \neq 0$ , donc  $a + bi, -b + ai$  est une base, et  $d\varphi(y)$  est déterminé par ses valeurs en  $a + bi, -b + ai$ . Notons que  $\frac{c+di}{a+bi} = \frac{-d+ci}{-b+ai}$ , et notons le  $A \in \mathbb{C}$ , alors on a  $d\varphi(y)(z) = Az$ , qui est analytique, autrement dit

$$(3.38) \quad \frac{d\varphi}{d\bar{z}}(y) = 0.$$

Et si  $T_y E = [ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4] \wedge [-be_1 + ae_2 - (-de_3 + ce_4)]$ , un argument semblable donne  $d\varphi(y)(z) = B\bar{z}$ , et donc

$$(3.39) \quad \frac{d\varphi}{dz}(y) = 0.$$

Donc  $\varphi$  est une fonction telle que en chaque point elle est soit analytique, soit anti-analytique.

Notons  $B = B(p^1(x), r) \cap P_0^1$ ,  $B_1 = \{y \in B, \frac{d\varphi}{dz}(y) \neq 0\}$ . Alors  $B_1$  est ouvert puisque  $\varphi$  est de classe  $C^1$ . Si  $B_1 = \emptyset$ , alors  $\varphi$  est anti analytique. Sinon, supposons que  $B_1 \neq \emptyset$ . Notons  $g = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ , alors  $g$  est continue sur  $B$ , et  $B_1 = \{y \in B : g(y) \neq 0\}$ . De plus, puisque  $\frac{d\varphi}{dz}(y) \neq 0$  sur  $B_1$ , alors  $\frac{d\varphi}{dz}(y) = 0$  sur  $B_1$ , et donc  $\varphi$  est holomorphe sur l'ouvert  $B_1$ , et donc sa dérivée  $g$  l'est aussi. Alors la conclusion suit du théorème suivant (c.f.[30] Thm 12.14) :

**Théorème 3.40** (Théorème de Radó). *Soit  $U \subset \mathbb{C}$  un domaine ouvert, et  $f$  une fonction continue sur  $\overline{U}$ . Soit  $\Omega = \{z \in U : f(z) \neq 0\}$ , et supposons que  $f$  est holomorphe sur  $\Omega$ . Alors  $f$  est holomorphe sur  $U$ .*

En effet, en appliquant le théorème à  $g$ , on obtient que  $g$  est holomorphe sur  $B$ . Mais on a supposé que  $B_1 \neq \emptyset$ , donc  $g \not\equiv 0$ , et donc  $B_1^C$  ne contient pas de point d'accumulation. Mais  $B_1^C \supset B_2 := \{y \in B, \frac{d\varphi}{dz}(y) \neq 0\}$ , et  $B_2$  est ouvert, donc il est un ouvert qui ne contient pas de point d'accumulation. Par conséquent  $B_2 = \emptyset$ , ce qui implique que  $\varphi$  est holomorphe sur  $B$ .

On a donc que  $\varphi$  est analytique ou anti-analytique sur  $B = B(p^1(x), r) \cap P_0^1$ .

Fin de la démonstration du lemme.

**Lemme 3.41.** *Si  $x \in E$  est de type  $P_0$ , alors il existe  $r = r(x) > 0$  tel que*

$$(3.42) \quad E \cap B(x, r) = (P_0 + x) \cap B(x, r).$$

Démonstration. Soit  $B(x, r')$  une boule  $C^1$  pour le point  $x$ , dans laquelle  $E$  coïncide avec l'image de  $P_0 + x$  par une fonction  $\varphi$  de classe  $C^1 : E \cap B(x, r') = \varphi((P_0 + x) \cap B(x, r'))$ , où  $\varphi$  est un difféomorphisme et  $\varphi(x) = x$ ,  $D\varphi(x) = Id$ . Notons  $A_i = \varphi(P_0^i + x) \cap B(x, r')$ . Alors les  $A_i$  sont des variétés  $C^1$  et  $A_1 \cap A_2 = \{x\}$ . Puisque  $D\varphi(x) = Id$ , il existe  $0 < r_1 < r'$  tel que pour tout  $y \in B(x, r_1) \cap (P_0^1 + x)$ ,  $|D\varphi(y) - Id| < \frac{1}{2}$ . Cela implique que

$$(3.43) \quad |p_0^1(\varphi(y) - \varphi(z))| > \frac{1}{2}|y - z| \text{ pour tout } y, z \in B(x, r_1),$$

et par conséquent  $p_0^1 \circ \varphi$  est un difféomorphisme entre  $B(x, r_1) \cap (P_0^1 + x)$  et son image  $\Omega$ .

Notons  $\Gamma = p_0^1 \circ \varphi(\partial B(x, r_1) \cap (P_0^1 + x))$ , alors  $\Gamma$  est un courbe  $C^1$  diffémorphe à un cercle. Et (3.43) donne que pour tout  $z \in \Gamma$ ,  $|z - x| > \frac{1}{2}r_1$ . Donc si on note  $\Omega' \subset P_0^1$  la région dans  $P_0^1$  bornée telle que  $\partial\Omega' = \Gamma$ , alors  $\Omega' \supset B(p_0^1(x), \frac{1}{2}r_1) \cap (P_0^1 + x)$ .

D'autre part on sait que  $\Gamma \subset \Omega$ , et  $\Omega$  est diffémorphe à un disque, on a donc  $\Omega' \subset \Omega$ , et en particulier

$$(3.44) \quad p_0^1[\varphi(B(x, r_1) \cap (P_0^1 + x))] \supset B(p_0^1(x), \frac{1}{2}r_1) \cap P_0^1.$$

Par conséquent,

$$(3.45) \quad p_0^1[\varphi((P_0^2 + x) \cap B(x, \frac{r_1}{2}))] \text{ est de mesure nulle,}$$

à cause de 3.8(2).

Alors regardons  $A_2$ . Par un argument semblable au lemme 3.34, il existe  $r_2 < \frac{r_1}{2}$  tel que dans  $B(x, r_2)$ ,  $A_2$  est le graphe analytique ou anti-analytique de  $\psi : P_0^2 + x \rightarrow P_0^1$ , où  $\psi = p_0^1 \circ \varphi$  sur  $P_0^2 + x \cap B(x, r_2)$ ). Sans perdre de généralité, supposons qu'il est analytique.

On affirme que

$$(3.46) \quad \text{pour tout } y \in B(x, r_2) \cap (P_0^2 + x), \psi(y) = p_0^1(x).$$

D'abord  $p_0^1(x) \in \psi((P_0^2 + x) \cap B(x, r_2))$  puisque  $p_0^1(x) = \psi(x)$  et  $x \in (P_0^2 + x) \cap B(x, r_2)$ . Alors si  $\psi$  n'est pas constante, elle est une application ouverte, puisqu'elle est analytique. Et donc  $p_0^1(A_2 \cap B(x, r_2)) = \psi((P_0^2 + x) \cap B(x, r_2))$  est un ouvert dans  $P_0^1$  qui contient  $p_0^1(x)$ , et donc  $p_0^1(A_2 \cap B(x, \frac{r_1}{2})) \supset P_0^1(A_2 \cap B(x, r_2))$  est de mesure non-nulle, ce qui contredit (3.45).

Donc on a (3.46), qui implique que  $\varphi((P_0^2 + x) \cap B(x, r_2))$  est en fait  $P_0^2 \cap B(x, r_2)$ .

On peut faire le même argument pour  $\varphi(P_0^1 + x)$ , et on obtient qu'il existe  $r < r_2$  tel que dans  $B(x, r)$ ,  $\varphi(P_0^1 + x)$  est  $P_0^1 + x$  lui-même. Et on obtient ainsi la conclusion.

Fin de la démonstration du lemme.

Vérifions maintenant que

$$(3.47) \quad \text{il existe au moins un point de type } P_0.$$

Supposons que non, alors pour tout  $x \in E \cap B(0, 1)$ ,  $x$  est de type  $\mathbb{P}$ . Et donc  $E \cap B(0, 1)$  est composé de variétés  $C^1$  disjointes  $S_1, \dots, S_l, \dots$  (possiblement une infinité dénombrable).

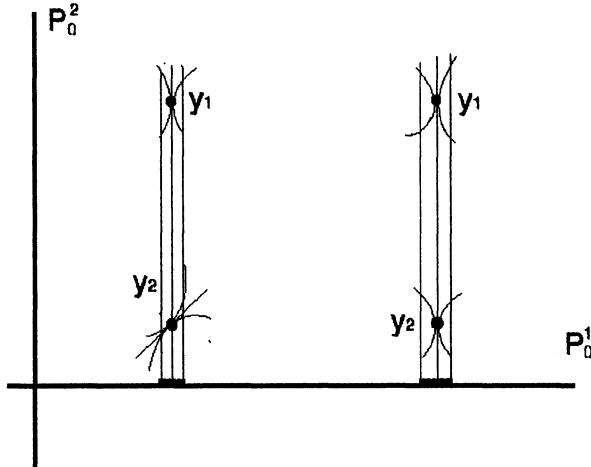
Par le lemme 3.8(2), on sait que pour presque tout  $z \in p_0^1(E)$ , on a (3.7). On va regarder maintenant les points dans  $E$  où la projection  $p_0^1$  n'est pas injective.

**Lemme 3.48.** *Soit  $y_1, y_2 \in E$  tels que  $p_0^1(y_1) = p_0^1(y_2)$ . Alors au moins un des  $y_i$  est tel que  $E$  est un disque parallèle à  $P_0^2$  dans un voisinage de  $y_i$ .*

Démonstration. Par l'argument autour de (3.32), on sait qu'au moins un des plans tangents  $T_{y_1}E, T_{y_2}E$  est  $P_0^2$ . Supposons par exemple que  $T_{y_1}E = P_0^2$ . Alors il existe un  $s_1 > 0$  tel que dans  $B(y_1, s_1)$ ,  $E$  est le graphe d'une fonction analytique ou anti-analytique dans la base usuelle  $\varphi_1 : P_0^2 \rightarrow P_0^1$ , avec  $\varphi_1(0) = p_0^1(y_1), D\varphi_1 = 0$ .

Supposons d'abord que le plan tangent de  $E$  en  $y_2$  n'est pas  $P_0^2$ . Alors toujours à cause de l'argument autour de (3.32), il existe  $s_2 > 0$  tel que  $B(y_1, s_1) \cap B(y_2, s_2) = \emptyset$  et  $B(p_0^1(y_2), s_1) \cap P_0^1 \subset p_0^1(B(y_2, s_2) \cap E)$ , et donc  $p_0^1(B(y_1, s_1) \cap E)$  est de mesure nulle, puisque  $p_0^1(y_1) = p_0^1(y_2)$  et à cause de 3.8(2). Et donc  $\varphi_1$  doit être constante, puisque sinon, elle serait une application ouverte, qui implique que  $p_0^1(B(y_1, s_1) \cap E)$

contient un ouvert dans  $P_0^1$ , ce qui entraîne une contradiction. Donc dans  $B(y_1, s_1)$ ,  $E$  est un disque parallèle à  $P_0^2$ . (dessin 3-1, les deux points à gauche)



3-1

Si le plan tangent de  $E$  en  $y_2$  est aussi  $P_0^2$ , alors dans  $B(y_2, s_2)$ ,  $E$  est le graphe d'un fonction analytique ou anti-analytique  $\varphi_2 : P_0^2 \rightarrow P_0^1$ . Alors au moins l'une des deux fonctions  $\varphi_1, \varphi_2$  est constante, parce que sinon, tous les deux sont des applications ouverte, et donc  $p_0^1(B(y_1, s_1) \cap E) \cap p_0^1(B(y_2, s_2) \cap E)$  contient un ouvert dans  $P_0^1$ , ce qui contredit le lemme 3.8(2).

Fin de la démonstration du lemme.

**Lemme 3.49.** *S'il existe un point dans  $P_0^1 \cap B(0, 1)$  dont l'image réciproque par  $p_0^1$  contient plus qu'un point dans  $E$ , alors  $P_0^2 \cap B(0, 1) \subset E$ .*

Démonstration. Le lemme 3.48 dit que s'il existe un point dans  $P_0^1 \cap B(0, 1)$  dont l'image réciproque par  $p_0^1$  contient plus qu'un point dans  $E$ , alors il existe un morceau de  $P_0^2$  au dessus de lui, et notons le  $(P_0^2 + x) \cap B(x, r)$ . Mais on sait que  $E \cap B(0, 1)$  est composé des variétés  $C^1$  disjointes  $S_1, \dots, S_l, \dots$ , donc il existe un  $i$  tel que  $(P_0^2 + x) \cap B(x, r) \subset S_i$ .

On affirme que  $S_i$  n'est rien d'autre que  $(P_0^2 + x) \cap B(0, 1)$ . Posons  $A = \{y \in S_i : \text{il existe } r = r_y > 0 \text{ tel que } S_i \cap B(y, r) = (P_0^2 + y) \cap B(y, r)\}$ . Alors  $A$  est un ouvert dans  $S_i$ . D'un autre côté, soit  $y \in \bar{A} \cap S_i$ , alors il existe une suite  $y_n \in A$  telle que  $y_n \rightarrow y$ . Par la  $C^1$  régularité on sait que  $T_y E = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{y_n} E = P_0^2$ , et il existe donc  $r > 0$  tel que dans  $B(y, r)$ ,  $S_i$  est le graphe d'une fonction analytique (le cas antianalytique se traiterait pareillement)  $\psi : P_0^2 \rightarrow P_0^1$ . Mais  $\psi' = 0$  sur  $\{p_0^2(y_n)\} \cup \{p_0^2(y)\}$  qui est un ensemble qui admet un point limite. Donc  $\psi' \equiv 0$  dans  $p_0^2(B(y, r))$ , et donc  $\psi$  est constante, ce qui implique que  $y \in A$ . Donc  $A$  est fermé dans  $S_i$ . Alors  $A = S_i$  puisqu'il n'est pas vide. Mais  $S_i$  est une variété de classe  $C^1$ , donc la seule possibilité est que  $S_i$  est un morceau de  $(P_0^2 + x) \cap B(0, 1)$ . Or  $S_i$  est à la fois fermé et ouvert dans  $(P_0^2 + x) \cap B(0, 1)$ . En effet,  $A$  est ouvert

dans  $(P_0^2 + x) \cap B(0, 1)$  par la définition, et  $S_i = A$ , donc  $S_i$  est ouvert dans  $(P_0^2 + x) \cap B(0, 1)$ ; et par la démonstration ci-dessus, pour tout  $y \in \overline{S}_i \cap (P_0^2 + x) \cap B(0, 1) = \overline{A} \cap (P_0^2 + x) \cap B(0, 1)$ , on a  $y \in S_i$ , et donc  $S_i$  est fermé dans  $(P_0^2 + x) \cap B(0, 1)$ . Par conséquent,  $S_i = (P_0^2 + x) \cap B(0, 1)$ .

Notons que par (3.3),  $\overline{S}_i \cap \partial B(0, 1) \subset E \cap \partial B(0, 1) \subset P_0 \cap \partial B(0, 1)$  puisque  $E$  est fermé, ce qui implique que  $S_i = P_0^2 \cap B(0, 1)$ .

Fin de la démonstration du lemme.

Par un argument semblable, si  $p_0^2$  n'est pas injective dans  $E$ , alors  $P_0^1 \cap B(0, 1) \subset E$ . Par conséquent, si ni  $p_0^1$  ni  $p_0^2$  ne sont injectives, alors  $P_0 \subset E$ , de sorte qu'il existe un point de type  $P_0$ , ce qui contredit notre hypothèse. Donc au moins une des  $p_0^i, i = 1, 2$  est injective. Supposons par exemple que  $p_0^1$  est injective sur  $E$ . Alors (3.7) est vrai pour tout  $z \in P_0^1 \cap B(0, 1) = p_0^1(E)$ . Donc il existe  $\psi : P_0^1 \cap B(0, 1) \rightarrow P_0^2$  tel que  $E \cap B(0, 1)$  est son graphe. Alors sur les points  $y \in E$  tel que  $T_y E \neq P_0^2$ ,  $\psi$  est localement une fonction analytique ou anti analytique, et donc harmonique.

On affirme qu'il n'existe pas de point critique  $y$  tel que  $T_y E = P_0^2$ . En effet, si  $y$  est un tel point, dans un voisinage  $B(y, r)$ ,  $E$  est le graphe d'une fonction analytique ou anti-analytique  $g$  de  $P_0^2 \rightarrow P_0^1$  sous la base usuelle. Supposons que  $p_0^2(y) = 0$  pour simplifier, et donc  $g'(0) = 0$ . Alors 0 est un zéro de  $g$  d'ordre  $\geq 2$ , et dans un voisinage pointé  $O$  de  $g(0) \in \mathbb{C}$ , chaque point admet au moins 2 images réciproques. Donc  $O \subset \{z \in P_0^1 : \#\{p_0^{1-1}\{z\} \cap E\} \geq 2\}$ . Mais  $O$  est ouvert donc il est de mesure non nulle. Cela contredit le lemme 3.8(2).

Donc il n'existe pas de point critique pour  $\psi$ , de sorte que  $\psi$  est une fonction  $C^1$  sur  $P_0^1 \cap B(0, 1)$ , et  $E$  est son graphe. Et on sait ainsi que  $E \cap B(0, 1) = P_0^1 \cap B(0, 1)$ , car  $\psi$  est harmonique avec  $\psi|_{\partial B(0, 1)} = 0$ , ce qui implique que  $\psi$  est constante. Cela contredit notre hypothèse (3.3).

Ainsi on obtient l'existence d'un point de type  $P_0$  dans  $E$ .

**Lemme 3.50.** *Soit  $x \in E$  un point de type  $P_0$ , alors  $E$  contient  $(P_0 + x) \cap B(0, 1)$ .*

Démonstration. On affirme que  $(P_0^1 + x) \cap E$  est relativement ouvert dans  $(P_0^1 + x) \cap B(0, 1)$ . En effet, en appliquant le lemme 3.48 pour  $p_0^2$ , on a que pour tout  $y \in (P_0^1 + x) \cap E \setminus \{x\}$ ,  $p_0^2(y) = p_0^2(x)$ , et donc au moins un des  $x$  et  $y$  est tel que  $E$  est un disque parallèle à  $P_0^1$  dans un voisinage. Mais on sait déjà que  $x$  ne le vérifie pas, en tant que point de type  $P_0$ . Il existe donc une boule  $B_y$  centrée en  $y$  telle que  $E \cap B_y = (P_0^1 + x) \cap B_y$ . Mais pour  $x$ , il existe une boule  $B_x$  telle que  $B_x \cap E = B_x \cap (P_0 + x) \supset B_x \cap (P_0^1 + x)$ . Donc  $E$  est relativement ouvert dans  $P_0^1 + x$ .

Par contre  $E$  est lui-même un fermé dans  $B(0, 1)$ , donc est relativement fermé dans  $P_0^1 + x$ . Alors la seule possibilité est que

$$(3.51) \quad E \cap (P_0^1 + x) \cap B(0, 1) = (P_0^1 + x) \cap B(0, 1)$$

puisque  $E \cap (P_0^1 + x)$  est non vide.

Un argument semblable donne aussi

$$(3.52) \quad E \cap (P_0^2 + x) \cap B(0, 1) = (P_0^2 + x) \cap B(0, 1),$$

et on obtient ainsi notre conclusion.

Fin de la démonstration du lemme.

On peut arriver maintenant à la conclusion du théorème 3.1.

On sait par (3.47) que  $E$  contient un point  $x$  de type  $P_0$ . Et par le lemme 3.50,  $(P_0 + x) \cap \partial B(0, 1) \subset E$ . Mais par (3.3) on a  $E \cap \partial B(0, 1) = P_0 \cap \partial B(0, 1)$ , ce qui implique que  $x$  est forcément l'origine, et  $E \supset P_0 \cap B(0, 1)$ . Mais  $H^2(E) = H^2(P_0 \cap B(0, 1))$  et  $E \cap B(0, 1)$  est réduit. Donc  $E \cap B(0, 1) = P_0 \cap B(0, 1)$ .

□

## 4 L'existence d'ensembles minimaux

On commence maintenant à démontrer le théorème 1.32. On va le faire par l'absurde.

Supposons que la conclusion du théorème 1.32 n'est pas vraie. Il existe alors une suite d'unions de 2 plans  $P_k = P_k^1 \cup_{\theta_k} P_k^2 \subset \mathbb{R}^4$  qui ne sont pas minimaux, avec  $\theta_k \geq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k}$ . De plus, on peut supposer que tous les  $P_k^1 = P_0^1$  sont les mêmes.

La stratégie serait de trouver une suite de minimiseurs  $E_k$  telle que pour chaque  $k$ ,  $E_k$  minimise la mesure parmi toutes les déformations de  $P_k$  dans  $B(0, 1)$ . (On l'appelle aussi une solution du problème de Plateau). Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $E_k$  tend vers un ensemble  $E_\infty$  pour la distance de Hausdorff. Alors puisque  $P_k \cap \partial B(0, 1) \rightarrow P_0 \cap \partial B(0, 1)$ , on montre ensuite que le bord de  $E_\infty$  est  $P_0 \cap \partial B(0, 1)$ . De plus, puisque chaque  $E_k$  est minimal dans  $B(0, 1)$ ,  $E_\infty$  doit être minimal dans  $B(0, 1)$  aussi. Alors en notant que (3.2) est vrai puisque  $E_\infty$  est la limite d'une suite de déformations, on en déduit que  $E_\infty = P_0$  par l'unicité qu'on a démontrée dans le théorème 3.1. Et on en déduit une contradiction par les arguments de projection et d'extension harmonique.

Mais malheureusement on n'a pas encore un théorème qui garantit l'existence d'une solution du problème de Plateau. En revanche, on a le théorème plus faible ci-dessous :

**Théorème 4.1** (Existence d'ensembles minimaux ; c.f. [15], Thm 6.1.7). *Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un domaine ouvert,  $0 < d < n$ ,  $\mathfrak{F}$  une famille non vide d'ensembles relativement fermés dans  $U$  et vérifiant (1.2), stable par les déformations dans  $U$ . Supposons que*

$$(4.2) \quad \inf_{F \in \mathfrak{F}} H^d(F) < \infty.$$

Il existe alors  $M > 0$  (ne dépendant que de  $d$  et  $n$ ), une suite  $(F_k)$  d'éléments de  $\mathfrak{F}$  et un ensemble  $E$  de dimension  $d$  relativement fermé dans  $U$  qui vérifie (1.2), tels que :

(1) pour une exhaustion  $\{K_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  de  $U$  par des compacts inclus dans  $U$  ordonnés de manière croissante pour l'inclusion, on a

$$(4.3) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} d_H(F_k \cap K_m, E \cap K_m) = 0 \text{ pour tout } m \in \mathbb{N} ;$$

(2) pour tout ouvert  $V$  tel que  $\overline{V}$  est relativement compact dans  $U$ , à partir d'un certain rang :

$$(4.4) \quad F_k \text{ est } (M, +\infty)\text{-quasi minimal dans } V ;$$

(voir la définition 4.5 ci-dessous)

$$(3) H^d(E) \leq \inf_{F \in \mathfrak{F}} H^d(F) ;$$

(4)  $E$  est minimal dans  $U$ .

**Définition 4.5** (Ensembles quasi minimaux). Soit  $0 < d < n$  des entiers,  $M > 0, \delta > 0$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . L'ensemble  $E$  dans  $U$  est dit  $(M, \delta)$ -quasi minimal dans  $U$  ( $E \subset QM(U, M, \delta)$  en abrégé) si  $E$  est fermé dans  $U$ , (1.2) est vrai, et pour tout boule  $B \subset U$  dont le diamètre est plus petit que  $\delta$ , on a

$$(4.6) \quad H^d(E \cap B) \leq M H^d(F \cap B)$$

pour toute déformation  $F$  de  $E$  dans  $B$ .

**Remarque 4.7.** Dans le théorème 4.1, on peut demander aussi que la suite  $F_k$  soit une suite minimisante. C'est à dire que  $\lim_{k \rightarrow \infty} H^2(F_k) = \inf_{F \in \mathfrak{F}} H^d(F)$ .

Le théorème 4.1 est un résultat plus faible, qui donne l'existence d'une certaine sorte de minimiseur, sans garantir la condition au bord, et la solution n'est pas forcément contenue dans la classe  $\mathfrak{F}$  non plus. Mais pour notre cas, on n'a pas besoin de toutes ces propriétés, on peut s'en sortir avec quelques propriétés plus faibles, qui nous suffiront déjà.

Rappelons que  $P_k = P_k^1 \cup_{\theta_k} P_k^2$  est une suite d'unions de deux plans qui ne sont pas minimaux, avec  $\theta_k > \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k}$ . Et de plus supposons aussi que tous les  $P_k^1$  sont égaux. Notons  $P_0^1 = P_k^1$ , et  $P_0^2$  le plan orthogonal à  $P_0^1$ ,  $P_0 = P_0^1 \cup_{\perp} P_0^2$ . Alors  $P_k \cap \overline{B}(0, 1)$  tend vers  $P_0 \cap B(0, 1)$  pour la distance de Hausdorff.

**Proposition 4.8.** Pour chaque  $k$ , il existe un ensemble  $E_k \subset \overline{B}(0, 1)$  fermé tel que

$$(1) E_k \text{ est minimal dans } \mathbb{R}^4 \setminus [P_k \setminus B(0, 1)] ;$$

$$(2) \partial B(0, 1) \cap E_k = \partial B(0, 1) \cap P_k ;$$

$$(3) p_k^i(E_k) \supset P_k^i \cap \overline{B}(0, 1), \text{ où } p_k^i \text{ désigne la projection orthogonale sur } P_k^i, i = 1, 2 ;$$

$$(4) H^2(E_k) < H^2(P_k \cap B(0, 1)) = 2\pi .$$

$$(5) E_k \text{ est contenu dans l'enveloppe convexe de } P_k \cap \overline{B}(0, 1).$$

Démonstration. Fixons d'abord n'importe quel  $k$ .

Prenons  $U = \mathbb{R}^4 \setminus [P_k \setminus B(0, 1)]$ , et  $\mathfrak{F}$  la classe de toutes les déformations de  $P_k$  dans  $U$ . Alors par le théorème 4.1 et la remarque 4.7, pour  $d = 2$  il existe une suite minimisante d'ensembles  $F_l \in \mathfrak{F}$  qui sont en même temps uniformément quasi-minimaux dans  $U$ , avec une constante uniforme  $M$ . De plus la suite converge par rapport à la distance de Hausdorff. Notons  $E_k$  la limite. Alors par les conclusions du théorème 4.1, les conclusions (1) et (4) sont automatiquement vraies. Dans (4) on a une inégalité stricte parce qu'on a supposé que  $P_k$  n'est pas minimal.

Pour montrer (3), on va commencer par le lemme suivant.

**Lemme 4.9.** *Soit  $P$  un plan dans  $\mathbb{R}^4$ , et  $p$  son projecteur. Soit  $\varphi$  une déformation Lipschitzienne de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^4$ , telle que  $\varphi|_{P \cap B(0,1)^C} = id$ . Alors*

$$(4.10) \quad p[\varphi(P \cap \overline{B}(0, 1))] \supset P \cap \overline{B}(0, 1).$$

Démonstration. Raisonnons par l'absurde.

Supposons qu'il existe  $x \in P \cap \overline{B}(0, 1)$  tel que  $x \notin p[\varphi(P \cap \overline{B}(0, 1))]$ . Alors  $x \in P \cap B(0, 1)$ , puisque  $P \cap \partial B(0, 1) = \varphi(P \cap \partial B(0, 1)) \subset p[\varphi(P \cap \overline{B}(0, 1))]$  par hypothèse. Il existe alors  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset B(0, 1)$ . D'un autre côté,  $P \cap \overline{B}(0, 1)$  est un compact, et donc son image  $p[\varphi(P \cap \overline{B}(0, 1))]$  par l'application continue  $p \circ \varphi$  l'est aussi, de sorte que  $\{p[\varphi(P \cap \overline{B}(0, 1))]\}^C$  est un ouvert. Par conséquent, il existe  $r' < r$  tel que  $B(x, r') \cap p[\varphi(P \cap \overline{B}(0, 1))] = \emptyset$ . Autrement dit,  $\varphi(P \cap \overline{B}(0, 1)) \subset \mathbb{R}^4 \setminus p^{-1}[B(x, r') \cap P]$ .

Posons  $g : \mathbb{R}^4 \setminus p^{-1}[B(x, r') \cap P] \rightarrow p^{-1}[\partial B(0, 1) \cap P]$ ,  $g|_{\mathbb{R}^4 \setminus p^{-1}[B(0,1)]}$  est la projection de  $\mathbb{R}^4$  sur  $p^{-1}[B(0, 1) \cap P]$ , et pour  $y \in [p^{-1}[(B(0, 1) \setminus B(x, r')) \cap P]]$ ,  $G(y)$  est le point d'intersection de  $p^{-1}[\partial B(0, 1) \cap P]$  avec la demi-droite  $[x, y]$  issue de  $x$  et passant par  $y$ . Alors  $g$  est continue.

Notons que  $\varphi(P \cap \overline{B}(0, 1)) \subset \mathbb{R}^4 \setminus p^{-1}[B(x, r') \cap P]$ , si bien que  $p \circ g \circ \varphi$  est Lipschitzienne, qui envoie  $P \cap \overline{B}(0, 1)$  continuement dans  $P \cap \partial B(0, 1)$  en fixant les points de  $P \cap \partial B(0, 1)$ . C'est impossible.

Fin de la démonstration du lemme.

On obtient (3) d'après ce lemme. En effet,  $E_k$  est la limite d'une suite de déformations  $F_l = \varphi_l(P_k)$  de  $P_k$ . Alors pour chaque  $l$ , on a, par le lemme,

$$(4.11) \quad p_k^i(F_l) \supset p_k^i[\varphi_l(P_k^i \cap \overline{B}(0, 1))] \supset P_k^i \cap \overline{B}(0, 1), i = 1, 2.$$

Par conséquent

$$(4.12) \quad p_k^i(E_k) \supset P_k^i \cap \overline{B}(0, 1), i = 1, 2.$$

Il nous reste à montrer (2) et (5).

Vérifions que  $E_k \subset \overline{B}(0, 1)$ . D'abord on affirme que pour chaque  $\epsilon > 0$ , il existe  $N = N(\epsilon) > 0$  tel que pour tout  $l > N$ ,

$$(4.13) \quad F_l \subset B(B(0, 1) \cup P_k, \epsilon),$$

c'est à dire que  $F_l$  est contenu dans un  $\epsilon$ -voisinage de l'union de la boule unité et du bord de  $U$ .

En fait, les  $F_l$  sont uniformément quasi-minimaux, et donc sont localement uniformément Ahlfors réguliers dans  $U$  (c.f. [11] Proposition 4.1). C'est à dire qu'il existe une constante  $C > 1$  telle que pour tout  $l$ , pour tout  $x \in F_l$  et tout  $r > 0$  tel que  $B(x, 2r) \subset U$ , on a

$$(4.14) \quad C^{-1}r^2 \leq H^2(F_l \cap B(x, r)) \leq Cr^2.$$

Alors s'il existe  $x \in F_l$  tel que  $d(x, \overline{B}(0, 1) \cup P_k) > \epsilon$ , alors on a  $B(x, \epsilon) \subset U$ , et par la régularité d'Ahlfors,

$$(4.15) \quad H^2(F_l \cap B(x, \frac{1}{2}\epsilon)) \geq (4C)^{-1}\epsilon^2.$$

Maintenant déformons  $F_l$  dans  $\overline{B}(0, 1)$  par la projection radiale  $\pi$  sur  $\overline{B}(0, 1)$ . Ici pour chaque  $l$ ,  $F_l$  est une déformation de  $E_k$  dans  $U$ , c'est à dire qu'il existe  $K \subset U$  compact, tel que  $F_l \setminus K = E_k \setminus K$ . La compacité de  $K$  implique que  $0 < d = d(K, \partial U) = d(K, P_k \setminus B(0, 1))$ , et qu'il existe  $R > 0$  tel que  $K \subset B(0, R)$ . Notons  $V = B(0, R) \setminus \overline{B}(P_k \setminus B(0, 1), d)$ . Alors dans  $V$ ,  $\pi$  est homotope à l'identité. Posons maintenant  $\pi' : U \rightarrow \overline{B}(0, 1) \cap U$ ,  $\pi'(x) = t(x)x + (1 - t(x))\pi(x)$ , où  $t(x) = \min\{2d(x, \overline{V})/d, 1\}$ . Alors  $\pi'$  est une déformation sur  $U$ , et  $\pi'|_V = \pi|_V$ , ce qui donne  $\pi'(F_l) = \pi(F_l)$ . Donc  $\pi(F_l)$  est une déformation de  $E_k$  dans  $U$ . Autrement dit,  $\pi(F_l) \in \mathfrak{F}$ .

**Lemme 4.16.** *Soit  $E$  rectifiable tel que  $E \cap B(0, 1 + \epsilon) = \emptyset$ . Alors*

$$(4.17) \quad H^2(\pi(E)) \leq \frac{1}{(1 + \epsilon)^2}H^2(E).$$

Démonstration. On veut montrer que  $\pi$  est  $\frac{1}{1+\epsilon}$ -Lipschitzienne sur  $E$ , d'où (4.17).

Posons  $\pi_\epsilon$  la projection sur la boule  $\overline{B}(0, 1 + \epsilon)$ . Alors  $\pi_\epsilon$  est 1-Lipschitzienne, et  $\pi_\epsilon(\mathbb{R}^4 \setminus B(0, 1 + \epsilon)) \subset \partial B(0, 1 + \epsilon)$ . D'un autre côté,  $\pi$  est  $\frac{1}{1+\epsilon}$ -Lipschitzienne sur  $\partial B(0, 1 + \epsilon)$ . Donc si  $E \subset \mathbb{R}^4 \setminus B(0, 1 + \epsilon)$ , alors  $\pi = \pi \circ \pi_\epsilon$  est  $\frac{1}{1+\epsilon}$ -Lipschitzienne sur  $E$ .

Fin de la démonstration du lemme.

Revenons à la démonstration de la proposition 4.8. On a  $B(x, \frac{1}{2}\epsilon) \cap B(0, 1 + \frac{1}{2}\epsilon) = \emptyset$  puisque  $x \notin B(0, 1 + \epsilon)$ , et donc

$$(4.18) \quad \begin{aligned} H^2(\pi(F_l)) &\leq H^2(\pi(F_l \setminus B(x, \frac{1}{2}\epsilon))) + H^2(\pi(F_l \cap B(x, \frac{1}{2}\epsilon))) \\ &\leq H^2(F_l \setminus B(x, \frac{1}{2}\epsilon)) + \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}\epsilon)^2}H^2(F_l \cap B(x, \frac{1}{2}\epsilon)) \\ &\leq H^2(F_l) - \frac{4\epsilon + \epsilon^2}{4 + 4\epsilon + \epsilon^2}H^2(F_l \cap B(x, \frac{1}{2}\epsilon)) \\ &\leq H^2(F_l) - \frac{4\epsilon + \epsilon^2}{4 + 4\epsilon + \epsilon^2} \frac{\epsilon^2}{4C} \\ &= H^2(F_l) - C(\epsilon), \end{aligned}$$

où  $C(\epsilon) > 0$  pour tout  $\epsilon > 0$  et  $C(\epsilon)$  ne dépend pas de  $l$  pour  $l$  assez grand.

On sait que  $\{F_l\}$  est une suite minimisante, donc pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un  $N > 0$  tel que pour tout  $l > N$ , on a

$$(4.19) \quad H^2(F_l) \leq \inf_{E \in \mathfrak{F}} H^2(E) + \frac{1}{2}C(\epsilon) < H^2(\pi(F_l)) + C(\epsilon).$$

Donc (4.18) n'est pas vérifié, de sorte que  $F_l \subset B(B(0, 1) \cup P_k, \epsilon) \cap U$ , d'où notre affirmation concernant (4.13).

Par conséquent, puisque  $E_k$  est la limite de  $F_l$ ,

$$(4.20) \quad E_k \subset \cap_{\epsilon} B(B(0, 1) \cup P_k, \epsilon) \cap U \subset \overline{B}(0, 1).$$

On peut vérifier (2) maintenant. On va même montrer (5), qui dit que  $E_k$  est contenu dans l'enveloppe convexe  $C$  de  $P_k \cap \overline{B}(0, 1)$ , ce qui implique (2).

Première démonstration de (5).

**Lemme 4.21.** Soit  $C \subset \mathbb{R}^n$  un fermé convexe symétrique (par rapport à l'origine) à l'intérieur non-vide. Alors pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  et une rétraction 1-Lipschitzienne  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $C$  telle que  $f$  est  $1 - \delta$ -Lipschitzienne sur  $\mathbb{R}^n \setminus B(C, \epsilon)$ .

Démonstration. Notons  $\|\cdot\|_C$  la norme sur  $\mathbb{R}^n$  dont la boule unité fermée est  $C$ . Il existe alors  $A > 1$  tel que

$$(4.22) \quad A^{-1}\|\cdot\|_C \leq \|\cdot\|_2 \leq A\|\cdot\|_C,$$

où  $\|\cdot\|_2$  désigne la norme euclidienne.

Alors pour tout  $a \geq 0$ , posons  $\|\cdot\|_a = \|\cdot\|_C + a\|\cdot\|_2$  et  $C_{a,b}$  la boule fermée de rayon  $b$  sous la norme  $\|\cdot\|_a$ . Alors  $C_{0,1} = C$ . Notons que  $\|x\|_a$  est une fonction continue strictement croissante de  $a$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_C$ , et que  $C_{a,b}$  est continu, décroissant par rapport à  $a$  et croissant par rapport à  $b$ , c'est à dire,

$$(4.23) \quad C_{a,b} \supset C_{a',b}, \quad C_{a,b} \subset C_{a,b'} \text{ pour tout } a < a', b < b',$$

et

$$(4.24) \quad \bigcap_{a_n \rightarrow a^-} C_{a_n,b} = \bigcap_{b_n \rightarrow b^+} C_{a,b_n} = C_{a,b}; \quad \bigcup_{a_n \rightarrow a^+} C_{a_n,b} = \bigcup_{b_n \rightarrow b^-} C_{a,b_n} = C_{a,b}^\circ.$$

On va montrer maintenant que

$$(4.25) \quad \begin{aligned} &\text{pour tous } a, b > 0, \text{ pour tous } x, y \in \partial C_{a,b} \text{ tels que } \alpha_{x,y} < \frac{\pi}{2}, \\ &\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_a \leq b - D(a, b, A)\|x-y\|_2^2, \end{aligned}$$

avec  $D(a, b, A) > 0$ , où  $\alpha_{x,y} < \pi$  désigne l'angle entre  $\vec{Ox}$  et  $\vec{Oy}$  pour  $x, y \neq 0$ .

Prenons  $x, y \in \partial C_{a,b}$  quelconques tels que  $\alpha_{x,y} < \frac{\pi}{2}$ , par (4.22)

$$(4.26) \quad \frac{b}{A+a} \leq \|x\|_2, \|y\|_2 \leq \frac{b}{A^{-1}+a}.$$

Alors par la définition de  $\|\cdot\|_a$ ,

$$(4.27) \quad \begin{aligned} \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_a &= \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_C + a \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_2 \leq \left\| \frac{x}{2} \right\|_C + \left\| \frac{y}{2} \right\|_C + a \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_2 \\ &= \frac{1}{2} (\|x\|_C + \|y\|_C) + a \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_2. \end{aligned}$$

Pour le dernier terme, en notant  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne  $\|\cdot\|_2$  pour abréger, on a

$$(4.28) \quad \begin{aligned} \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_2 &= \left\langle \frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right\rangle^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{\|x\|^2}{4} + \frac{\|y\|^2}{4} + \frac{\langle x, y \rangle}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[ \left( \frac{\|x\|}{2} + \frac{\|y\|}{2} \right)^2 - \frac{\|x\| \|y\|}{2} \left( 1 - \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Mais

$$(4.29) \quad 1 - \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} = 1 - \cos \alpha_{x,y} = 2 \sin^2 \left( \frac{1}{2} \alpha_{x,y} \right),$$

et donc par (4.28) et (4.26)

$$(4.30) \quad \begin{aligned} \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_2 &\leq \left[ \left( \frac{\|x\|}{2} + \frac{\|y\|}{2} \right)^2 - \frac{\|x\| \|y\|}{2} \times 2 \sin^2 \left( \frac{1}{2} \alpha_{x,y} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[ \left( \frac{\|x\|}{2} + \frac{\|y\|}{2} \right)^2 - \left( \frac{b}{A+a} \right)^2 \sin^2 \left( \frac{1}{2} \alpha_{x,y} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \frac{\|x\|}{2} + \frac{\|y\|}{2} \right) \left[ 1 - \left( \frac{\|x\|}{2} + \frac{\|y\|}{2} \right)^{-2} \left( \frac{b}{A+a} \right)^2 \sin^2 \left( \frac{1}{2} \alpha_{x,y} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \frac{\|x\|}{2} + \frac{\|y\|}{2} \right) \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\|x\|}{2} + \frac{\|y\|}{2} \right)^{-2} \left( \frac{b}{A+a} \right)^2 \sin^2 \left( \frac{1}{2} \alpha_{x,y} \right) \right] \\ &= \frac{\|x\|}{2} + \frac{\|y\|}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\|x\|}{2} + \frac{\|y\|}{2} \right)^{-1} \left( \frac{b}{A+a} \right)^2 \sin^2 \left( \frac{1}{2} \alpha_{x,y} \right) \\ &\leq \frac{\|x\|}{2} + \frac{\|y\|}{2} - \frac{b(A^{-1}+a)}{2(A+a)^2} \sin^2 \left( \frac{1}{2} \alpha_{x,y} \right). \end{aligned}$$

En combinant avec (4.27) on obtient

$$(4.31) \quad \begin{aligned} \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_a &\leq \frac{1}{2} (\|x\|_C + \|y\|_C) + a \left[ \frac{\|x\|}{2} + \frac{\|y\|}{2} - \frac{b(A^{-1}+a)}{2(A+a)^2} \sin^2 \left( \frac{1}{2} \alpha_{x,y} \right) \right] \\ &\leq \left\| \frac{x}{2} \right\|_a + \left\| \frac{y}{2} \right\|_a - \frac{ab(A^{-1}+a)}{2(A+a)^2} \sin^2 \left( \frac{1}{2} \alpha_{x,y} \right) \\ &= b - \frac{ab(A^{-1}+a)}{2(A+a)^2} \sin^2 \left( \frac{1}{2} \alpha_{x,y} \right). \end{aligned}$$

Il faut donc estimer  $\frac{1}{2} \alpha_{x,y}$  pour montrer (4.25).

Par (4.22), on a

$$(4.32) \quad \overline{B}(0, \frac{b}{A+a}) \subset C_{a,b} \subset \overline{B}(0, \frac{b}{A^{-1}+a}).$$

Notons  $r = \frac{b}{A+a}$ ,  $R = \frac{b}{A-1+a}$  pour l'instant. Alors  $\overline{B}(0, r) \subset C_{a,b} \subset \overline{B}(0, R)$ . Notons alors que  $\partial C_{a,b} \cap B(0, r) = \emptyset$ . Prenons  $x, y \in \partial C_{a,b}$ . Notons  $L$  la droite passant par  $x$  et  $y$ . On a alors 2 cas.

1er cas :  $L \cap B(0, r) \neq \emptyset$ . On affirme alors que dans  $L$ , le segment non-dégénéré  $I = L \cap \overline{B}(0, r)$  sépare  $x$  et  $y$ , autrement dit,  $x$  et  $y$  se situent de deux côtés différents de  $I$ . En effet sinon, notons  $z$  l'extrémité de  $I$  le plus proche de  $x$  et  $y$ . Supposons par exemple que  $\|z - x\| > \|z - y\|$  (il est possible que  $z = y$ , mais ce n'est pas grave). Prenons  $L_y$  la droite tangente à  $B(0, r)$  passant par  $y$  telle que  $L, L_y$  et l'origine appartiennent à un même plan, et  $w \in \partial B(0, r)$  le point tangent. Alors par (4.32),  $w \in C_{a,b}$ , et donc  $C_{a,b}$  contient le segment fermé  $[xw]$ , en tant que convexe. La demi droite  $[Oy)$  issue par  $O$  est passant par  $y$  rencontre le segment ouvert  $(xw)$  en un point  $u$ . Alors  $u \in [x, w] \subset C_{a,b}$ . De plus  $u = \alpha y$ , avec  $\alpha > 1$ , ce qui contredit le fait que  $y \in \partial C_{a,b}$ .

Donc  $x$  et  $y$  se situent de deux côtés différents de  $I$ . Notons  $v \in L$  le point tel que  $[Ou] \perp L$ . Alors  $\|u\| < r$ , et

$$(4.33) \quad \begin{aligned} \alpha_{x,y} &> \max\{\alpha_{x,v}, \alpha_{y,v}\} = \max\{\arctan \frac{\|x-v\|}{\|u\|}, \arctan \frac{\|y-v\|}{\|u\|}\} \\ &\geq \arctan \frac{\frac{1}{2}\|x-y\|}{\|u\|} \geq \arctan \frac{\|x-y\|}{2r}. \end{aligned}$$

Par l'hypothèse,  $0 \leq \alpha_{x,y} < \frac{\pi}{2}$ , donc par (4.33),  $\tan \alpha_{x,y} > \frac{\|x-y\|}{2r}$ . Notons que

$$(4.34) \quad \tan^2 \alpha_{x,y} = \frac{\sin^2 \alpha_{x,y}}{\cos^2 \alpha_{x,y}} = \frac{\sin^2 \alpha_{x,y}}{1 - \sin^2 \alpha_{x,y}},$$

par conséquent

$$(4.35) \quad \sin^2 \alpha_{x,y} > \frac{\|x-y\|^2}{4r^2} / (1 + \frac{\|x-y\|^2}{4r^2}) = \frac{\|x-y\|^2}{4r^2 + \|x-y\|^2}.$$

Mais  $x, y \in \partial C_{a,b} \subset B(0, R)$ , donc  $\|x-y\| \leq 2R$ , on a donc

$$(4.36) \quad \sin^2 \alpha_{x,y} > \frac{\|x-y\|^2}{4(r^2 + R^2)}.$$

Par conséquent

$$(4.37) \quad \alpha_{x,y} > \sin \alpha_{x,y} > \frac{\|x-y\|}{2\sqrt{r^2 + R^2}},$$

et donc

$$(4.38) \quad \sin^2 \frac{\alpha_{x,y}}{2} > (\frac{2}{\pi} \frac{\alpha_{x,y}}{2})^2 > \frac{\|x-y\|^2}{4\pi^2(r^2 + R^2)}.$$

2ème cas :  $L \cap B(0, r) = \emptyset$ . Alors la distance entre  $L$  et l'origine est supérieure à  $r$ . Notons  $w \in L$  tel que  $\vec{Ow} \perp L$ , alors  $\|w\| > r$ . Supposons par exemple que  $\|x-w\| \geq \|y-w\|$ . Alors

1° si  $w$  sépare  $x$  et  $y$  sur  $L$ , on a alors

$$(4.39) \quad \alpha_{x,y} \geq \angle xOw \text{ et } \|x-w\| \geq \frac{1}{2}\|x-y\|,$$

de sorte que

$$(4.40) \quad \tan \alpha_{x,y} \geq \tan \angle xOw = \frac{\|x - w\|}{\|w\|} \geq \frac{1}{2} \|x - y\|/R,$$

et donc

$$(4.41) \quad \alpha_{x,y} \geq \arctan \frac{1}{2R} \|x - y\|.$$

Un argument semblable à celui après (4.33) donne

$$(4.42) \quad \sin^2 \frac{\alpha_{x,y}}{2} > \frac{\|x - y\|^2}{8\pi^2 R^2};$$

2° si  $w$  ne sépare pas  $x$  et  $y$  sur  $L$ , on a

$$(4.43) \quad \alpha_{x,y} = \angle xOy \geq \angle xOw - \angle yOw,$$

et donc

$$(4.44) \quad \begin{aligned} \tan \alpha_{x,y} &\geq \tan(\angle xOw - \angle yOw) = \tan(\arctan \frac{\|x - w\|}{\|w\|} - \arctan \frac{\|y - w\|}{\|w\|}) \\ &= (\frac{\|x - w\|}{\|w\|} - \frac{\|y - w\|}{\|w\|}) / (1 + \frac{\|x - w\|}{\|w\|} \frac{\|y - w\|}{\|w\|}) \\ &\geq \frac{\|x - y\|}{R} / (1 + \frac{R^2 - r^2}{r^2}) = \|x - y\| \frac{r^2}{R^3}, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est parce que

$$(4.45) \quad \|x - w\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|w\|^2} \leq \sqrt{R^2 - r^2}$$

et pareil pour  $y$ . On a donc

$$(4.46) \quad \alpha_{x,y} \geq \arctan \frac{r^2}{R^3} \|x - y\|.$$

On fait exactement comme après (4.33), et on obtient

$$(4.47) \quad \sin^2 \frac{\alpha_{x,y}}{2} > \frac{r^4}{\pi^2(R^6 + 4R^2r^4)} \|x - y\|^2.$$

En combinant avec (4.31), on obtient

$$(4.48) \quad \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_a \leq b - D(a, b, A) \|x - y\|^2,$$

où

$$(4.49) \quad D(a, b, A) = \frac{ab(A^{-1} + a)}{2(A + a)^2} \min \left\{ \frac{1}{4\pi^2(r^2 + R^2)}, \frac{1}{8\pi^2 R^2}, \frac{r^4}{\pi^2(R^6 + 4R^2r^4)} \right\} > 0,$$

avec  $r = \frac{b}{A+a}$ ,  $R = \frac{b}{A^{-1}+a}$ .

On a donc l'affirmation (4.25).

Maintenant par (4.26), on a que

$$(4.50) \quad \frac{1}{A+a} \|\cdot\|_a \leq \|\cdot\|_2 \leq \frac{1}{A^{-1}+a} \|\cdot\|_a,$$

donc pour chaque  $z \in \partial C_{a,b}$ ,

$$(4.51) \quad \begin{aligned} \|z - \frac{x+y}{2}\|_2 &\geq \frac{1}{A+a} \|z - \frac{x+y}{2}\|_a \geq \frac{1}{A+a} (\|z\|_a - \|\frac{x+y}{2}\|_a) \\ &\geq \frac{1}{A+a} D(a, b, A) \|x - y\|_2^2 = M(a, b, A) \|x - y\|_2^2, \end{aligned}$$

où  $M(a, b, A) = \frac{1}{A+a} D(a, b, A) > 0$ .

Par conséquent, pour chaque  $x, y \in \partial C_{a,b}$  tel que  $\alpha_{x,y} < \frac{\pi}{2}$ ,  $B(\frac{x+y}{2}, M(a, b, A)) \subset C_{a,b}$ .

Maintenant pour tout  $\epsilon > 0$ , soit  $w, v \in \mathbb{R}^n \setminus B(C_{a,b}, \epsilon)$  tels que  $\pi_{a,b}(w) = x, \pi_{a,b}(v) = y$ , où  $\pi_{a,b}$  désigne la projection de plus courte distance sur  $C_{a,b}$ . On affirme que l'angle  $\beta_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$  entre  $x\vec{w}$  et  $y\vec{x}$  est plus petit que  $\arctan \frac{1}{2M(a, b, A)\|x-y\|}$ . En effet, notons  $P$  le plan contenant  $x, y$  et  $w, z \in P$  le point tel que  $[z, \frac{x+y}{2}] \perp [x, y]$  et  $\|z - \frac{x+y}{2}\| = M(a, b, A) \|x - y\|^2$ . Alors  $z \in C_{a,b}$ ,  $[x, z] \in C_{a,b}$ , et

$$(4.52) \quad \tan \angle zxy = 2M(a, b, A) \|x - y\|.$$

Alors si  $\beta_1 > \arctan \frac{1}{2M(a, b, A)\|x-y\|}$ , on a  $\angle wxz < \frac{\pi}{2}$ . Notons  $s$  la projection de  $w$  sur  $L'$ , la droite passant par  $x$  et  $z$ . Alors  $s$  est entre  $x$  et  $z$ , ou  $z$  est entre  $x$  et  $s$ . Dans les deux cas  $(x, z) \cap (x, s) \neq \emptyset$ . Prenons  $x' \in (x, z) \cap (x, s) \subset C_{a,b}$ , alors  $x' \in C_{a,b}$ , et  $\angle wxz < \angle wx'z$ . Par conséquent

$$(4.53) \quad \|w - x\| = \|w - s\| / \sin \angle wxz > \|w - s\| / \sin \angle wx'z = \|w - x'\|,$$

ce qui contredit le fait que  $x$  est la projection de plus courte distance de  $w$  sur  $C_{a,b}$ .

On montre pareillement que si  $\beta_2$  désigne l'angle entre  $y\vec{v}$  et  $x\vec{y}$ , alors  $\beta_2 \leq \arctan \frac{1}{2M(a, b, A)\|x-y\|}$ .

Notons  $L$  la droite passant par  $x$  et  $y$ ,  $Q$  l'hyperplan perpendiculaire à  $L$ ,  $p_L$  et  $p_Q$  leurs projecteurs respectivement. Alors

$$(4.54) \quad \|w - v\| \geq \|p_L(w) - p_L(v)\| = \|w - x\| \cos \beta_1 + \|x - y\| + \|v - y\| \cos \beta_2.$$

Mais  $w, v \in \mathbb{R}^n \setminus B(C_{a,b}, \epsilon)$ , on a donc  $\|w - x\| > \epsilon, \|v - y\| > \epsilon$ , donc

$$(4.55) \quad \begin{aligned} \|w - v\| &\geq \|x - y\| + 2\epsilon \cos \arctan \frac{1}{2M(a, b, A)\|x - y\|} \\ &= \|x - y\| + 2\epsilon \left( \frac{4M^2 \|x - y\|^2}{1 + 4M(a, b, A)^2 \|x - y\|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \|x - y\| + 2\epsilon \frac{2M(a, b, A) \|x - y\|}{(1 + 4M(a, b, A)^2 R^2)} \\ &= (1 + \epsilon C(a, b, A)) \|x - y\|, \end{aligned}$$

où  $R = \frac{b}{A^{-1}+a}$  est comme dans (4.32), et donc  $C(a, b, A) > 0$ .

Notons que (4.55) est vrai pour les  $x, y$  tel que  $\alpha_{x,y} < \frac{\pi}{2}$ . Donc  $\pi_{a,b}$  est localement  $\frac{1}{1+\epsilon C(a, b, A)}$ -Lipschitzienne sur  $\mathbb{R}^n \setminus B(C_{a,b}, \epsilon)$ .

Revenons à la démonstration du lemme. Fixons  $\epsilon > 0$  quelconque. Alors par (4.23) et (4.24), il existe  $a, b > 0$  tel que

$$(4.56) \quad C \subset C_{a,b} \subset B(C_{a,b}, \frac{\epsilon}{2}) \subset B(C, \epsilon).$$

Maintenant notons  $\pi_C$  la projection de plus courte distance sur  $C$ . Notons  $f = \pi_C \circ \pi_{a,b}$  pour une paire de  $a, b$  qui satisfie (4.56). Alors pour montrer le lemme, il suffit de montrer que  $\pi_{a,b}$  est localement  $1 - \delta$ -Lipschitzienne sur  $\mathbb{R}^n \setminus B(C_{a,b}, \frac{\epsilon}{2})$ . Alors par (4.55), on prend  $\delta$  tel que  $1 - \delta = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\epsilon C(a,b,A)}$ , et on obtient la conclusion.

Fin de la démonstration du lemme.

**Corollaire 4.57.** *Soit  $E \subset \mathbb{R}^n \setminus B(C, \epsilon)$  rectifiable, alors*

$$(4.58) \quad H^d(f(E)) \leq (1 - \delta)^d H^d(E).$$

Revenons maintenant à la démonstration de la proposition 4.8. Rappelons qu'ici  $C$  est l'enveloppe convexe de  $P_k \cap \overline{B}(0, 1)$ .

On va montrer que

$$(4.59) \quad \text{pour tout } \epsilon > 0, E_k \subset B(C, 2\epsilon).$$

Sinon,  $E_k \setminus B(C, 2\epsilon) \neq \emptyset$ , alors par la régularité d'Ahl fors,  $H^2(E_k \setminus B(C, 2\epsilon)) > 0$ . On applique le corollaire 4.57 à  $E_k \setminus B(C, 2\epsilon)$  et le convexe  $B(C, \epsilon)$ , on obtient qu'il existe une application Lipschitzienne  $f_\epsilon$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $B(C, \epsilon)$  telle que

$$(4.60) \quad H^2(f_\epsilon(E_k)) < H^2(E_k),$$

où  $f_\epsilon$  est comme dans le lemme 4.21. Alors on aurait (4.59) si on savait que  $\pi_\epsilon(E_k)$  est une déformation de  $E_k$  dans  $U$ .

Mais on sait déjà que  $E_k \subset \overline{B}(0, 1)$ . Donc l'ensemble  $W_\epsilon := \{x \in E_k, \pi_\epsilon(x) \neq x\} \subset \overline{B}(0, 1) \setminus B(C, \epsilon)$ , qui est compact et loin du bord de  $U$ . Notons  $d(W_\epsilon, \partial U) = d$ , et posons

$$(4.61) \quad g : \mathbb{R}^n \rightarrow B(C, \epsilon), f(x) = t(x)x + (1 - t(x))f_\epsilon(x), t(x) = \min\{2d(x, W_\epsilon)/d, 1\},$$

alors  $g$  est une déformation dans  $U$ , et

$$(4.62) \quad g(E_k) = f_\epsilon(E_k).$$

Donc si  $E_k \setminus B(C, 2\epsilon) \neq \emptyset$ , alors  $g$  diminue strictement la mesure de  $E_k$ , et ceci contredit le fait que  $E_k$  est minimal. On a donc (4.59). Mais (4.59) est vrai pour tout  $\epsilon > 0$ , on a donc

$$(4.63) \quad E_k \subset C,$$

d'où (5).

Seconde démonstration de (5).

On va raisonner par l'absurde. Soit  $x \in E_k$  qui n'appartient pas à  $C$ , alors puisque  $C$  est convexe, il existe un plan  $Q$  de dimension 3 qui sépare  $x$  et  $C$ . Notons  $R$  le demi espace fermé bordé par  $Q$  et contenant  $x$ . Alors  $x \in \text{int}R$ , de sorte qu'il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset R$ . Mais par la régularité d'Ahl fors, la mesure de  $E_k$  dans  $B(x, r)$  est non nulle, donc en particulier, la mesure de  $E_R = E_k \cap R$  est non nulle.

Notons  $\pi_Q$  la projection orthogonale de  $\overline{B}(0, 1)$  sur  $\overline{B}(0, 1) \setminus \text{int}R$ , qui envoie  $R \cap \overline{B}(0, 1)$  sur  $Q \cap \overline{B}(0, 1)$ . Alors  $\pi_Q(E_k)$  est une déformation de  $E_k$  dans  $U$ . En effet, notons  $C_R$  l'enveloppe convexe de  $E_R \cup \pi_Q(E_R)$ , alors  $C_R \subset \overline{B}(0, 1) \cap R$  et est compact. Il existe alors  $s > 0$  tel que  $B(C_R, 2s) \cap (C \cup P_k) = \emptyset$ . Posons  $f(x) = t(x)x + (1 - t(x))\pi_Q(x)$ , où  $t(x) = \max\{d(x, B(C_R, s))/s, 1\}$ . Alors  $f$  envoie  $U$  dans  $U$ , est Lipschitzienne, et ne change que les point dans  $B(C_R, 2s) \cap R$ . En particulier,  $f_t(x) = (1 - t)x + tf(x)$  est une homotopie entre  $id$  et  $f$ , de  $U$  dans  $U$ . De plus,  $f(E_k) = \pi_Q(E_k)$ .

On veut montrer que

$$(4.64) \quad f \text{ diminue strictement la mesure de } E_k.$$

Autrement dit,  $H^2(\pi_Q(E_k)) < H^2(E_k)$ . Notons que  $\pi_Q(E_k) = (E_k \setminus E_R) \cup \pi_Q(E_R)$  et que  $E_k = (E_k \setminus E_R) \cup E_R$ . Donc il faut montrer que

$$(4.65) \quad H^2(\pi_Q(E_R)) < H^2(E_R).$$

Notons  $L$  l'espace (de dimension 1) orthogonal à  $Q$ . Et  $\pi_L$  la projection orthogonale de  $\mathbb{R}^4$  sur  $L$ . Posons  $a = \pi_L(Q)$ , et  $b \in L$  le point plus loin de  $a$  dans l'ensemble  $\pi_L(E_R)$ . Alors le segment  $[a, b]$  contient  $\pi_L(E_R)$ .

**Lemme 4.66.**  $[a, b] \subset \pi_L(E_R)$ .

Démonstration. Par l'absurde. On sait déjà que  $b \in \pi_L(E_R)$ . Soit  $x \in [a, b]$  tel que  $x \notin \pi_L(E_R)$ . Notons  $Q_x$  le sous-espace parallèle à  $Q$  est passant par  $x$ . Alors  $Q_x \cap E_k = \emptyset$ . Mais le point  $b$  et  $C$  vivent dans les deux côtés différents de  $Q_x$ . C'est à dire, si on prend  $y \in E_k$  tel que  $\pi_L(y) = b$ , alors  $Q_x$  sépare  $y$  et  $C$ . Il existe alors  $r_y > 0$  tel que  $Q_x$  sépare  $B(y, 2r_y)$  et  $C$ . Par la régularité d'Ahl fors de  $E_k$ ,  $B(y, r_y) \cap E_k$  est de mesure non nulle.

Notons  $R_x$  le demi espace bordé par  $Q_x$  qui contient  $y$ . Alors  $E_k \cap R_x$  est un compact, qui ne touche pas  $Q_x$ . On peut donc contracter  $R_x \cap E_k$  en un point dans  $R_x$ , en laissant fixé la partie  $E_k \setminus R_x$ . Mais  $H^2(R_x \cap E_k) > H^2(B(y, r_y) \cap E_k) > 0$ . C'est à dire, on peut diminuer strictement la mesure de  $E_k$  par une déformation, ce qui contredit le fait que  $E_k$  est minimal.

Donc  $[a, b] \subset \pi_L(E_R)$ .

Fin de la démonstration du lemme.

Maintenant notons  $E_P$  l'ensembles des points de type  $\mathbb{P}$  dans  $E_R$ ,  $E_Y$  l'ensemble des points de type  $\mathbb{Y}$  dans  $E_R$ , et  $E_T$  l'ensemble des points dans  $E_R$  qui ne sont pas de type  $\mathbb{Y}$  ou  $\mathbb{P}$ .

**Lemme 4.67.**  $H^1([a, b] \setminus \pi_L(E_P)) = 0$ .

Pour chaque  $x \in E_T$ , notons  $T_x$  une limite d'explosion de  $E_k$  en  $x$ ; il existe  $r_x > 0$  tel que dans  $B(x, r_x)$ ,  $E_k$  est bi-Höldériennement équivalent à  $T_x$  (c.f.[9].Thm 16.1). Mais  $T_x$  est un cône minimal, ce qui implique que tout point dans  $T_x$  est de type  $\mathbb{Y}$  ou  $\mathbb{P}$ , sauf l'origine (c.f.[9] Théorème 14.1). Par conséquent dans  $B(x, r_x)$ ,  $E_T$  ne contient qu'un point. Autrement dit,  $E_T$  est un ensemble composé de points isolés. Mais  $E_R$  est compact, donc

$$(4.68) \quad E_T \text{ est un ensemble fini.}$$

En suite on va montrer que l'ensemble

$$(4.69) \quad H^1[\pi_L(E_Y \cup E_P) \setminus \pi_L(E_P)] = 0.$$

Soit  $x \in E_Y$ . C'est à dire que toute limite d'explosion  $T_x$  de  $E_R$  en  $x$  est un  $\mathbb{Y}$ , qui est un cône minimal de "full length" (c.f.[10] Définition 2.10). Alors par la régularité  $C^1$  (c.f.[10] 1.15),  $T_x$  est unique et  $E_R$  coïncide, dans une boule  $B(x, r_x)$ , avec l'image par un  $C^1$  difféomorphisme  $\varphi_x$  de  $T_x$ .

Notons  $L_x$  l'épine de  $T_x$ . Alors dans  $B(x, r_x)$ ,  $\varphi(L_x)$  est une courbe  $C^1$ . Alors si la direction de  $L_x$  n'est pas orthogonale à celle de  $L$ , il existe un  $r'_x < r_x$  tel que dans  $B(x, r'_x)$ , aucune droite tangente de la courbe  $\varphi_x(L_x)$  n'est orthogonale à  $L$ . Par conséquent, pour chaque  $y \in L \cap B(\pi_l(x), r'_x)$ , le tranche  $\pi_L^{-1}(y)$  contient au plus un point de type  $\mathbb{Y}$  localement, puisque la tranche est orthogonale à  $L$ . Mais  $E_R \cap B(x, r'_x)$  est de mesure de dimension 2 non nulle, et même pour presque tout  $y \in L \cap B(\pi_l(x), r'_x)$  la tranche est de mesure de dimension 1 non nulle. Et donc la tranche contient un point de type  $\mathbb{P}$ .

Par conséquent, pour tout  $x \in E_Y$  tel que  $L_x$  n'est pas orthogonale à  $L$ , il existe  $r'_x > 0$  tel que pour presque tout  $y \in L \cap B(\pi_l(x), r'_x)$ ,  $y \in \pi_L(E_P)$ . Donc si on note  $E_{YQ} = \{x \in E_Y : L_x \perp L\} = \{x \in E_Y : L_x \text{ est parallèle à } Q\}$ , alors

$$(4.70) \quad \pi_L(E_P) \supset \pi_L(E_Y \setminus E_{YQ}),$$

et par conséquent

$$(4.71) \quad H^1(\pi_L(E_P)) = H^1(\pi_L(E_P) \cup \pi_L(E_Y \setminus E_{YQ})).$$

D'un autre côté, on affirme que

$$(4.72) \quad H^1(\pi_L(E_{YQ})) = 0.$$

En effet, par la formule de l'aire (c.f.[14] Cor 3.3.20),

$$(4.73) \quad \int_{E_{YQ}} |<\vec{L}, T_x E_{YQ}>| dH^1(x) \geq H^1(\pi_L(E_{YQ})),$$

où  $T_x E_{YQ}$  désigne la droite tangente à  $E_{YQ}$  en  $x$ , et  $\vec{L}$  un vecteur unitaire parallèle à  $L$ .

Mais pour chaque  $x \in E_{YQ}$ ,  $T_x E_{YQ} = L_x$  est orthogonale à  $L$ , ce qui implique que  $<\vec{L}, T_x E_{YQ}>=0$ . Alors le terme de gauche de (4.73) est nul. Par conséquent  $H^1(\pi_L(E_{YQ})) = 0$ , d'où (4.72).

En sommant (4.71) et (4.72) on obtient (4.69). Et par (4.68),

$$(4.74) \quad \begin{aligned} [a, b] \setminus \pi_L(E_P) &= \pi_L(E_R) \setminus \pi_L(E_P) = \pi_L(E_P \cup E_Y \cup E_T) \setminus \pi_L(E_P) \\ &\subset \pi_L(E_T) \cup [\pi_L(E_Y \cup E_P) \setminus \pi_L(E_P)], \end{aligned}$$

de sorte que

$$(4.75) \quad H^1([a, b] \setminus \pi_L(E_P)) \leq H^1(\pi_L(E_P)) + H^1[\pi_L(E_Y \cup E_P) \setminus \pi_L(E_P)] = 0.$$



Fin de la démonstration du lemme.

D'après le lemme on sait que  $H^1(\pi_L(E_P)) = b - a$ . On note  $E_{PQ} = \{x \in E_P : T_x E_k \in \vec{Q}\}$ . Alors par la formule de la coaire (c.f.[14] Cor 3.3.22),

$$(4.76) \quad \int_{E_{PQ}} ||\wedge_1 \pi_L(x)|| dH^2(x) = \int_{\pi_L(E_{PQ})} dH^1(z) H^1[\pi_L^{-1}\{z\} \cap E_{PQ}].$$

Mais pour tout  $x \in E_{PQ}$ ,

$$(4.77) \quad ||\wedge_1 \pi_L(x)|| = |\pi_{T_x E_k}(\vec{L})| \leq |\pi_Q(\vec{L})| = 0,$$

où  $T_x E_k$  désigne le plan tangent de  $E_k$  en  $x$ . Par conséquent le terme de gauche de (4.76) est nul, ce qui implique que pour presque tout  $z \in \pi_L(E_{PQ})$ ,  $H^1[\pi_L^{-1}\{z\} \cap E_{PQ}] = 0$ .

Alors il y a deux cas.

1er cas. Si  $H^1(\pi_L(E_{PQ})) > 0$ , il existe alors  $z \in \pi_L(E_{PQ})$  tel que  $H^1[\pi_L^{-1}\{z\} \cap E_{PQ}] = 0$ . Prenons  $w \in E_{PQ}$  tel que  $\pi_L(w) = z$ . Alors  $w$  est de type  $\mathbb{P}$ , et par la régularité  $C^1$  de  $E$  près des points de type  $\mathbb{P}$ , il existe  $r > 0$  tel que  $E_k$  coïncide dans  $B(w, r)$  avec le graphe d'une fonction  $\varphi$  de classe  $C^1$  de  $T_w E_k$  vers  $T_w E_k^\perp$ . Alors tous les points dans  $B(w, r) \cap E_k$  sont de type  $\mathbb{P}$ . La proposition 11.17 de [17] donne que  $\varphi$  est une fonction harmonique. Alors la fonction  $\varphi' = \pi_L \circ \varphi$  est une fonction harmonique de  $(w + T_w E_k) \cap B(w, r)$  dans  $L$ , avec  $\varphi'(w) = 0$ . Cela implique que, soit  $\varphi'$  est constante et donc  $E_k \cap B(w, r) \subset Q + w = \pi_L^{-1}(z)$ , soit  $E_k \cap B(w, r) \cap \pi_L^{-1}(z)$  est une courbe lisse. Alors le premier cas est impossible, par définition de  $z$ . Dans le deuxième cas, la courbe est de mesure  $H^1$  positive, est tout point dans ce courbe est de type  $\mathbb{P}$ , alors puisque  $H^1[\pi_L^{-1}\{z\} \cap E_{PQ}] = 0$ , il existe  $x \in \pi_L^{-1}\{z\} \cap E_P$  dont le plan tangent n'est pas contenu dans  $\vec{Q}$ .

2ème cas. Si  $H^1(\pi_L(E_{PQ})) = 0$ . Alors  $H^1(\pi_L(E_P \setminus E_{PQ}))$  est de mesure pleine dans  $[a, b]$ , d'après le lemme 4.67. En particulier, il existe  $x \in E_P \subset E_R$  tel que  $T_x E_k$  est un plan qui n'est pas contenu dans  $Q$ , et que  $\pi_L(x) \in (a, b)$ .

Dans les deux cas, il existe un point  $x$  de type  $\mathbb{P}$  dont le plan tangent n'est pas contenu dans  $Q$ .

Par la  $C^1$  régularité de  $E_K$  en  $x$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset Q$  et que  $E_k \cap B(x, r)$  est l'image d'une application  $\varphi$  de classe  $C^1$  de  $T_x E_k$ . Notons que  $T_x E_k \not\subset Q$  implique que  $|\pi_Q(T_x E_k)| < 1$  (voir (2.6) pour la définition). Posons  $\beta = 1 - |\pi_Q(T_x E_k)|$ . Alors puisque  $\varphi$  est de classe  $C^1$ , il existe  $r' < r$  tel que pour tout  $y \in B(x, r') \cap E_k$ ,  $|\pi_Q(T_y E_k)| < 1 - \frac{\beta}{2}$ .

Alors par la formule de l'aire,

$$(4.78) \quad \begin{aligned} H^2(\pi_Q(E_k \cap B(x, r'))) &= \int_{E_k \cap B(x, r')} |\pi_Q(T_y E_k)| dH^2(y) \\ &\leq (1 - \frac{\beta}{2}) H^2(E_k \cap B(x, r')). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$(4.79) \quad \begin{aligned} H^2(\pi_Q(E_R)) &= H^2[\pi_Q(E_R \setminus B(x, r')) \cup (E_R \cap B(x, r'))] \\ &\leq H^2[\pi_Q(E_R \setminus B(x, r'))] + H^2[\pi_Q(E_R \cap B(x, r'))] \\ &\leq H^2(E_R \setminus B(x, r')) + (1 - \frac{\beta}{2}) H^2(E_k \cap B(x, r')) \\ &\leq H^2(E_R \setminus B(x, r')) + H^2(E_k \cap B(x, r')) - \frac{\beta}{2} H^2(E_k \cap B(x, r')) \\ &\leq H^2(E_R) - \frac{\beta}{2} H^2(E_k \cap B(x, r')). \end{aligned}$$

Mais par la régularité d'Ahlfors on a que  $H^2(E_k \cap B(x, r'))$  est strictement positive, on a donc

$$(4.80) \quad H^2(\pi_Q(E_R)) < H^2(E_R),$$

d'où (4.65).

On obtient donc (4.65), ce qui contredit le fait que  $E_k$  est minimal.  $\square$

**Corollaire 4.81.** *Pour toute sous suite  $n_k$  telle que  $E_{n_k}$  converge dans  $\overline{B}(0, 1)$ , la limite est  $P_0 \cap \overline{B}(0, 1)$ .*

Démonstration. Prenons une telle suite  $n_k$ . Notons  $E_\infty$  la limite de  $E_{n_k}$ . On veut appliquer le théorème 3.1, donc on va vérifier les conditions sur  $E_\infty$ .

D'abord par [9] lemme 3.3, on sait que  $E_\infty$  est aussi minimal dans  $B(0, 1)$ , car chaque  $E_{n_k}$  l'est.

Ensuite, (3.2) vient de la proposition 4.8(3) et du fait que  $E_\infty$  est la limite de  $E_{n_k}$ .

Pour vérifier (3.3), si on note  $C_k$  l'enveloppe convexe de  $P_k \cap \overline{B}(0, 1)$  (et  $C_0$  l'enveloppe convexe de  $P_0 \cap \overline{B}(0, 1)$ ), alors par la proposition 4.8,  $E_{n_k} \subset C_{n_k}$ . Puisque  $E_\infty$  est la limite de  $E_{n_k}$ , pour

chaque  $m > 0$ , il existe  $K(m) > 0$  tel que pour tout  $k > K(m)$ ,  $E_\infty \subset B(E_{n_k}, \frac{1}{m}) \subset B(C_{n_k}, \frac{1}{m}) \subset \cup_{k=K(m)}^\infty B(C_{n_k}, \frac{1}{m})$ . On peut demander aussi que  $K(m) > k(l)$  si  $m > l$ . Par conséquent on a

$$(4.82) \quad E_\infty \subset \cap_{m=1}^\infty \cup_{k=K(m)}^\infty B(C_{n_k}, \frac{1}{m}) = C_0,$$

et donc

$$(4.83) \quad E_\infty \cap \partial B(0, 1) \subset C_0 \cap \partial B(0, 1) = P_0 \cap \partial B(0, 1).$$

D'autre part, puisque  $E_\infty$  est la limite de  $E_{n_k}$ , il contient  $\lim_{k \rightarrow \infty} E_{n_k} \cap \partial B(0, 1) = P_0 \cap \partial B(0, 1)$ .

Donc

$$(4.84) \quad E_\infty \cap \partial B(0, 1) = P_0 \cap \partial B(0, 1).$$

d'où (3.3).

Pour (3.4), on sait par la proposition 4.8 (4) que  $H^2(E_{n_k}) < 2\pi$ . Mais les  $E_{n_k}$  et  $E_\infty$  sont des ensembles minimaux, donc le lemme 3.3 de [9] donne

$$(4.85) \quad H^2(E_\infty \cap B(0, 1)) \leq \liminf_k H^2(E_{n_k} \cap B(0, 1)) \leq 2\pi.$$

L'égalité vient de (3.2), et les lemmes 2.45 et 2.15.

Donc par le théorème 3.1,  $E_\infty = P_0 \cap \overline{B}(0, 1)$ . □

Notons que  $\overline{B}(0, 1)$  est compact, quitte à extraire une sous suite, on peut supposer que la suite  $E_k$  converge. Alors par le corollaire, la limite est  $P_0 \cap \overline{B}(0, 1)$ . Donc à partir de maintenant, on va travailler sur cette suite  $\{E_k\}_{k>0}$  qui converge vers  $P_0 \cap \overline{B}(0, 1)$ .

## 5 Rayons critiques

Pour notre  $E_k$ , encore une fois s'il est une déformation, alors il doit être obtenu en pinçant  $P_k$  au milieu, parce que sinon, notre fonction de déformation est injective, et  $E_k$  est l'union essentiellement disjointes des images de  $P_k^1$  et  $P_k^2$  respectivement. Mais puisque  $P_k^i$  est minimal, chaque image est de mesure plus grande, et par conséquent  $E_k$  n'est pas un meilleur compétiteur.

Puisqu'on pince, on sait que  $E_k$  doit commencer à s'éloigner de  $P_k^1$  ou  $P_k^2$  quelque part, et du coup on va payer un prix pour ça. Et en effet l'enjeu de la démonstration est de comprendre pourquoi pincer coûte encore plus cher que ce qu'il permet de gagner.

Pourtant  $E_k$  n'est pas forcément une déformation, donc ce qu'on vient de dire est juste pour justifier ce qu'on va faire. On va trouver l'endroit où  $E_k$  commence à s'éloigner de  $P_k$ .

Donc pour un  $\epsilon$  suffisamment petit, on veut trouver, un centre  $o$  qui n'est pas loin de l'origine, et une échelle  $r$ , tels que  $E_k$  est  $2\epsilon r$  proche de  $P_k$  dans  $B(o, 2r)$ , mais n'est plus  $\epsilon r$  proche d'aucune translation de  $P_k$  dans  $B(o, r)$ . C'est l'endroit qu'on cherche, et  $r$  est notre rayon "critique". Et alors hors de la petite boule  $B(o, \frac{1}{4}r)$  notre  $E_k$  est près des plans, donc est très "plat". Par contre dans la petite boule où se produit vraisemblablement le pincement, on ne voit pas bien ce qui se passe, donc on va contrôler la mesure de  $E_k$  par un argument de projections en utilisant le corollaire 2.65. Par contre, on pourra traiter plus précisément la partie plate hors de  $B(o, \frac{1}{4}r)$  puisqu'elle est régulière (si  $\epsilon$  est petit). On montrera finalement qu'on perd plus de mesure sur la partie plate que ce qu'on peut espérer gagner dans la partie intérieure.

Dans ce paragraphe on va utiliser un processus de récurrence pour trouver le rayon critique.

On note, pour chaque  $k$  et  $i = 1, 2$  :

$$(5.1) \quad C_k^i(x, r) = (p_k^i)^{-1}(B(0, r) \cap P_k^i) + x,$$

et

$$(5.2) \quad D_k(x, r) = C_k^1(x, r) \cap C_k^2(x, r).$$

Donc ici  $C_k^i(x, r)$  est un "cylindre" et  $D_k(x, r)$  est l'intersection de deux "cylindres". On peut noter aussi que  $D_k(x, r) \supset B(x, r)$  et  $D_k(0, 1) \cap P_k = B(0, 1) \cap P_k$ .

On dit que deux ensembles  $E, F$  sont  $\epsilon r$  proches dans un ouvert  $U$  si

$$(5.3) \quad d_{r, U}(E, F) < \epsilon$$

où

$$(5.4) \quad d_{r, U}(E, F) = \frac{1}{r} \max\{\sup\{d(y, F) : y \in E \cap U\}, \sup\{d(y, E) : y \in F \cap U\}\}.$$

On note aussi

$$(5.5) \quad \begin{aligned} d_{x, r}^k(E, F) &= d_{r, D_k(x, r)}(E, F) \\ &= \frac{1}{r} \max\{\sup\{d(y, F) : y \in E \cap D_k(x, r)\}, \sup\{d(y, E) : y \in F \cap D_k(x, r)\}\}. \end{aligned}$$

**Remarque 5.6.** *Observons que*

$$(5.7) \quad d_{r, U}(E, F) \neq \frac{1}{r} d_H(E \cap U, F \cap U).$$

*Pour voir cela, on peut prendre  $U = D_k(x, r)$ , et poser  $E_n = \partial D_k(x, r + \frac{1}{n})$  et  $F_n = \partial D_k(x, r - \frac{1}{n})$ , alors on a*

$$(5.8) \quad d_{x, r}^k(E_n, F_n) \rightarrow 0$$

et

$$(5.9) \quad \frac{1}{r} d_H(E_n \cap D_k(x, r), F_n \cap D_k(x, r)) = \frac{1}{r} d_H(E_n \cap D_k(x, r), \emptyset) = \infty.$$

Donc  $d_{r,U}$  mesure plutôt comment la partie d'un ensemble dans l'ouvert  $U$  peut être approximée par un autre ensemble entier, et réciproquement. Mais on a toujours

$$(5.10) \quad d_{r,U}(E, F) \leq \frac{1}{r} d_H(E \cap U, F \cap U).$$

Rappelons maintenant que  $\{E_k\}$  est une suite d'ensembles comme dans la proposition 4.8, avec  $\theta_k > \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k}$ , et qui converge vers  $P_0 \cap \overline{B}(0, 1)$ .

**Proposition 5.11.** *Il existe  $\epsilon_0 > 0$ , tel que si  $\epsilon < \epsilon_0$ , alors pour tout  $k$  assez grand, il existe  $r_k \in ]0, \frac{1}{2}[$  et  $o_k \in B(0, 12\epsilon)$  tels que  $E_k$  est  $2\epsilon r_k$  proche de  $P_k + o_k$  dans  $D_k(o_k, 2r_k(1 - 12\epsilon))$ , mais par contre il n'est  $\epsilon r_k$  proche de  $P_k + q$  dans  $D_k(o_k, r_k)$  pour aucun  $q \in \mathbb{R}^4$ .*

**Remarque 5.12.** *On utilisera d'ailleurs la construction aussi pour les échelles intermédiaires.*

Démonstration.

On fixe un  $\epsilon$  et un  $k$ , et on pose  $s_i = 2^{-i}$  pour  $i \geq 0$ . On note  $D(x, r) = D_k(x, r)$ ,  $d_{x,r} = d_{x,r}^k$  pour abréger. Et on procède de la manière suivante.

Etape 1 : Notons  $q_0 = q_1 = O$  (et rappelons que  $s_0 = 1$ ), on a donc dans  $D(q_0, s_0)$  que  $E_k$  est  $\epsilon s_0$  proche de  $P_k + q_1$  si  $k$  est grand, car  $E_k \rightarrow P_0$ ,  $P_k \rightarrow P_0$  implique que  $d_{0,1}(E_k, P_k) \rightarrow 0$ .

Etape 2 : Si dans  $D(q_1, s_1)$   $E_k$  n'est  $\epsilon s_1$  proche d'aucun  $P_k + q$  on s'arrête ; sinon, il existe un  $q_2$  tel que  $E_k$  est  $\epsilon s_1$  proche de  $P_k + q_2$  dans  $D(q_1, s_1)$ . Ici on demande que  $\epsilon$  soit assez petit (disons  $\epsilon < \frac{1}{100}$ ) pour que  $q_2 \in D(q_1, \frac{1}{2}s_1)$  à cause de la conclusion de l'étape 1. Alors dans  $D(q_1, s_1)$  on a simultanément :

$$(5.13) \quad d_{q_1,s_1}(E_k, P_k + q_1) \leq s_1^{-1} d_{q_0,s_0}(E_k, P_k + q_1) \leq 2\epsilon ; \quad d_{q_1,s_1}(E_k, P_k + q_2) \leq \epsilon.$$

Vérifions que ceci implique que  $d_{q_1,\frac{1}{2}s_1}(P_k + q_1, P_k + q_2) \leq 12\epsilon$  quand  $\epsilon$  est petit, disons  $\epsilon < \frac{1}{100}$ . En effet pour chaque  $z \in D(q_1, \frac{1}{2}s_1) \cap (P_k + q_1)$  on a  $d(z, E_k) \leq d_{q_0,s_0}(E_k, P_k + q_1) \leq \epsilon$ . Il existe donc un  $y \in E_k$  tel que  $d(z, y) \leq \epsilon$ . Mais puisque  $z \in D(q_1, \frac{1}{2}s_1)$ , on a  $y \in D(q_1, \frac{1}{2}s_1 + \epsilon) \subset D(q_1, s_1)$ , et donc  $d(y, P_k + q_2) \leq s_1^{-1} d_{q_1,s_1}(E_k, P_k + q_2) \leq 2\epsilon$ , donc  $d(z, P_k + q_2) \leq d(z, y) + d(y, P_k + q_2) \leq 3\epsilon$ .

D'un autre côté, soit  $z \in D(q_1, \frac{1}{2}s_1) \cap (P_k + q_2)$ , on a alors  $d(z, E_k) \leq s_1^{-1} d_{q_1,s_1}(P_k + q_2, E_k) \leq 2\epsilon$ , il existe donc un  $y \in E_k$  tel que  $d(z, y) \leq 2\epsilon$ . Mais puisque  $z \in D(q_1, \frac{1}{2}s_1)$ , on a donc  $y \in D(q_1, \frac{1}{2}s_1 + 2\epsilon) \subset D(q_0, s_0)$ , de sorte que  $d(y, P_k + q_1) \leq d_{q_0,s_0}(E_k, P_k + q_1) \leq \epsilon$ , et donc  $d(z, P_k + q_1) \leq d(z, y) + d(y, P_k + q_1) \leq 3\epsilon$ .

On a donc

$$(5.14) \quad d_{q_1,\frac{1}{2}s_1}(P_k + q_1, P_k + q_2) \leq (\frac{1}{2}s_1)^{-1} \times 3\epsilon = 12\epsilon,$$

et par conséquent  $d_{q_1,\frac{1}{2}s_1}(q_1, q_2) \leq 24\epsilon$ , et donc  $d(q_1, q_2) \leq 6\epsilon = 12\epsilon s_1$ .

Maintenant on définit notre processus d'itération (notons qu'il dépend de  $\epsilon$ , on l'appelle aussi un  $\epsilon$ -processus).

Supposons que les  $\{q_i\}_{i \leq n}$  sont déjà définis, avec

$$(5.15) \quad d(q_i, q_{i+1}) \leq 12s_i\epsilon = 12 \times 2^{-i}\epsilon$$

pour  $0 \leq i \leq n-1$ , et donc

$$(5.16) \quad d(q_i, q_j) \leq 24\epsilon s_{\min(i,j)} = 2^{-\min(i,j)} \times 24\epsilon$$

pour  $0 \leq i, j \leq n$ , et que de plus pour tout  $i \leq n-1$ ,  $E_k$  est  $\epsilon s_i$  proche de  $P_k + q_{i+1}$  dans  $D(q_i, s_i)$ . On dit que le processus ne s'arrête pas à l'étape  $n$ . Alors

Etape  $n+1$  : On regarde alors dans  $D(q_n, s_n)$ .

Si  $E_k$  n'est  $\epsilon$  proche d'aucun  $P_k + q$  dans cette boule de rayon  $s_n$ , on s'arrête et on trouve notre  $o_k = q_n, r_k = s_n$  comme désiré. En effet, puisque  $d(q_{n-1}, q_n) \leq 12\epsilon s_{n-1}$ , on a  $D(q_n, 2s_n(1 - 12\epsilon)) = D(q_n, s_{n-1}(1 - 12\epsilon)) \subset D(q_{n-1}, s_{n-1})$ , et donc

$$(5.17) \quad \begin{aligned} d_{q_n, 2s_n(1 - 12\epsilon)}(P_k + q_n, E_k) &\leq (1 - 12\epsilon)^{-1} d_{q_{n-1}, s_{n-1}}(P_k + q_n, E_k) \\ &\leq \frac{\epsilon}{1 - 12\epsilon}. \end{aligned}$$

De plus

$$(5.18) \quad d(o_k, O) = d(q_n, q_1) \leq 2^{-\min(1,n)} \times 24\epsilon = 12\epsilon.$$

Sinon, on peut trouver un  $q_{n+1} \in \mathbb{R}^4$  tel que  $E_k$  est encore  $\epsilon s_n$  proche de  $P_k + q_{n+1}$  dans  $D(q_n, s_n)$ , alors puisque  $\epsilon$  est petit,  $q_{n+1} \in D(q_n, \frac{1}{2}s_n)$ . De plus on a comme avant  $d(q_{n+1}, q_n) \leq 12\epsilon s_n$  et pour  $i \leq n-1$ ,

$$(5.19) \quad d(q_i, q_{n+1}) \leq \sum_{j=i}^n d(q_j, q_{j+1}) \leq \sum_{j=i}^n 12 \times 2^{-j}\epsilon \leq 2^{-i} \times 24\epsilon = 2^{-\min(i,n+1)} \times 24\epsilon.$$

On obtient donc notre  $q_{n+1}$ .

Maintenant il ne reste plus qu'à montrer que ce processus doit s'arrêter à une étape finie pour chaque  $\epsilon$  suffisamment petit. Et pour montrer cela, on va estimer la mesure de notre ensemble  $E_k$ . On a donc besoin du lemme suivant.

**Lemme 5.20.** *Il existe  $\epsilon_0 > 0$ , tel que pour tout  $\epsilon < \epsilon_0$ ,  $k$  assez grand, et pour tout  $n$  tel que le  $\epsilon$ -processus ne s'arrête pas avant  $n$  (ce qui implique en particulier qu'il existe  $q_n \in B(q_{n-1}, \frac{1}{2}s_{n-1})$  tel que  $E_k$  est  $\epsilon s_{n-1}$  proche de  $P_k + q_n$  dans  $D(q_{n-1}, s_{n-1})$ ),*

$$(5.21) \quad E_k \cap (D(0, 1) \setminus D(q_n, s_n)) = F_n^1 \cup F_n^2$$

où  $F_n^1, F_n^2$  ne se rencontrent pas. De plus

$$(5.22) \quad P_k^i \cap (D(0, 1) \setminus D(q_n, s_n)) \subset p_k^i(F_n^i)$$

où  $p_k^i$  est la projection orthogonale sur  $P_k^i$ ,  $i = 1, 2$ .

On va montrer ce lemme dans le paragraphe suivante. Donc admettons ce lemme pour l'instant.

Puisque  $H^2(E_k) < 2\pi$ , il existe  $n_k > 0$  tel que

$$(5.23) \quad \inf_{q \in \mathbb{R}^4} H^2(P_k \setminus D(q, s_{n_k})) > H^2(E_k)$$

Alors notre processus doit s'arrêter avant ce  $n_k$ , parce que sinon on aurait, par le lemme précédent, la décomposition disjointe

$$(5.24) \quad E_k = [E_k \cap D(q_{n_k}, s_{n_k})] \uplus F_{n_k}^1 \uplus F_{n_k}^2,$$

et donc

$$(5.25) \quad \begin{aligned} H^2(E_k) &\geq H^2(F_{n_k}^1) + H^2(F_{n_k}^2) \geq H^2[p_k^1(F_{n_k}^1)] + H^2[p_k^2(F_{n_k}^2)] \\ &\geq H^2(P_k \setminus D(q_{n_k}, s_{n_k})) > H^2(E_k), \end{aligned}$$

une contradiction.  $\square$

## 6 Propriétés de projection et régularité de $E_k$

La prochaine étape, comme on a dit au début de la section précédente, est de donner des propriétés utiles pour notre estimation, dont la régularité pour la partie plate hors d'une petite boule, et la surjectivité des projections à l'intérieur de la boule, auxquelles va contribuer cette section. Elle donne aussi le lemme 5.20.

**Proposition 6.1.** *Il existe  $\epsilon_0 > 0$ , tel que pour  $\epsilon < \epsilon_0$  fixé et  $k$  grand, si notre  $\epsilon$ -processus ne s'arrête pas avant l'étape  $n$ , alors*

$$(1) \quad E_k \cap (D_k(0, \frac{39}{40}) \setminus D_k(q_n, \frac{1}{10}s_n)) \text{ est composé de deux morceaux disjoints } G^i, i = 1, 2, \text{ tels que :}$$

$$(6.2) \quad G^i \text{ est le graphe d'une application } C^1 \ g^i : D_k(0, \frac{39}{40}) \setminus D_k(q_n, \frac{1}{10}s_n) \cap P_k^i \rightarrow P_k^{i \perp}$$

avec

$$(6.3) \quad \|\nabla g^i\|_\infty < 1 ;$$

(2) (lemme 5.20) pour chaque  $\frac{1}{10}s_n \leq t \leq s_n$

$$(6.4) \quad E_k \cap (D_k(0, 1) \setminus D_k(q_n, t)) = G_t^1 \cup G_t^2$$

où  $G_t^1, G_t^2$  ne se rencontrent pas. De plus

$$(6.5) \quad P_k^i \cap (D_k(0, 1) \setminus C_k^i(q_n, t)) \subset p_k^i(G_t^i)$$

où  $p_k^i$  est la projection orthogonale sur  $P_k^i, i = 1, 2$  ;

(3) Pour chaque  $\frac{1}{10}s_n < t < s_n$ , il existe une suite  $\{F_l^n(t) = f_l^n(t)((P_k + q_n) \cap \overline{D}_k(q_n, s_n + \frac{1}{l}))\}_{l \geq 1}$  de déformations de  $(P_k + q_n) \cap \overline{D}_k(q_n, t + \frac{1}{l})$  dans  $\overline{D}_k(q_n, t + \frac{1}{l})$ , avec

$$(6.6) \quad f_l^n(t)((P_k + q_n) \cap \partial C_k^i(q_n, t + \frac{1}{l})) \subset \partial C_k^i(q_n, t + \frac{1}{l})$$

qui tend vers  $E_k \cap D_k(q_n, t)$  dans  $D_k(0, 1)$  ;

(4) les projections orthogonales  $p_k^i : E_k \cap D_k(q_n, t) \rightarrow P_k^i \cap C_k^i(q_n, t), i = 1, 2$  sont surjectives, pour tout  $\frac{1}{10}s_n \leq t \leq s_n$ .

Démonstration. Pour montrer (1) on va se servir d'un théorème de régularité sur les varifolds. On utilisera les notations suivantes.

$G(n, d)$  est la variété Grassmann  $G(\mathbb{R}^n, d)$  ;

Pour chaque  $T \in G(n, d)$ , on note aussi  $\pi_T$  la projection orthogonale vers le  $d$ -plan représenté par  $T$  ;

Pour chaque mesure  $\nu$  sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $\theta^d(\nu, x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu B(a, r)}{\alpha(d)r^d}$  (si la limite existe) est la densité de  $\nu$  en  $x$ , où  $\alpha(d)$  désigne le volume de la  $d$ -boule unité ;

$\mathbb{V}_d(\mathbb{R}^n)$  désigne l'ensemble de tout les  $d$ -varifold dans  $\mathbb{R}^n$ , i.e. toutes les mesure Radon sur  $G_d(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \times G(n, d)$  ;

Pour chaque  $V \in \mathbb{V}_d(\mathbb{R}^n)$ ,  $\|V\|$  est la mesure Radon sur  $\mathbb{R}^n$  telle que pour chaque  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\|V\|(A) = V(G_d(\mathbb{R}^n) \cap \{(x, S) : x \in A\})$  ;

$\delta(V)$  désigne la première variation de  $V$ , qui est l'application linéaire de  $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par

$$(6.7) \quad \delta V(g) = \int Dg(x) \cdot \pi_S dV(x, S)$$

pour  $g \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ . Ici  $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$  est l'espace vectoriel de toutes les application  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  à support compact.

Dans notre cas, on ne s'intéresse qu'aux varifolds rectifiables. En effet, à chaque ensemble  $d$ -rectifiable  $E$  on associe un  $d$ -varifold, noté  $V_E$ , au sens suivant : pour chaque  $B \subset \mathbb{R}^n \times G(n, d)$ , on a

$$(6.8) \quad V_E(B) = H^d\{(x, T_x E) \in B\}.$$

Rappelons que  $T_x E$  est le  $d$  plan tangent de  $E$  à  $x$ , il existe en presque tout point  $x \in E$ , puisque  $E$  est  $d$ -rectifiable. Alors  $\|V_E\| = H^d|_E$ . De plus, la densité  $\theta^d(\|V_E\|, x)$  existe pour presque tout  $x \in E$ .

**Théorème 6.9** (c.f.[1] Théorème de régularité au début du paragraphe 8). Soit  $2 \leq d < p < \infty$ ,  $q = \frac{p}{p-1}$ . Alors à chaque  $\epsilon$  avec  $0 < \epsilon < 1$  correspond un  $\eta > 0$  avec les propriétés suivantes :

Soit  $0 < R < \infty$ ,  $0 < \mu < \infty$ ,  $V \in \mathbb{V}_d(\mathbb{R}^n)$ ,  $a \in \text{spt}\|V\|$  tels que

- 1)  $\theta^d(\|V\|, x) \geq \mu$  pour  $\|V\|$  presque tout  $x \in B(a, R)$  ;  
 2)  $\|V\|B(a, R) \leq (1 + \eta)\mu\alpha(d)R^d$  ;  
 3)  $\delta V(g) \leq \eta\mu^{\frac{1}{p}}R^{\frac{d}{p-1}}(\int |g|^q\mu\|V\|)^{\frac{1}{q}}$  pour tout  $g \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$  and  $spt g \subset B(a, R)$ .

Alors il existe  $T \in G(n, d)$  et une fonction  $C^1 F : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tels que  $\pi_T \circ F = 1_T$ ,

$$(6.10) \quad \|DF(y) - DF(z)\| \leq \epsilon(|y - z|/R)^{1-\frac{d}{p}} \text{ pour tous } y, z \in T,$$

et

$$(6.11) \quad B(a, (1 - \epsilon)R) \cap spt\|V\| = B(a, (1 - \epsilon)R) \cap \text{image } F.$$

**Remarque 6.12.** 1) Dans le théorème, comme  $\pi_T \circ F = 1_T$ , on voit que  $F$  est en effet le graphe de la fonction  $C^1 f$ , définie par  $f(t) = \pi_{T^\perp} F(t)$ , avec  $t \in T$ ,  $\pi_{T^\perp}$  la projection orthogonale vers  $T^\perp$ , l'espace orthogonal de  $T$ . De plus  $\|Df(t)\| \leq \|DF(t)\|$  pour tout  $t \in T$ .

2) Si  $E$  est un ensemble localement minimal,  $V_E$  est stationnaire, i.e.  $\delta V_E = 0$ . Donc la condition 3) s'établit automatiquement. En effet si on pose  $g_t(x) = (1 - t)x + tg(x)$ , alors

$$(6.13) \quad \delta V_E(g) = \frac{d}{dt} H^d(g_t(E \cap spt g)),$$

ce qui se voit par le formule de l'aire. Et donc si  $E$  est minimal,  $\delta V_E = 0$ .

**Proposition 6.14.** Pour chaque  $n > d > 0$ , il existe  $\epsilon_1 = \epsilon_1(n, d) > 0$  tel que ce qui suit est vrai. Soit  $E$  un ensemble localement minimal de dimension  $d$  dans un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$ , avec  $U \supset B(0, 2)$  et  $0 \in E$ . Alors si  $E$  est  $\epsilon_1$  proche d'un  $d$ -plan  $P$  dans  $B(0, 1)$ , alors  $E$  coïncide avec le graphe d'une application  $C^1 f : P \rightarrow P^\perp$  dans  $B(0, \frac{3}{4})$ . De plus  $\|\nabla f\|_\infty < 1$ .

Démonstration. On le montrera seulement pour  $d = 2$ . La démonstration pour les autre dimensions est semblable.

D'abord vérifions les condition dans le théorème 6.9, avec  $a = 0, R = 1, \mu = 1, \eta < \frac{1}{10}$ , et  $\epsilon$  petit, à choisir plus tard.

1) Puisque  $E$  est minimal, pour tout  $x \in E$ , la densité de  $E$  en  $x$  est au moins 1, donc 1) est vrai.

2) On sait que  $E$  est  $\epsilon_1$  proche d'un 2-plan affine  $P$  dans  $B(0, 1)$ , et  $H^2(P \cap B(0, 1)) \leq \alpha(2) = \pi$ , alors par le lemme 16.43 de [9], on peut choisir  $\epsilon_1$  (qui dépend de  $\epsilon$ , puisque  $\eta$  dépend de  $\epsilon$ ) tel que 2) est vrai. En particulier

$$(6.15) \quad H^2(B(0, 1) \cap E) \leq \frac{11}{10}.$$

3) Vient de la minimalité de  $E$ , par remarque 6.12 2), avec n'importe quel  $p > 2$ .

Alors quand  $p$  est assez grand, par le théorème, il existe un plan  $T$  et une fonction  $F$  de classe  $C^1$   $T \rightarrow \mathbb{R}^4$  tels que dans  $B(0, 1 - \epsilon)$ ,  $E$  coïncide avec l'image de  $F$ , et que

$$(6.16) \quad \|DF(y) - DF(z)\| \leq \epsilon(|y - z|/R)^{1-\frac{2}{p}} \leq (\frac{7}{4})^{1-\frac{2}{p}}\epsilon \leq 2\epsilon$$

pour tous  $y, z \in F^{-1}(E \cap B(0, 1 - \epsilon))$ .

Notons que pour chaque  $y \in F^{-1}(E \cap B(0, 1 - \epsilon)) \subset T$ ,  $DF(y)(T)$  est le plan tangent de  $E$  en  $F(y)$ . Donc (6.16) veut dire que les plans tangents de  $E$  ne varient pas beaucoup dans  $B(0, 1 - \epsilon)$ .

Maintenant notons  $Q$  le plan parallèle à  $P$  (le plan dans l'énoncé) et passant par l'origine,  $\pi$  le projecteur de  $Q$ , et  $\pi'$  le projecteur de  $Q^\perp$ . On affirme que pour chaque  $y \in T$  tel que  $F(y) \in B(0, 1 - \epsilon)$  et chaque  $u \in T_y E = DF(y)(T)$ ,

$$(6.17) \quad \|\pi(u)\| \geq \frac{3}{4}\|u\|.$$

En effet, si (6.17) n'est pas vrai, alors il existe  $y \in F^{-1}(E \cap B(0, 1 - \epsilon))$  et  $u \in T_y E$  tel que  $\|\pi(u)\| < \frac{3}{4}\|u\|$ . Notons  $t = DF(y)^{-1}(u) \in T$ , alors

$$(6.18) \quad \|\pi(DF(y)(t))\| \leq \frac{3}{4}\|DF(y)(t)\|.$$

Par (6.16), pour tout  $z \in F^{-1}(E \cap B(0, 1 - \epsilon))$ ,

$$\begin{aligned} (6.19) \quad \|\pi(DF(z)(t))\| &\leq \|\pi \circ (DF(z) - DF(y))(t)\| + \|\pi \circ DF(y)(t)\| \\ &\leq 2\epsilon\|t\| + \frac{3}{4}\|DF(y)(t)\| \\ &\leq 2\epsilon\|t\| + \frac{3}{4}\|DF(y)(t) - DF(z)(t)\| + \frac{3}{4}\|DF(z)(t)\| \\ &\leq 2\epsilon\|t\| + \frac{3}{2}\epsilon\|t\| + \frac{3}{4}\|DF(z)(t)\| \\ &= \frac{7}{2}\epsilon\|t\| + \frac{3}{4}\|DF(z)(t)\|. \end{aligned}$$

Mais  $\pi_T \circ F = 1_T$  entraîne que pour tout  $t \in T$ ,

$$(6.20) \quad \|DF(z)(t)\| \geq \|\pi_T \circ DF(z)(t)\| = \|t\|,$$

de sorte que

$$(6.21) \quad \|\pi(DF(z)(t))\| \leq \left(\frac{7}{2}\epsilon + \frac{3}{4}\right)\|DF(z)(t)\|.$$

Donc quand  $\epsilon$  est suffisamment petit, on a

$$(6.22) \quad \|\pi' \circ DF(z)(t)\| \geq \frac{1}{2}\|DF(z)(t)\|$$

pour tout  $z \in F^{-1}(E \cap B(0, 1 - \epsilon))$ .

Notons  $e_1 = \pi' \circ DF(0)(t)/\|\pi' \circ DF(0)(t)\|$  un vecteur unitaire dans  $Q$ . On a donc

$$(6.23) \quad \langle e_1, DF(0)(t) \rangle > \frac{1}{2}\|DF(0)(t)\|.$$

Alors pour tout  $z \in F^{-1}(E \cap B(0, 1 - \epsilon))$ , encore une fois par (6.16) et (6.20),

$$\begin{aligned}
\langle e_1, DF(z)(t) \rangle &= \langle e_1, (DF(z) - DF(0))(t) \rangle + \langle e_1, DF(0)(t) \rangle \\
&\geq \langle e_1, DF(0)(t) \rangle - \|\langle e_1, (DF(z) - DF(0))(t) \rangle\| \\
&\geq \frac{1}{2} \|DF(0)(t)\| - 2\epsilon \|t\| \\
(6.24) \quad &\geq \frac{1}{2} [\|DF(z)(t)\| - \|(DF(0) - DF(z))(t)\|] - 2\epsilon \|t\| \\
&\geq \frac{1}{2} [\|DF(z)(t)\| - 2\epsilon \|t\|] - 2\epsilon \|t\| \geq \frac{1}{2} \|DF(z)(t)\| - 3\epsilon \|DF(z)(t)\| \\
&\geq \frac{1}{3} \|DF(z)(t)\|.
\end{aligned}$$

Par conséquent, si on prend  $z \in F^{-1}(E \cap \partial B(0, 1 - \epsilon))$ , tel que  $\vec{z} = \lambda t$  avec  $\lambda > 0$ , on a

$$\begin{aligned}
\langle e_1, F(z) - F(0) \rangle &= \langle e_1, \int_0^1 DF(sz)(t) ds \rangle = \int_0^1 \langle e_1, DF(sz)(t) \rangle ds \\
(6.25) \quad &\geq \int_0^1 \frac{1}{3} \|DF(sz)(t)\| ds = \frac{1}{3} \int_0^1 \|DF(sz)(t)\| ds \\
&\geq \frac{1}{3} \|F(z) - F(0)\| = \frac{1}{3} \|F(z)\| = \frac{1}{3}(1 - \epsilon),
\end{aligned}$$

ce qui implique que quand  $\epsilon_1, \epsilon$  sont suffisamment petits, il n'existe aucune translation  $Q + x$  de  $Q$  (y compris  $P$ ) telle que  $B_{0,1}(Q + x, E) < \epsilon_1$ . Contradiction.

On a donc (6.17). Autrement dit,  $D\pi$  est toujours injective en des points de  $E \cap B(0, 1 - \epsilon)$ . Alors par le théorème des fonctions implicites, pour tout  $x \in E \cap B(0, 1 - \epsilon)$ , il existe  $r_x > 0$  et  $g_x : Q \rightarrow Q^\perp$  tels que  $E$  coïncide dans  $\pi^{-1}[B(\pi(x), r_x) \cap Q] \cap B(x, 2r_x)$  avec le graphe de  $g_x$  sur  $B(\pi(x), r_x)$ . De plus par (6.17)

$$(6.26) \quad \|\nabla g_x(x)\| \leq 1.$$

On va montrer que

$$(6.27) \quad \pi(E \cap B(0, 1 - \epsilon)) \supset Q \cap B(0, \frac{3}{4}).$$

Rappelons que  $E$  est  $\epsilon_1$  proche d'un plan  $P$  parallèle à  $Q$  dans  $B(0, 1)$ , donc  $E \cap B(0, 1) \subset B(P, \epsilon_1)$  et  $d(0, P) \leq \epsilon_1$ , de sorte que  $d(Q, P) \leq \epsilon_1$ . Donc  $E \cap B(0, 1 - \epsilon) \subset B(Q, 2\epsilon_1)$ , de sorte que  $E \cap \partial B(0, 1 - \epsilon) \subset B(Q, 2\epsilon)$ , et donc

$$(6.28) \quad \text{pour chaque } x \in E \cap \partial B(0, 1 - \epsilon), \|\pi(x)\| \geq \sqrt{(1 - \epsilon)^2 - (2\epsilon)^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Mais par le théorème 6.9,  $E \cap B(0, 1 - \epsilon)$  est un disque topologique, donc par un argument semblable à celui autour de (3.44), (6.28) donne  $\pi(E \cap B(0, 1 - \epsilon)) \supset B(0, \frac{3}{4}) \cap Q$ . On a donc (6.27).

Maintenant soit  $\Gamma$  une composante connexe de  $F := E \cap B(0, 1 - \epsilon) \cap \pi^{-1}(B(0, \frac{3}{4}) \cap Q)$ . Il est à la fois ouvert et fermé dans  $F$ . Mais on sait que  $D\pi(x)$  est injective pour tout  $x \in F$ , donc  $\pi$  est une application

ouverte, de sorte que  $\pi(\Gamma)$  est ouvert dans  $B(0, \frac{3}{4}) \cap Q$ . D'un autre côté, on affirme que  $\pi(\Gamma)$  est aussi fermé dans  $B(0, \frac{3}{4}) \cap Q$ . En effet, soit  $\{x_n\} \subset \pi(\Gamma)$  une suite de points qui converge vers un point  $x_\infty \in B(0, \frac{3}{4}) \cap Q$ . Pour chaque  $n$ , prenons  $y_n \in \Gamma$  tel que  $\pi(y_n) = x_n$ . Alors  $\{y_n\} \subset \bar{\Gamma}$ , qui est compact, de sorte qu'elle admet un point d'accumulation  $y_\infty \subset \bar{\Gamma}$ . Alors on a  $\pi(y_\infty) = x_\infty$ . On veut montrer que  $y_\infty \in \Gamma$ , on regarde donc  $\bar{\Gamma} \setminus \Gamma$ . Alors puisque  $\Gamma$  est fermé dans  $F = E \cap B(0, 1 - \epsilon) \cap \pi^{-1}(B(0, \frac{3}{4}) \cap Q)$ , donc

$$(6.29) \quad \begin{aligned} \bar{\Gamma} \setminus \Gamma &\subset E \cap \partial[B(0, 1 - \epsilon) \cap \pi^{-1}(B(0, \frac{3}{4}) \cap Q)] \\ &= [\partial B(0, 1 - \epsilon) \cap \pi^{-1}(\bar{B}(0, \frac{3}{4}) \cap Q)] \cup [\partial(\pi^{-1}(B(0, \frac{3}{4}) \cap Q)) \cap \bar{B}(0, 1 - \epsilon)]. \end{aligned}$$

On sait que la distance  $d(\partial B(0, 1 - \epsilon) \cap \pi^{-1}(\bar{B}(0, \frac{3}{4}) \cap Q), Q) > \sqrt{(1 - \epsilon)^2 - (\frac{3}{4})^2} > \sqrt{\frac{7}{16} - 2\epsilon}$ , et  $d(P, Q) \leq d(0, P) < \epsilon_1$ , puisque  $0 \in Q$  et  $0 \in E$ . Par conséquent,

$$(6.30) \quad d(\partial B(0, 1 - \epsilon) \cap \pi^{-1}(\bar{B}(0, \frac{3}{4}) \cap Q), P) > \sqrt{\frac{7}{16} - 2\epsilon} - \epsilon_1 > \epsilon_1$$

quand  $\epsilon$  et  $\epsilon_1$  sont tous les deux petits. Alors l'hypothèse dit que pour chaque  $y \in E \cap B(0, 1)$ ,  $d(y, P) < \epsilon_1$ , de sorte que  $[E \cap B(0, 1)] \cap \partial B(0, 1 - \epsilon) \cap \pi^{-1}(\bar{B}(0, \frac{3}{4}) \cap Q) = \emptyset$ . Par conséquent,  $\bar{\Gamma} \subset E \cap B(0, 1)$  ne s'intersecte pas avec  $\partial B(0, 1 - \epsilon) \cap \pi^{-1}(\bar{B}(0, \frac{3}{4}) \cap Q)$ . Donc en combinant avec (6.29),

$$(6.31) \quad \bar{\Gamma} \setminus \Gamma \subset \partial(\pi^{-1}(B(0, \frac{3}{4}) \cap Q)) \cap \bar{B}(0, 1 - \epsilon).$$

Mais par hypothèse,  $\pi(y_\infty) = x_\infty \in B(0, \frac{3}{4}) \cap Q$ , donc  $y_\infty \notin \partial(\pi^{-1}(B(0, \frac{3}{4}) \cap Q))$ . Donc,  $y_\infty \notin \bar{\Gamma} \setminus \Gamma$ . Donc  $y_\infty \in \Gamma$ , de sorte que  $x_\infty \in \pi(\Gamma)$ .

Donc  $\pi(\Gamma)$  est aussi fermé dans  $B(0, \frac{3}{4}) \cap Q$ . Et par conséquent,  $\pi(\Gamma) = B(0, \frac{3}{4}) \cap Q$ .

On affirme que

$$(6.32) \quad \pi : \Gamma \rightarrow B(0, \frac{3}{4}) \cap Q \text{ est un revêtement sur } Q \cap B(0, \frac{3}{4}).$$

En effet, puisque  $E$  est compact, l'application continue  $\pi : E \rightarrow Q$  est propre, de sorte que pour chaque  $x \in Q \cap B(0, \frac{3}{4})$ ,  $\pi^{-1}(x) \cap \Gamma$  est un ensemble fini. Notons cet ensemble  $\{y_1, \dots, y_N\}$ . Alors par la conclusion avant (6.26), pour chaque  $1 \leq j \leq N$ , il existe  $r_j > 0$  tel que  $\Gamma$  coïncide dans  $\pi^{-1}[B(x, r_j) \cap Q] \cap B(y_j, 2r_j)$  avec le graphe d'une fonction  $g_j : Q \rightarrow Q^\perp$  sur  $B(x, r_j) \cap Q$ . Notons  $r = \min_j r_j$ , alors  $\pi^{-1}[B(x, r) \cap Q]$  contient l'union finie disjointes des  $g_j(B(x, r) \cap Q)$ . D'autre part, pour chaque  $y \in \pi^{-1}(B(x, r) \cap Q)$ , prenons  $\gamma$  une composante connexe de  $\pi^{-1}(B(x, r) \cap Q)$  telle que  $y \in \gamma$ , alors par le même argument que celui pour  $\Gamma$  sur  $B(0, \frac{3}{4}) \cap Q$  ci-dessus,  $\pi(\gamma) \supset B(x, r) \cap Q$ , en particulier, il existe  $1 \leq j \leq N$  tel que  $y_j \in \gamma$ . Mais dans ce cas on a  $\gamma = g_j(B(x, r) \cap Q)$ , de sorte que  $y \in g_j(B(x, r) \cap Q)$ . Par conséquent,  $\pi^{-1}[B(x, r) \cap Q]$  est juste l'union finie disjointes des  $g_j(B(x, r) \cap Q)$ , dont sur chacun  $\pi$  est un homéomorphisme de  $B(x, r)$ , d'où (6.32).

Mais  $Q \cap B(0, \frac{3}{4})$  est simplement connexe,  $\Gamma$  est son revêtement connexe par  $\pi$ , donc  $\pi$  est forcément un homéomorphisme. Alors par la conclusion autour de (6.26),  $\Gamma$  est le graphe d'une fonction  $C^1$  de  $Q \rightarrow Q^\perp$  dont le gradient est de norme inférieure à 1.

Maintenant soit  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n, \dots$  les composantes connexes de  $E$ . Alors s'il existe plus d'un  $\Gamma_i$ , on a

$$(6.33) \quad H^2(E \cap B(0, 1)) > H^2(E \cap B(0, 1 - \epsilon) \cap \pi^{-1}(B(0, \frac{3}{4}) \cap Q)) \geq 2 \times \frac{9}{16}\pi = \frac{9}{8}\pi,$$

ce qui contredit (6.15).

Donc  $E \cap B(0, 1 - \epsilon) \cap \pi^{-1}(B(0, \frac{3}{4}) \cap Q)$  est un revêtement simple de  $Q \cap B(0, \frac{3}{4})$ . En combinant avec (6.27),  $\pi^{-1} : B(0, \frac{3}{4}) \cap Q \rightarrow E \cap B(0, 1 - \epsilon) \cap \pi^{-1}(B(0, \frac{3}{4}))$  est une fonction de classe  $C^1$ , qui coïncide avec  $g_x$  autour de  $\pi(x)$  pour chaque  $x \in E \cap B(0, 1 - \epsilon) \cap \pi^{-1}(B(0, \frac{3}{4}))$ , et donc  $\|\nabla g\|_\infty < 1$ . Maintenant posons  $f = g \circ \pi : P \cap \pi^{-1}(B(0, \frac{3}{4})) \rightarrow E \cap B(0, 1 - \epsilon) \cap \pi^{-1}(B(0, \frac{3}{4}))$ , notons que  $P$  est parallèle à  $Q$ , nous arrivons ainsi à la conclusion désirée.  $\square$

**Remarque 6.34.** Pour  $d = 2, n = 4$ , on peut obtenir le même résultat par le théorème 1.15 de [10], sans discuter de choses compliquées comme les varifolds, etc. Mais comme on va généraliser plus tard (dans le paragraphe 9, etc.) le résultat aux dimensions plus grandes, il est peut être mieux d'utiliser la démonstration ci-dessus, pour gagner de l'espace.

**Corollaire 6.35.** Il existe  $\epsilon_1 > 0$  tel que si  $k$  est assez grand,  $E$  est un ensemble localement minimal dans un domaine  $U \subset \mathbb{R}^4$ ,  $D_k(0, 1) \subset U$ , et  $E$  est  $\epsilon_1$  proche d'un plan  $P$  dans  $D_k(0, 1)$ , alors  $E$  coïncide avec le graphe d'une application  $C^1$   $f : P \rightarrow P^\perp$  dans  $D_k(0, \frac{1}{2})$ . De plus  $\|\nabla f\|_\infty < 1$ .

Démonstration. Quand  $k$  est assez grand, on a  $D_k(0, \frac{1}{2}) \subset B(0, \frac{3}{4}) \subset B(0, 1) \subset D_k(0, 1)$ . Alors si  $E$  est  $\epsilon_1$  proche d'un plan  $P$  dans  $D_k(0, 1)$ , ce qui entraîne qu'il est  $\epsilon_1$  proche de  $P$  dans  $B(0, 1)$ , il est donc dans  $B(0, \frac{3}{4})$  le graphe d'une fonction de classe  $C^1$   $f : P \rightarrow P^\perp$ , avec  $\|f\|_\infty < 1$ . Donc dans  $D_k(0, \frac{1}{2})$  aussi.  $\square$

Maintenant pour  $k$  assez grand fixé, notons encore  $D(x, r) = D_k(x, r)$ ,  $C^i(x, r) = C_k^i(x, r)$  pour  $i = 1, 2$ , et  $d_{x,r} = d_{x,r}^k$ .

On va obtenir (1) grâce au corollaire 6.35.

Pour  $k$  grand,  $P_k$  est très proche de  $P_0$ , il existe donc un  $0 < \epsilon_3 < \frac{1}{100}$  (qui ne dépend pas de  $k$  pour  $k$  assez grand), tel que pour tout  $\epsilon < \epsilon_3$ , si  $x \in \mathbb{R}^4$  et  $E$  est n'importe quel ensemble tel que  $d_{x,r}(E, P_k + q) < \epsilon$  avec  $q \in \mathbb{R}^4$  et  $d(x, q) < 20\epsilon r$ , alors dans  $D(x, r) \setminus D(q, \frac{1}{100}r)$ ,  $E$  est l'union disjointes de deux morceaux  $E^1, E^2$ , tels que dans  $D(x, r)$  moins un petit trou,  $E^1$  est proche de  $P_k^1 + q$ , mais loin de  $P_k^2 + q$ , et de même pour  $E^2$ . Plus précisément,

$$(6.36) \quad E^i \subset B((P_k^i + q) \cap D(x, r) \setminus D(q, \frac{1}{100}r), \epsilon r)$$

et

$$(6.37) \quad \begin{aligned} d(B(P_k^1 \cap D(x, r) \setminus D(q, \frac{1}{100}r), \epsilon r), B(P_k^2 \cap D(x, r) \setminus D(q, \frac{1}{100}r), \epsilon r)) &> \frac{1}{80}r ; \\ d(B(P_k^2 \cap D(x, r) \setminus D(q, \frac{1}{100}r), \epsilon r), B(P_k^1 \cap D(x, r) \setminus D(q, \frac{1}{100}r), \epsilon r)) &> \frac{1}{80}r. \end{aligned}$$

En particulier,

$$(6.38) \quad d(E^1, E^2) \geq \frac{1}{80}r.$$

Maintenant, prenons  $\epsilon_0 = \min\{\frac{1}{2}\epsilon_3, \frac{1}{40}\epsilon_1, 10^{-5}\}$ , alors pour chaque  $\epsilon < \epsilon_0$ , si notre  $\epsilon$ -processus ne s'arrête pas à l'étape  $n$ ,  $E_k$  est  $\epsilon s_{n-1}$  proche de  $P_k + q_n$  dans  $D(q_{n-1}, s_{n-1})$ . Notons pour l'instant  $q = q_n, x = q_{n-1}, r = s_{n-1}$ . Alors, puisque  $\epsilon < \epsilon_3$ ,

$$(6.39) \quad E_k \cap D(x, r) \setminus D(q, \frac{1}{100}r) \text{ est l'union disjointe de } E^1, E^2 \text{ tel que (6.36)-(6.38) sont vrais.}$$

Pour chaque  $y \in E^1 \cap D(x, r - \frac{1}{40}r) \setminus D(q, \frac{1}{20}r) = E^1 \cap D(q_{n-1}, \frac{39}{40}s_{n-1}) \setminus D(q_n, \frac{1}{10}s_n)$ ,

$$(6.40) \quad d_{y, \frac{1}{40}r}(E_k, P_k + q) < 40\epsilon < \epsilon_1,$$

où par définition,

$$(6.41) \quad d_{y, \frac{1}{40}r}(E_k, P_k + q) = \frac{1}{40}r \max\{\sup\{d(z, P_k + q) : z \in E_k \cap D(y, \frac{1}{40}r)\}, \sup\{d(z, E_k) : z \in P_k + q \cap D(y, \frac{1}{40}r)\}\}.$$

Pour le second terme,

$$(6.42) \quad \sup\{d(z, E_k) : z \in (P_k + q) \cap D(y, \frac{1}{40}r)\} \geq \sup\{d(z, E_k) : z \in (P_k^1 + q) \cap D(y, \frac{1}{40}r)\}$$

puisque  $P_k^1 \subset P_k$ ; pour le premier, notons d'abord que

$$(6.43) \quad \begin{aligned} \sup\{d(z, P_k + q) &: z \in E_k \cap D(y, \frac{1}{40}r)\} \\ &= \sup\{d(z, (P_k + q) \cap D(y, \frac{1}{40}r + \epsilon r)) : z \in E_k \cap D(y, \frac{1}{40}r)\} \end{aligned}$$

puisque on sait déjà que  $d_{y, \frac{1}{40}r}(E_k, P_k + q) < 40\epsilon$ , qui implique pour chaque  $z \in E_k \cap D(y, \frac{1}{40}r)$ , il existe un  $w \in P_k + q$  tel que  $d(z, w) < \epsilon r$ . Notons  $W = \{w \in P_k + q, d(z, w) < \epsilon r\}$ . Alors

$$(6.44) \quad d(z, P_k + q) = d(z, W).$$

Maintenant pour tout  $w \in W$ ,

$$(6.45) \quad \begin{aligned} w &\in (P_k + q) \cap D(y, \frac{1}{40}r + \epsilon r) \subset (P_k + q) \cap D(y, \frac{1}{40}r + \frac{1}{100}r) \\ &\subset (P_k + q) \cap D(x, r) \setminus D(q, \frac{1}{100}r) \\ &= [(P_k^1 + q) \cap D(x, r) \setminus D(q, \frac{1}{100}r)] \cup (P_k^2 + q) \cap D(x, r) \setminus D(q, \frac{1}{100}r). \end{aligned}$$

Alors  $w$  doit appartenir à  $(P_k^1 + q) \cap D(x, r) \setminus D(q, \frac{1}{100}r)$ , parce que sinon

$$(6.46) \quad z \in B(w, \epsilon r) \cap E_k \subset B((P_k^2 + q) \cap D(x, r) \setminus D(q, \frac{1}{100}r), \epsilon r) \cap E_k = E^2$$

à cause de (6.36) et (6.37), ce qui contredit le fait que  $z \in E^1$ . Donc

$$(6.47) \quad d(z, P_k + q) = d(z, W) \geq d(z, P_k^1 + q) \text{ pour } z \in E_k \cap D(y, \frac{1}{40}r),$$

de sorte que

$$(6.48) \quad \sup\{d(z, P_k + q) : z \in E_k \cap D(y, \frac{1}{40}r)\} \geq \sup\{d(z, P_k^1 + q) : z \in E_k \cap D(y, \frac{1}{40}r)\}.$$

En sommant (6.42) et (6.48) on obtient

$$(6.49) \quad d_{y, \frac{1}{40}r}(E^1, P_k^1 + q) \leq d_{y, \frac{1}{40}r}(E^1, P_k + q) < 40\epsilon < \epsilon_1.$$

Maintenant  $P_k^1 + q$  est un plan, et on peut se servir du corollaire 6.35 ; on obtient que

$$(6.50) \quad \begin{aligned} &\text{pour chaque } y \in E^1 \cap D(x, \frac{39}{40}r) \setminus D(q, \frac{1}{20}r), \text{ dans } D(y, \frac{1}{80}r), \\ &E_k \text{ est le graphe d'une application } C^1 f_y : P_k^1 \rightarrow P_k^1{}^\perp \text{ avec } \|\nabla f_y\| < 1. \end{aligned}$$

Mais  $E_k \cap D(y, \frac{1}{80}r) = E^1 \cap D(y, \frac{1}{80}r)$ , ce qui veut dire qu'autour de chaque point  $y \in E^1 \cap D(x, \frac{39}{40}r) \setminus D(q, \frac{1}{20}r)$ ,  $E^1$  est localement un graphe  $C^1$  sur  $P_k^1$ .

Vérifions que dans  $D(x, \frac{39}{40}r) \setminus D(q, \frac{1}{20}r)$ ,  $E^1$  coïncide avec le graphe d'une fonction de classe  $C^1$  sur  $P_k^1$  tout entier, avec la norme du gradient inférieure à 1. Or on a déjà notre petit graphe local près de chaque point, avec petit gradient. Il nous reste donc à montrer que la projection  $p_k^1 : E^1 \rightarrow P_k^1 \cap C^1(x, \frac{39}{40}r) \setminus C^1(q, \frac{1}{20}r)$  est bijective sur  $E^1 \cap D(x, \frac{39}{40}r) \setminus D(q, \frac{1}{20}r)$ .

Surjectivité : Posons  $A = p_k^1(E^1) \cap C^1(x, \frac{39}{40}r) \setminus C^1(q, \frac{1}{20}r)$ . Alors  $A$  est non vide. On va montrer que  $A = P_k^1 \cap C^1(x, \frac{39}{40}r) \setminus C^1(q, \frac{1}{20}r)$ .

D'abord  $A$  est fermé dans  $P_k^1 \cap C^1(x, \frac{39}{40}r) \setminus C^1(q, \frac{1}{20}r)$ , puisque  $E^1$  est compact dans  $D(x, \frac{39}{40}r) \setminus D(q, \frac{1}{20}r)$ .

Mais  $A$  est aussi ouvert, parce que si  $z \in A$  alors il existe  $y \in E^1 \cap D(x, \frac{39}{40}r) \setminus D(q, \frac{1}{20}r)$  tel que  $p_k^1(y) = z$ . Alors par (6.50), on sait que  $B(z, \frac{1}{80}r) \cap P_k^1 \subset A$ . Donc  $A$  est ouvert.

Maintenant on sait que  $P_k^1 \cap C^1(x, \frac{39}{40}r) \setminus C^1(q, \frac{1}{20}r)$  est connexe, donc  $A = P_k^1 \cap C^1(x, \frac{39}{40}r) \setminus C^1(q, \frac{1}{20}r)$ , ce qui donne la surjectivité.

Injectivité : Supposons que non. Alors il existe  $y_1, y_2 \in E^1 \cap D(x, \frac{39}{40}r) \setminus D(q, \frac{1}{20}r)$  tel que  $p_k^1(y_1) = p_k^1(y_2)$ . Alors

$$(6.51) \quad y_1 - y_2 \in P_k^1{}^\perp.$$

On sait que dans  $D(y_1, \frac{1}{80}r)$ ,  $E^1$  est un graphe, donc  $y_2 \notin D(y_1, \frac{1}{80}r)$ . Autrement dit,  $|y_1 - y_2| > \frac{1}{80}r$ . Donc il existe au moins un point parmi  $y_1, y_2$  dont la distance à  $P_k^1 + q$  est plus grande que  $\frac{1}{160}r > \epsilon r$ . C'est une contradiction avec (6.48) et le fait que  $d(z, P_k + q) \leq rd_{x,r}(E_k, P_k + q) < \epsilon r$ .

Donc  $p_k^1(q)$  est injective. On note  $f^1$  la fonction définie sur  $P_k^1 \cap C^1(x, \frac{39}{40}r + \frac{r}{80}) \setminus C^1(q, \frac{r}{20} - \frac{r}{80})$  et qui coïncide avec  $f_y$  sur chaque  $B(p_k^1(y), \frac{1}{80}r) \cap P_k^1$  ; alors dans  $E^1 \cap D(x, \frac{39}{40}r) \setminus D(q, \frac{1}{20}r)$ ,  $E^1$  est le graphe de  $f^1$  avec  $\|\nabla f^1\|_\infty < 1$ .

Par un argument semblable on obtient aussi que  $E^2 \cap D(x, \frac{39}{40}r) \setminus D(q, \frac{1}{20}r)$  est le graphe d'une application  $f^2$  de classe  $C^1$ , qui va de  $P_k^2 \cap C^2(x, \frac{39}{40}r) \setminus C^2(q, \frac{1}{20}r)$  dans  $P_k^2{}^\perp$ . Rappelons que  $D(x, r) =$

$D(q_{n-1}, s_{n-1})$ , et en remplaçant  $E^i$  par  $E^i(n)$ ,  $f^i$  par  $f^i(n)$ , et on peut obtenir notre graphe  $E^i(n) = f^i(n)(P_k^i \cap C^i(q_{n-1}, \frac{39}{40}s_{n-1}) \setminus C^i(q_n, \frac{1}{10}s_n))$  à condition que notre  $\epsilon$  processus ne s'arrête pas à l'étape  $n$ . Mais s'il ne s'arrête pas à  $n$ , bien sûr il ne s'arrête pas à toutes les étapes précédentes. On a donc pour tout  $j \leq n$ , les décompositions

$$(6.52) \quad E_k \cap D(q_{j-1}, \frac{39}{40}s_{j-1}) \setminus D(q_j, \frac{1}{10}s_j) = E^1(j) \cup E^2(j),$$

union disjointe, et

$$(6.53) \quad E^i(j) \text{ est le graphe de } g^i(j) \text{ sur } P_k^i \cap C^i(q_{j-1}, \frac{39}{40}s_{j-1}) \setminus C^i(q_j, \frac{1}{10}s_j).$$

On peut vérifier facilement que si  $j, l$  sont tels que  $x \in P_k^i \cap [C^i(q_{j-1}, \frac{39}{40}s_{j-1}) \setminus C^i(q_j, \frac{1}{10}s_j)] \cap [C^i(q_{l-1}, \frac{39}{40}s_{l-1}) \setminus C^i(q_l, \frac{1}{10}s_l)]$  alors  $g^i(j)(x) = g^i(l)(x) \in E^i(j) \cap E^i(l)$ . On pose donc

$$(6.54) \quad \begin{aligned} g^i : P_k^i \cap D(0, \frac{39}{40}) \setminus D(p_k^i(q_n), \frac{1}{10}s_n) &\rightarrow P_k^{i \perp}; \\ g^i(x) = g^i(j)(x) \text{ sur } P_k^i \cap D(p_k^i(q_{j-1}), \frac{39}{40}s_{j-1}) \setminus D(p_k^i(q_j), \frac{1}{10}s_j), &1 \leq j \leq n; \end{aligned}$$

alors  $\|\nabla g^i\|_\infty < 1$ , et son graphe est  $G^i = [\cup_{j=0}^n E^i(j)] \cap D(0, \frac{39}{40}) \setminus D(q_n, \frac{1}{10}s_n)$ .

Il nous reste à montrer que  $G^1, G^2$  sont disjoints. C'est équivalent à dire que pour  $0 \leq j, l \leq n$ ,  $E^1(j) \cap E^2(l) = \emptyset$ . On le sait pour  $j = l$ , donc supposons que  $j < l$ . Alors pour les points  $x \in E^1(j)$  il y a 2 cas : soit  $x \in D(q_{l-1}, \frac{39}{40}s_{l-1}) \setminus D(q_l, \frac{1}{10}s_l)$ , soit non. Dans le 2ème cas,  $x \notin E^2(l)$  automatiquement parce que  $E^2(l) \subset D(q_{l-1}, \frac{39}{40}s_{l-1}) \setminus D(q_l, \frac{1}{10}s_l)$ ; dans le premier cas,  $x \in E_k \cap D(q_{l-1}, \frac{39}{40}s_{l-1}) \setminus D(q_l, \frac{1}{10}s_l) = E^1(l) \cup E^2(l)$ . Mais dans ce cas,  $D(q_{l-1}, s_{l-1}) \setminus D(q_{j-1}, \frac{1}{10}s_{j-1}) \neq \emptyset$  implique que  $l - j \leq 4$ .

Mais  $x \in E^1(j)$  implique que  $d(x, P_k^2 + q_j) > \frac{1}{80}s_{j-1}$  à cause de (6.37). On en déduit que

$$(6.55) \quad d(x, P_k^2 + q_l) > \frac{1}{80}s_{j-1} - d(q_j, q_l).$$

Mais d'après (5.16) on a  $d(q_j, q_l) \leq 24\epsilon \times 2^{-\min(l,j)} = 24\epsilon_0 \times 2^{-j} \leq \frac{48}{10^5}s_{j-1}$ , et donc

$$(6.56) \quad d(x, P_k^2 + q_l) > \frac{3}{400}s_{j-1} \geq 2^4 \frac{3}{400}s_{l-1} > \epsilon s_{l-1},$$

donc  $x \notin E^2(l)$ , à cause de (6.36).

On obtient donc que pour tout  $0 \leq j, l \leq n$ ,  $E^1(j) \cap E^2(l) = \emptyset$ , d'où  $G^1 \cap G^2 = \emptyset$ . On a donc montré (1).

Pour montrer (2), puisque  $E_k$  est  $\epsilon$  proche de  $P_k$  dans  $D(0, 1)$ , on note que  $E_k \cap D(0, 1) \setminus D(0, \frac{1}{100})$  est l'union disjointe de 2 morceaux  $E^1, E^2$  avec (6.36)-(6.38). Par (1), on a que dans  $D(0, \frac{39}{40}) \setminus D(q_n, \frac{1}{10}s_n)$   $E_k$  est composé de deux graphes disjoints  $G^1, G^2$  sur  $P_k^1 \cap C^1(0, \frac{39}{40}) \setminus C^1(q_n, \frac{1}{10}s_n)$  et  $P_k^2 \cap C^2(0, \frac{39}{40}) \setminus C^2(q_n, \frac{1}{10}s_n)$  respectivement. Alors pour  $\frac{1}{10}s_n < t < s_n$ ,  $G_t^i = E^i \cup G^i \setminus D(q_n, t)$ , donc (6.4) est vrai. De plus, puisque les  $G^i$  sont des graphes, on a

$$(6.57) \quad p_k^i(G^i \setminus D(q_n, t)) \supset P_k^i \cap D(0, \frac{39}{40}) \setminus C_k^i(q_n, t),$$

donc (6.5) est aussi vrai si on remplace  $D(0, 1)$  par  $D(0, \frac{39}{40})$ , puisque  $G^i \setminus D(q_n, t) \subset G_t^i$ .

Il ne nous reste donc qu'à montrer que

$$(6.58) \quad P_k^i \cap D(0, 1) \setminus D(0, \frac{39}{40}) \subset p_k^i(G_t^i)$$

Montrons-le par exemple pour  $i = 1$ . On sait que  $E_k$  est  $\epsilon$  proche de  $P_k$  dans  $D(0, 1)$ . Alors par (6.36),

$$(6.59) \quad E^2 \subset B(P_k^2 \cap D(0, 1) \setminus D(0, \frac{1}{100}), \epsilon) \subset B(P_k^2, \frac{1}{100})$$

Mais quand  $k$  est grand, on a  $p_k^1(P_k^2 \cap D(0, 1)) \subset P_k^1 \cap D(0, \frac{1}{5})$ , et par conséquent

$$(6.60) \quad p_k^1(E^2) \subset P_k^1 \cap D(0, \frac{1}{4}).$$

D'un autre côté, on sait que

$$(6.61) \quad p_k^1(E_k \cap D(0, \frac{1}{100})) \subset P_k^1 \cap D(0, \frac{1}{100})$$

donc on a

$$(6.62) \quad p_k^1(E_k \setminus E^1) = p_k^1[E^2 \cup (E_k \cap D(0, \frac{1}{100}))] \subset D(0, \frac{1}{4}) \cap P_k^1.$$

Mais d'après la proposition 4.8,  $p_k^1(E_k) \supset P_k^1 \cap D(0, 1)$ , on obtient donc

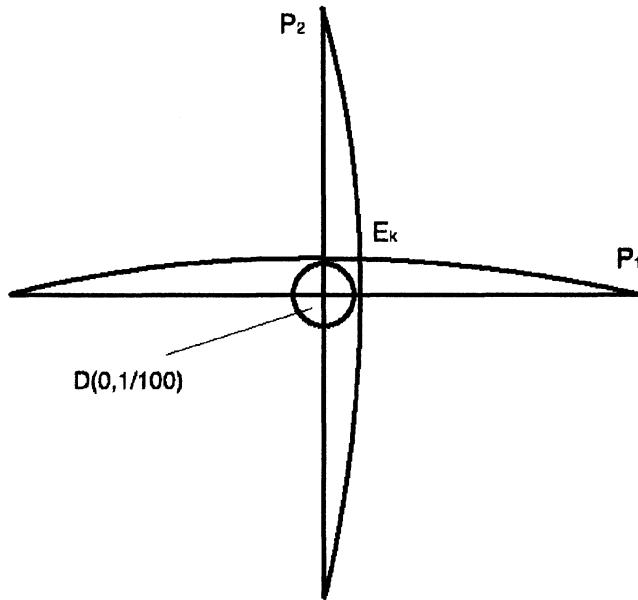
$$(6.63) \quad p_k^1(E^1) \supset P_k^1 \cap D(0, 1) \setminus D(0, \frac{1}{4}).$$

Et par conséquent

$$(6.64) \quad \begin{aligned} p_k^1(G_t^1) &= p_k^1(G^1 \setminus D(q_n, t)) \cup p_k^1(E^1) \\ &\supset [P_k^1 \cap D(0, \frac{39}{40}) \setminus D(q_n, t)] \cup [P_k^1 \cap D(0, 1) \setminus D(0, \frac{1}{4})] = p_k^1 \cap D(0, 1) \setminus D(q_n, t), \end{aligned}$$

d'où on déduit (6.5) pour  $i = 1$ . La démonstration pour  $i = 2$  est semblable.

Traitons maintenant (3) et (4). Ici on donne une petite remarque. En fait ce dont on a besoin est le 4), i.e. la surjectivité des projections, pour estimer la mesure de  $E_k$  à l'endroit où on ne connaît pas très bien la structure. Notons que par la démonstration du théorème 4.1, on sait que  $E_k$  est la limite d'une suite  $\{H_l\}$  de déformation de  $P_k$  dans  $U = \mathbb{R}^4 \setminus [P_k \setminus B(0, 1)]$ . Et donc dans  $D$  les projections  $p_k^i$  de  $E_k$  sont automatiquement surjectives sur  $D(0, 1) \cap P_k^i$ . Mais quand on regarde dans  $D(0, \frac{1}{2})$ , puisque  $E_k$  est assez proche de  $P_k$ , la partie de  $E_k \setminus D(0, \frac{1}{2})$  qui est proche de  $P_k^1$  n'a pas de projection dans  $D(0, \frac{1}{2}) \cap P_k^1$ , et la partie de  $E_k \setminus D(0, \frac{1}{2})$  qui est proche de  $P_k^2$  a une tout petite projection sur  $P_k^1$  qui est très proche de l'origine, donc on peut dire que hors d'une petite boule, disons  $D(0, \frac{1}{100})$ , la projection  $p_k^1$  de  $E_k \cap D(0, \frac{1}{2})$  à  $P_k^1$  est surjective sur  $P_k^1 \cap D(0, \frac{1}{2}) \setminus D(0, \frac{1}{100})$ . Par contre dans  $D(0, \frac{1}{100})$ , on ne peut pas dire directement que la projection de  $E_k$  vient de  $E_k \cap D(0, \frac{1}{2})$ . (voir le dessin ci-dessous pour une idée.)



Alors l'idée est encore de montrer que  $E_k \cap \overline{D}(0, \frac{1}{2})$  est la limite d'une suite de déformation de  $P_k \cap \overline{D}(0, \frac{1}{2})$ . Autrement dit, on peut contracter la partie hors de  $\overline{D}(0, \frac{1}{2})$  dans  $\overline{D}(0, \frac{1}{2})$ . Cette partie est très plate et régulière, donc du coup elle ne change pas grand-chose sur la structure de  $E_k$  dans  $D(0, \frac{1}{2})$ . Donc encore une fois si  $E_k$  est lui-même une déformation de  $P_k$  qui est très près de  $P_k$ , on peut bien faire contracter la partie  $E_k \setminus D(0, \frac{1}{2})$  vers  $E_k \cap \partial D(0, \frac{1}{2})$ , à peu près comme on contracte un anneau sur le cercle intérieur, parce que  $E_k \setminus D(0, \frac{1}{2})$  est carrément composé de deux graphes de classe  $C^1$  sur  $P_k^i \setminus D(0, \frac{1}{2})$ , par (6.2). Alors l'étape prochain peut se continuer pareillement si dans  $D(0, \frac{1}{2})$   $E_k$  est encore proche d'une translation de  $P_k$ . On peut donc arriver jusqu'à l'échelle où le  $\epsilon$ -processus s'arrête. Donc on peut dire que  $E_k \cap D(q_n, t)$  est une déformation de  $P_k$  aussi, parce qu'il est une déformation de  $E_k$ .

Mais maintenant  $E_k$  n'est pas forcément une déformation de  $P_k$ . On va donc utiliser le fait que  $E_k$  est la limite d'une suite de déformations  $\{H_l\}$ , et on voudrait appliquer l'argument ci-dessus pour montrer que  $H_l \cap \overline{D}(0, \frac{1}{2})$  est une déformation de  $P_k \cap \overline{D}(0, \frac{1}{2})$ . Mais cette fois les  $H_l$  ne sont pas minimaux, et donc on ne peut pas appliquer (6.2) pour dire que  $H_l \cap \partial D(0, \frac{1}{2})$  est une courbe très régulière, et donc ce n'est pas assez facile de contracter directement  $H_l$  sur  $H_l \cap \partial D(0, \frac{1}{2})$ . Alors ce qu'on va faire et juste de projeter  $H_l$  sur  $\overline{D}(0, \frac{1}{2})$ , dont le projecteur est noté  $\pi$ . Alors les points de  $H_l \setminus D(0, \frac{1}{2})$  sont projetés sur  $\partial D(0, \frac{1}{2})$ , mais leur image ne sont plus  $H_l \cap \partial D(0, \frac{1}{2})$ . Alors pour continuer à contracter  $\pi(H_l) \setminus D(q_2, \frac{1}{4})$  dans  $\overline{D}(q_2, \frac{1}{4})$ , on utilisera le fait que  $\pi(H_l) \setminus D(q_2, \frac{1}{4})$  peut être décomposé en deux parties qui sont proches des  $P_k^i + q_2$ . Pour garantir cela, par l'argument avant (6.36), il faut que  $\pi(H_l)$  soit  $\frac{1}{2}\epsilon$  proche de  $P_k + q_2$ . Alors pour la partie dans  $D(0, \frac{1}{2})$  il n'y a pas de soucis, parce que le  $\epsilon$ -processus ne s'arrête pas là. Pour la partie sur le bord  $\partial D(0, \frac{1}{2})$ , ce n'est plus garanti parce que une partie de  $\pi(H_l) \cap \partial D(0, \frac{1}{2})$  vient de  $H_l \setminus D(0, \frac{1}{2})$ . Mais heureusement on peut se débrouiller pour contracter d'abord la partie sur le bord de manière qu'elle soit plus proche de  $P_k + q_2$ , sans bouger

l'intérieur. Donc comme ça on se complique un peu la vie pour contracter  $H_l$  dans  $\overline{D}(q_n, t)$ , mais on y arrive comme même.

Après, on peut montrer la surjectivité des projections de  $E_k \cap D(q_n, t)$ , puisqu'il est la limite d'une suite de déformations.

Maintenant on va réaliser l'idée en détail. Donc fixons  $\frac{1}{10}s_n \leq t \leq s_n$ .

Soit  $l$  grand, tel que dans chaque  $D(q_{j-1}, s_{j-1})$ ,  $H_l$  est  $2\epsilon s_{j-1}$  proche de  $P_k + q_j$ , pour tout  $j \leq n$ . Par définition de  $\epsilon_0$  on a  $2\epsilon < 2\epsilon_0 < \epsilon_3$ , donc on déduit de (6.36) et (6.37) que dans  $D(q_{j-1}, s_{j-1}) \setminus D(q_j, \frac{1}{100}s_{j-1})$ ,  $H_l$  est l'union disjointe de deux morceau  $H_l^1, H_l^2$  avec

$$(6.65) \quad H_l^i \subset B(P_k^i + q_j \cap D(q_{j-1}, s_{j-1}) \setminus D(q_j, \frac{1}{100}s_{j-1}), 2\epsilon r).$$

On va construire notre déformation  $F_l^n$  par récurrence sur  $j < n$ .

D'abord pour  $j = 1$ , on définit  $\pi_1 : H_l \rightarrow D(q_1, s_1)$ , la projection de plus courte distance de  $\mathbb{R}^4$  sur  $D(q_1, s_1)$ . Notons que bien que  $H_l \cap D(q_1, s_1)$  est  $2\epsilon s_1$  proche de  $P_k^1 + q_2$  dans  $D(q_1, s_1)$ ,  $\pi_1(H_l \setminus D(q_1, s_1))$  n'est pas forcément  $2\epsilon s_1$  proche de  $P_k^1 + q_2$  dans  $D(q_1, s_1)$ , donc on va le modifier un peu pour pouvoir continuer à le couper en deux morceaux qui satisfont à des conditions semblables à (6.36)-(6.38).

Par (6.37), dans  $D(0, 1) \setminus D(q_1, s_1)$   $H_l$  est l'union de 2 morceau disjoints  $H_l^1, H_l^2$  où  $H_l^i$  est très proche de  $P_k^i$ , donc on a

$$(6.66) \quad \pi_1(H_l^i) \cap D(0, 1) \setminus D(q_1, s_1) \subset \partial C^i(q_1, s_1) \cap B(P_k^i, 2\epsilon).$$

donc l'image de chaque  $H_l^i$  hors  $D(q_1, s_1)$  se trouve sur le bord du cylindre  $C^i(q_1, s_1)$ , et est contenue dans un très petit voisinage du plan  $P_k^i$ , donc est contenu dans une bande mince de dimension 3 autour de  $P_k^i \cap \partial C^i(q_1, s_1)$ , et en particulier est loin du bord  $\partial C^j(q_1, s_1)$  pour  $i \neq j$ . Notons que l'on peut donc définir  $g_1$  sur  $\pi_1(H_l)$  par

$$(6.67) \quad g_1(x) = \begin{cases} x ; & x \in D(q_1, s_1) ; \\ g_1^i(x) ; & x \in \partial C^i(q_1, s_1). \end{cases}$$

où  $g_1^i$  est la projection orthogonale sur  $B(P_k^i + q_2, 2\epsilon s_1)$ . Notons que pour tout point  $x \in H_l \cap D(q_1, s_1) \subset \pi_1(H_l)$ , ni  $\pi_1$  ni  $g_1^i$  ne le bouge, puisque dans  $D(q_1, s_1)$   $H_l$  est  $2\epsilon s_1$  proche de  $P_k^1 + q_2$ . Donc l'action de  $g_1^i$  est juste d'applanter des points sur le bord  $\partial C_k^i(q_1, s_1)$  dans un  $2s_1\epsilon$  voisinage de  $P_k^i$  sans partir du bord. Observons que  $g_1$  est 2-Lipschitzienne (localement 1-Lipschitzienne). En effet, pour deux points  $x, y \in D(q_1, s_1)$ ,  $g_1$  est identité, donc  $|g_1(x) - g_1(y)| = |x - y|$ ; pour  $x, y \in \partial D(q_1, s_1)$ , si  $x, y$  appartiennent au même  $\partial C^i(q_1, s_1)$ ,  $g_1$  est juste une projection orthogonale, donc  $|g_1(x) - g_1(y)| \leq |x - y|$ ; si  $x \in \partial C^1(q_1, s_1), y \in \partial C^2(q_1, s_1)$ , alors  $|x - y| > 2\epsilon$ , et par définition de  $g_1$ ,  $|g_1(x) - x|$  et  $|g_1(y) - y|$  sont inférieurs à  $\epsilon s_1 = \frac{1}{2}\epsilon$ , de sorte que  $|g_1(x) - g_1(y)| \leq |g_1(x) - x| + |x - y| + |g_1(y) - y| \leq \epsilon + |x - y| \leq \frac{1}{2}|x - y| + |x - y| \leq 2|x - y|$ .

Donc si on pose  $h_1 = g_1 \circ \pi_1$ , alors  $h_1$  est 2-Lipschitzienne, et de plus  $h_1(H_l) \subset \overline{D}(q_1, s_1)$  est  $2\epsilon s_1$  proche de  $P_k$ .

Maintenant on a notre  $h_1$  dans  $D(0, 1) = D(q_0, s_0)$ , qui déforme  $H_l$  dans  $D(q_1, s_1)$  et garde l'image  $\epsilon$  proche de  $P_k + q_2$ . Mais  $h_1$  est 2-Lipschitzienne et définie sur un compact  $H_l$ , donc on peut la prolonger sur  $\mathbb{R}^4$  entier, en une fonction notée  $h_1$ , et qui est encore 2-Lipschitzienne.

Maintenant supposons que pour  $j$ , on a construit une déformation 2-Lipschitzienne  $h_j$  qui déforme  $H_l$  dans  $D(q_j, s_j)$  et que son image est  $2\epsilon s_j$  proche de  $P_k + q_{j+1}$  dans  $D(q_j, s_j)$ . Si  $j < n - 1$ , alors on peut définir  $\pi_{j+1}$  la projection sur  $D(q_{j+1}, s_{j+1})$ , et puis on projeter les point du bord de  $C^i(q_{j+1}, s_{j+1})$  vers le  $2\epsilon s_{j+1}$  voisinage de  $P_k^i + q_{j+2}$ . On peut le définir sans ambiguïté car  $h_j(H_l)$  est  $2\epsilon s_j$  proche de  $P_k + q_{j+1}$ , de sorte que  $h_j(H_l) \setminus D(q_{j+1}, s_{j+1})$  se décompose en 2 parties "plates" ((6.36)-(6.38)).

On note cette projection  $g_{j+1}$ , et on pose  $h_{j+1} = g_{j+1} \circ \pi_{j+1} \circ h_j$ . Celle ci est une déformation 2-Lipschitzienne qui déforme  $H_l$  dans  $D(q_{j+1}, s_{j+1})$  et son image est  $\epsilon s_{j+1}$  proche de  $P_k + q_{j+2}$  dans  $D(q_{j+1}, s_{j+1})$ . Et on obtient ainsi notre  $h_{j+1}$ .

Donc par récurrence, on peut le faire jusqu'à  $h_{n-1}$ .

On construit pour chaque  $l$ , une déformation  $h_n(l)$  maintenant. On note  $p_n(l)$  la projection de plus courte distance sur  $D(q_n, t + \frac{1}{l})$ , et pour  $x \in \overline{C^i}(q_n, t + \frac{1}{l}) \setminus C^i(q_n, t)$ , on pose  $g_n^i(l)(x) = (id, g^i) \circ p_k^i \circ p_n(l)$ , où  $g^i$  est comme dans (6.2). Et on définit la déformation  $h_n(l)$  de  $P_k \cap D(0, 1)$  comme ceci. Pour  $x \in P_k \cap D(0, 1)$  :

$$(6.68) \quad h_n(l)(x) = \begin{cases} h_{n-1}(x), & h_{n-1}(x) \in D(q_n, t); \\ sg_n^i(l) \circ h_{n-1}(x) + (1-s)h_{n-1}(x), & h_{n-1}(x) \in \partial C^i(q_n, t + \frac{1}{l}s). \end{cases}$$

Alors on voit que  $h_n(l)(P_k) \cap \overline{D}(q_n, t) = H_l \cap \overline{D}(q_n, t)$ , et  $h_n(l)(P_k) \cap \partial D(q_n, t + \frac{1}{l}) = E_k \cap \partial D(q_n, t + \frac{1}{l})$ . Et entre  $\overline{D}(q_n, t)$  et  $\partial D(q_n, t + \frac{1}{l})$  l'image de  $h_n(l)$  est l'image d'une homotopie entre  $H_l$  et  $E_k$ . Alors puisque  $H_l$  tend vers  $E_k$ , on a que  $F_l^n(t) = h_n(l)(P_k)$  tend vers  $E_k \cap (q_n, t)$  quand  $l$  tend vers l'infini.

On note  $a_l(t)$  la déformation affine qui envoie  $P_k \cap B(0, 1)$  à  $(P_k + q_n) \cap D(q_n, t + \frac{1}{l})$ , et on pose

$$(6.69) \quad f_l^n(t) = h_n(l) \circ a_l(t).$$

Alors  $F_l^n(t) = f_l^n(t)((P_k + q_n) \cap \overline{D}(q_n, t + \frac{1}{l}))$  satisfait à toutes les condition dans (3).

(4) est une conséquence directe de (3). En effet on sait que  $F_l^n(t)$  est une déformation de  $(P_k + q_n) \cap D(q_n, t + \frac{1}{l})$  qui envoie  $\partial C^i(q_n, t)$  dans  $\partial C^i(q_n, t)$ , donc

$$(6.70) \quad p_k^i(F_l^n(t)) \supset P_k^i \cap C_k^i(q_n, t + \frac{1}{l}).$$

Alors puisque  $E_k \cap D(q_n, t)$  est la limite de  $F_l^n(t)$ , les projections  $p_k^i$  sont surjectives de  $E_k \cap D(q_n, t)$  sur  $P_k^i \cap C_k^i(q_n, t)$ .  $\square$

## 7 Argument d'extension harmonique

Dans cette section on va faire quelques estimations fondamentales pour la mesure du graphe d'une fonction  $C^1$  sur un anneau presque concentrique. Mais on peut facilement sauter cette section, en admettant ses estimations, et continuer la démonstration du théorème 1.32 dans la section suivante.

**Proposition 7.1.** *Soit  $0 < r_0 < \frac{1}{2}$  et  $u_0 \in C^1(\partial B(0, r_0) \cap \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ . On note  $m(u_0) = \frac{1}{2\pi r_0} \int_{\partial B(0, r_0)} u_0$  sa moyenne.*

*Alors pour toute  $u \in C^1((\overline{B(0, 1)} \setminus B(0, r_0)) \cap \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  qui satisfait à*

$$(7.2) \quad u|_{\partial B(0, r_0)} = u_0$$

*on a*

$$(7.3) \quad \int_{B(0, 1) \setminus B(0, r_0)} |\nabla u|^2 \geq \frac{1}{4} r_0^{-1} \int_{\partial B(0, r_0)} |u_0 - m(u_0)|^2.$$

Démonstration.

Supposons que  $u$  est une fonction  $C^1$  comme dans l'énoncé de la proposition. Alors on définit  $\tilde{u} \in C((\overline{B(0, \frac{1}{r_0})} \setminus B(0, r_0)) \cap \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  qui est aussi  $C^1$  sauf sur  $\partial B(0, 1)$ , par

$$(7.4) \quad \tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \overline{B(0, 1)} \setminus B(0, r_0); \\ u\left(\frac{x}{|x|^2}\right), & x \in \overline{B(0, \frac{1}{r_0})} \setminus B(0, 1). \end{cases}$$

Alors dans  $\overline{B(0, \frac{1}{r_0})} \setminus B(0, 1)$ ,

$$(7.5) \quad \begin{aligned} |\nabla \tilde{u}(r, \theta)|^2 &= \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(r, \theta)\right|^2 + \left|\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}(r, \theta)\right|^2 = \left|\frac{\partial}{\partial r} u\left(\frac{1}{r}, \theta\right)\right|^2 + \left|\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u\left(\frac{1}{r}, \theta\right)\right|^2 \\ &= \left|-\frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{1}{r}, \theta\right)\right|^2 + \left|\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}, \theta\right)\right|^2. \end{aligned}$$

On pose  $s = \frac{1}{r}$ , alors

$$(7.6) \quad \begin{aligned} |\nabla \tilde{u}(r, \theta)|^2 &= s^4 \left|\frac{\partial u}{\partial r}(s, \theta)\right|^2 + s^4 \left|\frac{1}{s} \frac{\partial u}{\partial \theta}(s, \theta)\right|^2 \\ &= s^4 |\nabla u(s, \theta)|^2 = \frac{1}{r^4} |\nabla u\left(\frac{1}{r}, \theta\right)|^2, \end{aligned}$$

et donc

$$(7.7) \quad \begin{aligned} \int_{\overline{B(0, \frac{1}{r_0})} \setminus B(0, 1)} |\nabla \tilde{u}|^2 &= \int_1^{\frac{1}{r_0}} r dr \int_0^{2\pi} d\theta |\nabla \tilde{u}(r, \theta)|^2 \\ &= \int_1^{\frac{1}{r_0}} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{r^4} |\nabla u\left(\frac{1}{r}, \theta\right)|^2 \\ &= \int_1^{r_0} ds \int_0^{2\pi} d\theta (-s) |\nabla u(s, \theta)|^2 \\ &= \int_{r_0}^1 s ds \int_0^{2\pi} d\theta |\nabla u(s, \theta)|^2 \\ &= \int_{\overline{B(0, 1)} \setminus B(0, r_0)} |\nabla u|^2. \end{aligned}$$

On a donc

$$(7.8) \quad \int_{\overline{B(0, \frac{1}{r_0})} \setminus B(0, r_0)} |\nabla \tilde{u}|^2 = 2 \int_{\overline{B(0, 1)} \setminus B(0, r_0)} |\nabla u|^2.$$

Puisque  $\tilde{u}$  satisfait à la condition au bord

$$(7.9) \quad \tilde{u}(x)|_{\partial B(0, r_0)} = u_0(x), \quad \tilde{u}(x)|_{\partial B(0, \frac{1}{r_0})} = u_0\left(\frac{x}{|x|^2}\right),$$

son énergie de Dirichlet  $\int_{\overline{B(0, \frac{1}{r_0})} \setminus B(0, r_0)} |\nabla \tilde{u}|^2$  est plus grande que celle de la fonction harmonique  $v$  avec la même condition au bord. On va donc calculer  $\int_{\overline{B(0, \frac{1}{r_0})} \setminus B(0, r_0)} |\nabla v|^2$ .

Ecrivons

$$(7.10) \quad u(r_0, \theta) = u_0(\theta) = m(u_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta),$$

et posons

$$(7.11) \quad \begin{aligned} v : \overline{B(0, \frac{1}{r_0})} \setminus B(0, r_0) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ v(r, \theta) &= m(u_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r^n + r^{-n}) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(r^n + r^{-n}) \sin n\theta. \end{aligned}$$

Alors  $v$  est harmonique.

La condition au bord

$$(7.12) \quad v(x)|_{\partial B(0, r_0)} = u_0(x), \quad v(x)|_{\partial B(0, \frac{1}{r_0})} = u_0\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

veut dire que

$$(7.13) \quad a_n(r_0^n + r_0^{-n}) = A_n, \quad b_n(r_0^n + r_0^{-n}) = B_n.$$

Pour estimer  $\nabla v$  on écrit

$$(7.14) \quad \begin{aligned} v(r, \theta) &= m(u_0) + \sum_1^{\infty} a_n(r^n + r^{-n}) \cos n\theta + \sum_1^{\infty} b_n(r^n + r^{-n}) \sin n\theta \\ &= m(u_0) + \sum_1^{\infty} \frac{r^n + r^{-n}}{r_0^n + r_0^{-n}} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \\ &=: m(u_0) + \sum_1^{\infty} v_n(r, \theta). \end{aligned}$$

Vérifions qu'on peut différencier  $v$  terme à terme.

Pour  $r_0 < r < \frac{1}{r_0}$  fixé, on a

$$(7.15) \quad \frac{\partial v_n}{\partial \theta} = \frac{r^n + r^{-n}}{r_0^n - r_0^{-n}} (-nA_n \sin n\theta + nB_n \cos n\theta)$$

et

$$(7.16) \quad \frac{r^n + r^{-n}}{r_0^n + r_0^{-n}} = \frac{r^n}{r_0^n + r_0^{-n}} + \frac{r^{-n}}{r_0^n + r_0^{-n}} \leq \frac{r^n}{r_0^{-n}} + \frac{r^{-n}}{r_0^{-n}} = (rr_0)^n + \left(\frac{r_0}{r}\right)^n.$$

Puisque des suites  $\{A_n\}_{n \geq 1}, \{B_n\}_{n \geq 1}$  sont bornées,

$$(7.17) \quad \sum_n \left| \frac{\partial v_n}{\partial \theta} \right| \leq \sum_n Cn[(rr_0)^n + \left(\frac{r_0}{r}\right)^n] < \infty$$

puisque  $rr_0 < 1$  et  $\frac{r_0}{r} < 1$  pour tout  $r_0 < r < \frac{1}{r_0}$ . Par conséquent la série  $\sum_n \frac{\partial v_n}{\partial \theta}$  converge normalement sur  $[0, 2\pi]$ .

D'autre part, pour  $\theta$  fixé, et  $r_0 < r < \frac{1}{r_0}$ , on a sur  $(r - \frac{r-r_0}{2}, r + \frac{r_0-r}{2}) = (r_1, r_2)$  :

$$(7.18) \quad \begin{aligned} \left| \frac{\partial v_n}{\partial r} \right| &= \left| \frac{A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta}{r_0^n + r_0^{-n}} (nr^{n-1} - nr^{-n-1}) \right| \\ &\leq Cnr_0^{-1}[(rr_0)^{n-1} + \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1}] \end{aligned}$$

et donc la série converge absolument uniformément sur  $[r_1, r_2]$ .

Par conséquent on peut la différencier terme à terme et on trouve que

$$(7.19) \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = \sum_{n=1}^{\infty} n(r^n + r^{-n})(-a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta)$$

et

$$(7.20) \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} n(r^{n-1} - r^{-n-1})(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
(7.21) \quad |\nabla v|^2 &= \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right|^2 \\
&= \left[ \sum_n n^2 (r^{n-1} - r^{-n-1})^2 (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)^2 \right. \\
&\quad + 2 \sum_{n < m} nm(r^{n-1} - r^{-n-1})(r^{m-1} - r^{-m-1})(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)(a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta) \\
&\quad + \frac{1}{r^2} \left[ \sum_n n^2 (r^n + r^{-n})^2 (-a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta)^2 \right. \\
&\quad \left. + 2 \sum_{n < m} nm(r^n + r^{-n})(r^m + r^{-m})(-a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta)(-a_m \sin m\theta + b_m \cos m\theta) \right] \\
&= \sum_n n^2 \{(r^{2n-2} + r^{-2n-2})[(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)^2 + (-a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta)^2] \\
&\quad - \frac{2}{r^2} [(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)^2 - (-a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta)^2]\} \\
&\quad + 2 \sum_{n < m} nm \{(r^{n-1}r^{m-1} + r^{-n-1}r^{-m-1})[(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)(a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta) \\
&\quad + (-a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta)(-a_m \sin m\theta + b_m \cos m\theta)] \\
&\quad - (r^{n-1}r^{-m-1} + r^{-n-1}r^{m-1})[(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)(a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta) \\
&\quad - (-a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta)(-a_m \sin m\theta + b_m \cos m\theta)]\} \\
&= \sum_n n^2 (r^{2n-2} + r^{-2n-2})(a_n^2 + b_n^2) - \frac{2}{r^2} \sum_n n^2 (a_n^2 \cos 2n\theta - b_n^2 \cos 2n\theta + 2a_n b_n \sin 2n\theta) \\
&\quad + 2 \sum_{n < m} nm(r^{n-1}r^{m-1} + r^{-n-1}r^{-m-1}) \\
&\quad \{a_n a_m \cos(n-m)\theta + a_n b_m \sin(m-n)\theta + a_m b_n \sin(n-m)\theta - b_n b_m \cos(n-m)\theta\} \\
&\quad - 2 \sum_{n < m} nm(r^{n-1}r^{-m-1} + r^{-n-1}r^{m-1}) \\
&\quad \{a_n a_m \cos(n+m)\theta - b_n b_m \cos(n+m)\theta + a_n b_m \sin(n+m)\theta + b_n a_m \sin(n+m)\theta\}.
\end{aligned}$$

Mais pour  $n \neq m$  et  $m, n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}
(7.22) \quad \int_0^{2\pi} \cos(n-m)\theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \sin(n-m)\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos(n+m)\theta d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sin(n+m)\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos 2n\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin 2n\theta d\theta = 0,
\end{aligned}$$

donc

$$(7.23) \quad \int_0^{2\pi} |\nabla v|^2 d\theta = 2\pi \sum_n n^2 (r^{2n-2} + r^{-2n-2})(a_n^2 + b_n^2),$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
 \int_{B(0, \frac{1}{r_0}) \setminus B(0, r_0)} |\nabla v|^2 &= \int_{r_0}^{\frac{1}{r_0}} r dr \int_0^{2\pi} |\nabla v|^2 d\theta \\
 &= \int_{r_0}^{\frac{1}{r_0}} r dr \cdot 2\pi \sum_n n^2 (r^{2n-2} + r^{-2n-2})(a_n^2 + b_n^2) \\
 &= 2\pi \sum_n n^2 (a_n^2 + b_n^2) \int_{r_0}^{\frac{1}{r_0}} (r^{2n-1} + r^{-2n-1}) dr \\
 (7.24) \quad &= 2\pi \sum_n n^2 (a_n^2 + b_n^2) \left( \frac{r^{2n}}{2n} + \frac{r^{-2n}}{-2n} \right) \Big|_{r_0}^{\frac{1}{r_0}} \\
 &= 2\pi \sum_n n^2 (a_n^2 + b_n^2) \frac{1}{n} (r_0^{-2n} - r_0^{2n}) \\
 &= 2\pi \sum_n n (a_n^2 + b_n^2) (r_0^{-2n} - r_0^{2n}) \\
 &= 2\pi \sum_n n (a_n^2 + b_n^2) (r_0^{-n} - r_0^n) (r_0^n + r_0^{-n}).
 \end{aligned}$$

Alors pour  $r_0 < \frac{1}{2}$  et  $n \geq 1$ , on a

$$(7.25) \quad r_0^{-n} - r_0^n \geq \frac{1}{2} (r_0^n + r_0^{-n})$$

et donc

$$\begin{aligned}
 (7.26) \quad \int_{B(0, \frac{1}{r_0}) \setminus B(0, r_0)} |\nabla v|^2 &\geq 2\pi \sum_n n (a_n^2 + b_n^2) \frac{1}{2} (r_0^n + r_0^{-n})^2 \\
 &= \pi \sum_n n (A_n^2 + B_n^2) \geq \pi \sum_n (A_n^2 + B_n^2).
 \end{aligned}$$

Mais

$$(7.27) \quad \pi \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |u_0(\theta) - m(u_0)|^2 d\theta = \frac{1}{2} r_0^{-1} \int_{\partial B(0, r_0)} |u_0(s) - m(u_0)|^2 ds.$$

On a donc

$$(7.28) \quad \int_{B(0, \frac{1}{r_0}) \setminus B(0, r_0)} |\nabla v|^2 \geq \frac{1}{2} r_0^{-1} \int_{\partial B(0, r_0)} |u_0(s) - m(u_0)|^2 ds.$$

Maintenant retournons à notre fonction  $u$ . On a

$$\begin{aligned}
 (7.29) \quad \int_{B(0, 1) \setminus B(0, r_0)} |\nabla u|^2 &= \frac{1}{2} \int_{B(0, \frac{1}{r_0}) \setminus B(0, r_0)} |\nabla \tilde{u}|^2 \\
 &\geq \frac{1}{2} \int_{B(0, \frac{1}{r_0}) \setminus B(0, r_0)} |\nabla v|^2 \geq \frac{1}{4} r_0^{-1} \int_{\partial B(0, r_0)} |u_0(s) - m(u_0)|^2 ds,
 \end{aligned}$$

d'où la conclusion.  $\square$

**Corollaire 7.30.** Soit  $r_0 > 0$ ,  $q \in \mathbb{R}^2$  tel que  $r_0 < \frac{1}{2}d(q, \partial B(0, 1))$ ,  $u_0 \in C^1(\partial B(q, r_0) \cap \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , et  $m(u_0) = \frac{1}{2\pi r_0} \int_{\partial B(q, r_0)} u_0$  sa moyenne.

Alors pour toute  $u \in C^1((\overline{B(0,1)} \setminus B(q, r_0)) \cap \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  qui satisfait à

$$(7.31) \quad u|_{\partial B(q, r_0)} = u_0$$

on a

$$(7.32) \quad \int_{B(0,1) \setminus B(q, r_0)} |\nabla u|^2 \geq \frac{1}{4} r_0^{-1} \int_{\partial B(q, r_0)} |u_0 - m(u_0)|^2.$$

Démonstration.

On note  $R = d(q, \partial B(0, 1)) < 1$ , alors on a  $r_0 < \frac{1}{2}R$  et  $B(q, R) \subset B(0, 1)$ . On peut donc se servir de la proposition précédente avec  $B(q, R) \setminus B(q, r_0)$  et on obtient, par le changement de variable  $y = \frac{x-q}{R}$

$$(7.33) \quad \begin{aligned} \int_{B(q,R) \setminus B(q,r_0)} |\nabla_x u|^2 dx &= \int_{B(0,1) \setminus B(0,\frac{r_0}{R})} \left| \frac{1}{R} \nabla_y u \right|^2 R^2 dy \\ &= \int_{B(0,1) \setminus B(0,\frac{r_0}{R})} |\nabla_y u|^2 dy \\ &\geq \frac{1}{4} \left( \frac{R}{r_0} \right) \int_{\partial B(0,\frac{r_0}{R})} |u - m(u_0)|^2 dy \end{aligned}$$

puisque  $\frac{r_0}{R} < \frac{1}{2}$ . Mais

$$(7.34) \quad \int_{\partial B(0,\frac{r_0}{R})} |u - m(u_0)|^2 dy = \int_{\partial B(q,r_0)} |u - m(u_0)|^2 \left( \frac{1}{R} \right) dx,$$

donc

$$(7.35) \quad \int_{B(q,R) \setminus B(q,r_0)} |\nabla_x u|^2 dx \geq \frac{1}{4} r_0^{-1} \int_{\partial B(q,r_0)} |u - m(u_0)|^2 dx.$$

Puisque  $B(q, R) \subset B(0, 1)$ , on a aussi

$$(7.36) \quad \int_{B(0,1) \setminus B(0,r_0)} |\nabla u|^2 \geq \frac{1}{4} r_0^{-1} \int_{\partial B(q,r_0)} |u - m(u_0)|^2 dx.$$

□

**Remarque 7.37.** On peut obtenir (7.8) et (7.33) en utilisant le fait qu'une transformation conforme ne change pas l'énergie de Dirichlet.

**Lemme 7.38.** Soit  $0 < r_0 < 1$ ,  $u \in C^1(B(0,1) \setminus B(0,r_0), \mathbb{R})$ , telle que  $u|_{\partial B(0,r_0)} = \delta r_0$  et  $u|_{\partial B(0,1)} = 0$  ; alors on a

$$(7.39) \quad \int_{B(0,1) \setminus B(0,r_0)} |\nabla u|^2 \geq \frac{2\pi\delta^2 r_0^2}{|\log r_0|}.$$

Démonstration.

Prenons  $f(r, \theta) = A \log r$  avec  $A = \frac{\delta r_0}{\log r_0}$ . Alors  $f$  est l'extension harmonique avec les valeurs au bord données. Or

$$(7.40) \quad \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{A}{r}, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$$

d'où

$$(7.41) \quad |\nabla f|^2 = \left| \frac{\partial f}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|^2 = \frac{A^2}{r^2}.$$

Par conséquent

$$(7.42) \quad \begin{aligned} \int_{B(0,1) \setminus B(0,r_0)} |\nabla f|^2 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{r_0}^1 r dr |\nabla f|^2 = 2\pi \int_{r_0}^1 r dr \frac{A^2}{r^2} \\ &= 2\pi A^2 |\log r_0| = \frac{2\pi \delta^2 r_0^2}{|\log r_0|} \end{aligned}$$

et on a donc

$$(7.43) \quad \int_{B(0,1) \setminus B(0,r_0)} |\nabla u|^2 \geq \frac{2\pi \delta^2 r_0^2}{|\log r_0|}$$

puisque  $f$  est harmonique.  $\square$

**Corollaire 7.44.** Pour tout  $0 < \epsilon < 1$ , il existe  $C = C(\epsilon) > 100$  telle que si  $0 < r_0 < 1$ ,  $u \in C^1(B(0,1) \setminus B(0,r_0), \mathbb{R})$  et

$$(7.45) \quad u|_{\partial B(0,r_0)} > \delta r_0 - \frac{\delta r_0}{C} \text{ et } u|_{\partial B(0,1)} < \frac{\delta r_0}{C}$$

alors

$$(7.46) \quad \int_{B(0,1) \setminus B(0,r_0)} |\nabla u|^2 \geq \epsilon \frac{2\pi \delta^2 r_0^2}{|\log r_0|}.$$

Démonstration. On va appliquer le lemme ci-dessous :

**Lemme 7.47.** Soit  $0 < r < 1$ ,  $f, g$  deux fonctions  $C^1$  et harmoniques sur  $B(0,1) \setminus \overline{B(0,r)}$ , avec  $g|_{\partial B(0,1)} = a < b = g|_{\partial B(0,r)}$ , et  $f \leq g$  sur  $\partial B(0,1)$ ,  $f \geq g$  sur  $\partial B(0,r)$ . Alors

$$(7.48) \quad \int_{B(0,1) \setminus B(0,r)} |\nabla f|^2 \geq \int_{B(0,1) \setminus B(0,r)} |\nabla g|^2.$$

Admettons ce lemme pour un moment, pour démontrer le corollaire. Pour chaque  $C$ , on prend  $r = r_0$ ,  $f = u$ , et  $g$  la fonction harmonique telle que  $g|_{\partial B(0,1)} = \frac{\delta}{C} r_0$ ,  $g|_{\partial B(0,r)} = (1 - \frac{1}{C}) \delta r_0$ . Alors on obtient

$$(7.49) \quad \int_{B(0,1) \setminus B(0,r_0)} |\nabla u|^2 \geq \int_{B(0,1) \setminus B(0,r_0)} |\nabla g|^2 = (1 - \frac{2}{C})^2 \frac{2\pi \delta^2 r_0^2}{|\log r_0|},$$

et pour chaque  $\epsilon < 1$  on peut toujours trouver  $C$  assez grand tel que  $(1 - \frac{2}{C})^2 \geq \epsilon$ .

Maintenant on démontre le lemme. On pose  $h = (f - g)\nabla(f + g)$ ; alors

$$(7.50) \quad \operatorname{div} h = |\nabla f|^2 - |\nabla g|^2$$

puisque  $\Delta f = \Delta g = 0$ . Notons  $U = B(0,1) \setminus B(0,r)$ , alors par la formule de Stokes :

$$(7.51) \quad \begin{aligned} \int_U |\nabla f|^2 - |\nabla g|^2 &= \int_U \operatorname{div} h = \int_{\partial U} h \cdot \vec{n} = \int_{\partial U} (f - g) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} (f + g) \\ &= \int_{\partial U} (f - g) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} (f - g) + 2 \int_{\partial U} (f - g) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} g, \end{aligned}$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur normal exterieur.

Pour le premier terme, puisque  $k = f - g$  est harmonique, la formule de Green donne

$$(7.52) \quad \int_{\partial U} k \frac{\partial}{\partial \vec{n}} k = \int_U (\nabla k \cdot \nabla k) + \int_U (k \Delta k) = \int_U |\nabla k|^2 \geq 0.$$

Pour le second terme, d'après les conditions au bord, sur  $\partial B(0,1)$ ,  $f - g \leq 0$  et  $\frac{\partial}{\partial \vec{n}} g < 0$ , donc  $(f - g) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} g \geq 0$ ; pareil pour  $\partial B(0,r)$ , ce qui donne

$$(7.53) \quad \int_{\partial U} (f - g) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} g \geq 0.$$

On obtient donc

$$(7.54) \quad \int_U |\nabla f|^2 - |\nabla g|^2 \geq 0.$$

□

## 8 Conclusion

Après les préparatifs des sections précédentes, on va conclure dans cette section.

Donc fixons un  $\epsilon < \epsilon_0$ . On va estimer la mesure de Hausdorff de  $E_k$  pour  $k$  assez grand. Pour chaque  $k$  fixé, on a choisi  $o_k$  et  $r_k$  comme dans la proposition 5.11. Alors par la proposition 6.1 (1),  $E_k \cap D_k(0, \frac{39}{40}) \setminus D_k(o_k, \frac{1}{10}r_k)$  est composé de deux morceaux disjoints  $G_k, i = 1, 2$  tels que (6.2) et (6.3) sont vrais, en remplaçant  $q_n, s_n$  par  $o_k, r_k$ . De plus on peut supposer aussi que  $r_k < 2^{-5}$  puisque  $k$  est grand.

**Proposition 8.1.** *Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $0 < \delta = \delta(\epsilon) < \epsilon$  et  $\theta_0 = \theta_0(\epsilon) < \frac{\pi}{2}$ , qui ne dépendent que de  $\epsilon$  avec les propriétés suivantes. Si  $\frac{\pi}{2} > \theta > \theta_0$  (ça veut dire que  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  avec  $\theta_0 < \theta_1 \leq \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ ,  $i = 1, 2$ ) et  $E$  est un ensemble localement minimal dans  $B(0,1)$  qui est  $\delta$  proche de  $P_\theta = P_\theta^1 \cup_\theta P_\theta^2$  dans  $B(0,1) \setminus B(0, \frac{1}{2})$ , et si de plus*

$$(8.2) \quad p_0^i(E) \supset P_0^i \cap B(0, \frac{3}{4})$$

où  $p_0^i$  désigne la projection orthogonale sur  $P_0^i, i = 1, 2$ , alors  $E$  est  $\epsilon$  proche de  $P_\theta$  dans  $B(0,1)$ .

Démonstration.

On le démontrera par l'absurde. Donc on suppose qu'il existe  $\epsilon > 0$ , deux suites  $\delta_l \rightarrow 0$  et  $\theta_l \rightarrow (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , et une suite d'ensembles localement minimaux  $E_l$  dans  $B(0, 1)$  tels que  $E_l$  est  $\delta_l$  proche de  $P_l = P_{\theta_l}$  dans  $B(0, 1) \setminus B(0, \frac{1}{2})$ , et

$$(8.3) \quad p_0^i(E_l) \supset P_0^i \cap B(0, \frac{3}{4})$$

mais  $E_l$  n'est pas  $\epsilon$  proche de  $P_l$  dans  $B(0, 1)$ .

Puisque  $P_l$  tend vers  $P_0 = P_0^1 \cup_{\perp} P_0^2$ ,  $\delta_l \rightarrow 0$  et  $\epsilon$  est fixé, on sait qu'il existe une suite  $\{a_l\}$  qui tend vers 0, telle que  $E_l$  est  $a_l$  proche de  $P_0$  dans  $B(0, 1) \setminus B(0, \frac{1}{2})$ , mais n'est pas  $\frac{\epsilon}{2}$  proche de  $P_0$  dans  $B(0, 1)$  (puisque  $E_l$  n'est pas  $\epsilon$  proche de  $P_l$ , et  $P_l$  est  $\frac{\epsilon}{2}$  proche de  $P_0$  quand  $l$  est grand.)

Maintenant on extrait une sous suite de  $E_l$ , notées encore  $\{E_l\}$ , qui converge vers une limite  $E_\infty$ . Alors  $E_\infty \cap B(0, 1) \setminus B(0, \frac{1}{2}) = P_0 \cap B(0, 1) \setminus B(0, \frac{1}{2})$ .

On veut démontrer que

$$(8.4) \quad H^2(E_l \cap D(0, \frac{3}{4})) < \frac{9}{8}\pi + b_l, \text{ avec } b_l \rightarrow 0 \text{ quand } l \rightarrow \infty,$$

où  $D(x, r)$  désigne  $D_0(x, r)$  pour abréger.

En effet, puisque  $E_l$  est très proche de  $P_0$  dans  $B(0, 1) \setminus B(0, \frac{1}{2})$  quand  $l$  est grand, par la  $C^1$  régularité des ensembles minimaux (c.f.[10] Thm 1.15), on sait que  $E_l \cap \partial D(0, \frac{3}{4}) = \Gamma_l^1 \cup \Gamma_l^2$ , l'union disjointe de deux courbes, où  $\Gamma_l^i$  est le graphe d'une certaine fonction  $C^1$ ,  $h_l^i : P_0^i \cap \partial D(0, \frac{3}{4}) \rightarrow P_0^{i\perp}$ , avec

$$(8.5) \quad \|h_l^i\|_\infty \rightarrow 0, k \rightarrow \infty \text{ et } \left\| \frac{d}{dx} h_l^i \right\|_\infty \leq 1, \forall l.$$

Maintenant, on prend  $D_l^i = (P_0^i \cap D(0, \frac{3}{4})) \cup A_l^i$ , où  $A_l^i = \{(x, y) : x \in P_0^i \cap \partial D(0, \frac{3}{4}), y \in [0, h_l^i(x)]\}$ , qui est simplement une 2-surface mince entre  $P_0^i \cap \partial D(0, \frac{3}{4})$  et  $\Gamma_l^i$ , le graphe de  $h_l^i$ . (on note  $[a, b]$  la segment d'extrémités  $a$  et  $b$ ). Ou on peut aussi écrire

$$(8.6) \quad A_l^i = \{(x, th_l^i(x)) : x \in P_0^i \cap \partial D(0, \frac{3}{4}), t \in [0, 1]\}.$$

On peut noter que  $D_l^i$  est une surface dont le bord est  $\Gamma_l^i$ , et que  $D_l = D_l^1 \cup D_l^2$  contient une déformation de  $E_l$  dans  $\overline{D}(0, \frac{3}{4})$ .

Vérifions que

$$(8.7) \quad H^2(A_l^i) \leq \frac{3\sqrt{2}\pi}{2} \|h_l^i\|_\infty.$$

Comme  $h_l^i$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , le plus simple est d'utiliser un paramétrage. En effet, si on prend  $g_l^i(x, t) : \partial D(0, \frac{3}{4}) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^4 ; g_l^i(x, t) = (x, th_l^i(x))$ , alors  $A_l^i$  est son image. Donc pour calculer sa surface, on a

$$(8.8) \quad \frac{\partial}{\partial x} g_l^i = (1, t \frac{d}{dx} h_l^i(x)) ; \frac{\partial}{\partial t} g_l^i = (0, h_l^i(x))$$

et donc

$$(8.9) \quad \left| \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial x} g_l^i} \times \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial t} g_l^i} \right| = \sqrt{(1+t^2) \left| \frac{\partial}{\partial x} h_l^i \right|^2} \left( \left| h_l^i \right|^2 - \left( t \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial x} h_l^i} \cdot \overrightarrow{h_l^i} \right)^2 \right)$$

puisque on a  $\left| \frac{\partial}{\partial x} h_l^i \right| \leq 1$ , on a

$$(8.10) \quad \left| \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial x} g_l^i} \times \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial t} g_l^i} \right| \leq \sqrt{(1+t^2) \left| h_l^i \right|^2} \leq \sqrt{2} \left| h_l^i \right|$$

et donc

$$(8.11) \quad \begin{aligned} H^2(A_l^i) &= \int_{\partial D(0, \frac{3}{4}) \times [0,1]} \left| \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial x} g_l^i} \times \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial t} g_l^i} \right| dt dx \\ &\leq \sqrt{2} \int_{\partial D(0, \frac{3}{4})} \left| h_l^i \right| \leq \frac{3\sqrt{2}}{2} \pi \left\| h_l^i \right\|_\infty. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$(8.12) \quad H^2(D_l^i) \leq \frac{9}{16} \pi + \frac{3\sqrt{2}}{2} \pi \left\| h_l^i \right\|_\infty$$

et

$$(8.13) \quad H^2(D_l) \leq \frac{9}{8} \pi + \frac{3\sqrt{2}}{2} \pi (\left\| h_l^1 \right\|_\infty + \left\| h_l^2 \right\|_\infty).$$

Mais  $E_l$  est un ensemble localement minimal, donc on a

$$(8.14) \quad H^2(E_l \cap D(0, \frac{1}{2})) \leq H^2(D_l) = \frac{9}{8} \pi + \frac{3\sqrt{2}}{2} \pi (\left\| h_l^1 \right\|_\infty + \left\| h_l^2 \right\|_\infty).$$

On prend  $b_l = \frac{3\sqrt{2}}{2} \pi (\left\| h_l^1 \right\|_\infty + \left\| h_l^2 \right\|_\infty)$  et obtient (8.4), puisque  $\left\| h_l^1 \right\|_\infty + \left\| h_l^2 \right\|_\infty$  tends vers 0 quand  $l \rightarrow \infty$ .

Puisque  $E_l$  tend vers  $P_0$  dans  $B(0, 1) \setminus B(0, \frac{1}{2})$ ,

$$(8.15) \quad E_l \cap (B(0, 1) \setminus B(0, \frac{1}{2})) \rightarrow P_0 \cap (B(0, 1) \setminus B(0, \frac{1}{2})) = E_\infty \cap (B(0, 1) \setminus B(0, \frac{1}{2})).$$

Et par [9] lemme 3.3, (rappelons que  $E_\infty$  est la limite des  $E_l$ )

$$(8.16) \quad H^2(E_\infty \cap D(0, \frac{3}{4})) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} H^2(E_l \cap D(0, \frac{3}{4})).$$

On a donc

$$(8.17) \quad \begin{aligned} H^2(E_\infty) &= H^2(E_\infty \cap (B(0, 1) \setminus D(0, \frac{3}{4}))) + H^2(E_\infty \cap D(0, \frac{3}{4})) \\ &\leq H^2(P_0 \cap (B(0, 1) \setminus D(0, \frac{3}{4}))) + \liminf_{k \rightarrow \infty} H^2(E_l \cap D(0, \frac{3}{4})) \\ &= 2\pi + \liminf_{k \rightarrow \infty} b_l = 2\pi. \end{aligned}$$

D'un autre côté, par (8.3) et le fait que  $E_\infty$  est la limite de  $E_l$ , on sait que

$$(8.18) \quad p_0^i(E_\infty) \supset P_0^i \cap B(0, \frac{3}{4}).$$

Et par hypothèse,  $E_l$  tends vers  $P_0$  dans  $B(0,1) \setminus B(0, \frac{1}{2})$ , donc  $E_\infty \cap B(0,1) \setminus B(0, \frac{1}{2}) = P_0 \cap B(0,1) \setminus B(0, \frac{1}{2})$ , et par conséquent

$$(8.19) \quad p_0^i(E_\infty) \supset p_0^i(E_\infty \cap B(0,1) \setminus B(0, \frac{1}{2})) = P_0^i \cap B(0,1) \setminus B(0, \frac{1}{2}).$$

On a donc

$$(8.20) \quad p_0^i(E_\infty) \supset P_0^i \cap B(0,1),$$

et

$$(8.21) \quad E_\infty \cap \partial B(0,1) = P_0 \cap \partial B(0,1)$$

puisque  $E_l$  tends vers  $P_0$  dans  $B(0,1) \setminus B(0, \frac{1}{2})$ . Alors par le théorème 3.1, (8.17), (8.20) et (8.21) disent que

$$(8.22) \quad E_\infty = P_0$$

C'est impossible, parce que chaque  $E_l$  est  $\frac{\epsilon}{2}$  loin de  $P_0$ .  $\square$

Maintenant pour  $0 < \theta = (\theta_1, \theta_2)$  avec  $0 < \theta_1 \leq \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ , notons, pour  $x \in \mathbb{R}^4, r > 0$ ,

$$(8.23) \quad D_\theta(x, r) = x + \{p_\theta^{1,-1}[B(0, r) \cap P_\theta^1] \cap p_\theta^{2,-1}[B(0, r) \cap P_\theta^2]\}$$

où  $P_\theta = P_\theta^1 \cup P_\theta^2$  est l'union de deux plans avec des angles caractéristiques  $\theta_1 \leq \theta_2$ , et  $p_\theta^i$  le projecteur orthogonal vers  $P_\theta^i, i = 1, 2$ . On a alors

**Corollaire 8.24.** *Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $0 < \delta < \epsilon$  et  $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ , qui ne dépendent que de  $\epsilon$ , avec les propriétés suivantes. Si  $\theta_0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , et si  $E$  est un ensemble localement minimal dans  $D_\theta(0,1)$  qui est  $\delta$  proche de  $P_\theta$  dans  $D_\theta(0,1) \setminus D_\theta(0, \frac{1}{4})$ , et si de plus*

$$(8.25) \quad p_\theta^i(E) \supset P_\theta^i \cap B(0, \frac{3}{4}),$$

alors  $E$  est  $\epsilon$  proche de  $P_\theta$  dans  $D_\theta(0,1)$ .

Démonstration. Observons d'abord qu'il existe  $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$  tel que pour tout  $0 < \theta < \phi$  on a

$$(8.26) \quad B(x, r) \subset D_\theta(x, r) \subset B(x, 2r).$$

Alors pour  $\epsilon > 0$  on prend  $\delta = \delta(\epsilon)$  et  $\theta_0 = \max\{\phi, \theta_0(\epsilon)\}$ , où  $\theta_0(\epsilon)$  et  $\delta(\epsilon)$  sont comme dans la proposition 8.1. Alors si  $E$  est  $\delta$  proche de  $P_\theta$  dans  $D_\theta(0,1) \setminus D_\theta(0, \frac{1}{4})$ , alors  $E$  est  $\delta$  proche de  $P_\theta$  dans  $B(0,1) \setminus B(0, \frac{1}{2})$ . Par la proposition 8.1,  $E$  est  $\epsilon$  proche de  $P_\theta$  dans  $B(0,1)$ . Donc  $E$  est  $\epsilon = \max\{\delta, \epsilon\}$  proche de  $P_\theta$  dans  $B(0,1) \cup [D_\theta(0,1) \setminus D_\theta(0, \frac{1}{4})] = D_\theta(0,1)$ .  $\square$

Revenons à la démonstration du théorème 1.32. On fixe encore un  $k$  grand, et on note  $D(x, r) = D_k(x, r), C^i(x, r) = C_k^i(x, r)$  pour  $i = 1, 2$ , et  $d_{x,r} = d_{x,r}^k$ .

On sait que dans  $D(o_k, r_k)$ ,  $E_k$  n'est  $\epsilon r_k$  proche d'aucune translation de  $P_k$ , donc par le corollaire 8.24,  $E_k$  n'est  $\delta r_k$  proche d'aucune translation de  $P_k$  dans  $D(o_k, r_k) \setminus D(o_k, \frac{1}{4}r_k)$ . Mais par (6.2), on sait que  $E_k \cap D(o_k, r_k) \setminus D(o_k, \frac{1}{4}r_k) = [G^1 \cup G^2] \cap [D(o_k, r_k) \setminus D(o_k, \frac{1}{4}r_k)]$ , où  $G^i$  est un graphe  $C^1$  de  $P_k^i \cap D(0, \frac{39}{40}) \setminus D(o_k, \frac{1}{10}r_k)$ . Donc il existe un  $i \in \{1, 2\}$  tel que dans  $D(o_k, r_k) \setminus D(o_k, \frac{1}{4}r_k)$   $G^i$  n'est  $\delta r_k$  proche d'aucune translation de  $P_k^i$ . Supposons par exemple que c'est le cas pour  $i = 1$ .

Alors notons  $P = P_k^1$ , et soit  $g^1$  comme dans (6.2) ; alors  $g^1$  est une fonction de  $P$  dans  $P^\perp$ , et donc de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Ecrivons  $g^1 = (\varphi_1, \varphi_2)$  où  $\varphi_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors puisque le graphe de  $g^1$  est  $\delta r_k$  loin de toute les translation de  $P$ , il existe  $j \in \{1, 2\}$  tel que

$$(8.27) \quad \sup_{x, y \in P \cap D(o_k, r_k) \setminus D(o_k, \frac{1}{4}r_k)} |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| \geq \frac{1}{2}r_k\delta.$$

Supposons par exemple que c'est vrai pour  $j = 1$ . Et si on note

$$(8.28) \quad K = \{(z, \varphi_1(z)) : z \in (D(0, \frac{3}{4}) \setminus D(o_k, \frac{1}{4}r_k)) \cap P\},$$

alors

$$(8.29) \quad \begin{aligned} K \text{ est la projection orthogonale de } G^1 \cap D(0, \frac{3}{4}) \\ \text{sur un sous-espace de dimension 3 de } \mathbb{R}^4. \end{aligned}$$

On définit, pour  $\frac{1}{4}r_k \leq s \leq r_k$  :

$$(8.30) \quad \Gamma_s = K \cap p^{-1}(\partial D(o_k, s) \cap P) = \{(x, \varphi_1(x)) | x \in \partial D(o_k, s) \cap P\}$$

le graphe de  $\varphi_1$  sur  $\partial D(o_k, s) \cap P$ .

On sait que le graphe de  $\varphi_1$  est  $\frac{1}{2}\delta_k$  loin de  $P$  dans  $D(o_k, r_k) \setminus D(o_k, \frac{1}{4}r_k)$  ; alors il y a deux cas :

1er cas : il existe  $t \in [\frac{1}{4}r_k, r_k]$  tel que

$$(8.31) \quad \sup_{x, y \in \Gamma_t} \{|\varphi_1(x) - \varphi_1(y)|\} \geq \frac{\delta}{C}r_k$$

où  $C = 4C(\frac{1}{2})$  est la constante de la corollaire 7.44.

Alors il existe  $a, b \in \Gamma_t$  tels que  $|\varphi_1(a) - \varphi_1(b)| > \frac{\delta}{C}r_k \geq \frac{\delta}{C}t$ . Puisque  $\|\nabla \varphi_1\|_\infty \leq \|\nabla \varphi\|_\infty < 1$ , on a

$$(8.32) \quad \int_{\Gamma_t} |\varphi_1 - m(\varphi_1)|^2 \geq \frac{t^3\delta^3}{4C^3} = \left(\frac{4}{3}t\delta\right)^3 \left(\frac{27}{4^4 C^3}\right).$$

Maintenant dans  $D(0, \frac{3}{4})$  on a  $d(0, o_k) < 6\epsilon \leq 10\epsilon \cdot \frac{3}{4}$ , et  $s < r_k < \frac{1}{8} < \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ , on peut donc appliquer le corollaire 7.30 et on obtient

$$(8.33) \quad \int_{(D(0, \frac{3}{4}) \setminus D(o_k, t)) \cap P} |\nabla \varphi_1|^2 \geq C_1(\delta)t^2.$$

2ème cas : pour tous les  $\frac{1}{4}r_k \leq s \leq r_k$ ,

$$(8.34) \quad \sup_{x,y \in \Gamma_s} \{|\varphi_1(x) - \varphi_1(y)|\} \leq \frac{\delta}{C} r_k.$$

Mais puisque on a déjà

$$(8.35) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2}r_k\delta &\leq \sup\{|\varphi_1(x) - \varphi_2(y)| : x, y \in P \cap D(o_k, r_k) \setminus D(o_k, \frac{1}{4}r_k)\} \\ &= \sup\{|\varphi_1(x) - \varphi_2(y)| : s, s' \in [\frac{1}{4}r_k, r_k], x \in \Gamma_s, y \in \Gamma_{s'}\}, \end{aligned}$$

il existe  $\frac{1}{4}r_k \leq t < t' \leq r_k$  tel que

$$(8.36) \quad \sup_{x \in \Gamma_t, y \in \Gamma_{t'}} \{|\varphi_1(x) - \varphi_1(y)|\} \geq \frac{1}{2}r_k\delta.$$

Fixons  $t$  et  $t'$ , et sans perdre de généralité, supposons que

$$(8.37) \quad \sup_{x \in \Gamma_t, y \in \Gamma_{t'}} \{|\varphi_1(x) - \varphi_1(y)|\} \geq \frac{1}{2}r_k\delta.$$

Alors

$$(8.38) \quad \inf_{x \in \Gamma_t} \varphi_1(x) - \sup_{x \in \Gamma_{t'}} \varphi_1(x) \geq \frac{1}{2}r_k\delta - 2\frac{\delta}{C}r_k = (1 - \frac{2}{C(\frac{1}{2})})\frac{\delta}{2}r_k \geq (1 - \frac{2}{C(\frac{1}{2})})\frac{\delta}{2}t'$$

puisque  $C = 4C(\frac{1}{2})$ .

Maintenant regardons dans notre boule  $D(o_k, t') \cap P$ . En appliquant le corollaire 7.44 à l'échelle  $t'$ , on obtient

$$(8.39) \quad \int_{(D(o_k, t') \setminus D(o_k, t)) \cap P} |\nabla \varphi_1|^2 \geq C(\delta, \frac{1}{2}) \frac{\pi(\frac{\delta}{2})^2 t'^2}{\log \frac{t'}{t}}.$$

Et puisque  $\frac{t'}{t} \leq 4$ ,  $t' > t$ , on a

$$(8.40) \quad \int_{((D(o_k, t') \setminus D(o_k, t)) \cap P)} |\nabla \varphi_1|^2 \geq C_2(\delta) t'^2.$$

Dans les deux cas, il existe un constante  $C = C_0(\delta) = \min\{C_1(\delta), C_2(\delta)\}$ , qui ne dépend que de  $\delta$ , telle que

$$(8.41) \quad \int_{(D(0, \frac{3}{4}) \setminus D(o_k, t_k)) \cap P} |\nabla \varphi_1|^2 \geq C_0(\delta) t_k^2.$$

D'un autre côté, puisque  $|\nabla \varphi_1| \leq |\nabla g^1| < 1$ ,

$$(8.42) \quad \sqrt{1 + |\nabla \varphi_1|^2} > \sqrt{1 + \frac{1}{2}|\nabla \varphi_1|^2 + \frac{1}{16}|\nabla \varphi_1|^4} = 1 + \frac{1}{4}|\nabla \varphi_1|^2.$$

Donc

$$(8.43) \quad \begin{aligned} H^2(K \setminus C_k^1(o_k, t_k)) &= \int_{D(0, \frac{3}{4}) \setminus C_k^1(o_k, t_k) \cap P} \sqrt{1 + |\nabla \varphi_1|^2} \geq \int_{D(0, \frac{3}{4}) \setminus C_k^1(o_k, t_k) \cap P} 1 + \frac{1}{4}|\nabla \varphi_1|^2 \\ &\geq H^2((D(0, \frac{3}{4}) \setminus C_k^1(o_k, t_k)) \cap P)) + \frac{1}{4} \int_{D(0, \frac{3}{4}) \setminus C_k^1(o_k, t_k) \cap P} |\nabla \varphi_1|^2 \\ &= H^2((D(0, \frac{3}{4}) \setminus C_k^1(o_k, t_k)) \cap P_k^1)) + C(\delta) t_k^2. \end{aligned}$$

Alors à cause de (8.29) on obtient que

$$\begin{aligned}
 (8.44) \quad & H^2(G^1 \cap D(0, \frac{3}{4}) \setminus D(o_k, t_k)) \geq H^2(K \setminus D(o_k, t_k)) \\
 & \geq H^2((P_k^1 + o_k) \cap D(0, \frac{3}{4}) \setminus D(o_k, t_k)) + C(\delta)t_k^2 \\
 & = H^2(P_k^1 \cap D(0, \frac{3}{4}) \setminus D(0, t_k)) + C(\delta)t_k^2.
 \end{aligned}$$

On a donc obtenu une estimation pour la partie régulière (mais un peu oscillante) de  $E_k$ . Et pour toutes les autres parties de  $E_k$  on va estimer la mesure par projections.

Faisons notre décomposition. Notons  $F_1 = E_k \cap D(o_k, t_k)$ ,  $F_2 = G_{t_k}^2$ ,  $F_3 = G_{t_k}^1 \setminus D(0, \frac{3}{4})$ , et  $F_4 = G_{t_k}^1 \cap D(0, \frac{3}{4})$ , où  $G_t^i$  est défini comme dans la proposition 6.1(2). Alors les  $F_i$  sont disjoints.

Pour  $F_1$ , par la proposition 2.34 et le lemme 2.45

$$(8.45) \quad (1 + 2 \cos \theta_k(1))H^2(F_1) \geq H^2(p_k^1(F_1)) + H^2(p_k^2(F_1)),$$

où  $\theta_k = (\theta_k(1), \theta_k(2))$  avec  $\theta_k(1) \leq \theta_k(2)$ . (Rappelons que  $E_k$  a le même bord que  $P_k = P^1 \cup_{\theta_k} P^2$  avec  $\theta_k \geq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k}$ ). Mais puisque  $\theta_k \geq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k}$ , alors

$$(8.46) \quad H^2(F_1) \geq (1 - \frac{3}{k})[H^2(p_k^1(F_1)) + H^2(p_k^2(F_1))]$$

quand  $k$  est grand. D'un autre côté, par la proposition 6.1(4),

$$(8.47) \quad p_k^i(F_1) \supset P_k^i \cap C_k^i(o_k, t_k).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 (8.48) \quad & H^2(F_1) \geq (1 - \frac{3}{k})H^2((P_k + o_k) \cap D(o_k, t_k)) \\
 & \geq H^2((P_k + o_k) \cap D(o_k, t_k)) - \frac{C}{k}t_k^2 = H^2(P_k \cap D(0, t_k)) - \frac{C}{k}t_k^2.
 \end{aligned}$$

Pour  $F_2$ , par la proposition 6.1(2), on a

$$(8.49) \quad p_k^2(F_2) = p_k^2(G_{t_k}^2) \supset P_k^i \cap D(0, 1) \setminus C_k^2(o_k, t_k),$$

et donc

$$(8.50) \quad H^2(F_2) \geq H^2[P_k^2 \cap D(0, 1) \setminus C_k^2(o_k, t_k)] = H^2[P_k^2 \cap D(0, 1) \setminus D(0, t_k)].$$

Pour  $F_3$ , encore à cause de la proposition 6.1(2), et par définition de  $F_3$  on a

$$(8.51) \quad p_k^1(F_3) \supset p_k^1(G_{t_k}^1) \setminus p_k^1(D(0, \frac{3}{4})) \supset P_k^1 \cap D(0, 1) \setminus D(0, \frac{3}{4}),$$

et donc

$$(8.52) \quad H^2(F_3) \geq H^2(P_k^1 \cap D(0, 1) \setminus D(0, \frac{3}{4})).$$

Pour la dernière partie, la définition de  $F_4$  donne

$$(8.53) \quad H^2(F_4) = H^2(G^1 \setminus D(o_k, t_k)) \geq H^2(P_k^1 \cap D(0, \frac{3}{4}) \setminus D(0, t_k)) + C(\delta)t_k^2.$$

Et maintenant on calcule la mesure de  $E_k$  en sommant les 4 morceaux :

$$(8.54) \quad \begin{aligned} H^2(E_k) &= H^2(F_1) + H^2(F_2) + H^2(F_3) + H^2(F_4) \\ &\geq H^2(P_k \cap D(0, 1)) + t_k^2(C(\delta) - \frac{C}{k}). \end{aligned}$$

Alors quand  $k$  est tel que  $C(\delta) > \frac{C}{k}$ , on a que

$$(8.55) \quad H^2(E_k) > H^2(P_k \cap D(0, 1)),$$

ce qui contredit la proposition 4.8(4).  $\square$

## 9 Généralisation aux dimensions plus hautes

Pour le cas où  $P^1$  et  $P^2$  sont des hyperplans de dimension  $m$  dans  $\mathbb{R}^{2m}$ , on peut énoncer un théorème semblable au théorème 1.32 :

**Théorème 9.1** (minimalité de l'union de deux hyperplans presque orthogonaux). *Pour chaque  $m > 1$ , il existe un  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , tel que, si  $P^1$  et  $P^2$  sont deux hyperplans de dimension  $m$  dans  $\mathbb{R}^{2m}$  avec des angles caractéristiques  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ , où  $\theta < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_m \leq \frac{\pi}{2}$ , alors leur union  $P^1 \cup P^2$  est un cône minimal.*

On peut obtenir le résultat par un argument semblable à celui utilisé pour la dimension 2. Une bonne partie de la démonstration est exactement la même. Donc on va traiter ici seulement les parties un peu différentes, dans l'ordre d'entrée en scène.

### 9.1 Estimations algébriques pour la somme des projecteurs de deux hyperplans (parallèle au paragraphe 2)

Dans ce paragraphe on va discuter les projections d'un  $m$ -vecteur sur deux  $m$ -plans. D'abord on donne des définitions et des notations générales.

$\wedge_m(\mathbb{R}^{2m})$  désigne l'espace de  $m$ -vecteurs dans  $\mathbb{R}^{2m}$ , et si  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq 2m}$  forme une base orthonormée de  $\mathbb{R}^{2m}$ , alors on prend  $\{e_{i(1)} \wedge e_{i(2)} \wedge \dots \wedge e_{i(m)}, 1 \leq i(1) < i(2) < \dots < i(m) \leq 2m\}$  comme une base orthonormée de  $\wedge_m \mathbb{R}^{2m}$ , ce qui donne une structure hilbertienne ;  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire pour cette structure, et  $|\cdot|$  la norme induite.

Pour un  $m$ -vecteur simple unitaire  $\xi$ ,  $P(\xi) = \{v \in \mathbb{R}^{2m}, v \wedge \xi = 0\} \in G(2m, m)$  est le sous-espace de dimension  $m$  associé à  $\xi$ , où  $G(2m, m)$  est l'ensemble des sous-espaces de dimension  $m$  dans  $\mathbb{R}^{2m}$ . Et si on a  $\xi = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_m$ , alors  $P(\xi)$  est juste le sous-espace engendré par  $\{x_i\}_{1 \leq i \leq m}$ .

Si  $f$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ , alors on note  $\wedge_m f$  l'application linéaire de  $\wedge_m(\mathbb{R}^{2m}) \rightarrow \wedge_m(\mathbb{R}^{2m})$  telle que

$$(9.2) \quad \wedge_m f(x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_m) = f(x_1) \wedge f(x_2) \wedge \cdots \wedge f(x_m).$$

Et pour  $P \in G(2m, m)$ , prenons  $\xi \in \wedge_k(\mathbb{R}^{2m})$  simples unitaires tels que  $P = P(\xi)$ , alors on définit  $|f(\cdot)| : G(2m, m) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  par

$$(9.3) \quad |f(P)| = |\wedge_m f(\xi)|.$$

La valeur de  $|f(P)|$  ne dépend pas du choix de  $\xi$ .

Pour les prochaines estimations, on pourrait faire des calculs semblables à ceux de la dimension 2, en faisant des calculs des matrices et leurs déterminants, etc. Mais ça serait plus compliqué pour les dimensions générales, donc on ne va pas donner ici des détails précis. En revanche, on cite le lemme suivant.

**Lemme 9.4.** (c.f. [25] Lemme 5.2)

Soit  $P^1, P^2$  deux sous-espaces de  $\mathbb{R}^n$  avec

$$(9.5) \quad \dim(P^1 \cap P^2) \geq \dim P^1 - m + 2$$

Soit  $\xi$  un vecteur simple unitaire dans  $\wedge_m \mathbb{R}^n$ . Notons  $p^i$  le projecteur de  $P^i$ ,  $i = 1, 2$ . Alors les projections de  $\xi$  vérifie

$$(9.6) \quad |p^1 \xi| + |p^2 \xi| \leq 1.$$

Si en plus,

$$(9.7) \quad \dim(P^1 \cap P^2) < m - 2,$$

alors

$$(9.8) \quad |p^1 \xi| + |p^2 \xi| = 1 \text{ si et seulement si } \xi \text{ appartient à } P^1 \text{ ou } P^2.$$

Notons qu'on peut se servir de ce lemme pour la dimension 2 aussi, mais pas totalement. En effet (9.6) est toujours vrai. Par contre (9.8) n'est pas vrai en dimension 2, parce que la condition (9.7) n'est pas vérifiée pour  $m = 2$ . Pour  $m > 2$ , on vérifie (9.7) facilement car  $\dim(P_0^1 \cap P_0^2) = 0 < 1 \leq m - 2$ , où  $P_0 = P_0^1 \cup_{\perp} P_0^2$  est l'union de deux hyperplans de dimension  $m$  orthogonales (c'est à dire les angles

caractéristiques de  $P_0^1$  et  $P_0^2$  sont tous  $\frac{\pi}{2}$ ). On a donc (9.8), et si on désigne encore par  $\Xi$  l'ensemble des  $m$ -vecteurs simples unitaires  $\zeta \in \Lambda_m \mathbb{R}^{2m}$ , qui vérifient

$$(9.9) \quad |p_0^1(\zeta)| + |p_0^2(\zeta)| = 1,$$

alors  $P(\Xi)$  ne contient que deux éléments  $P_0^1$  et  $P_0^2$ . Cela simplifie beaucoup la démonstration de l'unicité de  $P_0$ , qu'on va voir tout à l'heure.

Maintenant on va regarder le cas de deux hyperplans transverses quelconques. (généralisation de la proposition 2.34).

**Proposition 9.10.** Soit  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_m \leq \frac{\pi}{2}$ , et soit  $P^1, P^2 \subset \mathbb{R}^{2m}$  deux  $m$ -plans qui font des angles caractéristiques  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ . Si on note  $p^i$  la projection orthogonale sur  $P^i$ , alors pour tout  $m$ -vecteur simple unitaire  $\zeta \in \Lambda_m \mathbb{R}^{2m}$ , la somme des projections vers les 2 plans satisfait à :

$$(9.11) \quad |p^1(\zeta)| + |p^2(\zeta)| \leq 1 + (m+1) \cos \alpha_1.$$

Démonstration. La démonstration marche comme dans 2.34 jusqu'à (2.40). Donc en bref on choisit une base orthonormée  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq 2m}$  de  $\mathbb{R}^{2m}$ , avec  $P^1 = P(\wedge_{i=1}^m e_i)$  et  $P^2 = P(\wedge_{i=1}^m (\cos \alpha_i e_i + \sin \alpha_i e_{i+m}))$ . Notons  $p$  le projecteur de  $P^{1\perp} = P(\wedge_{i=m+1}^{2m} e_i)$ . Alors

$$(9.12) \quad |p^1(\zeta)| + |p^2(\zeta)| \leq |p^1(\zeta)| + |p(\zeta)| + |(p^2 - p)(\zeta)| \leq 1 + |(p^2 - p)(\zeta)|.$$

Pour estimer le dernier terme,

$$\begin{aligned} (9.13) \quad |(p^2 - p)(\zeta)| &= |< \wedge_{i=1}^m (\cos \alpha_i e_i + \sin \alpha_i e_{i+m}) - \wedge_{i=m+1}^{2m} e_i, \zeta >| \\ &= |< \sum_{i=1}^{m+1} (\wedge_{j < i} \sin \alpha_j e_j) \wedge \cos \alpha_i e_i \wedge (\wedge_{j > i} (\cos \alpha_j e_j + \sin \alpha_j e_{j+m}) - \wedge_{i=m+1}^{2m} e_i, \zeta >| \\ &\leq \sum_{i=1}^m |< (\wedge_{j < i} \sin \alpha_j e_j) \wedge \cos \alpha_i e_i \wedge (\wedge_{j > i} (\cos \alpha_j e_j + \sin \alpha_j e_{j+m}), \zeta >| \\ &\quad + |< \wedge_{i=1}^m \sin \alpha_i e_{i+m} - \wedge_{i=m+1}^{2m} e_i, \zeta >| \\ &\leq \sum_{i=1}^m |\cos \alpha_i| + |1 - \prod_{i=1}^m \sin \alpha_i| \leq m \cos \alpha_1 + (1 - \sin^2 \alpha_1) \\ &\leq m \cos \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1 \leq (m+1) \cos \alpha_1. \end{aligned}$$

Et par conséquent

$$(9.14) \quad |p^1(\zeta)| + |p^2(\zeta)| \leq 1 + (m+1) \cos \alpha_1.$$

Fin de la démonstration du lemme.

On va maintenant énoncer un lemme semblable au lemme 2.45 (pour le citer plus facilement après), sans le démontrer, parce que la démonstration est la même.

**Lemme 9.15.** Soit  $n > d \geq 2$ ,  $P, Q$  deux sous-espaces dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $F \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble  $d$ -rectifiable. Notons  $p$  le projecteur de  $P$  et  $q$  celui de  $Q$ . Soit  $\lambda \geq 0$  tel que pour presque tout  $x \in F$ , le plan tangent  $T_x F \in G(n, d)$  de  $F$  vérifie

$$(9.16) \quad |p(T_x F)| + |q(T_x F)| \leq \lambda.$$

Alors

$$(9.17) \quad H^d(p(F)) + H^d(q(F)) \leq \lambda H^d(F).$$

Ensuite, tout marche exactement comme dans §2.2, et on ne va pas refaire ici.

## 9.2 Unicité de $P_0$

On va montrer l'unicité de  $P_0$ . Ici on est en dimension plus grande que 2, et donc il n'y a plus de résultat de régularité locale pour des ensembles minimaux, ni bi-Hölderienne, ni  $C^1$ , sauf pour des points de type  $\mathbb{P}$ . Mais pour des points qui admettent un hyperplan comme une limite d'explosion, on a encore la régularité  $C^1$ .

**Proposition 9.18.** Pour  $2 \leq m < n < \infty$ , Il existe un  $\epsilon_1 > 0$  tel que si  $E$  est un ensemble localement minimal de dimension  $m$  dans un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$ , avec  $B(0, 2) \subset U$  et  $0 \in E$ . Alors si  $E$  est  $\epsilon_1$  proche d'un  $m$ -plan  $P$  dans  $B(0, 1)$ , alors  $E$  coïncide avec le graphe d'une application  $C^1$   $f : P \rightarrow P^\perp$  dans  $B(0, \frac{3}{4})$ . De plus  $\|\nabla f\|_\infty < 1$ .

Démonstration. c.f. Proposition 6.14. □

Par contre, l'avantage ici est que l'ensemble  $\Xi$  (l'ensemble des  $m$ -vecteurs simples unitaires qui vérifient (9.9)) est beaucoup plus simple. Donc on va démontrer l'unicité d'une manière un peu différente, mais sans doute plus simple.

**Proposition 9.19** (unicité de  $P_0$ ). Soit  $P_0 = P_0^1 \cup_{\perp} P_0^2$ , et  $p_0^i$  la projection orthogonale sur  $P_0^i$ ,  $i = 1, 2$ . Soit  $E \subset \overline{B}(0, 1)$  un ensemble de dimension  $m$  fermé réduit qui est minimal dans  $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^{2m}$ , et qui vérifie :

$$(9.20) \quad p_0^i(E \cap B(0, 1)) \supset P_0^i \cap B(0, 1) ;$$

$$(9.21) \quad E \cap \partial B(0, 1) = P_0 \cap \partial B(0, 1) ;$$

$$(9.22) \quad H^m(E \cap B(0, 1)) = 2v(m),$$

où  $v(m) = H^m(\mathbb{R}^m \cap B(0, 1))$ .

Alors  $E = P_0 \cap \overline{B}(0, 1)$ .

Démonstration.

**Lemme 9.23.** 1) Pour presque tout  $x \in E$ ,  $T_x E \in P(\Xi) = \{P_0^1, P_0^2\}$ .

2) Pour chaque  $i = 1, 2$ , pour presque tout  $z \in P_0^i \cap B(0, 1) = p_0^i(E)$ ,

$$(9.24) \quad N(p_0^i, z) = \#\{p_0^{i-1}(z) \cap E\} = 1.$$

Démonstration. c.f. lemme 3.8.

**Corollaire 9.25.** Pour chaque  $i = 1, 2$ , si  $x$  est tel que son plan tangent vaut  $P_0^i$ , alors il existe  $r = r(x) > 0$  tel que  $E \cap B(x, r)$  est un disque de dimension  $m$  de rayon  $r$ , parallèle à  $P_0^i$ .

Démonstration. Prenons  $i = 1$  par exemple. Par la régularité  $C^1$ , on sait qu'il existe  $r' > 0$  tel que dans  $B(x, r')$ ,  $E$  est le graphe d'une application  $\varphi$  de classe  $C^1$  de  $P_0^1$  vers  $P_0^1$ . Alors dans  $B(x, r')$ , chaque point  $y$  a un plan tangent  $T_x Y$ , et l'application  $T : E \rightarrow G(2m, m)$ ,  $T(y) = T_y E$  est continue. Il existe donc  $r > 0$  tel que pour tout  $y \in E \cap B(x, r)$ ,  $T_y E$  n'est pas  $P_0^2$ . Mais on sait que pour presque tout  $y \in E \cap B(x, r)$ ,  $T_y E$  est soit  $P_0^1$  soit  $P_0^2$ , donc pour tout  $y \in E \cap B(x, r)$ ,  $T_y E = P_0^1$ , et donc  $E \cap B(x, r) = (P_0^1 + x) \cap B(x, r)$ .

Fin de la démonstration du lemme.

Maintenant regardons les points qui n'ont pas de plan tangent. Soit  $y \in E$  un tel point. Notons  $K$  une limite d'explosion de  $E$  en  $y$ . On veut montrer que  $K = P_0$ .

**Lemme 9.26.** Pour tout  $x \in K$  tel que le plan tangent de  $K$  à  $x$   $T_x K$  existe, alors  $T_x K = P_0^1$  ou  $P_0^2$ .

Démonstration. Puisque  $K$  est un cône, on peut supposer que  $|x| = 1$ .

$K$  est une limite d'explosion de  $E$  en  $y$ , c'est à dire, il existe une suite  $r_k$  telle que  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0$  et

$$(9.27) \quad r_k^{-1}(E - y) \cap B(0, 2) \xrightarrow{d_H} K \cap B(0, 2).$$

Donc

$$(9.28) \quad r_k^{-1}(E - y) \cap B(x, r) \xrightarrow{d_H} K \cap B(x, r)$$

uniformément en  $r \in (0, \frac{1}{2})$ .

Mais  $T_x K$  existe, donc  $T_x K$  est une limite d'explosion de  $K$  en  $x$ , de sorte qu'il existe un  $0 < r < \frac{1}{2}$  tel que  $d_H(K \cap B(x, r), P \cap B(x, r)) < \frac{1}{2}r\epsilon_1$ , où  $P = T_x E + x$ , et on choisit  $\epsilon_1$  comme dans la proposition 9.18.

Fixons cet  $r$ , et il existe  $N > 0$  tel que pour tout  $k > N$ , on a  $d_H(r_k^{-1}(E - y) \cap B(x, r), K \cap B(x, r)) < \frac{1}{2}r\epsilon_1$ , d'après (9.28). Et donc

$$(9.29) \quad d_H(r_k^{-1}(E - y) \cap B(x, r), P \cap B(x, r)) < \epsilon_1 r.$$

Notons  $E_k = r_k^{-1}(E - y)$ , alors  $E_k$  est un ensemble minimal aussi. Et de plus

$$(9.30) \quad d_H(E_k \cap B(x, r), P \cap B(x, r)) < \epsilon_1 r.$$

Maintenant on peut se servir de la proposition 9.18, et on obtient que pour  $k$  assez grand,  $E_k$  est le graphe d'une  $C^1$  application  $f_k$  de  $P$  à  $P^\perp$  dans  $B(x, \frac{3}{4}r)$ .

On note  $x_k = r_k x + y$ , alors  $r_k^{-1}(x_k - y) = x$ . Et donc

$$(9.31) \quad E_k \cap B(x, r) = r_k^{-1}((B(x_k, r_k r) \cap E) - y)$$

pour  $k > N$ . C'est à dire que dans  $B(x_k, \frac{3}{4}r_k r)$ ,  $E$  est un graphe  $C^1$  sur un plan  $Q_k$  parallèle à  $T_x K$ . Mais, comme pour presque tout  $z \in B(x_k, \frac{3}{4}r_k r) \cap E$ , le plan tangent de  $E$  à  $z$  existe et vaut  $P_0^1$  ou  $P_0^2$ , et l'application  $z \rightarrow T_z E$  est continue sur le graphe  $C^1$ , donc  $E$  coïncide avec  $P_0^1$  ou  $P_0^2$  dans  $B(x_k, \frac{3}{4}r_k r)$ . Autrement dit,  $E_k \cap B(x, \frac{3}{4}r) = (P_0^1 + x) \cap B(x, \frac{3}{4}r)$  ou  $E_k \cap B(x, \frac{3}{4}r) = (P_0^2 + x) \cap B(x, \frac{3}{4}r)$ . Alors par (9.30), dans  $B(x, \frac{3}{4}r)$ ,  $P$  est la limite d'une suite de plans, qui sont soit  $P_0^1 + x$ , soit  $P_0^2 + x$ . Donc  $P = P_0^1 + x$  ou  $P_0^2 + x$ , de sorte que  $T_x K = P_0^1$  ou  $P_0^2$ .

Fin de la démonstration du lemme.

**Lemme 9.32.**  $K = P_0$ .

Démonstration. On note  $K^i = \{x \in K : T_x K = P_0^i\}$ , alors on affirme que

$$(9.33) \quad K^i \subset P_0^i.$$

En effet, si  $x \in K^1, x \neq 0$ , alors, puisque  $K$  est un cône, on a  $[0, x] \in K$ , où  $[x, y]$  désigne le segment qui connecte 2 points  $x, y \in \mathbb{R}^{2m}$ . Mais puisque  $T_x K = P_0^1$ , et presque tout  $z \in K$  a un plan tangent  $P_0^1$  ou  $P_0^2$ , par un argument semblable à celui du lemme 9.26, on obtient un rayon  $r = r(x) > 0$  tel que  $K \cap B(x, r)$  est un plan parallèle à  $P_0^1$ . Mais  $[0, x] \cap B(x, r) \subset K \cap B(x, r)$ , donc  $[0, x] \subset P_0^1$ . En particulier,  $x \in P_0^1$ . On obtient donc

$$(9.34) \quad K^1 \subset P_0^1.$$

Un argument semblable donne aussi

$$(9.35) \quad K^2 \subset P_0^2.$$

Mais  $K$  est minimal, donc il est rectifiable puisqu'il est minimal, de sorte que presque tout point de  $K$  admet un plan tangent. Alors par le lemme 9.23, on a

$$(9.36) \quad H^m(K \setminus (K^1 \cup K^2)) = 0,$$

et donc

$$(9.37) \quad H^m(K \setminus (P_0^1 \cup P_0^2)) = 0,$$

de sorte que

$$(9.38) \quad K \subset P_0,$$

puisque'il est un ensemble fermé reduit.

Maintenant si  $K \neq P_0$ , il existe alors  $x \in P_0 \cap \partial B(0, 1)$  tel que  $(0, x] \not\subset K$ , puisque  $K$  est un cône. Supposons par exemple  $x \in P_0^1$ .

Mais  $K$  est aussi fermé, il existe donc  $r > 0$  tel que  $B(\frac{1}{2}x, r) \cap K = \emptyset$ . Autrement dit,  $K$  a un trou dans l'hyperplan  $P_0^1$ . Alors on peut déformer  $P_0^1 \cap B(0, 1) \setminus B(\frac{1}{2}x, r)$  dans  $B(0, 1)$  en un ensemble de mesure arbitrairement petite, en fixant à la fois  $\partial B(0, 1)$  et  $P_0^2$ . Ceci implique que  $H^m(K \cap P_0^1) = 0$ , puisque  $K$  est minimal. Et donc  $K = P_0^2$ , ce qui contredit le fait que  $K$  n'est pas un plan.

Par conséquent,  $K = P_0$ .

Fin de la démonstration du lemme.

Maintenant on va donner la régularité autour d'un point  $x$  qui admet une limite d'explosion  $P_0$ .

**Lemme 9.39.** *Soit  $x \in E$  tel qu'une limite d'explosion de  $E$  en  $x$  est  $P_0$ . Alors il existe  $r > 0$  tel que  $E \cap B(x, r) = (P_0 + x) \cap B(x, r)$ .*

Démonstration. Par la démonstration des lemmes 9.26 et 9.32,  $P_0$  est la seule limite d'explosion de  $E$  en  $x$ , parce qu'on part d'une limite d'explosions quelconque  $K$ , et on arrive toujours à  $P_0$ . Il existe donc  $r_0 > 0$  tel que pour tout  $r < r_0$ ,

$$(9.40) \quad d_{x,r}(E, P_0 + x) < \min\left\{\frac{1}{100}, \frac{1}{10}\epsilon_1\right\}$$

où  $\epsilon_1$  est celui dans la proposition 9.18.

Notons  $C^i(x, s) = p_0^{i-1}(B(0, s) \cap P_0^i) + x$  (qui est un "cylindre").

Pour tout  $y \in E \cap B(x, \frac{4}{5}r) \setminus C^1(x, \frac{1}{5}r)$ , on a

$$(9.41) \quad d_{y, \frac{1}{10}r}(E, P_0^1 + x) < \epsilon_1.$$

En effet, on sait par (9.40) que (9.41) est vrai si on remplace  $P_0^1$  par  $P_0$ . Mais on sait que  $d(B(y, \frac{1}{10}r), P_0^2) > \frac{1}{10}r$  puisque  $y \notin C^1(x, \frac{1}{5}r)$ , et donc on doit avoir (9.41).

Alors par la proposition 9.18, on a que pour chaque  $y \in E \cap B(x, \frac{4}{5}r) \setminus C^1(x, \frac{1}{5}r)$ , dans  $B(y, \frac{3}{40}r)$   $E$  est un graphe  $C^1$  de  $P_0^1$ , et en particulier  $T_y E \neq P_0^2$ . Par conséquent  $T_y E = P_0^1$ . Par le corollaire 9.25,

$$(9.42) \quad \text{il existe } r'_y > 0 \text{ tel que } E \cap B(y, r'_y) = (P_0^1 + y) \cap B(y, r'_y).$$

Maintenant fixons un  $y_r \in E \cap B(x, \frac{4}{5}r) \setminus C^1(x, \frac{1}{5}r)$ . Notons  $A = E \cap (P_0^1 + y_r) \cap B(x, \frac{4}{5}r) \setminus C^1(x, \frac{1}{5}r)$ . Alors  $A$  est relativement fermé dans  $(P_0^1 + y_r) \cap B(x, \frac{4}{5}r) \setminus C^1(x, \frac{1}{5}r)$ , puisque  $E$  l'est. Et  $A$  est non vide

parce que  $y_r \in A$ . Mais  $A$  est aussi ouvert dans  $(P_0^1 + y_r) \cap B(x, \frac{4}{5}r) \setminus C^1(x, \frac{1}{5}r)$ , parce que pour chaque  $y \in A$ , (9.42) est vrai.

Par conséquent  $A = (P_0^1 + y_r) \cap B(x, \frac{4}{5}r) \setminus C^1(x, \frac{1}{5}r)$  puisque le dernier est connexe. On a donc

$$(9.43) \quad (P_0^1 + y_r) \cap B(x, \frac{4}{5}r) \setminus C^1(x, \frac{1}{5}r) \subset E \cap B(x, \frac{4}{5}r) \setminus C^1(x, \frac{1}{5}r).$$

Mais par (9.42), pour chaque  $y \in (P_0^1 + y_r) \cap B(x, \frac{4}{5}r) \setminus C^1(x, \frac{1}{5}r)$ ,

$$(9.44) \quad E \text{ coïncide avec } P_0^1 + y \text{ dans } B(y, \frac{3}{40}r),$$

et donc

$$(9.45) \quad P_0^1 + y = P_0^1 + y_r$$

et

$$(9.46) \quad E \text{ coïncide avec } P_0^1 + y_r \text{ dans } B((P_0^1 + y_r) \cap B(x, \frac{4}{5}r) \setminus C^1(x, \frac{1}{5}r), \frac{3}{40}r).$$

Mais on sait que

$$(9.47) \quad d_{B(x,r) \setminus C^1(x, \frac{1}{10}r), r}(E, P_0^1 + x) < \frac{1}{100},$$

et que

$$(9.48) \quad d(y_r, P_0^1 + x) < \frac{1}{100}r,$$

de sorte que

$$(9.49) \quad d_{B(x,r) \setminus C^1(x, \frac{1}{10}r), r}(E, P_0^1 + y_r) < \frac{1}{20},$$

ce qui implique que

$$(9.50) \quad \begin{aligned} E \cap B(x, \frac{4}{5}r) \setminus C^1(x, \frac{1}{5}r) &\subset B((P_0^1 + y_r), \frac{3}{40}r) \cap B(x, \frac{4}{5}r) \setminus C^1(x, \frac{1}{5}r) \\ &\subset B((P_0^1 + y_r) \cap B(x, \frac{4}{5}r) \setminus C^1(x, \frac{1}{5}r), \frac{3}{40}r). \end{aligned}$$

Par conséquent, (9.46) implique que

$$(9.51) \quad E \cap B(x, \frac{4}{5}r) \setminus C^1(x, \frac{1}{5}r) = (P_0^1 + y_r) \cap B(x, \frac{4}{5}r) \setminus C^1(x, \frac{1}{5}r).$$

Notons que (9.51) est vrai pour tout  $r < r_0$ . Par conséquent pour tout  $r < r_0$ , les  $p_0^2(y_r)$  sont égaux, et égaux à  $p_0^2(x)$ , parce que (9.40) est vrai pour tout  $r$  suffisamment petit. Et donc on a

$$(9.52) \quad (P_0^1 + x) \cap B(x, \frac{4}{5}r_0) \subset E \cap B(x, \frac{4}{5}r_0).$$

Un argument semblable donne

$$(9.53) \quad (P_0^2 + x) \cap B(x, \frac{4}{5}r_0) \subset E \cap B(x, \frac{4}{5}r_0),$$

et donc

$$(9.54) \quad (P_0 + x) \cap B(x, \frac{4}{5}r_0) \subset E \cap B(x, \frac{4}{5}r_0).$$

On affirme alors que

$$(9.55) \quad (P_0 + x) \cap B(x, \frac{1}{2}r_0) = E \cap B(x, \frac{1}{2}r_0).$$

En effet, soit  $y \in E \cap B(x, \frac{1}{2}r_0)$ . Prenons  $r = 2|y - x| < r_0$ , et supposons par exemple que  $|p_0^1(y - x)| \geq |p_0^2(y - x)|$ . Alors  $y \in B(x, \frac{4}{5}r) \setminus C^1(x, \frac{1}{5}r)$ , ce qui implique que  $y \in P_0^1 + x$  par (9.51).

Fin de la démonstration du lemme.

Maintenant on peut arriver à la conclusion de la proposition 9.19.

Notons  $E^i = \{x \in E \cap B(0, 1); T_x E \text{ existe et vaut } P_0^i\}$ . Alors pour  $i = 1, 2$ ,  $E^i$  est ouvert dans  $E$ , à cause du corollaire 9.25. De plus, au moins un des  $E^i$  est non vide, grâce au lemme 9.23(1). Supposons par exemple que  $E^1 \neq \emptyset$ . Notons aussi  $E^0$  l'ensemble des points de type  $P_0$ . Alors  $E$  est l'union disjointe de  $E^1$ ,  $E^2$  et  $E^0$ . Par conséquent  $E^0 \cup E^1 = E \setminus E^2$  est fermé.

Alors soit  $x \in E^1$ . On affirme que

$$(9.56) \quad (P_0^1 + x) \cap B(0, 1) \subset E^1 \cup E^0.$$

Notons  $A = (P_0^1 + x) \cap B(0, 1) \cap (E^1 \cup E^0)$ . Alors  $A$  est non vide puisque  $x \in A$ .  $A$  est aussi fermé dans  $(P_0^1 + x) \cap B(0, 1)$  puisque  $E^1 \cup E^0$  est fermé. Mais par le corollaire 9.25 et le lemme 9.39,  $A$  est aussi ouvert dans  $(P_0^1 + x) \cap B(0, 1)$ . Maintenant puisque  $(P_0^1 + x) \cap B(0, 1)$  est connexe, on a que  $A = (P_0^1 + x) \cap B(0, 1)$ , de sorte que (9.56) est vrai.

Par conséquent,

$$(9.57) \quad (P_0^1 + x) \cap \partial B(0, 1) \subset E \cap \partial B(0, 1).$$

Alors par (9.21),  $p_0^2(x) = 0$ .

On obtient donc

$$(9.58) \quad E^1 \subset P_0^1 \subset E^1 \cup E^0 \subset E,$$

si bien que  $H^m(E^1) \leq H^m(P_0^1 \cap B(0, 1)) = v(m)$ . Mais  $H^m(E^0) = 0$ . Donc par (9.22),  $H^m(E^2) > 0$ . En particulier  $E^2$  est non vide.

Alors un argument semblable donne

$$(9.59) \quad E^2 \subset P_0^2 \subset E,$$

Et donc

$$(9.60) \quad P_0 \subset E.$$

En utilisant encore une fois (9.22), on obtient que  $E = P_0$ .  $\square$

### 9.3 L'argument de l'extension harmonique par les harmoniques sphériques

Les étapes après la démonstration de l'unicité de  $P_0$  marchent complètement pareil jusqu'à l'extension harmonique. Donc on ne va pas les répéter. Dans cette section, on va traiter l'argument de l'extension harmonique en dimension plus grande.

On va d'abord parler des harmoniques sphériques (c.f. [31] Chpt 4.2).

Pour une dimension  $k$  fixée, notons

$\mathcal{P}_n$  : l'espace de tous les polynômes homogènes de degré  $n$  dans  $\mathbb{R}^k$ , c'est à dire, pour chaque polynôme  $p(x) \in \mathcal{P}_n$ ,  $p(\lambda x) = \lambda^n p(x)$  ;

$\mathcal{A}_n$  : l'ensemble de tous les polynômes harmoniques dans  $\mathcal{P}_n$  ;

$\mathcal{H}_n$  :  $\mathcal{H}_n = \{p|_{S^{k-1}} : p \in \mathcal{A}_n\}$ , où  $S^{k-1}$  est la sphère unité dans  $\mathbb{R}^k$ . Donc  $\mathcal{H}_n$  coïncide avec l'ensemble de toutes les restrictions à  $S^{k-1}$  des membres de  $\mathcal{A}_n$ .

Donc, pour chaque  $f \in \mathcal{H}_n$ , la fonction

$$(9.61) \quad p(r, \theta) : \mathbb{R} \times S^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(r, \theta) = r^n f(\theta)$$

appartient à  $\mathcal{A}_n$ . Et donc

$$(9.62) \quad \Delta p = 0.$$

Si on note  $\Delta_{S^{k-1}}$  l'opérateur de Laplace-Beltrami sur  $S^{k-1}$ , la partie angulaire du Laplacian, on a la décomposition suivante :

$$(9.63) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{k-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^{k-1}}.$$

Donc pour  $p = r^n f(\theta)$ ,

$$(9.64) \quad \begin{aligned} 0 &= \Delta p = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{k-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^{k-1}} \right) p \\ &= n(n-1)r^{n-2}f(\theta) + n(k-1)r^{n-2}f(\theta) + r^{n-2}\Delta_{S^{k-1}}f(\theta), \end{aligned}$$

et on obtient

$$(9.65) \quad \Delta_{S^{k-1}}f = -n(n+k-2)f.$$

Donc chaque  $f \in \mathcal{H}_n$  est une fonction propre de  $\Delta_{S^{k-1}}$  associée à la valeur propre  $\lambda_n = -n(n+k-2)$ .

**Remarque 9.66.** Par (9.65), si  $f \in \mathcal{H}_n$ , alors  $r^{2-k-n}f(\theta)$  est aussi une fonction harmonique.

On va maintenant citer quelques résultats sans les démontrer (voir [31] pour plus de détails) :

**Proposition 9.67.** On a les propriétés suivantes :

$$1^\circ \dim \mathcal{H}_n = \dim \mathcal{A}_n = \binom{n+k-1}{n} - \binom{n+k-3}{n-2};$$

2° La collection de toutes les combinaisons linéaires finies d'éléments de  $\cup_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$  est dense dans  $L^2(S^{n-1})$  ;

3° Soit  $Y^{(n)}$  et  $Y^{(m)}$  des harmoniques sphériques de degré  $n$  et  $m$ , et  $n \neq m$ , alors

$$(9.68) \quad \int_{S^{n-1}} Y^{(n)}(\theta) Y^{(m)}(\theta) d\theta = 0.$$

Maintenant, considérons  $\mathcal{H}_n$  comme un sous-espace de  $L^2(S^{k-1})$  avec le produit scalaire  $(f, g) = \int_{S^{k-1}} f(\theta) \overline{g(\theta)} d\theta$ .

**Corollaire 9.69.** Notons  $a_n = \dim \mathcal{H}_n = \binom{n+k-1}{n} - \binom{n+k-3}{n-2}$ , et soit  $\{Y_1^{(n)}, \dots, Y_{a_n}^{(n)}\}$  une base orthonormée de  $\mathcal{H}_n$ , alors  $\cup_{n=0}^{\infty} \{Y_1^{(n)}, \dots, Y_{a_n}^{(n)}\}$  est une base orthonormale de  $L^2(S^{k-1})$ . De plus, pour chaque  $f \in L^2(S^{k-1})$ , il existe une représentation unique :

$$(9.70) \quad f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{a_n} b_i^{(n)} Y_i^{(n)},$$

où la série converge vers  $f$  sous la norme  $L^2$ . Et on a donc

$$(9.71) \quad \|f\|_{L^2(S^{k-1})}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{a_n} |b_i^{(n)}|^2.$$

On peut maintenant démontrer la proposition suivante.

**Proposition 9.72.** Soit  $0 < r_0 < \frac{1}{2}$  et  $u_0 \in C^1(\partial B(0, r_0) \cap \mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ . On note  $m(u_0) = (r_0^{k-1} s_{k-1})^{-1} \int_{\partial B(0, r_0)} u_0$  sa moyenne, où  $s_{k-1} = H^{k-1}(S^{k-1})$  l'aire de la sphère unité de  $\mathbb{R}^k$ . Alors pour toute  $u \in C^1((\overline{B(0, 1)} \setminus B(0, r_0)) \cap \mathbb{R}^k, \mathbb{R})$  qui satisfait à

$$(9.73) \quad u|_{\partial B(0, r_0)} = u_0$$

on a

$$(9.74) \quad \int_{B(0, 1) \setminus B(0, r_0)} |\nabla u|^2 \geq \frac{1}{3} r_0^{-1} \int_{\partial B(0, r_0)} |u_0 - m(u_0)|^2.$$

Démonstration.

Supposons que  $u$  est une fonction  $C^1$  comme dans l'énoncé de la proposition. Si  $v$  est une solution de l'équation

$$(9.75) \quad \begin{cases} \Delta v = 0; \\ v|_{\partial B(0, r_0)} = u_0; \\ \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ sur } \partial B(0, 1) \end{cases}$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur normal unitaire extérieur sur  $\partial B(0, 1)$ , alors  $v$  minimise l'énergie de Dirichlet parmi toutes les fonctions  $u$  de classe  $C^1$  sur  $\overline{B}(0, 1) \setminus B(0, r_0)$  avec  $u|_{\partial B(0, r_0)} = u_0$ .

Donc on va juste chercher une solution  $v$  de l'équation (9.75), et puis démontrer (9.74) pour  $v$ .

Ecrivons

$$(9.76) \quad u(r_0, \theta) = u_0(\theta) = m(u_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{a_n} B_i^{(n)} Y_i^{(n)}$$

avec  $\{Y_1^{(n)}, \dots, Y_{a_n}^{(n)}\}$  une base orthonormée de  $\mathcal{H}_n$ . Posons

$$(9.77) \quad \begin{aligned} v : \overline{B}(0, 1) \setminus B(0, r_0) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ v(r, \theta) &= m(u_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{2-k-n}) \sum_{i=1}^{a_n} B_i^{(n)} Y_i^{(n)}. \end{aligned}$$

Alors par la remarque 9.66,  $v$  est harmonique. On veut que  $v$  vérifie (9.75). Alors

$$(9.78) \quad \begin{aligned} v|_{\partial B(0, r_0)} &= u_0 \Leftrightarrow \\ (A_n r_0^n + B_n r_0^{2-k-n}) &= 1, \text{ pour chaque } n \text{ et } 1 \leq i \leq a_n, \end{aligned}$$

et

$$(9.79) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n n r^{n-1} + B_n (2 - k - n) r^{1-k-n}) \sum_{i=1}^{a_n} b_i^{(n)} Y_i^{(n)} = 0 \\ \text{sur } \partial B(0, 1) &= \{(r, \theta) : r = 1\}. \end{aligned}$$

Donc on demande

$$(9.80) \quad \begin{pmatrix} r_0^n & r_0^{2-k-n} \\ n & 2 - k - n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notons que le déterminant de la matrice des coefficients est  $(2 - k - n)r_0^n - nr_0^{2-k-n}$ , avec  $n > 0$ ,  $r_0^{2-k-n} > r_0^n > 0$ ,  $2 - k - n < 0$ , donc il est toujours strictement négatif, de sorte que (9.80) admet toujours une solution

$$(9.81) \quad A_n = \frac{n+k-2}{(n+k-2)r_0^n + nr_0^{2-k-n}}, \quad B_n = \frac{n}{(n+k-2)r_0^n + nr_0^{2-k-n}}.$$

On va maintenant calculer  $\int_{\overline{B}(0, 1) \setminus B(0, r_0)} |\nabla v|^2$ . Pour estimer  $\nabla v$  on écrit

$$(9.82) \quad \nabla_{S^{k-1}} v(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{2-k-n}) \sum_{i=1}^{a_n} B_i^{(n)} \nabla_{S^{k-1}} Y_i^{(n)},$$

$$(9.83) \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} (nA_n r^{n-1} + (2-k-n)B_n r^{1-k-n}) \sum_{i=1}^{a_n} B_i^{(n)} Y_i^{(n)}.$$

et

$$(9.84) \quad \int_{S^{k-1}} |\nabla v|^2 d\theta = \int_{S^{k-1}} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{1}{r} \nabla_{S^{k-1}} v \right|^2 d\theta.$$

Notons que

$$(9.85) \quad \langle Y_i^{(n)}, Y_j^{(m)} \rangle_{L^2(S^{k-1})} = \delta_{(i,n)(j,m)} \text{ pour } 1 \leq n \text{ et } 1 \leq i \leq a_n,$$

où  $\delta$  est le symbole de Kronecker, et donc

$$(9.86) \quad \begin{aligned} & \langle \nabla_{S^{k-1}} Y_i^{(n)}, \nabla_{S^{k-1}} Y_j^{(m)} \rangle_{L^2(S^{k-1})} = - \langle \Delta_{S^{k-1}} Y_i^{(n)}, Y_j^{(m)} \rangle_{L^2(S^{k-1})} \\ & = -n(2-k-n) \langle Y_i^{(n)}, Y_j^{(m)} \rangle_{L^2(S^{k-1})} = n(n+k-2)\delta_{(i,n)(j,m)} \end{aligned}$$

pour  $1 \leq n$  et  $1 \leq i \leq a_n$ . On a donc

$$(9.87) \quad \begin{aligned} \int_{S^{k-1}} \left| \frac{1}{r} \nabla_{S^{k-1}} v \right|^2 d\theta &= \int_{S^{k-1}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^{n-1} + B_n r^{1-k-n}) \sum_{i=1}^{a_n} B_i^{(n)} \nabla_{S^{k-1}} Y_i^{(n)} \right|^2 d\theta \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+k-2) (A_n r^{n-1} + B_n r^{1-k-n})^2 \sum_{i=1}^{a_n} (B_i^{(n)})^2, \end{aligned}$$

et

$$(9.88) \quad \begin{aligned} \int_{S^{k-1}} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^2 d\theta &= \int_{S^{k-1}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (nA_n r^{n-1} + (2-k-n)B_n r^{1-k-n}) \sum_{i=1}^{a_n} B_i^{(n)} Y_i^{(n)} \right|^2 d\theta \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (nA_n r^{n-1} + (2-k-n)B_n r^{1-k-n})^2 \sum_{i=1}^{a_n} (B_i^{(n)})^2. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$(9.89) \quad \begin{aligned} \int_{S^{k-1}} |\nabla v|^2 d\theta &= \\ &\sum_{n=1}^{\infty} [(nA_n r^{n-1} + (2-k-n)B_n r^{1-k-n})^2 + n(n+k-2)(A_n r^{n-1} + B_n r^{1-k-n})^2] \sum_{i=1}^{a_n} (B_i^{(n)})^2. \end{aligned}$$

Ensuite

$$(9.90) \quad \begin{aligned} & \int_{r=r_0}^1 [(nA_n r^{n-1} + (2-k-n)B_n r^{1-k-n})^2 + n(n+k-2)(A_n r^{n-1} + B_n r^{1-k-n})^2] r^{k-1} dr \\ &= \int_{r=r_0}^1 [(2n^2 + nk - 2n)A_n^2 r^{2n-2} + (2n+k-2)(n+k-2)B_n^2 r^{2-2k-2n}] r^{k-1} dr \\ &= \int_{r=r_0}^1 (2n^2 + nk - 2n)A_n^2 r^{2n+k-3} + (2n+k-2)(n+k-2)B_n^2 r^{1-k-2n} dr \\ &= nA_n^2 (1 - r_0^{2n+k-2}) + (n+k-2)B_n^2 (r_0^{2-k-2n} - 1). \end{aligned}$$

Alors par (9.81), on a

$$(9.91) \quad \begin{aligned} & nA_n^2 (1 - r_0^{2n+k-2}) + (n+k-2)B_n^2 (r_0^{2-k-2n} - 1) \\ &= \frac{n(n+k-2)[r_0^{2-k-2n} - 1][n + (n+k-2)r_0^{2n+k-2}]}{((n+k-2)r_0^n + nr_0^{2-k-n})^2}. \end{aligned}$$

Mais on a  $r_0 < \frac{1}{2}$ , et donc pour tout  $n \geq 1$ ,

$$(9.92) \quad \frac{r_0^{2-k-n} - 1}{r_0^{2-k-n} + 1} \geq \frac{r_0^{-1} - 1}{r_0^{-1} + 1} \geq \frac{(\frac{1}{2})^{-1} - 1}{(\frac{1}{2})^{-1} + 1} = \frac{1}{3},$$

et donc

$$(9.93) \quad \begin{aligned} & nA_n^2(1 - r_0^{2n+k-2}) + (n+k-2)B_n^2(r_0^{2-k-2n} - 1) \\ & \geq \frac{n(n+k-2)[r_0^{2-k-2n} + 1][n + (n+k-2)r_0^{2n+k-2}]}{3((n+k-2)r_0^n + nr_0^{2-k-n})^2} \\ & \geq \frac{n[nr_0^{2-k-2n} + n+k-2][n + (n+k-2)r_0^{2n+k-2}]}{3((n+k-2)r_0^n + nr_0^{2-k-n})(n+k-2)r_0^n + nr_0^{2-k-n})} \\ & = \frac{n}{3} \left[ \frac{nr_0^{2-k-2n} + n+k-2}{(n+k-2)r_0^n + nr_0^{2-k-n}} \right] \left[ \frac{n + (n+k-2)r_0^{2n+k-2}}{(n+k-2)r_0^n + nr_0^{2-k-n}} \right] \\ & = \frac{n}{3} r_0^{k-2}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$(9.94) \quad \begin{aligned} \int_{B(0,1) \setminus B(0,r_0)} |\nabla v|^2 d\theta & \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3} r_0^{k-2} \sum_{i=1}^{a_n} (B_i^{(n)})^2 \\ & \geq \frac{1}{3} r_0^{k-2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{a_n} (B_i^{(n)})^2 = \frac{1}{3} r_0^{k-2} \|u_0(\theta) - m(u_0)\|_{L^2(S^{k-1})}^2 \\ & = \frac{1}{3} r_0^{-1} \int_{\partial B(0,r_0)} |u_0 - m(u_0)|^2. \end{aligned}$$

□

**Corollaire 9.95.** Soit  $r_0 > 0, q \in \mathbb{R}^k$  tel que  $r_0 < \frac{1}{2}d(q, \partial B(0,1))$ ,  $u_0 \in C^1(\partial B(q, r_0) \cap \mathbb{R}^k, \mathbb{R})$  et  $m(u_0) = (s_{k-1}r_0^{k-1})^{-1} \int_{\partial B(q, r_0)} u_0$  sa moyenne.

Alors pour toute  $u \in C^1((\overline{B(0,1)} \setminus B(q, r_0)) \cap \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  qui satisfait à

$$(9.96) \quad u|_{\partial B(q, r_0)} = u_0$$

on a

$$(9.97) \quad \int_{B(0,1) \setminus B(q, r_0)} |\nabla u|^2 \geq \frac{1}{3} r_0^{-1} \int_{\partial B(q, r_0)} |u_0 - m(u_0)|^2.$$

Démonstration. Voir le corollaire 7.30. □

**Lemme 9.98.** Soit  $0 < r_0 < 1$ ,  $u \in C^1(B(0,1) \setminus B(0,r_0), \mathbb{R})$ , telle que  $u|_{\partial B(0,r_0)} = \delta r_0$ ,  $u|_{\partial B(0,1)} = 0$  ; alors

$$(9.99) \quad \int_{B(0,1) \setminus B(0,r_0)} |\nabla u|^2 \geq C(k) \delta^2 r_0^k$$

où  $c(k) = (k-2)H^{k-1}(S^{k-1})$ .

Démonstration.

Prenons  $f(r, \theta) = Ar^{-k+2} - A$  avec  $A = \frac{\delta r_0}{r_0^{-k+2}-1}$ . Alors  $f$  est l'extension harmonique avec les valeurs au bord données. On a

$$(9.100) \quad \frac{\partial f}{\partial r} = (2-k)Ar^{1-k}, \quad \nabla_{S^{k-1}} f = 0,$$

et donc

$$(9.101) \quad |\nabla f|^2 = A^2(2-k)^2r^{2-2k}.$$

Notons  $s_{k-1} = H^{k-1}(S^{k-1})$ , alors

$$(9.102) \quad \begin{aligned} \int_{B(0,1) \setminus B(0, r_0)} |\nabla f|^2 &= \int_{S^{k-1}} d\theta \int_{r_0}^1 r^{k-1} dr |\nabla f|^2 \\ &= s_{k-1} \int_{r_0}^1 r^{k-1} dr A^2(2-k)^2 r^{2-2k} \\ &= s_{k-1} A^2(2-k)^2 \frac{1-r_0^{2-k}}{2-k} = \frac{s_{k-1}(k-2)\delta^2}{(r_0^{2-k}-1)} r_0^2 \\ &= C(k) \frac{\delta^2 r_0^2}{r_0^{2-k}-1} = \frac{r_0^{2-k}}{r_0^{2-k}-1} C(k) \delta^2 r_0^k \geq C(k) \delta^2 r_0^k. \end{aligned}$$

On a donc

$$(9.103) \quad \int_{B(0,1) \setminus B(0, r_0)} |\nabla u|^2 \geq C(k) \delta^2 r_0^k$$

puisque  $f$  est harmonique.  $\square$

**Corollaire 9.104.** Pour tout  $0 < \epsilon < 1$ , il existe  $C = C(\epsilon) > 100$  telle que si  $0 < r_0 < 1$ ,  $u \in C^1(B(0,1) \setminus B(0, r_0), \mathbb{R})$  et

$$(9.105) \quad \|u|_{\partial B(0, r_0)} - \delta\|_\infty < \frac{\delta r_0}{C} \text{ et } \|u|_{\partial B(0,1)}\|_\infty < \frac{\delta r_0}{C}$$

alors

$$(9.106) \quad \int_{B(0,1) \setminus B(0, r_0)} |\nabla u|^2 \geq \epsilon C(k) \delta^2 r_0^k.$$

Démonstration. Appliquons encore une fois le lemme 7.47; pour chaque  $C$ , on prend  $r = r_0$ ,  $f = u$ , et  $g$  la fonction harmonique telle que  $g|_{\partial B(0,1)} = \frac{\delta}{C}r_0$ ,  $g|_{\partial B(0,r)} = (1 - \frac{1}{C})r_0\delta$ , et on obtient

$$(9.107) \quad \int_{B(0,1) \setminus B(0, r_0)} |\nabla u|^2 \geq \int_{B(0,1) \setminus B(0, r_0)} |\nabla g|^2 = (1 - \frac{2}{C})^2 C(k) \delta^2 r_0^k.$$

Par conséquent, pour chaque  $\epsilon < 1$  on peut toujours trouver un  $C$  assez grand tel que  $(1 - \frac{2}{C})^2 \geq \epsilon$ .  $\square$

Le paragraphe 8 pour la dimension 2 marche de la même manière pour les dimensions plus hautes. Donc on ne répète pas ici. On a donc fini la démonstration du théorème 9.1.

## 10 Généralisation au cas de plusieurs plans et hyperplans

Dans ce paragraphe on va généraliser le théorème 1.32 à des unions de  $n$  hyperplans transverses de dimension  $m$  dans  $\mathbb{R}^{mn}$ .

**Théorème 10.1** (minimalité de l'union de  $n$  hyperplans presque orthogonaux). *Pour chaque  $m \geq 2$  et  $n \geq 2$ , il existe un  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , tel que, si  $P^1, P^2, \dots, P^n$  sont  $n$  hyperplans de dimension  $m$  dans  $\mathbb{R}^{nm}$  avec des angles caractéristiques  $\alpha^{ij} = (\alpha_1^{ij}, \alpha_2^{ij}, \dots, \alpha_m^{ij})$  entre  $P^i$  et  $P^j$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , qui vérifient  $\theta < \alpha_1^{ij} \leq \alpha_2^{ij} \leq \dots \leq \alpha_m^{ij} \leq \frac{\pi}{2}$  pour tout  $1 \leq i < j \leq n$ , alors leur union  $\cup_{i=1}^n P^i$  est un cône minimal.*

Démonstration.

Notons encore  $P_0 = \cup_{\perp} P_0^i$ ,

Comme dans le paragraphe précédent, l'idée de la démonstration est la même, et on va suivre les mêmes étapes que pour  $m = 2, n = 2$ . Donc ici on donnera seulement des preuves à l'endroit où la démonstration n'est pas complètement identique. En fait, tout marche bien sauf le théorème sur l'unicité de  $P_0$ , dont on va donner les détail plus tard.

Un autre endroit un peu différent que précédemment est le minimalité de  $P_0$  et le contrôle pour la somme des projections d'un  $m$ -vecteur unitaire simple sur  $n$  hyperplans avec des angles caractéristiques  $\{\alpha^{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n}$ .

**Lemme 10.2.**  *$P_0$  est minimal.*

Démonstration. Par récurrence en  $n$ , en utilisant le lemme 9.4. Voir la proposition 11.1 pour plus de détails.  $\square$

**Lemme 10.3.** *Soit  $P^i, 1 \leq i \leq n$ ,  $n$  hyperplans de dimension  $m$  dans  $\mathbb{R}^{mn}$  et  $\{\alpha^{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n}$  les angles caractéristiques entre  $P^i$  et  $P^j$ . Si on note  $p^i$  la projection orthogonale sur  $P^i$ , alors il existe  $C_{n,m}(\alpha)$ , avec  $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} C_{n,m}(\alpha) = 0$ , tel que pour tout  $m$ -vecteur simple unitaire  $\zeta \in \wedge_m \mathbb{R}^{mn}$ , la somme des projections vers ces  $n$  hyperplans satisfait à*

$$(10.4) \quad \sum_{i=1}^n |p^i(\zeta)| \leq 1 + C_{m,n}(\alpha),$$

où  $\alpha = \min_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_1^{ij}$ .

Démonstration.

Par récurrence en  $n$ . Pour  $n = 2$  on l'a déjà, par la proposition 9.10.

Supposons que (10.4) est vrai pour  $n - 1$ . Maintenant notons  $P = (\oplus_{1 \leq i \leq n-1} P^i)^\perp$  qui est un  $m$ -hyperplan, et  $p$  son projecteur,  $q$  le projecteur de  $(\oplus_{1 \leq i \leq n-1} P^i)$ . On a alors par le lemme 9.4

$$(10.5) \quad |p(\zeta)| + |q(\zeta)| \leq 1,$$

et donc

$$(10.6) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^n |p^i(\zeta)| &= \sum_{i=1}^{n-1} |p^i \circ q(\zeta)| + |p^n(\zeta)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} |p^i \circ q(\zeta)| + |p(\zeta)| + |(p - p^n)(\zeta)|. \end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence,

$$(10.7) \quad \sum_{i=1}^{n-1} |p^i \circ q(\zeta)| \leq (1 + C_{n-1,m}(\alpha))|q(\zeta)|$$

avec  $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} C_{n-1,m}(\alpha) = 0$ , et donc

$$(10.8) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^n |p^i(\zeta)| &\leq (1 + C_{n-1,m}(\alpha))|q(\zeta)| + |p(\zeta)| + |(p - p^n)(\zeta)| \\ &\leq 1 + C_{n-1,m}(\alpha)|q(\zeta)| + |(p - p^n)(\zeta)| \\ &\leq 1 + C_{n-1,m}(\alpha) + |(p - p^n)(\zeta)|. \end{aligned}$$



Maintenant quand  $\alpha$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ , l'angle entre  $P$  et  $P^n$  tend vers 0. Donc  $|p(\zeta)| \leq C'_{n,m}(\alpha)$  avec  $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} C'_{n,m}(\alpha) = 0$  (par la démonstration de la proposition 9.10), et on obtient donc la conclusion.

Fin de la démonstration du lemme.

Il nous reste à montrer l'unicité de  $P_0$ .

**Proposition 10.9** (unicité de  $P_0$ ). Soit  $P_0 = \cup_{i=1}^n P_0^i$ , et  $p_0^i$  la projection orthogonale sur  $P_0^i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Soit  $E \subset \overline{B}(0, 1)$  un ensemble de dimension  $m$  fermé réduit qui est minimal dans  $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^{nm}$ , et qui vérifie pour  $1 \leq i \leq n$ ,

$$(10.10) \quad p_0^i(E \cap B(0, 1)) \supset P_0^i \cap B(0, 1);$$

$$(10.11) \quad E \cap \partial B(0, 1) = P_0 \cap \partial B(0, 1);$$

$$(10.12) \quad H^m(E \cap B(0, 1)) = nv(m),$$

où  $v(m) = H^m(\mathbb{R}^m \cap B(0, 1))$ .

Alors  $E = P_0 \cap \overline{B}(0, 1)$ .

Démonstration.

D'abord notons encore  $\Xi := \{\xi \in \wedge_m \mathbb{R}^{nm} \text{ unitaire simple}, \sum_{i=1}^n |p^i(\xi)| = 1\}$ . Alors un lemme vient des hypothèses de la proposition.

**Lemme 10.13.** 1) Pour presque tout  $x \in E$ ,  $T_x E \in P(\Xi)$ .

2) Pour chaque  $1 \leq i \leq n$ , pour presque tout  $z \in P_0^i \cap B(0, 1) = p_0^i(E)$ ,

$$(10.14) \quad N(p_0^i, z) = \#\{p_0^{i-1}(z) \cap E\} = 1.$$

Cas 1. Pour  $m > 2$ , en utilisant le lemme 9.4, on peut montrer par récurrence que

$$(10.15) \quad \Xi = \{P_0^i, 1 \leq i \leq n\},$$

et par la  $C^1$  régularité (prop 9.18) on obtient que

1) autour de chaque  $x \in E$  tel que  $T_x E$  existe, il existe  $r_x > 0$  et  $1 \leq i \leq n$  tel que  $E \cap B(x, r_x) = (P_0^i + x) \cap B(x, r_x)$ ;

2) tout les autres points in  $E$  sont de type  $P_I := \cup_{i \in I} P^i$ ,  $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$  (voir la démonstration pour le lemme 9.32). Et si  $x \in E$ ,  $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$  sont tels que  $C_x = P_I$ , où  $C_x$  est l'unique limite d'explosion de  $E$  en  $x$ , alors il existe  $r > 0$  tel que  $E \cap B(x, r) = (P_I + x) \cap B(x, r)$ . (voir la démonstration pour le lemme 9.39).

Alors notons  $E^i = \{x \in E, T_x E = P_0^i\}$ ,  $E^0 = E \setminus \cup_i E^i$ , et notons  $E^{0i} = \{x \in E^0, P_0^i \subset C_x\}$ , où  $C_x$  est la limite d'explosion de  $E$  en  $x$ , qui vérifie 2) ci-dessus. Alors  $E^0 = \cup_i E^{0i}$  est discret, et donc fini. Chaque  $E^i$  est ouvert dans  $E$ . Ensuite on peut montrer que  $E^i \cup E^{0i} = P_0^i$ , et tout est fini.

Cas 2. Pour  $m = 2$ . C'est plus compliqué, puisque l'ensemble  $\Xi$  est beaucoup plus grand.

**Lemme 10.16.** Si  $x \wedge y \in \Xi$  avec  $x, y$  unitaires,  $x \perp y$ , il existe alors  $v_i, u_i \in P_0^i$  unitaires,  $v_i \perp u_i$ ,  $a_i > 0$ ,  $\sum_i a_i^2 = 1$  tels que

$$(10.17) \quad \left\{ \left( \sum_{i=1}^n a_i u_i \right) \wedge \left( \sum_{i=1}^n a_i v_i \right) \right\}.$$

Démonstration. Par récurrence en  $n$ . Supposons que c'est vrai pour  $n - 1$ .

Notons  $Q = \cup_{i=1}^{n-1} P_0^i$ ,  $q$  son projecteur. Si  $x \wedge y \in \Xi$  avec  $x \perp y$ ,  $x, y$  unitaires, alors il existe  $\theta_1, \theta_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$  tels que

$$(10.18) \quad x = \cos \theta_1 p_0^n(x) + \sin \theta_1 q(x), y = \cos \theta_2 p_0^n(y) + \sin \theta_2 q(y).$$

Donc  $\sum_{i=1}^n |p_0^i(x \wedge y)| = 1$  implique  $|q(x \wedge y)| + |p_0^n(x \wedge y)| = 1$ . Par la même démonstration du cas où  $n = 2$ , on obtient que

$$(10.19) \quad \theta_1 = \theta_2, p_0^n(x) \perp p_0^n(y), q(x) \perp q(y), |q(x) \wedge q(y)| = \sum_{i=1}^{n-1} |p_0^i \circ q(x)| + |p_0^i \circ q(y)|.$$

Par l'hypothèse de récurrence on obtient la conclusion.

Fin de la démonstration du lemme.

**Corollaire 10.20.** Pour chaque  $1 \leq j \leq n$ , pour chaque  $x \in E$  tel que  $T_x E$  existe et n'est pas  $P_0^j$  pour tout  $i \neq j$  (ou de manière équivalente,  $|p_0^j(T_x E)| > 0$ ), il existe  $r_x > 0$  tel que dans  $B(x, r_x)$   $E$  coïncide avec le graphe d'une fonction  $\varphi_x : P_0^j \rightarrow P_0^{j^\perp} = \bigoplus_{i \neq j} P_0^i$ , où chaque fonction  $\varphi_i = p_0^i \circ \varphi_x : P_0^j \rightarrow P_0^i$  est soit analytique, soit anti analytique.

Démonstration. Par le lemme 10.16, on sait que  $D\varphi_i(P_0^j) = p_0^i \circ T_x E = (a_i u_i + a_j u_j) \wedge (a_i v_i + a_j v_j)$ , où  $u_i, v_i \in P_0^i, u_j, v_j \in P_0^j, a_i^2 + a_j^2 \neq 0$ , parce que  $T_x E \neq P_0^i$ . Le reste de la démonstration est semblable comme celui du lemme 3.34.  $\square$

**Lemme 10.21.** Il n'y a pas de point de type  $\mathbb{Y}$  dans  $E$ .

Démonstration.

Comme dans la démonstration du lemme 3.19, soit  $x \in E$  qui est de type  $\mathbb{Y}$ , soit  $C_x = \bigcup_{i=1}^3 P_i$  désigne le cône tangent qui est un  $\mathbb{Y}$ , avec  $P_i$  des demi plans fermés qui se rencontrent le long d'une droite  $D$  qui est engendrée par un vecteur unitaire  $v$ , soit  $Q_i$  le plan contenant  $P_i$ . On va montrer que

$$(10.22) \quad \text{au moins un des } Q_i \text{ n'appartient pas à } P(\Xi).$$

On procède comme dans 3.19, et il existe  $w_i \in Q_i$ , unitaire,  $w_i \perp v$ , et les angles entre les trois  $w_i, 1 \leq i \leq 3$  sont tous de  $120^\circ$ . Alors si  $P_1 \notin P(\Xi)$  tout est bon. Sinon, puisque  $P_1 = P(v \wedge w_1)$ , par le lemme 10.16, il existe une base orthonormé  $\{e_j\}_{1 \leq j \leq 2n}$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  avec  $P_0^i = P(e_i \wedge e_{n+i})$ , et  $a_i > 0, \sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n a_{n+i}^2 = 1$ , tels que

$$(10.23) \quad v = \sum_{i=1}^n a_i e_i, w_1 = \sum_{i=n+1}^{2n} a_i e_i.$$

Alors, pour que  $Q_2 \in P(\Xi)$  aussi, il faut qu'il existe  $\{\epsilon_i\}_{n+1 \leq i \leq 2n}$ , chaque  $\epsilon_i$  vaut 1 ou -1, tel que

$$(10.24) \quad w_2 = \sum_{i=n+1}^{2n} \epsilon_i a_i e_i.$$

Notons  $I = \{n+1 \leq i \leq 2n, \epsilon_i = 1\}$ , et  $J = \{n+1 \leq i \leq 2n, \epsilon_i = -1\}$ . Posons  $a_I = (\sum_{i \in I} a_i^2)^{\frac{1}{2}}, a_J = (\sum_{i \in J} a_i^2)^{\frac{1}{2}}, f_I = \frac{1}{a_I} \sum_{i \in I} a_i e_i, f_J = \frac{1}{a_J} \sum_{i \in J} a_i e_i$ . Alors  $f_I, f_J$  sont unitaire perpendiculaires,  $a_I^2 + a_J^2 = 1$ , et

$$(10.25) \quad w_1 = a_I f_I + a_J f_J, w_2 = a_I f_I - a_J f_J.$$

Si l'angle entre  $w_1$  et  $w_2$  est  $120^\circ$ , alors  $a_I, a_J$  sont non nuls, de sorte que  $w_1, w_2$  engendrent un plan de dimension 2.

Maintenant on sait que les angles entre  $w_1, w_3$  et  $w_2, w_3$  sont aussi de  $120^\circ$ , ce qui implique que les trois  $w_i$  appartiennent à un plan. Par conséquent,  $w_3 \in P(f_I \wedge f_J)$ , et la seule possibilité est que  $a_I = \frac{1}{2}, a_J = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , et  $w_3 = -f_I$ . Mais dans ce cas, pour que  $P(v \wedge w_3) \in P(\Xi)$ , on a que pour tout  $j \in J, a_j = 0$ , ce qui implique que  $f_J = 0$ , et donc  $w_1 = w_2$ , une contradiction.

Donc on a notre affirmation (10.22). Et le reste de la démonstration est exactement le même que celle du lemme 3.19.

Fin de la démonstration du lemme.

**Corollaire 10.26.** *Pour chaque  $x \in E$  tel que le plan tangent de  $E$  en  $x$  n'existe pas, il existe au plus  $n$  plans  $Q_1, Q_2, \dots, Q_l \in P(\Xi)$ , avec  $Q_i \perp Q_j$  pour  $i \neq j$ , tels que la limite d'explosion  $C_x$  de  $E$  en  $x$  est unique et est égale à  $\cup_{i=1}^l Q_i$ .*

Démonstration.

Voir le lemme 3.23 pour le fait que  $C_x$  est une union de plans transverses qui appartiennent à  $P(\Xi)$ . Et en particulier,  $C_x$  vérifie la propriété de "full-length à cause des angles" (c.f.[10], Remarque 14.40), donc par le théorème 1.15 de [10], on a la régularité de classe  $C^1$  autour de  $x$ .

Pour montrer que  $Q_i \perp Q_j$  pour  $i \neq j$ , On le montre pour  $Q_1, Q_2$  par exemple.

Par le lemme 10.16, il existe  $v_l^1, u_l^1, v_l^2, u_l^2 \in P_0^l$  unitaires,  $v_l^1 \perp u_l^1, v_l^2 \perp u_l^2$ , et  $a_l^1, a_l^2 > 0, 1 \leq l \leq n$ , tels que  $\sum_{l=1}^n a_l^{1,2} = \sum_{l=1}^n a_l^{2,2} = 1$ , et

$$(10.27) \quad Q_1 = (\sum_{l=1}^n a_l^1 v_l^1) \wedge (\sum_{l=1}^n a_l^1 u_l^1), \quad Q_2 = (\sum_{l=1}^n a_l^2 v_l^2) \wedge (\sum_{l=1}^n a_l^2 u_l^2).$$

Donc si  $l$  est tel que  $a_l^1 \neq 0$ , alors  $p_0^l(Q_1) = a_l^{1,2} > 0$ , alors par la  $C^1$  régularité de  $E$  autour de  $x$ , si on note  $\varphi$  la  $C^1$  correspondance locale entre  $E$  et  $C_x$  dans une boule  $B(x, r)$ , il existe  $s > 0$  tel que  $B(p_0^l(x), s) \cap P_0^l \subset p_0^l(\varphi(Q_1 + x))$ . (Voir autour de (3.32) pour plus de détails). Cela implique que  $a_l^2 = 0$ , parce sinon, il existe  $s' > 0$  tel que  $B(p_0^l(x), s') \cap P_0^l \subset p_0^l(\varphi(Q_2 + x))$ , et donc

$$(10.28) \quad (B(p_0^l(x), \min\{x, s'\}) \setminus \{x\}) \cap P_0^l \subset \{z \in P_0^l, \#\{p_0^{l,-1}\{z\} \cap E\} \geq 2\},$$

ce qui contredit le lemme 10.13(2).

Fin de la démonstration du lemme.

On sait ainsi qu'autour de chaque point  $x \in E$ , on a la régularité de classe  $C^1$ , parce que une union des plans transverses vérifie aussi la propriété de "full-length". On a alors le lemme suivant.

**Lemme 10.29.** Pour chaque  $x \in E$ , notons  $C_x$  une limite d'explosion de  $E$  en  $x$ , alors il existe  $r_x > 0$  et  $\varphi_x : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  de classe  $C^1$  avec  $\varphi_x(x) = x$ ,  $d\varphi(x) = Id$ , et  $E$  coïncide avec le graphe de  $\varphi_x$  de  $C_x + x$  dans  $B(x, r_x)$ .

**Corollaire 10.30.** Soit  $x \in E$ ,  $C_x$  la limite d'explosion de  $E$  en  $x$  (on sait qu'il est unique à cause de la régularité de classe  $C^1$ ). Supposons que  $Q \subset C_x$  est un plan, et  $i \in \{1, \dots, n\}$  est tel que  $H^2(p_0^i(Q)) > 0$ . Soit  $\varphi_x$  comme ci-dessus. Alors  $\varphi_x(Q + x)$  est le graphe d'une fonction  $C^1$   $\psi_x$  de  $P_0^i \rightarrow \oplus_{j \neq i} P_0^j$ , où pour tout  $j$ ,  $p_0^j \circ \psi_x$  est analytique ou anti analytique de  $P_0^i \rightarrow P_0^j$ .

Démonstration. On applique le théorème des fonctions implicites et le lemme 10.16 pour chaque  $\psi_i$ . Voir le lemme 3.34 pour les détails.  $\square$

Par les corollaires 10.20, 10.26 et 10.30, on sait qu'il existe un nombre dénombrable de variétés de dimension 2  $S_1, S_2 \dots S_n \dots$  de classe  $C^1$ , localement analytiques, tel que  $E \cap B(0, 1) = \cup_i S_i$ , et les  $S_i$  s'intersectent transversement. Alors par la  $C^1$  régularité, on sait que

$$(10.31) \quad \overline{S}_l \setminus S_l \subset \partial B(0, 1).$$

En effet si  $x \in \overline{S}_l \cap B(0, 1)$ , alors il existe une boule  $C^1$   $B(x, r_x)$  de  $E$  en  $x$ , avec  $\varphi_x$  la correspondance de classe  $C^1$  entre  $C_x$  et  $E$ . Il existe donc un plan  $Q \subset C_x$  tel que  $Q = T_x S_l$ , et donc  $\varphi(B(x, r_x) \cap (x + Q)) \subset S_l$ , et donc  $x$  est un point intérieur de  $\overline{S}_l$ , de sorte que  $x \in S_l$ .

**Lemme 10.32.** Si il existe  $x \in S_1$  tel que le plan tangent  $T_x S_1$  de  $S_1$  en  $x$  vérifie  $T_x S_1 \perp P_0^1$ , alors  $p_0^1(S_1)$  est un point. Autrement dit, il existe  $y \in P_0^1 \cap B(0, 1)$  tel que  $S_1 \subset (y + P_0^1)^\perp$ .

Démonstration.

Soit  $x \in S_1$  tel que  $T_x S_1 \perp P_0^1$ . Il existe  $i$  tel que  $|p_0^i(T_x S_1)| > 0$ , et donc par le corollaire 10.20 ou 10.30, il existe  $r_x > 0$  tel que dans  $B(x, r_x)$ ,  $E$  coïncide avec le graphe d'un fonction  $\varphi_x : P_0^i \rightarrow \oplus_{j \neq i} P_0^j$ , et la fonction  $\varphi_1 = p_0^1 \circ \varphi_x$  est analytique ou antianalytique, avec  $D\varphi_1 = 0$ , c'est à dire, de degré  $d \geq 2$ . Si  $\varphi_1$  n'est pas constant, alors il existe  $0 < r < r_x$  tel que  $U = \varphi_1(B(x, r) \cap P_0^1)$  est un ouvert dans  $P_0^1$ , tel que chaque point dans  $U \setminus \{x\}$  a précisément  $d$  images réciproques. Et donc  $\{z \in P_0^1, \#\{p_0^{1^{-1}}(z) \cap E\} \geq 2\}$  est de mesure non nulle, puisqu'il contient un ouvert  $U$ . Cela contredit le lemme 10.13(2).

Donc  $\varphi_1$  est constant dans  $B(x, r_x)$ . Autrement dit,  $p_0^1(S_1 \cap B(x, r_x)) = \{p_0^1(x)\}$ .

Maintenant notons

$$(10.33) \quad A = \{y \in S_1, \text{ il existe } r_y > 0 \text{ tel que } p_0^1(S_1 \cap B(y, r_y)) = \{p_0^1(y)\}\}.$$

Alors  $A$  est ouvert dans  $S_1$  et non vide. De plus, pour chaque  $y \in A$ ,  $T_y S_1 \perp P_0^1$ . On va montrer que  $A$  est fermé dans  $S_1$ . Donc prenons une suite  $\{y_l\}_{l \in \mathbb{N}} \subset A$  qui converge vers un point  $y_0 \in S_1$ . Alors par la régularité de  $C^1$  on a que  $T_{y_0} S_1 \perp P_0^1$  aussi. Alors par l'argument ci-dessus, il existe  $r > 0$  tel

que  $p_0^1(S_1 \cap B(y_0, r)) = \{p_0^1(y)\}$ . Mais  $p_0^1(y) = \lim_{l \rightarrow \infty} p_0^1(y_l) = p_0^1(x)$ , donc  $y_0 \in A$ . Par conséquent,  $A$  est fermé dans  $S_1$ . Alors puisque  $S_1$  est connexe, on a que  $A = S_1$ , ce qui donne l'énoncé du lemme.

Fin de la démonstration du lemme.

**Corollaire 10.34.** *S'il existe  $x \in S_1$  tel que  $T_x S_1$  n'est pas perpendiculaire à  $P_0^1$ , alors pour tout  $y \in S_1$ ,  $T_y S_1$  n'est pas perpendiculaire à  $P_0^1$ .*

Par (10.10), on sait qu'il existe  $x \in E$  tel que  $|p_0^1(C_x)| > 0$ . Par conséquent, il existe  $l \in \mathbb{N}$  tel que  $x \in S_l$  et  $T_x S_l$  n'est pas perpendiculaire à  $P_0^1$ . Alors par le corollaire 10.34,

$$(10.35) \quad \text{pour tout } y \in S_l, T_y S_l \text{ n'est pas perpendiculaire à } P_0^1.$$

On affirme que

$$(10.36) \quad p_0^1(S_l) \supset P_0^1 \cap B(0, 1).$$

En effet, pour chaque  $z \in P_0^1 \cap B(0, 1) \cap p_0^1(S_l)$ , par définition, il existe  $y \in S_l$  tel que  $p_0^1(y) = z$ . Alors (10.34), (10.20) et (10.30) impliquent qu'il existe  $r_x > 0$  tel que  $B(z, r_x) \cap P_0^1 \subset p_0^1(S_l)$ , et donc  $p_0^1(S_l)$  est ouvert dans  $P_0^1 \cap B(0, 1)$ . D'autre part on va montrer que  $p_0^1(S_l)$  est aussi fermé dans  $P_0^1 \cap B(0, 1)$ . Pour ça, soit  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset p_0^1(S_l) \cap P_0^1 \cap B(0, 1)$ , qui convergent vers un point  $z_0 \in P_0^1 \cap B(0, 1)$ . Soit  $x_n \in S_l$  tel que  $p_0^1(x_n) = z_n$ . Alors puisque  $\bar{S}_l$  est compact, il existe une sous suite  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge vers un point  $x_0 \in \bar{S}_l$ . Alors  $p_0^1(x_0) = z_0$ . Si  $z_0 \notin S_l$ , par (10.31) on a que  $z_0 \in \partial B(0, 1)$ , ce qui contredit le fait que  $z_0 \in B(0, 1)$ .

Donc  $p_0^1(S_l)$  est à la fois ouvert et fermé dans  $P_0^1 \cap B(0, 1)$ , et non vide évidemment. Alors puisque  $P_0^1 \cap B(0, 1)$  est connexe, on obtient notre affirmation (10.36).

Mais  $S_l \subset B(0, 1)$ , et donc  $p_0^1(S_l) \subset B(0, 1) \cap P_0^1$ . On obtient donc

$$(10.37) \quad p_0^1(S_l) = P_0^1 \cap B(0, 1).$$

Ensuite on va montrer que la projection  $p_0^1$  est injective sur  $S_l$ . Soient  $x_1, x_2 \in S_l$  tels que  $p_0^1(x_1) = p_0^1(x_2) = z \in P_0^1 \cap B(0, 1)$ . Alors il existe  $r > 0$  tel que  $B(x_1, r) \cap B(x_2, r) = \emptyset$ . Par (10.35) et (10.20), il existe  $r' < r$  tel que dans  $B(x_i, r')$  se coïncide avec le graphe d'une fonction  $\varphi_i$  de classe  $C^1 : P_0^1 \rightarrow P_0^{1,\perp}$ . Par conséquent  $B(z, r') \subset p_0^1(S_l \cap B(x_i, r')), i = 1, 2$ . Mais  $r' < r$  implique que  $[S_l \cap B(x_1, r')] \cap [S_l \cap B(x_2, r')] = \emptyset$ , de sorte que  $\{z \in P_0^1 : \#\{p_0^{1,-1}(z) \cap E\} \geq 2\} \supset B(z, r') \cap P_0^1$  est de mesure non nulle. Cela contredit (10.14).

On obtient donc l'injectivité. Par conséquent,  $S_l$  est le graphe d'une fonction  $\psi$  classe  $C^1$  sur  $P_0^1 \cap B(0, 1)$ , et de plus pour chaque  $i \neq 1$ , la fonction  $\psi_i = p_0^i \circ \psi$  est localement analytique ou antianalytique. En appliquant encore une fois le théorème 3.40 et l'argument autour, on sait que chaque  $\psi$  est analytique ou antianalytique.

Mais le fait que  $S_l$  est un graphe sur  $P_0^1 \cap B(0, 1)$  implique que  $\bar{S}_l \setminus S_l \subset p_0^{1^{-1}}[P_0^1 \cap \partial B(0, 1)]$ . Mais  $\bar{S}_l \setminus S_l \subset E \cap \partial B(0, 1)$  aussi, ce qui donne

$$(10.38) \quad \bar{S}_l \setminus S_l \subset P_0^1 \cap \partial B(0, 1),$$

de sorte que  $\psi(z)$  tend vers 0 quand  $z$  tend vers  $\partial B(0, 1)$ . Et donc les  $\psi_i$  aussi. Alors par le principe du maximum, on obtient que chaque  $\psi_i$  est une constante, qui vaut 0.

On en déduit que  $S_l = P_0^1 \cap B(0, 1)$ . Et donc

$$(10.39) \quad P_0^1 \cap B(0, 1) \subset E.$$

On peut faire pareil pour les autres  $2 \leq i \leq n$ , et on obtient que

$$(10.40) \quad P_0 \cap B(0, 1) = \cup_{1 \leq i \leq n} P_0^i \cap B(0, 1) \subset E.$$

Mais par (10.12),  $H^2(P_0 \cap B(0, 1)) = n\pi = H^2(E)$ , par conséquent,

$$(10.41) \quad E \cap B(0, 1) = P_0 \cap B(0, 1),$$

d'où la conclusion.  $\square$

## 11 L'union presque orthogonale d'un plan et un $\mathbb{Y}$ dans $\mathbb{R}^5$

### 11.1 Discussions générales

Jusqu'à maintenant, tout ce qu'on a fait concernait l'union de plans. Mais grâce au lemme 9.4, on peut montrer ce qui suit.

**Proposition 11.1.** *Soit  $d \geq 2$ , et  $E_1, E_2$  deux ensembles minimaux de dimension  $d$  dans  $\mathbb{R}^{m_1}$  et  $\mathbb{R}^{m_2}$  respectivement. Alors l'union orthogonale  $E_1 \cup E_2$  est un ensemble minimal dans  $\mathbb{R}^{m_1+m_2}$ .*

Démonstration. Soit  $F$  une déformation de  $E_1 \cup E_2$  dans  $\mathbb{R}^{m_1+m_2}$ , il existe alors  $R > 0$  et  $f$  une déformation Lipschitzienne dans  $\mathbb{R}^{m_1+m_2}$  tels que

$$(11.2) \quad f(B(0, R)) \subset B(0, R); f|_{B(0, R)^C} = Id, \text{ et } f(E_1 \cup E_2) = F.$$

Notons  $p_i$  le projecteur de  $\mathbb{R}^{m_i}$ ,  $i = 1, 2$ . Alors  $p_i \circ f(E_i)$  est une déformation de  $E_i$  dans  $B(0, R) \cap \mathbb{R}^{m_i}$ ,  $i = 1, 2$ . Par la minimalité de  $E_i$ ,  $H^d(p_i \circ f(E_i)) \geq H^d(E_i)$ , de sorte que

$$(11.3) \quad H^d(p_i(E)) = H^d(p_i \circ f(E_1 \cup E_2)) \geq H^d(p_i \circ f(E_i)) \geq H^d(E_i), i = 1, 2.$$

On applique le lemme 9.4, et une version pour la dimension  $d$  du lemme 2.45 (dont la démonstration est exactement la même pour toutes les dimensions), et on obtient que

$$(11.4) \quad H^d(E) \geq H^d(p_1(E)) + H^d(p_2(E)) \geq H^d(E_1) + H^d(E_2) = H^d(E_1 \cup E_2),$$

d'où la conclusion.  $\square$

C'est donc naturel de se demander si l'union presque orthogonale de deux ensembles minimaux est minimale, après tout ce qu'on a fait pour l'union des plans de toutes dimensions. Mais on a bien vu que la démonstration pour l'union des plans dépend beaucoup de la structure des plans, surtout l'unicité de l'union orthogonale, et la régularité pour la partie près d'un plan. Donc pour un ensemble minimal quelconque, on ne peut rien dire.

Et de plus si  $d = 2$ , alors l'ensemble des 2-vecteurs simples qui vérifient l'égalité dans (9.6) est beaucoup plus compliqué quand les dimensions ambientes deviennent plus grandes, parce qu'ils donnent plus de flexibilité. Cela rend le problème encore plus difficile. Mais pour  $d > 2$ , on a (9.8), et donc si les ensembles minimaux ont des structures simples, par exemple deux cônes simples, la démonstration ne sera sans doute pas si difficile. De plus, peut-être qu'on n'est pas très loin de montrer l'unicité de l'union orthogonale de deux cônes minimaux de même dimension (strictement plus grande que 2), à condition que tous les deux soient uniques, au sens de Mumford Shah (une condition topologique, la classe de minimiseurs au sens MS est toujours incluse dans la classes des minimiseurs au sens Almgren). On va discuter des minimiseurs au sens MS plus tard.

Alors on commence par le cône le plus simple. Dans ce paragraphe on va traiter de la minimalité de l'union presque orthogonale d'un plan et d'un  $\mathbb{Y}$ .

**Théorème 11.5** (minimalité de l'union d'un plan et un  $\mathbb{Y}$  presque orthogonaux). *Il existe un  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , tel que, si  $P$  et  $Q$  sont deux sous-espaces de  $\mathbb{R}^5$  de dimension 2 et 3 respectivement, qui vérifient*

$$(11.6) \quad \text{pour tout } u \in P, v \in Q \text{ unitaires, l'angle entre } u \text{ et } v \text{ est plus grand que } \theta,$$

*et si  $Y$  est un cône de type  $\mathbb{Y}$  dans  $Q$  centré au point de  $P \cap Q$ , alors l'union  $P \cup Y$  est un cône minimal.*

Pour la démonstration, on va toujours utiliser la même stratégie.

Pour chaque paire de sous-espaces  $P, Q$ , de dimension 2 et 3 respectivement, notons

$$(11.7) \quad \alpha_{P,Q} = \inf\{ \text{l'angle entre } u, v; u \in P, v \in Q \text{ unitaires} \}.$$

Notons  $Z_0 = P_0 \cup_{\perp} Y_0$  avec  $Y_0 \in Q_0$  et  $\alpha(P_0, Q_0) = \frac{\pi}{2}$ .

Alors par la proposition 11.1,  $Z_0$  est minimal.

**Lemme 11.8.** Pour tout  $\xi \in \wedge_2(\mathbb{R}^5)$  simple unitaire, et tout choix de sous-espaces  $P, Q$  de  $\mathbb{R}^5$  de dimension 2 et 3, on a

$$(11.9) \quad |p(\xi)| + |q(\xi)| \leq 1 + 2 \cos \alpha(P, Q),$$

où  $p$  et  $q$  sont les projecteurs orthogonaux sur  $P$  et  $Q$  respectivement, qui agissent aussi sur les 2-vecteurs (voir (2.5) et (2.6)).

Démonstration. En effet si on note  $P' = P(q(\xi))$  un sous-espace de dimension 2, et  $p'$  son projecteur, alors par la proposition 2.34 on a

$$(11.10) \quad |p(\xi)| + |p'(\xi)| \leq 1 + 2 \cos \alpha(P, Q).$$

On conclut en notant que  $p'(\xi) = q(\xi)$ . □

## 11.2 L'unicité de $Z_0$

Ensuite on va traiter de l'unicité. Ici, puisque  $Y$  est de codimension 1, on ne peut plus poser la condition que la projection soit surjective. Mais une condition de séparation suffira. Notons que la séparation est en fait la condition qu'on pose pour les minimiseurs de Mumford-Shah en codimension 1 (voir la définition 13.7). C'est en fait pourquoi on s'intéresse à l'unicité de l'union de deux cônes minimaux au sens MS, parce qu'une déformation ne change pas la condition topologique qu'on pose pour MS, ni les valeurs au bord des déformations. Et par conséquent l'ensemble minimal qu'on obtient dans le théorème 4.1 garde aussi la condition topologique, ce qui pourrait nous donner une chance de montrer la minimalité de l'union presque orthogonale.

**Proposition 11.11** (l'unicité de  $Z_0$ ). Soit  $Z_0 = P_0 \cup_{\perp} Y_0 \subset P_0 \cup_{\perp} Q_0 = \mathbb{R}^5$  défini comme précédemment,  $p_0, q_0$  les projecteurs de  $P_0, Q_0$ . Soit  $E \subset \overline{B}(0, 1)$  un ensemble de dimension 2 fermé réduit qui est minimal dans  $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^5$ , et qui vérifie

$$(11.12) \quad p_0(E \cap B(0, 1)) \supset P_0 \cap B(0, 1);$$

$$(11.13) \quad E \cap \partial B(0, 1) = Z_0 \cap \partial B(0, 1);$$

$$(11.14) \quad q_0(E) vérifie la condition de séparation dans  $Q_0$ ,$$

c'est à dire, pour tout  $x, y \in \partial B(0, 1) \cap Q_0 \setminus Y_0$  tels que  $x$  et  $y$  n'appartiennent pas à la même composante connexe de  $\overline{B}(0, 1) \cap Q_0 \setminus Y_0$ , ils n'appartiennent pas à la même composante connexe de  $\overline{B}(0, 1) \cap Q_0 \setminus q_0(E)$  non plus ;

$$(11.15) \quad H^2(E \cap B(0, 1)) = \frac{5}{2}\pi.$$

Alors  $E = Z_0 \cap \overline{B}(0, 1)$ .

Démonstration. Regardons d'abord les projections de  $E$ . D'abord puisque  $E \subset \overline{B}(0, 1)$ ,

$$(11.16) \quad p_0(E) \subset p_0(\overline{B}(0, 1)) = P_0 \cap \overline{B}(0, 1).$$

Mais  $E$  est compact, donc  $p_0(E)$  aussi, de sorte que par (11.12)

$$(11.17) \quad p_0(E) \supset P_0 \cap \overline{B}(0, 1).$$

Par conséquent,

$$(11.18) \quad p_0(E) = P_0 \cap \overline{B}(0, 1).$$

Du côté de  $q_0$ , par (11.14),  $q_0(E)$  vérifie la condition de séparation. On montre d'abord le lemme suivant.

**Lemme 11.19.** *Soit  $F \subset \overline{B}(0, 1)$  un ensemble rectifiable fermé de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^3$  qui vérifie  $F \cap \partial B(0, 1) = Y_0 \cap \partial B(0, 1)$ , et la condition de séparation (définie après (11.14)). Alors*

$$(11.20) \quad H^2(F) \geq H^2(Y_0 \cap B(0, 1)) = \frac{3}{2}\pi.$$

*Il y a égalité si et seulement si  $F = [Y_0 \cap \overline{B}(0, 1)] \cup N$ , avec  $N \cap [Y_0 \cap \overline{B}(0, 1)] = \emptyset$ , et  $H^2(N) = 0$ .*

Démonstration. On va utiliser la méthode de slicing.

Donc notons  $L_0$  l'épine de  $Y_0$ ,  $\pi$  son projecteur. Pour chaque  $s \in L_0 \cap B(0, 1)$ , notons  $F_s = \{x \in F, \pi(x) = s\}$ ,  $B_s = \{x \in \overline{B}(0, 1), \pi(x) = s\}$  qui est un disque. Alors  $F_s \cap \partial B(0, 1)$  est composé de trois points  $a, b, c$ , dont les distances entre chaque paire sont égales. Par l'hypothèse de séparation,  $F_s$  sépare les composantes connexes de  $B_s \setminus \{a, b, c\}$  dans  $B_s$ . Alors on a

$$(11.21) \quad H^1(F_s) \geq \frac{3}{2}r_s,$$

où  $r_s$  est le rayon de  $B_s$ . Il y a égalité si et seulement si  $F_s = Y_s$  modulo un ensemble de 1-mesure de Hausdorff négligeable, où  $Y_s := [o_s, a] \cup [o_s, b] \cup [o_s, c]$ ,  $o_s = L_0 \cap B_s$ , et  $[x, y]$  désigne le segment d'extrémités  $x$  et  $y$  (c'est facile à vérifier, voir par exemple le lemme 59.1, page 392 de [8]).

Maintenant la formule de coaire donne

$$(11.22) \quad H^2(F) \geq \int_{-1}^1 H^1(F_s) ds \geq \int_{-1}^1 \frac{3}{2}r_s ds = \int_{-1}^1 \frac{3}{2}\sqrt{1-s^2} ds = \frac{3}{2}\pi.$$

La deuxième inégalité est une égalité si et seulement si pour presque tout  $s$ ,  $F_s = Y_s$  modulo un ensemble de 1-mesure de Hausdorff négligeable. Mais  $F$  est fermé, cela implique que  $Y_0 \cap \overline{B}(0, 1) \subset F$ . Donc pour que  $H^2(F) = \frac{3}{2}\pi$ , il faut que  $F \supset Y_0 \cap \overline{B}(0, 1)$ , et que  $F \setminus Y_0 \cap \overline{B}(0, 1)$  est un ensemble de mesure nulle.

Fin de la démonstration du lemme.

Par (11.4), (11.15) et (11.18),

$$(11.23) \quad H^2(q_0(E)) \leq H^2(E) - H^2(p_0(E)) = \frac{5}{2}\pi - \pi = \frac{3}{2}\pi.$$

Mais par (11.14), en appliquant le lemme 11.19 à  $q_0(E)$ ,  $H^2(q_0(E)) \geq \frac{3}{2}\pi$ . Donc  $H^2(q_0(E)) = \frac{3}{2}\pi$ . Encore par le lemme 11.19,

$$(11.24) \quad q_0(E) = [Y_0 \cap \overline{B}(0, 1)] \cup N,$$

avec  $H^2(N) = 0$ ,  $[Y_0 \cap \overline{B}(0, 1)] \cap N = \emptyset$ , et

$$(11.25) \quad H^2(q_0(E)) + H^2(p_0(E)) = H^2(E),$$

ce qui donne le lemme suivant.

**Lemme 11.26.** 1) Pour presque tout  $x \in E$ ,  $T_x E \in P(\Xi)$  (voir (2.4) pour la définition de  $P$ ), où

$$(11.27) \quad \Xi = \{\xi \in G(5, 2) \text{ simple unitaire}, |p_0(\xi)| + |q_0(\xi)| = 1\}.$$

2) Pour presque tout  $z \in P_0 \cap B(0, 1) = p_0(E)$ ,

$$(11.28) \quad N(p_0, z) = \#\{p_0^{-1}(z) \cap E\} = 1,$$

et pour presque tout  $z \in q_0(E)$ ,

$$(11.29) \quad N(q_0, z) = \#\{q_0^{-1}(z) \cap E\} = 1.$$

Mais par la  $C^1$  régularité de  $E$  autour des points de type  $\mathbb{P}$ , on peut préciser le terme 1), en notant que  $P(\Xi)$  est un fermé dans  $G(5, 2)$ .

**Corollaire 11.30.** Si  $x \in E$  est de type  $\mathbb{P}$ , alors  $T_x E \in P(\Xi)$ .

Démonstration. Supposons que  $T_x E \notin P(\Xi)$ . Par la  $C^1$  régularité de  $E$  autour de  $x$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$ , tel que pour tout  $y \in U \cap E$ ,  $T_y E$  existe, et  $T_y E \notin P(\Xi)$ , parce que  $P(\Xi)$  est fermé. Mais  $U$  est ouvert, par la régularité d'Ahlforss des ensembles minimaux,  $H^2(E \cap U)$  est de mesure positive, ce qui contredit le lemme 11.26 1).  $\square$

On va maintenant déterminer la structure de  $\Xi$ .

**Lemme 11.31.** Soit  $x, y$  deux vecteurs unitaires dans  $\mathbb{R}^5$ , alors  $x \wedge y \in \Xi$  si et seulement si ils vérifient la propriété suivante.

Il existe  $u_1, u_2, v_1, v_2$  unitaires,  $u_i \in P_0, v_i \in Q_0$ ,  $u_1 \perp u_2, v_1 \perp v_2$ , et  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , tels que

$$(11.32) \quad x = \cos \alpha u_1 + \sin \alpha v_1, y = \cos \alpha u_2 + \sin \alpha v_2.$$

Démonstration. On va juste montrer la partie "seulement si". La partie réciproque est triviale.

Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^5$  unitaires, on a

$$\begin{aligned}
 |p_0(x \wedge y)| + |q_0(x \wedge y)| &= |p_0(x) \wedge p_0(y)| + |q_0(x) \wedge q_0(y)| \\
 (11.33) \quad &\leq |p_0(x)||p_0(y)| + |q_0(x)||q_0(y)| \\
 &\leq \frac{1}{2}(|p_0(x)|^2 + |p_0(y)|^2 + |q_0(x)|^2 + |q_0(y)|^2) = 1.
 \end{aligned}$$

La dernière égalité est parce que  $\mathbb{R}^5 = P_0 \oplus Q_0$ , et donc  $|p_0(x)|^2 + |q_0(x)|^2 = |p_0(y)|^2 + |q_0(y)|^2 = 1$ .

Alors  $x \wedge y \in \Xi$  si et seulement si toutes les inégalités dans (11.33) sont des égalités. La première implique que  $p_0(x) \perp p_0(y)$  et  $q_0(x) \perp q_0(y)$ ; la deuxième dit que  $|p_0(x)| = |p_0(y)|$  et  $|q_0(x)| = |q_0(y)|$ . Alors notons  $u_1 = p_0(x), u_2 = p_0(y), v_1 = q_0(x), v_2 = q_0(y)$ , et  $\alpha = \arctan \frac{|q_0(x)|}{|p_0(x)|}$ , on obtient la conclusion.

Fin de la démonstration du lemme.

Maintenant pour tout ensemble  $F$  et  $x \in F$ , notons  $C_x F$  la limite d'explosion de  $F$  en  $x$  si elle existe. En particulier, notons  $C_x = C_x E$  pour tout  $x \in E$  tel que  $C_x E$  existe.

**Lemme 11.34.** *Si  $y \in E$  est un point de type  $\mathbb{Y}$ , alors  $C_y \subset Q_0$ .*

Démonstration.

Soit  $P_i, 1 \leq i \leq 3$ , les trois demi plans fermés dans  $\mathbb{R}^5$  tels que  $C_y = \cup_{i=1}^3 P_i$ . Alors les  $P_i$  se rencontrent en une droite  $D$ . Notons  $Q_i$  le plan qui contient  $P_i$ ,  $v$  le vecteur unitaire qui engendre  $D$ , et  $w_i$  des vecteurs unitaires tels que  $w_i \perp v$  et  $Q_i = P(v \wedge w_i)$ . Par conséquent l'angle entre  $w_i$  et  $w_j$ ,  $i \neq j$ , est de  $120^\circ$ .

Maintenant supposons que  $v \notin Q_0$ , c'est à dire qu'il existe  $e_1 \in P_0, e_2 \in Q_0, \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$  tels que  $v = \cos \alpha e_1 + \sin \alpha e_2$ .

On affirme qu'au moins un des  $Q_i$  n'appartient pas à  $P(\Xi)$ .

Supposons que non, donc pour  $i = 1, 2, 3$ ,  $w_i \wedge v \in \Xi$ . Alors il existe  $e_3 \in P_0, e_4 \in Q_0$  unitaires,  $e_3 \perp e_1, e_4 \perp e_2$ , tel que  $w_1 = \cos \alpha e_3 + \sin \alpha e_4$ . Notons que  $P_0$  est de dimension 2, donc il n'y a que deux vecteurs unitaires  $\pm e_3$  dans  $P_0$  qui sont orthogonaux à  $e_1$ . Par conséquent, pour  $w_2$ , il existe  $e_5, e_6 \in Q_0$  unitaires,  $e_5 \perp e_2, e_6 \perp e_2$  tels que  $w_2 = \pm \cos \alpha e_3 + \sin \alpha e_5, w_3 = \pm \cos \alpha e_3 + \sin \alpha e_6$ .

Notons  $R$  l'espace engendré par  $w_1, w_2, w_3$ . Alors  $R$  est de dimension 2. Notons  $\pi_R$  son projecteur. Alors  $\pi_R(e_3) \neq 0$ , parce que sinon, puisque  $w_1 = \cos \alpha e_3 + \sin \alpha e_4$  donne  $w_1 = \pi_R(w_1) = \sin \alpha \pi_R e_4$ , on a  $|w_1| = |\sin \alpha \pi_R e_4| < 1$ , une contradiction.

Notons  $f_1 = \pi_R(e_3)/|\pi_R(e_3)|$ . Prenons  $f_2$  un vecteur unitaire dans  $R$  qui est perpendiculaire à  $f_1$ .

On a

$$(11.35) \quad \begin{aligned} |\langle w_i, f_1 \rangle| &= |\langle w_i, \pi_R(e_3)/|\pi_R(e_3)| \rangle| = |\langle \pi_R(w_i), e_3/|\pi_R(e_3)| \rangle| \\ &= |\langle w_i, e_3 \rangle|/|\pi_R(e_3)| = \cos \alpha/|\pi_R(e_3)|, \end{aligned}$$

qui ne dépend pas de  $i$ . Notons cette valeur  $b$ . Alors  $b < 1$ .

Puisque  $w_i \in R = \text{span}\{f_1, f_2\}$ , chaque  $w_i$  est de forme

$$(11.36) \quad w_i = \epsilon_i b f_1 + \delta_i \sqrt{1 - b^2} f_2,$$

où  $\epsilon_i, \delta_i \in \{\pm 1\}$ . Mais les trois  $w_i$  ne peuvent pas faire des angles de  $120^\circ$  sous cette forme (voir 3.19 pour les détails).

Donc au moins un des  $Q_i$  n'appartient pas à  $P(\Xi)$ . On continue ensuite comme dans le lemme 3.19, et on arrive à montrer que  $v \in Q_0$ . Donc  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Et par les expressions de  $w_i$  on sait que  $w_i \in Q_0$ . En particulier,  $C_y \in Q_0$ .

Fin de la démonstration du lemme.

Maintenant notons  $E_P$  l'ensemble des points de type  $\mathbb{P}$  dans  $E$ , et  $E_Y$  l'ensemble des points de type  $\mathbb{Y}$  dans  $E$ . Alors par la régularité  $C^1$  autour des points de type  $\mathbb{P}$  à l'intérieur de  $B(0, 1)$ ,  $E_P$  est ouvert dans  $E \cap B(0, 1)$ . Notons  $E_S = E \setminus (E_P \cup E_Y)$ , l'ensemble des points de singularité qui ne sont pas de type  $\mathbb{P}$  ou  $\mathbb{Y}$ . Pour chaque  $x \in E_S \cap B(0, 1)$ , si  $C_x$  est une limite d'explosion de  $E$  en  $x$ , alors la structure des cônes minimaux dit que  $C_x \cap \partial B(0, 1)$  est composé de cercles et d'arcs de cercles qui se rencontrent en faisant des angles de  $120^\circ$ . Et en particulier,  $C_x$  ne contient qu'un point de singularité (tous les autres points sont de type  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{Y}$ ). Alors par la régularité bi-Hölderienne, on sait qu'il existe  $r_x > 0$  tel que dans  $B(x, r_x)$ ,  $E$  est topologiquement un  $C_x$ , ce qui implique qu'il n'y a qu'un point de type différent que  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{Y}$  dans  $B(x, r)$ . Et par conséquent,  $E_S$  est un ensemble discret.

Par la  $C^1$  régularité autour des points de type  $\mathbb{Y}$ , on sait que

$$(11.37) \quad \begin{aligned} E_Y \cap B(0, 1) &\text{ est une union de courbes } C^1 \text{ ouvertes,} \\ &\text{qui sont limitées par des points dans } E_S \text{ ou } \partial B(0, 1). \end{aligned}$$

Et si on note  $E_{SY}$  l'ensemble des points dans  $E_S$  dont une limite d'explosion contient des points de type  $\mathbb{Y}$ . Alors l'argument ci-dessus donne aussi que

$$(11.38) \quad E_{SY} \subset \overline{E_Y}.$$

Notons aussi  $E_{SP} = E_S \setminus E_{SY}$ , alors pour tout  $x \in E_{SP}$ , la limite d'explosion  $C_x$  de  $E$  en  $x$  est une union de plans, qui vérifie la propriété de "full-length". Alors un argument semblable à celui du lemme 3.23 donne

$$(11.39) \quad C_x = P_0 \cup P_x,$$

où  $P_x \subset Q_0$ , et  $E$  coïncide avec une version  $C^1$  de  $C_x$  dans un voisinage  $B(x, r)$  de  $x$ . En particulier,

$$(11.40) \quad q_0(B(x, r) \cap E) \text{ contient un disque dans } P_x \subset Q_0.$$

On précise maintenant (11.24) par le lemme suivant.

**Lemme 11.41.**  $q_0(E) = Y_0 \cap \overline{B}(0, 1)$ .

Démonstration. Notons  $N \subset Q_0 \cap \overline{B}(0, 1)$  l'ensemble  $N$  dans (11.24), qui est de mesure nulle. On veut montrer  $N = \emptyset$ , d'où la conclusion du lemme.

Par (11.13),  $N \cap \partial B(0, 1) = \emptyset$ , de sorte que  $N \subset B(0, 1)$ . Prenons un point  $x \in N$ . Puisque  $Y_0 \cap \overline{B}(0, 1)$  est fermé, il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset B(0, 1)$  et  $B(x, r) \cap [Y_0 \cap \overline{B}(0, 1)] = \emptyset$ , de sorte que  $q_0(E) \cap B(x, r)$  est de mesure nulle.

Par définition de  $N$ , soit  $y \in E \cap B(0, 1)$  tel que  $q_0(y) = x$ , alors  $q_0(B(y, r) \cap E) \subset q_0(E) \cap B(x, r)$ , donc est de mesure nulle. Par conséquent,  $y \notin E_{SP}$ , parce que sinon, (11.40) implique que  $q_0(B(y, r) \cap E)$  contient un disque dans  $Q_0$ , qui est de mesure non nulle.

D'un autre côté,  $E \cap B(y, r)$  ne contient pas de point de type  $\mathbb{Y}$ . Sinon supposons que  $z \in B(y, r) \cap E$  est un point de type  $\mathbb{Y}$ . Par le lemme 11.34,  $C_z \subset Q_0$ . Par la  $C^1$  régularité, il existe  $r' > 0$  tel que  $B(z, r') \subset B(y, r)$  et  $H^2[q_0(E \cap B(z, r'))] > 0$ . Mais  $q_0(E \cap B(z, r')) \subset N$ , ce qui contredit la définition de  $N$ .

Donc  $E \cap B(y, r)$  ne contient pas de point de type  $\mathbb{Y}$ . Mais  $E_{SY} \subset \overline{E}_Y$ , de sorte que  $E \cap B(y, r)$  ne contient pas de point de type  $E_{SY}$ .

Donc  $y$  n'appartient pas à  $E_S$ . Par conséquent,  $y$  est un point de type  $\mathbb{P}$ . Par la  $C^1$  régularité autour des points de type  $\mathbb{P}$ , il existe  $r > r'' > 0$  tel que  $E \cap B(y, r'')$  est le graphe d'une fonction  $\varphi$  de classe  $C^1$  qui va de  $T_y E$  dans  $T_y E^\perp$ . Alors si  $T_y E$  n'est pas  $P_0$ , par le corollaire 11.30 et le lemme 11.31,  $q_0(T_y E \cap B(0, 1))$  contient un disque de rayon positif. Encore par la  $C^1$  régularité,  $q_0(B(y, r'') \cap E)$  contient un disque aussi, qui n'est pas de mesure nulle, ce qui contredit la définition de  $N$ .

Donc  $T_y E = P_0$ . De plus, le même argument marche pour tout  $z \in q_0^{-1}(N)$ . Donc pour tout  $z \in q_0^{-1}(N)$ ,  $T_z E = P_0$ . En particulier, pour tout  $z \in E \cap B(y, r'')$ ,  $T_z E = P_0$ . Par conséquent,  $E \cap B(y, r'') = (P_0 + y) \cap B(y, r'') = (P_0 + x) \cap B(y, r'')$ .

Cet argument donne que  $E$  est ouvert dans  $(P_0 + x) \cap B(0, 1)$ . Mais  $E$  est aussi fermé, donc  $E$  est ouvert fermé dans  $(P_0 + x) \cap B(0, 1)$ . Par définition de  $N$ ,  $x \in N$  implique que  $E \cap (P_0 + x) \cap B(0, 1)$  n'est pas vide, donc  $E \cap (P_0 + x) \cap B(0, 1) = (P_0 + x) \cap B(0, 1)$ .

Alors  $E \supset (P_0 + x) \cap B(0, 1)$ . Mais  $E$  est fermé dans  $\overline{B}(0, 1)$ , ce qui implique que  $(P_0 + x) \cap \partial B(0, 1) \subset E \cap \partial B(0, 1) \subset Z_0 \cap \partial B(0, 1)$ . Prenons l'image de la projection  $q_0$ , et on obtient que  $x = 0 \in Y_0 \cap B(0, 1)$ , ce qui contredit la définition de  $N$ .

Donc  $N$  est effectivement vide. On obtient donc la conclusion du lemme.

Fin de la démonstration du lemme.

**Lemme 11.42.** *Si  $x \in E_Y \cap B(0, 1)$ , alors  $q_0(E)$  n'a pas de plan tangent en  $q_0(x)$ .*

Démonstration. Notons  $C_x$  la limite d'explosion de  $E$  en  $x$ , alors  $C_x$  est un  $Y$ , puisque  $x \in E_Y$ . Par la  $C^1$  régularité, il existe  $r_x > 0$  et  $\varphi : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  tel que  $\varphi(x) = x$ ,  $D\varphi(x) = Id$ , et  $B(x, r_x) \cap E = B(x, r_x) \cap \varphi(x + C_x)$ . Mais par le lemme 11.34 on sait que  $C_x + q_0(x) \subset Q_0$ , donc  $q_0|_{C_x + q_0(x)} = Id$ , on peut donc définir  $\varphi_0 = q_0 \circ \varphi \circ q_0^{-1}$  sur  $C_x + q_0(x)$ , qui est un  $C^1$  difféomorphisme entre  $q_0(E)$  et  $C_x + q_0(x)$  dans une petite boule  $B(x, r'_x) \cap Q_0$ , avec  $r'_x < r_x$ . Et par conséquent,  $q_0(E)$  n'admet pas de plan tangent en  $q_0(x)$ .

Fin de la démonstration du lemme.

**Corollaire 11.43.**  $q_0(\overline{E}_Y \cap B(0, 1)) = L_0 \cap B(0, 1)$ , où  $L_0$  désigne l'épine de  $Y_0$ .

Démonstration. Rappelons que  $q_0(E \cap B(0, 1)) = Y_0 \cap B(0, 1)$ , dont l'ensemble de singularités est  $L_0 \cap B(0, 1)$ . Par le lemme 11.42, tout point dans  $q_0(E_Y)$  n'a pas de plan tangent à  $q_0(E)$ , donc  $q_0(E_Y \cap B(0, 1)) \subset L_0 \cap B(0, 1)$ . Mais  $L_0$  est fermé, donc  $q_0(\overline{E}_Y \cap B(0, 1)) \subset L_0 \cap B(0, 1)$ . Pour montrer la réciproque, soit  $x \in E$ , tel que  $q_0(x) \in L_0$ . On affirme que

$$(11.44) \quad \text{si } x \text{ est de type } \mathbb{P}, \text{ alors } T_x E = P_0.$$

En effet sinon, alors par le corollaire 11.30 et le lemme 11.31,  $q_0(T_x E \cap B(0, 1))$  contient un voisinage de 0. Et par la  $C^1$  régularité autour des points de type  $\mathbb{P}$ ,  $q_0(E)$  contient un disque  $C^1$  de dimension 2 avec  $q_0(x)$  dans son intérieur. Par le lemme 11.41,  $q_0(E) = Y_0 \cap \overline{B}(0, 1)$ , et donc  $q_0(x) \in L_0$  implique que pour tout petit voisinage  $U$  de  $q_0(x)$  dans  $Q_0$ ,  $q_0(E) \cap U = Y_0 \cap U$ , qui ne contient pas un tel disque. Cette contradiction donne l'affirmation (11.44).

D'un autre côté, soit  $x \in E$  de type  $\mathbb{P}$ . Alors par la  $C^1$  régularité autour des points de type  $\mathbb{P}$ , il existe  $r_x > 0$ , tel que dans  $B(x, r_x)$ ,  $E$  est une variété de classe  $C^1$ . Mais par la Proposition 11.17 de [17],  $E$  est aussi une variété harmonique dans  $B(x, r_x)$ , ce qui implique que  $E$  est une variété lisse dans  $B(x, r_x)$ .

Par conséquent, l'ensemble  $E_P$  est une variété lisse de dimension 2. Et donc  $q_0 : E_P \rightarrow Q_0$  est une fonction lisse entre deux variétés lisses.

Notons que par (11.44), pour chaque  $x \in E_P \cap q_0^{-1}(L_0)$ ,  $T_x E = P_0$ , ce qui implique que  $q_0(T_x E)$  est un point, et donc est de mesure  $H^1$  nulle.

Donc par le théorème de Sard,

$$(11.45) \quad H^1(q_0(E_P) \cap L_0) = H^1(q_0(E_P \cap q_0^{-1}(L_0))) = 0.$$

Donc

$$(11.46) \quad L_0 \cap B(0, 1) \subset q_0(\overline{E_Y \cup E_S}).$$

Mais  $E_S$  est un ensemble discret, donc on a

$$(11.47) \quad L_0 \cap B(0, 1) \subset q_0(\overline{E_Y} \cap B(0, 1)).$$

Par conséquent,

$$(11.48) \quad L_0 \cap B(0, 1) = q_0(\overline{E_Y} \cap B(0, 1)).$$

□

**Corollaire 11.49.** Pour tout  $x \in E_Y \cap B(0, 1)$ , l'épine de  $C_x$  est  $L_0$ .

Démonstration.

Soit  $x \in E_Y \cap B(0, 1)$ , notons  $L_x$  l'épine de  $C_x$ , alors  $L_x \subset Q_0$ . Par la  $C^1$  régularité autour de  $x$ , il existe  $r > 0, \varphi$  un  $C^1$  difféomorphisme de  $B(x, r)$  dans une partie de  $B(x, 2r)$  tel que  $\varphi(x) = x, D\varphi(x) = Id$  et  $E$  coïncide avec l'image par  $\varphi$  de  $x + C_x$  dans  $B(x, r)$ . Alors  $L_x$  est la droite tangente à la courbe régulière  $\gamma = \varphi(L_x)$ . Pour tout  $y \in \varphi(L_x), y \in E_Y$ , et la droite tangente  $T_y \gamma$  à  $\gamma$  en  $y$  est juste l'épine  $L_y$  de  $C_y$ . Alors par le lemme 11.34,  $T_y \gamma = L_y \subset Q_0$  pour tout  $y \in \gamma$ , ce qui implique que  $\gamma - x = q_0(\gamma) \subset L_0$ , et donc

$$(11.50) \quad L_x = T_x \gamma = L_0.$$

□

**Lemme 11.51.** Pour chaque  $x \in E_Y \cap B(0, 1)$ , il existe  $r > 0$  tel que  $E_Y \cap B(x, r) = (L_0 + x) \cap B(x, r)$ .

Démonstration. Ceci résulte de la régularité  $C^1$  et le corollaire 11.49.

□

**Corollaire 11.52.** Pour tout  $x \in E_Y \cap B(0, 1)$ ,  $C_x = Y_0$ .

Démonstration. Par le lemme 11.34,

$$(11.53) \quad C_x = q_0(C_x) = C_{q_0(x)} Y_0.$$

Mais pour tout point  $y$  de type  $\mathbb{Y}$  dans  $Y_0$ ,  $C_y Y_0 = Y_0$ , donc  $C_x = Y_0$ .

□

Maintenant on sait que  $E_Y$  est composé de segments ouverts  $S_i, i = 1, 2, 3 \dots$  parallèles à  $L_0$ , par (11.37) et le lemme 11.51. Mais encore par (11.37), pour chaque  $i$ , si un extrémité  $a$  n'est pas dans

$\partial B(0, 1)$ , alors il est dans  $E_S$ . Mais  $E_S$  est discret, de sorte qu'il existe  $j \neq i$  tel que  $a$  est aussi un extrémité de  $S_j$ . Par conséquent,  $\overline{E}_Y$  est composé de segments parallèles à  $L_0$  dont les extrémités appartiennent à  $\partial B(0, 1)$ .

On en déduit que

$$(11.54) \quad \text{si } x \in E_Y, \text{ alors } (x + L_0) \cap B(0, 1) \subset \overline{E}_Y.$$

**Lemme 11.55.**  $\overline{E}_Y = L_0 \cap \overline{B}(0, 1)$ , et  $E_Y$  est ouvert dans  $L_0 \cap B(0, 1)$ .

Démonstration.

Par le lemme 11.48,  $q_0(E_Y)$  est ouvert dans  $L_0 \cap B(0, 1)$ .

Maintenant si  $x \in E_Y$ , par (11.54),  $(x + L_0) \cap B(0, 1) \subset \overline{E}_Y$ . Par le corollaire 11.43 on sait que  $q_0(x) \in L_0$ . Donc pour montrer le lemme, il suffit de montrer que  $p_0(x) = 0$ .

Notons  $x_p = p_0(x)$ . Alors

$$(11.56) \quad q_0((L_0 + x_p) \cap B(0, 1)) = L_0 \cap B(0, \sqrt{1 - |x_p|^2}).$$

Si  $x_p \neq 0$ ,  $\sqrt{1 - |x_p|^2} < 1$ , donc  $q_0((L_0 + x_p) \cap B(0, 1)) = L_0 \cap B(0, \sqrt{1 - |x_p|^2}) \neq L_0 \cap B(0, 1) = q_0(\overline{E}_Y \cap B(0, 1))$ , ce qui implique qu'il existe un  $y \in (E_Y \setminus (L_0 + x_p)) \cap B(0, 1)$ , parce que  $q_0(E_Y)$  est un ouvert dense dans  $L_0 \cap B(0, 1)$ , à cause du corollaire 11.43 et du lemme 11.51.

Notons  $y_p = p_0(y)$ , alors  $y_p \neq x_p$ , et  $(L_0 + y_p) \cap B(0, 1) \subset \overline{E}_Y$ , et donc aussi

$$(11.57) \quad L_0 \cap B(0, \sqrt{1 - |y_p|^2}) = q_0((L_0 + y_p) \cap B(0, 1)).$$

Maintenant  $x, y \in B(0, 1)$  implique que  $|x_p| < 1, |y_p| < 1$ . Alors  $r = \min\{\sqrt{1 - |x_p|^2}, \sqrt{1 - |y_p|^2}\} > 0$ , et par conséquent, pour presque tout  $z \in L_0 \cap B(0, r)$ ,  $\#\{q_0^{-1}(z) \cap E_Y\} \geq 2$ . Encore par la régularité  $C^1$ , on obtient qu'il existe  $r' > 0$  tel que pour presque tout  $z \in Y_0 \cap B(0, r')$ ,

$$(11.58) \quad \#\{q_0^{-1}(z) \cap E\} \geq 2.$$

Mais  $Y_0 \cap B(0, r')$  est de mesure non nulle, ce qui contredit (11.29).

Donc on a  $p_0(x) = x_p = 0$ . Mais  $x$  est n'importe quel point dans  $E_Y$ . On obtient donc que  $\overline{E}_Y = L_0 \cap \overline{B}(0, 1)$ . Donc  $q_0(E_Y) = E_Y$ , de sorte que  $E_Y$  est ouvert dans  $L_0$ , par le lemme 11.51.

Fin de la démonstration du lemme.

Notons maintenant  $R_1, R_2, R_3$  les trois demi plans fermés qui composent  $Y_0$ , et  $P_i$  le plan contenant  $R_i$ . On a  $\cap_{i=1}^3 P_i = L_0$ .

**Lemme 11.59.** Si  $x \in E_P \cap B(0, 1)$ , et si  $T_x E$  n'est pas perpendiculaire à  $Q_0$ , alors il existe  $1 \leq i \leq 3$  tel que  $q_0(T_x E) = P_i$ .

Démonstration. Par le lemme 11.38 et la régularité de  $C^1$ , on n'a pas d'autre choix.  $\square$

**Lemme 11.60.** *Pour chaque  $1 \leq i \leq 3$  et  $x$  tel que  $q_0(T_x E) = P_i$ , il existe  $r = r_x > 0$  tel que dans  $B(x, r)$ ,  $E$  est le graphe d'une fonction analytique ou antianalytique de  $P_i$  dans  $P_0$ .*

Démonstration.

Supposons par exemple que  $i = 1$ .

Par la régularité de  $C^1$ , l'application  $y \rightarrow T_y E$  est continue. Alors il existe  $r' > 0$  tel que pour tout  $y \in E \cap B(x, r')$ , le plan tangent  $T_y E$  de  $E$  en  $y$  existe, et  $q_0(T_y E) \neq P_2, P_3, \{0\}$ . Alors par le lemme 11.59,

$$(11.61) \quad q_0(T_y E) = P_1 \text{ pour tout } y \in E \cap B(x, r').$$

Encore par la  $C^1$  régularité, il existe  $r < r'$  tel que dans  $B(x, r)$ ,  $E$  est le graphe d'une fonction  $\varphi$  de classe  $C^1$ , de  $P_1 = T_x E$  dans  $P_1^\perp$ . Alors par (11.61)

$$(11.62) \quad \varphi = p_0 \circ \varphi.$$

Donc en fait,  $E$  coïncide dans  $B(x, r)$  avec le graphe d'une fonction de  $P_1$  vers  $P_0$ . Pour montrer qu'elle est analytique ou anti-analytique, on utilise le lemme 11.31, et l'argument du lemme 3.34.

Fin de la démonstration du lemme.

**Lemme 11.63.** *Pour chaque  $x \in E_Y \cap B(0, 1) \subset L_0 \cap B(0, 1)$ , il existe  $r > 0$  tel que  $E \cap B(x, r) = Y_0 \cap B(x, r)$ .*

Démonstration. Soit  $x \in E_Y \cap B(0, 1)$ . Par la  $C^1$  régularité, il existe  $r > 0$  et un difféomorphisme  $\varphi$  de classe  $C^1$  de  $B(x, r)$  vers  $B(x, r)$  tels que  $D\varphi(x) = 0$ ,  $\varphi(x) = x$ , et  $E \cap B(x, r) = \varphi(Y_0) \cap B(x, r)$ . Et pour chaque  $1 \leq i \leq 3$ , et chaque  $y \in P_i \cap B(x, r)$ ,

$$(11.64) \quad q_0(T_{\varphi(y)} \varphi(P_i)) = P_i.$$

Rappelons que  $R_i$  est le demi plan fermé contenu dans  $P_i$ , et  $\varphi(R_i \cap B(x, r) \setminus L_0) \subset E$ , qui ne contient que des points de type  $\mathbb{P}$ . Alors par le lemme 11.60, pour chaque  $y \in \varphi(R_i \cap B(x, r) \setminus L_0)$ , il existe  $r_y > 0$  tel que dans  $B(y, r_y)$ ,  $E$  coïncide avec le graphe d'une fonction analytique ou anti analytique de  $P_i$  vers  $P_0$ . Par conséquent, si on note  $U_i = R_i \cap B(x, r) \setminus L_0$ , alors dans  $P_i$ ,  $U_i$  est un ouvert simplement connexe, avec  $L_0 \cap B(x, r) \subset \partial U_i$ , et

$$(11.65) \quad \begin{aligned} \varphi(U_i) \text{ est le graphe d'une fonction analytique ou antianalytique} \\ f_i \text{ de } U_i \text{ vers } P_0 \text{ et qui est continue sur } \partial U_i. \end{aligned}$$

Mais  $\varphi(L_0 \cap B(x, r)) = L_0 \cap B(x, r)$  implique que  $\lim_{x \rightarrow L_0} f_i = 0$ , où  $L_0 \cap B(x, r)$  est un ouvert dans  $\partial U_i$ , et tout le reste de  $U_i$  n'intersecte pas  $L_0$ . Alors en utilisant le principe de réflexion de Schwarz, on peut étendre  $f_i$  analytiquement sur  $U_i \cup L_0 \cup U_i^*$ , où  $U_i^*$  est la symétrie de  $U_i$  par rapport à  $L_0$ .

Alors  $f_i$  admet une droite de zeros, ce qui implique  $f_i \equiv 0$  sur  $U_i$ . On a donc  $E \cap B(x, r) = Y_0 \cap B(x, r)$ .

Fin de la démonstration du lemme.

**Lemme 11.66.**  $Y_0 \cap B(0, 1) \subset E$ .

Démonstration. Notons maintenant  $A_i = \{x \in E : \exists r > 0 \text{ tel que } E \cap B(x, r) = P_i \cap B(x, r)\}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . On va montrer que

$$(11.67) \quad A_i \cap R_i \cap B(0, 1) \setminus (L_0 \cup E_S) = R_i \cap B(0, 1) \setminus (L_0 \cup E_S), \quad 1 \leq i \leq 3.$$

D'abord par le lemme 11.63,  $A_i \neq \emptyset$ . En effet prenons n'importe quel  $y \in E_Y \cap B(0, 1) \subset L_0$ , il existe  $r > 0$  tel que  $E \cap B(y, r) = Y_0 \cap B(y, r)$ . Alors  $B(y, r) \cap R_i \setminus L_0 \subset A_i$ .

Par définition,  $A_i$  est ouvert dans  $R_i \cap B(0, 1) \setminus (L_0 \cup E_S)$ .

Mais on sait que pour tout  $x \in E \cap B(0, 1) \setminus (L_0 \cup E_S)$ ,  $x$  est de type  $\mathbb{P}$ . Par la  $C^1$  régularité,  $A_i$  est aussi fermé dans  $R_i \cap B(0, 1) \setminus (L_0 \cup E_S)$ . Notons que  $E_S$  est discret,  $R_i \cap B(0, 1) \setminus L_0$  est ouvert dans  $R_i$  et connexe, donc  $R_i \cap B(0, 1) \setminus (L_0 \cup E_S)$  est aussi connexe. On obtient donc (11.67). Mais  $A_i \subset E$ , donc  $R_i \cap B(0, 1) \setminus (L_0 \cup E_S) \subset E$ , de sorte que  $R_i \cap B(0, 1) \subset \overline{R_i \cap B(0, 1) \setminus (L_0 \cup E_S)} \subset E$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , d'où la conclusion.

Fin de la démonstration du lemme.

On sait que  $E_Y \subset \overline{E_Y} \subset L_0 \cap \overline{B}(0, 1) \subset Y_0$ . Donc si  $x \in [E \cap B(0, 1)] \setminus (Y_0 \cup E_S)$ ,  $x$  est de type  $\mathbb{P}$ . Par le lemme 11.59, si  $T_x E$  n'est pas perpendiculaire à  $Q_0$ , il existe  $i \in \{1, 2, 3\}$  tel que  $q_0(T_x E) = P_i$ . Par la  $C^1$  régularité autour d'un point de type  $\mathbb{P}$ , il existe  $r_x > 0$  tel que  $P_i \cap B(q_0(x), r_x) \subset q_0(B(x, r_x) \cap E)$ , et  $B(x, r_x) \cap Y_0 = \emptyset$ . Notons que  $q_0(E) = Y_0$ , donc  $q_0(B(x, r_x) \cap E) \subset Y_0 \cap P_i = R_i$ . Notons  $P_i \cap B(q_0(x), r_x) = V$ , alors  $V \subset q_0(B(x, r_x) \cap E) \subset R_i$ . Notons que  $R_i \subset Y_0 \subset E$ . Par conséquent, pour chaque  $z \in V$ ,  $q_0^{-1}(z) \cap E$  a au moins deux éléments : un est lui-même, un est dans  $E \cap B(x, r_x)$ . Mais  $V$  est ouvert dans  $P_i$ , de sorte qu'il est de mesure non nulle, ce qui contredit (11.29).

Donc pour tout  $x \in E \cap B(0, 1) \setminus (Y_0 \cup E_S)$ ,  $T_x E$  existe et vaut  $P_0$ .

Mais  $E \cap B(0, 1) \setminus Y_0$  est ouvert dans  $E$ . Donc si  $x \in E \cap B(0, 1) \setminus (Y_0 \cup E_S)$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \cap Y_0 = \emptyset$ . Par la  $C^1$  régularité autour d'un point de type  $\mathbb{P}$ , il existe  $0 < r'_x < r$  tel que dans  $B(x, r'_x)$ ,  $E$  est une variété de classe  $C^1$ . Mais pour tout  $y \in B(x, r'_x) \cap E$ ,  $y \notin Y_0$ , de sorte que  $T_y E = P_0$ . Donc  $E \cap B(x, r'_x) = (P_0 + x) \cap B(x, r'_x)$ .

Par (11.28), et le fait que  $p_0(Y_0 \cup E_S)$  est de mesure nulle,  $E \cap B(0, 1) \setminus (Y_0 \cup E_S)$  n'est pas vide. Prenons  $x \in E \cap B(0, 1) \setminus (Y_0 \cup E_S)$ , par l'argument d'ouvert et fermé, et en utilisant le fait que  $E_S$  est discret,  $E_Y \subset L_0$  dont l'intersection avec  $P_0 + x$  est un seul point, on a que  $(P_0 + x) \cap B(0, 1) \setminus (E_S \cup E_Y) \subset E$ . Mais  $E$  est fermé,  $(P_0 + x) \cap B(0, 1) \cap (E_S \cup E_Y)$  est discret, donc  $(P_0 + x) \cap B(0, 1) \subset E$ . Donc  $(P_0 + x) \cap \partial B(0, 1) \subset E \cap \partial B(0, 1)$ , ce qui implique  $x \in P_0$ . On a donc  $P_0 \cap B(0, 1) \subset E$ .

Donc  $Z_0 \cap B(0, 1) \subset E$ . Mais  $E$  est fermé, donc  $Z_0 \cap \overline{B}(0, 1) \subset E$ .

Mais  $H^2(E) = \frac{5}{2}\pi = H^2(Z_0 \cap \overline{B}(0, 1))$ . On a donc

$$(11.68) \quad E = Z_0 \cap \overline{B}(0, 1).$$

Et c'est ce qu'on voulait. □

### 11.3 Remarques sur d'autres préparatifs

Maintenant on fait comme dans le paragraphe 4. Supposons que pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ , il existe  $Z_k = P_k \cup Y_k$ , où  $Y_k \subset Q_k$ ,  $P_k, Q_k$  sont des sous-espaces de dimension 2 et 3 respectivement, et  $\alpha_{P_k, Q_k} \geq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k}$ , tel que  $Z_k$  n'est pas minimal dans  $B(0, 1)$ .

De plus, quitte à composer par une rotation, on suppose que tous les  $Q_k$  et les  $Y_k$  sont tous égaux à  $Q_0$  et  $Y_0$ .

En utilisant la proposition 4.1, on montre que

**Proposition 11.69.** *Pour chaque  $k$ , il existe un ensemble  $E_k$  fermé réduit, qui vérifie*

(1)  $E_k$  est minimal dans  $\mathbb{R}^5 \setminus [Z_k \setminus B(0, 1)]$  ;

(2)  $\partial B(0, 1) \cap E_k = \partial B(0, 1) \cap Z_k$  ;

(3)  $p_k(E_k) \supset P_k \cap \overline{B}(0, 1)$ , et  $q_k(E_k)$  vérifie la condition de séparation, c'est à dire, pour tout  $x, y \in \partial B(0, 1) \cap Z_k$  tels que  $x$  et  $y$  n'appartiennent pas à la même composante connexe de  $\partial B(0, 1) \setminus Z_k$ , ils n'appartiennent pas à la même composante connexe de  $\overline{B}(0, 1) \setminus E_k$  non plus.

Ici  $p_k, q_k$  désigne le projecteur de  $P_k$  et  $Q_k$  ;

(4)  $H^2(E_k) < H^2(Z_k \cap B(0, 1)) = \frac{5}{2}\pi$ .

De plus,  $E_k$  est contenu dans l'enveloppe convexe de  $Z_k \cap \overline{B}(0, 1)$ .

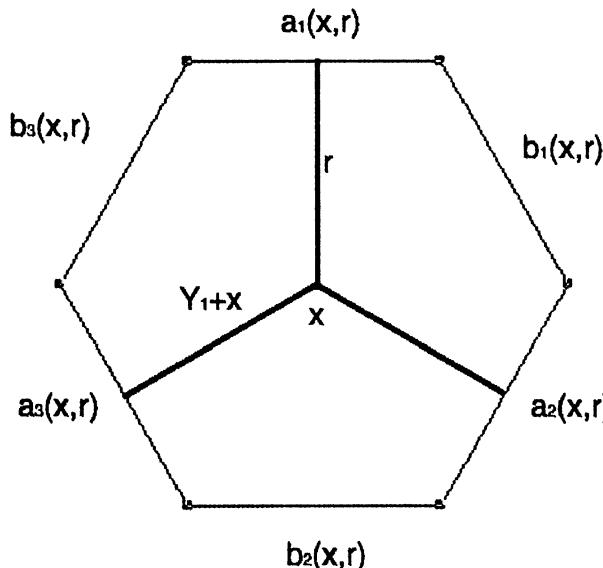
**Remarque 11.70.** *Ici on utilise le fait qu'une déformation ne change pas la condition de séparation (c.f.[13] XVII 4.3).*

Ensuite on peut continuer à chercher le rayon critique pour chaque  $k$ . Mais on change un peu la définition de  $C_k$  et  $D_k$ .

Pour  $P_k$ , on note, comme précédent,

$$(11.71) \quad C_k^P(x, r) = x + p_k^{-1}(P_k \cap B(0, r)).$$

Pour la côté  $Q_k$ , la vie est un peu plus compliquée. On rappelle que pour chaque  $k$ ,  $Q_k = Q_0$  et  $Y_k = Y_0$ . On écrit  $Q_0 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$ , où la première coordonnée est  $L_0$ , qui est l'épine de  $Y_0$ . La deuxième est un plan, qui intersecte  $Y_0$  en un ensemble  $Y^1$ , qui est l'union de trois demi droites qui se rencontrent en 0 en faisant des angles de 120 degrés (c'est un  $\mathbb{Y}$  de dimension 1). Pour chaque  $r > 0$ , on note  $S(0, r) \subset \mathbb{R}^2$  l'hexagone régulier ouvert centré en 0 dont trois côtés non-adjacents intersectent respectivement les trois branches de  $Y^1$  perpendiculairement. De plus,  $H^1(S(0, r) \cap Y^1) = 3r$ , c'est à dire, la partie de  $Y^1$  dans  $S(0, r)$  est l'union de trois segments de longueurs  $r$ . Notons aussi  $S(x, r) = x + S(0, r)$  pour  $x \in Q_0, r > 0$ , et  $a_1(x, r), a_2(x, r), a_3(x, r)$  les trois côtés de  $S(x, r)$  qui rencontrent  $Y_0$ , et  $b_1(x, r), b_2(x, r), b_3(x, r)$  les trois côtés restants. Voir le dessin 11-1.



11-1

Alors on note  $U(0, r) = (-r, r) \times S(0, r)$ , et  $U(x, r) = x + U(0, r)$ . Ce sont donc des ouverts dans  $Q_0$ , qui sont topologiquement des boules. On prend  $U(x, r)$  au lieu d'une boule, pour contrôler mieux la mesure autour d'une structure de  $\mathbb{Y}$ , qu'on va le voir. On note aussi  $A_i(x, r) = (x - r, x + r) \times a_i(x, r)$ ,  $B_i(x, r) = (x - r, x + r) \times b_i(x, r)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Alors

$$(11.72) \quad \partial U(x, r) = [\cup_{i=1}^3 \overline{A}_i(x, r)] \cup [\cup_{i=1}^3 \overline{B}_i(x, r)] \cup \overline{S}(x - r, r) \cup \overline{S}(x + r, r).$$

On pose maintenant

$$(11.73) \quad C_k^Q(x, r) = x + q_k^{-1}(Q^k \cap U(0, r))$$

et

$$(11.74) \quad D_k(x, r) = C_k^P(x, r) \cap C_k^Q(x, r).$$

On définit aussi

$$(11.75) \quad d_k^{x,r}(E, F) = d_{r,D_k(x,r)}(E, F),$$

pour deux fermés  $E$  et  $F$ , où  $d_{r,U}(E, F)$  est défini dans (5.4), pour tout  $U$  ouvert.

On énonce maintenant la proposition 11.76, qui est une nouvelle version de la proposition 5.11, par le même argument de récurrence, en utilisant bien sûr une nouvelle version du lemme 5.20, formulé dans la proposition 11.77.

**Proposition 11.76.** *Il existe  $\epsilon_0 > 0$ , tel que si  $\epsilon < \epsilon_0$ , alors pour tout  $k$  assez grand, il existe  $r_k \in ]0, \frac{1}{2}[$  et  $o_k \in B(0, 12\epsilon)$  tels que  $E_k$  est  $2\epsilon r_k$  proche de  $Z_k + o_k$  dans  $D_k(o_k, 2r_k(1 - 12\epsilon))$ , mais par contre il n'est  $\epsilon r_k$  proche de  $Z_k + q$  dans  $D_k(o_k, r_k)$  pour aucun  $q \in \mathbb{R}^5$ .*

La démonstration de la proposition 11.76 se fait comme pour la proposition 5.11.

Ensuite la nouvelle version de la proposition 6.1.

**Proposition 11.77.** *Il existe  $\epsilon_0 > 0$ , tel que pour  $\epsilon < \epsilon_0$  fixé et  $k$  grand, si notre  $\epsilon$ -processus ne s'arrête pas à l'étape  $n$ , alors*

$$(11.78) \quad \begin{aligned} (1) \quad & E_k \cap (D(0, \frac{39}{40}) \setminus D(q_n, \frac{1}{10}s_n)) \text{ est composé de deux morceaux disjoints } G^P \text{ et } G^Q, \text{ tels que} \\ & G^P \text{ est le graphe d'une application } C^1 g^P : D_k(0, \frac{39}{40}) \setminus D_k(q_n, \frac{1}{10}s_n) \cap P_k \rightarrow P_k^\perp, \end{aligned}$$

avec

$$(11.79) \quad \|\nabla g^P\|_\infty < 1 ;$$

et

$$(11.80) \quad G^Q \text{ est l'image de } Y_k \text{ d'une application } g^Q \text{ de classe } C^1 : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5,$$

avec

$$(11.81) \quad \|Dg^Q - Id\| < \frac{1}{100}.$$

(2) pour chaque  $\frac{1}{10}s_n \leq t \leq s_n$

$$(11.82) \quad E_k \cap (D_k(0, 1) \setminus D_k(q_n, t)) = G_t^P \cup G_t^Q$$

où  $G_t^P, G_t^Q$  ne se rencontrent pas. De plus

$$(11.83) \quad P_k \cap (D_k(0, 1) \setminus C_k^P(q_n, t)) \subset p_k(G_t^P)$$

et

$$(11.84) \quad q_k(E_k) sépare les trois B_i(q_n, t) dans B(0, 1) \setminus D_k(q_n, t).$$

(3) Pour chaque  $\frac{1}{10}s_n < t < s_n$ , il existe une suite  $\{F_l^n(t) = f_l^n(t)((Z_k + q_n) \cap \overline{D}_k(q_n, s_n + \frac{1}{l}))\}$  de déformations de  $(Z_k + q_n) \cap \overline{D}_k(q_n, t + \frac{1}{l})$ , avec

$$(11.85) \quad f_l^n(t)(Z_k \cap \partial C_k^i(q_n, t + \frac{1}{l})) \subset \partial C_i^k(q_n, t + \frac{1}{l}), i = P, Q$$

qui tend vers  $E_k \cap D_k(q_n, t)$  dans  $B(0, 1)$  ;

(4)

$$(11.86) \quad p_k : E_k \cap D_k(q_n, t) \rightarrow P_k \cap C_k^P(q_n, t) est surjective,$$

et

$$(11.87) \quad q_k(E_k \cap D_k(q_n, t)) sépare les trois B_i(q_n, t) dans D_k(q_n, t).$$

**Remarque 11.88.** Le point différent de la proposition 6.1 est la condition de séparation. Mais notons que c'est une propriété invariante sous les déformations (c.f./13] XVII 4.3), et conservée pour la limite pour la distance de Hausdorff, donc toute la démonstration marche comme dans la proposition 6.1.

Pour l'extension harmonique, on va encore avoir besoin d'une version pour des rectangles, pour traiter la partie proche de  $Y_0$ . Mais ça ne coûte pas cher.

**Lemme 11.89.** Soit  $0 < r < 1$  et  $u_0 \in C^1([0, r_0] \times \{0\}, \mathbb{R})$ . On note  $m(u_0) = \frac{1}{r_0} \int_0^{r_0} u_0$  sa moyenne.

Alors pour toute  $u \in C^1([0, r_0] \times [0, 1], \mathbb{R})$  qui satisfait à

$$(11.90) \quad u|_{[0, r_0] \times \{0\}} = u_0$$

on a

$$(11.91) \quad \int_{[0, r_0] \times [0, 1]} |\nabla u|^2 \geq \frac{1}{4} \pi r_0^{-1} \int_0^{r_0} |u_0 - m(u_0)|^2.$$

Démonstration. On peut d'abord définir, pour chaque  $u, \tilde{u} : [0, 2r_0] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , pour chaque  $(x, y)$  tel que  $r_0 < x \leq 2r_0$ , et  $y \in [0, 1]$ ,  $\tilde{u}(x, y) = u(2r_0 - x, y)$ . Alors  $\tilde{u}(0, y) = \tilde{u}(2r_0, y)$ , et

$$(11.92) \quad \int_{[0, 2r_0] \times [0, 1]} |\nabla \tilde{u}|^2 = 2 \int_{[0, r_0] \times [0, 1]} |\nabla u|^2.$$

Notons aussi  $\tilde{u}_0 = u_0|_{[0, 2r_0] \times \{0\}}$ .

Maintenant on peut transformer notre région  $[0, 2r_0] \times [0, 1]$  conformément (qui ne change pas l'énergie de Dirichlet) dans un anneau de rayons 1 et  $r_1 = \exp(-\frac{\pi}{r_0}) < \frac{1}{2}$  par une application  $f$ . En

effet, si on regarde le plan comme une version de  $\mathbb{C}$ , en regardant  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  comme  $x + y_i$ , alors  $f(z) = \exp\{-\frac{\pi}{r_0}\} \exp\{-i\pi z/r_0\}$ .

Notons  $v = \tilde{u} \circ f^{-1}$ . Alors  $v$  est une fonction de  $B(0, 1) \setminus B(0, r_1)$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $v|_{\partial B(0, r_1)} = v_0 := \tilde{u}_0 \circ f^{-1}$ .

Par la proposition 7.1

$$(11.93) \quad \int_{B(0,1) \setminus B(0, r_1)} |\nabla v|^2 \geq \frac{1}{4} r_1^{-1} \int_{\partial B(0, r_1)} |v_0 - m(v_0)|^2.$$

Mais

$$(11.94) \quad \begin{aligned} m(v_0) &= \frac{1}{2\pi r_1} \int_{\partial B(0, r_1)} v_0 = \frac{1}{2\pi r_1} \int_{[0, 2r_0]} \tilde{u}_0 |Df|_{\partial B(0, r_1)} \\ &= \frac{1}{2\pi r_1} \int_{[0, 2r_0]} \tilde{u}_0 \times \frac{\pi r_1}{r_0} = \frac{1}{r_0} \int_0^{r_0} u_0 = m(u_0), \end{aligned}$$

et

$$(11.95) \quad \begin{aligned} r_1^{-1} \int_{\partial B(0, r_1)} |v_0 - m(v_0)|^2 &= r_1^{-1} \int_{[0, 2r_0]} |\tilde{u}_0 - m(u_0)|^2 |Df|_{\partial B(0, r_1)} \\ &= r_1^{-1} \int_{[0, 2r_0]} |\tilde{u}_0 - m(u_0)|^2 \times \frac{\pi r_1}{r_0} = \pi r_0^{-1} \int_{[0, 2r_0]} |\tilde{u}_0 - m(u_0)|^2. \end{aligned}$$

Donc par (11.93)

$$(11.96) \quad \int_{B(0,1) \setminus B(0, r_1)} |\nabla v|^2 \geq \frac{1}{4} \pi r_0^{-1} \int_{[0, 2r_0]} |\tilde{u}_0 - m(u_0)|^2 = \frac{1}{2} \pi r_0^{-1} \int_{[0, r_0]} |u_0 - m(u_0)|^2.$$

Mais  $f$  est une transformation conforme, de sorte que  $\int_{B(0,1) \setminus B(0, r_1)} |\nabla v|^2 = \int_{[0, 2r_0] \times [0, 1]} |\nabla \tilde{u}|^2$ . Par conséquent,

$$(11.97) \quad \int_{[0, 2r_0] \times [0, 1]} |\nabla \tilde{u}|^2 \geq \frac{1}{2} \pi r_0^{-1} \int_{[0, 2r_0]} |u_0 - m(u_0)|^2,$$

et donc

$$(11.98) \quad \int_{[0, r_0] \times [0, 1]} |\nabla u|^2 \geq \frac{1}{4} \pi r_0^{-1} \int_0^{r_0} |u_0 - m(u_0)|^2.$$

Fin de la démonstration du lemme.

La même argument, en combinant avec le corollaire 7.44, donne

**Lemme 11.99.** Pour tout  $0 < \epsilon < 1$ , il existe  $C = C(\epsilon) > 100$  tel que si  $r_1 : r_0 < \frac{1}{4}$ ,  $u \in C^1([0, r_0] \times [0, r_1], \mathbb{R})$  et

$$(11.100) \quad u|[0, r_0] \times \{0\} > \delta r_0 - \frac{\delta r_0}{C} \text{ et } u|_{[0, r_0] \times \{r_1\}} < \frac{\delta r_0}{C},$$

alors

$$(11.101) \quad \int_{[0, r_0] \times [0, r_1]} |\nabla u|^2 \geq C' \delta^2 r_0^2.$$

## 11.4 Conclusion

Comme dans le paragraphe 8, on donne d'abord une proposition parallèle à la proposition 8.1, mais avec plus de restriction.

**Proposition 11.102.** *Pour tout  $0 < \epsilon < \epsilon_0$ , il existe  $0 < \delta < \epsilon$  et  $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ , qui ne dépendent que de  $\epsilon$ , avec les propriétés suivantes.*

*Soit  $\theta_0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , et soit  $P, Q$  deux espaces dans  $\mathbb{R}^5$  de dimension 2 et 3 respectivement, avec  $\alpha = \alpha_{P,Q} > \theta_0$ , et  $Y$  est un cône de type  $\mathbb{Y}$  dans  $Q$ . On définit  $D_\alpha(x, r)$  comme dans (11.74) pour  $P$  et  $Q$ . Alors si  $E \subset \overline{B}(0, 1)$  est un ensemble minimal dans  $B(0, 1)$  qui est  $\epsilon$  proche de  $Z_\alpha = Y \cup_\alpha P$  dans  $D_\alpha(0, 1)$ , mais n'est  $\frac{1}{2}\epsilon$  proche d'aucune translation  $Z_\alpha + q$  de  $Z_\alpha$  dans  $D_\alpha(0, \frac{1}{2})$ , et si de plus*

$$(11.103) \quad p(E) \supset P \cap B(0, \frac{3}{8}),$$

et

$$(11.104) \quad q(E) sépare les trois  $B_i(0, \frac{3}{8})$ ,  $1 \leq i \leq 3$ ,$$

*alors il n'est  $\frac{1}{2}\delta$  proche d'aucune translation  $Z_\alpha + q'$  de  $Z_\alpha$  dans  $D_\alpha(0, \frac{1}{2}) \setminus [C^P(0, \frac{1}{8}) \cap q^{-1}(S(0, \frac{1}{8}) \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])]$ .*

Démonstration. On montre d'abord ceci.

**Lemme 11.105.** *Pour tout  $0 < \epsilon < \epsilon_0$ , il existe  $0 < \delta_1 < \epsilon$  et  $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ , qui ne dépendent que de  $\epsilon$ , avec les propriétés suivantes.*

*Soit  $\theta_0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , et soit  $P, Q$  deux sous-espaces dans  $\mathbb{R}^5$  de dimension 2 et 3 respectivement, avec  $\alpha = \alpha_{P,Q} > \theta_0$ , et  $Y$  un cône de type  $\mathbb{Y}$  dans  $Q$ . On définit  $D_\alpha(x, r)$  comme dans (11.74) pour  $P$  et  $Q$ . Alors si  $E \subset \overline{D}_\alpha(0, 1)$  est un ensemble minimal dans  $D_\alpha(0, 1)$  qui est  $\delta_1$  proche de  $Z = Y \cup P$  dans  $D_\alpha(0, 1) \setminus D_\alpha(0, \frac{1}{4})$ , et si de plus*

$$(11.106) \quad p(E) \supset P \cap B(0, 1),$$

et

$$(11.107) \quad q(E) sépare les trois  $B_i(0, \frac{3}{4})$ ,  $1 \leq i \leq 3$ ,$$

*alors il est  $\epsilon$  proche de  $Z$  dans  $D_\alpha(0, 1)$ .*

Démonstration. Même argument pour que la proposition 8.1 et le corollaire 8.24, en remplaçant juste une des deux conditions de projections par la condition de séparation, et utilisant l'unicité de  $Z_0$ .  $\square$

On va démontrer la proposition 11.102 par l'absurde. Supposons que l'énoncé n'est pas vrai. Il existe alors une suite  $\theta_l \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ,  $\delta_l \rightarrow 0$ , et  $E_l$  minimaux dans  $B(0, 1)$ , tels que  $E_l$  est  $\epsilon$  proche de

$Z_l = P_l \cup_{\theta_l} Y_l$  dans  $B(0, 1)$ , et avec les propriétés suivantes. D'abord,  $E_l$  est  $\frac{1}{2}\delta_l$  proche de  $Z_l$  dans  $D_\alpha(0, \frac{1}{2}) \setminus [C^P(0, \frac{1}{8}) \cap q^{-1}(S(0, \frac{1}{8}) \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])]$ , et (11.103), (11.104) sont vrais pour chaque  $E_l$ , mais  $E_l$  n'est  $\frac{1}{2}\epsilon$  proche d'aucune translation  $Z_\alpha + q$  de  $Z_\alpha$  dans  $D(0, \frac{1}{2})$ . Ainsi, par le lemme 11.105, il n'est  $\frac{1}{2}\delta_1$  proche d'aucun  $Z_\alpha + q$  de  $Z_\alpha$  dans  $D_\alpha(0, \frac{1}{2}) \setminus D_\alpha(0, \frac{1}{8})$ .

Quitte à composer par une rotation, on peut supposer que tous les  $Y_l$  sont les mêmes. Alors quitte à extraire une sous suite, on peut supposer que les  $E_l$  convergent vers un ensemble  $E_\infty \subset \overline{B}(0, 1)$ . Alors  $E_\infty$  est un ensemble minimal qui est  $\epsilon$  proche de  $Z_0$  dans  $B(0, 1)$ . On a donc toutes les conclusions de la proposition 11.77, en utilisant (11.103) et (11.104).

Notons que  $\delta_l \rightarrow 0$ , chaque  $E_l$  est  $\frac{1}{2}\delta_l$  proche de  $Z_l$  dans  $\Omega_\alpha = D_\alpha(0, \frac{1}{2}) \setminus [C^P(0, \frac{1}{8}) \cap q^{-1}(S(0, \frac{1}{8}) \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])]$ , et que  $Z_l \rightarrow Z_0$  puisque  $\theta_l \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , donc on a

$$(11.108) \quad E_\infty \cap \Omega_0 = Z_0 \cap \Omega_0,$$

où  $\Omega_0 = D_0(0, \frac{1}{2}) \setminus [C_0^P(0, \frac{1}{8}) \cap q_0^{-1}(S(0, \frac{1}{8}) \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])]$ .

La région différence entre  $\Omega_\alpha$  et  $D_\alpha(0, \frac{1}{2}) \setminus D_\alpha(0, \frac{1}{8})$  est l'union de deux régions symétriques :  $\Omega_\alpha^1 = C_0^P(0, \frac{1}{8}) \cap q_0^{-1}(S(0, \frac{1}{8}) \times [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}])$  et  $\Omega_\alpha^2 = C_0^P(0, \frac{1}{8}) \cap q_0^{-1}(S(0, \frac{1}{8}) \times [\frac{1}{8}, \frac{1}{2}])$ .

Notons que  $\Omega_\alpha^i \rightarrow \Omega_0^i$ ,  $i = 1, 2$ , et  $E_\infty$  est  $\epsilon$  proche de  $Z_0$  dans ces deux régions. Mais dans chaque  $\Omega_0^i$ ,  $Z_0$  est juste un morceau de  $Y$ , et  $\epsilon$  est suffisamment petit, donc par la régularité  $C^1$ ,  $E_\infty$  est le graphe d'un difféomorphisme  $\varphi$  de classe  $C^1$  de  $Y$  dans  $\Omega_0^i$ , avec  $\|D\varphi - Id\|_\infty$  suffisamment petit. On peut même étendre cette régularité jusqu'à  $\Omega^i = C_0^P(0, \frac{1}{8}) \cap q_0^{-1}(S(0, \frac{1}{7}) \times [\frac{1}{10}, \frac{11}{20}])$ .

Alors prenons  $\Omega^1$  par exemple. Notons  $F_j$ ,  $1 \leq j \leq 3$  les trois morceaux  $\varphi(Y_j)$ , où les  $Y_j$  sont les trois demi-plans ouverts de  $Y$ . Chaque  $F_j$  contient un morceau de plan dans  $\Omega^1 \setminus \Omega_0^1$ . Autour de chaque  $x \in F_j$ ,  $x$  est un point de type  $\mathbb{P}$ , donc dans un voisinage de  $x$ ,  $E_j$  est une variété harmonique (c.f.[17], Proposition 11.17). Par conséquent chaque  $F_j$  est une variété harmonique. Mais  $F_j$  contient un morceau de plan, donc  $F_j$  est forcément un morceau de plan lui-même. Par conséquent,  $E_\infty = Y$  dans  $\Omega^1$ .

Pareil pour  $\Omega^2$ . On obtient donc  $E_\infty = Z_0$  dans  $D_0(0, \frac{1}{2}) \setminus D_0(0, \frac{1}{8})$ . Mais ce cas contredit le fait que  $E_\infty$  n'est  $\frac{1}{2}\delta_1$  proche d'aucun  $Z_\alpha + q$  de  $Z_\alpha$  dans  $D_0(0, \frac{1}{2}) \setminus D_0(0, \frac{1}{8})$ .

On obtient donc la proposition 11.102. □

Ensuite on procéde comme dans le paragraphe 8. Mais pour gagner une mesure suffisante de la partie dans  $Q_0$  hors de la boule critique, qui ressemble à un  $\mathbb{Y}$ , la manière est un peu différente que celle pour traiter une partie qui ressemble à un plan.

Donc fixons un  $k$  assez grand, et un  $\epsilon < \epsilon_0$  tel que toutes les propriétés ci-dessus sont vraies.

Notons  $D(x, r) = D_k(x, r)$ . On va regarder dans  $D(o_k, r_k)$ . Par définition,  $E_k$  n'est  $\epsilon r_k$  proche de  $Z_k + q$  pour aucun  $q \in \mathbb{R}^5$ . Alors par la proposition 11.102,  $E_k$  n'est  $\delta r_k$  proche de  $Z_k + q$  dans  $D(o_k, r_k) \setminus [C^P(o_k, \frac{1}{4}r_k) \cap q^{-1}(S(o_k, \frac{1}{4}r_k) \times [-r_k, r_k])]$  pour aucun  $q \in \mathbb{R}^5$ .

Pour la partie  $E_k \cap D(o_k, \frac{1}{4}r_k)$ ,

$$(11.109) \quad H^2(E_k \cap D(o_k, r_k)) \geq (1 - \frac{C}{k})[H^2(p_k(E_k \cap D(o_k, r_k))) + H^2(q_k(E_k \cap D(o_k, r_k)))].$$

Alors par (11.86)

$$(11.110) \quad H^2(p_k(E_k \cap D(o_k, r_k))) \geq \pi r_k^2,$$

et par (11.87) on a

$$(11.111) \quad H^2(q_k(E_k \cap D(o_k, r_k))) \geq 6r_k^2.$$

Par conséquent

$$(11.112) \quad H^2(E_k \cap D(o_k, r_k)) \geq H^2(Z_k \cap D(o_k, r_k)) - \frac{C}{k}.$$

Pour la partie  $E_k \cap D(o_k, r_k) \setminus D(o_k, \frac{1}{4}r_k)$ , si la partie proche de  $P_k + o_k$  est déjà loin, c'est à dire, la partie  $G_{\frac{1}{4}r_k}^P$  n'est  $\frac{1}{2}\epsilon r_k$  proche de aucun  $P + q$  dans  $D(o_k, r_k) \setminus D(o_k, \frac{1}{4}r_k)$ , alors on gagne comme pour deux plans presque orthogonaux si  $k$  est grand, parce que pour la partie  $G^Q$ , la condition de séparation garantit toujours que la mesure est plus grande que celle de  $Y_k$  dans  $B(0, 1) \setminus D(o_k, \frac{1}{4}r_k)$ . Sinon, alors la partie  $G_{\frac{1}{4}r_k}^Q$  n'est  $\frac{1}{2}\epsilon r_k$  proche de aucun  $Y_k + q$  dans  $D(o_k, r_k) \setminus (o_k - r_k, o_k + r_k) \times S(o_k, \frac{1}{4}r_k)$ .

On va encore décomposer notre  $G_{\frac{1}{4}r_k}^Q \cap D(o_k, r_k) \setminus D(o_k, \frac{1}{4}r_k)$ .

Notons  $F_1 = G_{\frac{1}{4}r_k}^Q \cap D(o_k, r_k) \setminus (o_k - r_k, o_k + r_k) \times S(o_k, \frac{1}{4}r_k)$ . Alors  $F_1$  est composé de trois parties plates  $F_1^i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , chaque  $F_1^i$  est  $2\epsilon r_k$  proche d'un branche  $R_i + o_k$  de  $Y_k + o_k$  dans  $D(o_k, r_k) \setminus (o_k - r_k, o_k + r_k) \times S(o_k, \frac{1}{4}r_k)$ . Donc par la régularité de classe  $C^1$ , chaque  $F_1^i$  est le graphe  $C^1$  d'une fonction  $g^i$  sur  $R_i \cap D(o_k, r_k) \setminus (o_k - r_k, o_k + r_k) \times S(o_k, \frac{1}{4}r_k)$ .

$F_1$  n'est  $\frac{1}{4}\delta$  proche d'aucun  $Y_k + q$ , alors il y a deux possibilités.

1) il existe un  $F_1^i$  qui est  $\frac{1}{4}\delta r_k$  loin des translations de  $R_i$ . Alors, comme pour l'union de deux plans, notons, pour chaque  $a \in (Y^1 \cap R_i) + o_k$ ,  $\Gamma_a = g^i((o_k - r_k, o_k + r_k) \times \{a\})$ , il existe alors, soit un segment  $(o_k - r_k, o_k + r_k) \times \{a\}$  parallèle à  $L_0$ , avec  $a \in (Y^1 \cap R_i) + o_k$ , tel que la partie de  $F_1^i$  sur lui contient deux points  $x \neq y$  dont les attitudes sont assez différents :  $|g^i(x) - g^i(y)| \geq \frac{1}{4}\delta$ ; soit deux niveaux  $a, b \in (Y^1 \cap R_i) + o_k + o_k \cap D(o_k, r_k) \setminus (o_k - r_k, o_k + r_k) \times S(o_k, \frac{1}{4}r_k)$  tels que  $\Gamma_a, \Gamma_b$  n'osillent pas de  $\frac{1}{200}\delta r_k$  eux-mêmes, mais la distance entre eux est plus grande que  $\frac{1}{8}\delta r_k$ . Dans les deux cas on peut, comme on a démontré dans le paragraphe 8, gagner une mesure  $C_1(\delta)r_k^2$  sur  $Y_k$ .

2) Si 1) n'est pas vrai. C'est à dire que

$$(11.113) \quad \begin{aligned} &\text{chaque des trois parties est } \frac{\delta r_k}{200} \text{ proche des plans, mais} \\ &\text{l'ensemble n'est pas } \frac{1}{4}\delta \text{ proche d'aucun } Y_k + q. \end{aligned}$$

Notons  $F_2 = q_k(G_{\frac{1}{4}r_k}^Q \cap [o_k + \frac{1}{4}r_k, o_k + r_k] \times S(o_k, \frac{1}{4}r_k))$ . On va gagner un peu de mesure sur cette partie.

On sait que  $F_2$  intersecte les trois faces  $\Delta_i = S(o_k + \frac{1}{4}r_k, o_k + r_k) \times a_i(o_k, \frac{1}{4}r_k)$  en trois lignes qui sont  $\frac{\delta r_k}{200}$  proche d'une droite parallèle à  $L_0$ . Mais par (11.105), l'union des trois lignes n'est  $\frac{1}{16}\delta r_k$  proche d'aucun  $Y_k + q$ . Alors puisque les lignes sont  $\frac{\delta r_k}{200}$  proches des droites parallèle à  $L_0$  respectivement, pour chaque  $s \in (o_k + \frac{1}{4}r_k, o_k + r_k)$ , la tranche  $F_2^s = \{(x, y, z) \in F_2, x = s\}$  n'est  $\frac{\delta r_k}{20}$  proche d'aucun  $Y^1 + q$  pour  $q \in Q_k$ .

**Lemme 11.114.** Soit  $S(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$  l'hexagone régulier défini comme avant,  $a_i = a_i(0, 1), b_i = b_i(0, 1)$  ses 6 côtés. Alors pour chaque  $\delta > 0$  petit, il existe  $C(\delta) > 0$  qui vérifie la propriété suivante. Soit  $x_i, 1 \leq i \leq 3$  trois points tels que  $x_i \in a_i$ , et que  $\cup_{i=1}^3 \{x_i\}$  n'est  $\delta$  proche d'aucun  $(Y^1 + q) \cap (\cup_{i=1}^3 (a_i \cup b_i))$ , et  $\gamma$  un ensemble connexe qui connecte les  $x_i$ , alors

$$(11.115) \quad H^1(\gamma) \geq 3 + C(\delta).$$

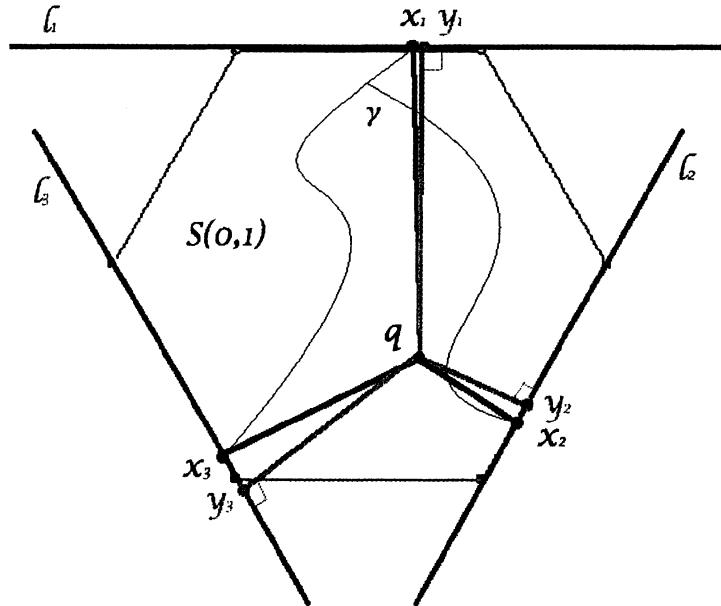
Admettons ce lemme pour l'instant ; on obtient par la formule de la coaire que

$$(11.116) \quad \begin{aligned} H^2(F_2) &\geq \int_{o_k + \frac{1}{4}r_k}^{o_k + r_k} H^1(F_2^s) ds \geq \left(\frac{3}{4}r_k\right)(1 + C(\delta)) \frac{3}{4}r_k + D(\delta) \frac{1}{3}r_k \\ &\geq H^2((Y_k + o_k) \cap S(o_k + \frac{1}{4}r_k, o_k + r_k) \times S(o_k, \frac{1}{4}r_k)) + C_2(\delta)r_k^2, \end{aligned}$$

et on gagne comme précédemment.

Donc il nous reste à montrer le lemme.

Démonstration du lemme 11.114. Voir le dessin 11-2.



11-2

Notons  $q \in \mathbb{R}^2$  le point tel que les angles entre les  $[q, x_i]$  sont tous de  $120^\circ$ . Ce point existe et est dans  $\Delta_{x_1 x_2 x_3} \subset S(0, 1)$ , puisque chaque angle du triangle  $\Delta_{x_1 x_2 x_3}$  est au plus de  $120^\circ$ . Alors par définition de  $q$ , on a

$$(11.117) \quad H^1(\gamma) \geq \sum_{i=1}^3 |x_i q|.$$

Pour chaque  $1 \leq i \leq 3$ , notons  $l_i$  la droite contenant  $a_i$ , et  $y_i \in l_i$  le point tel que  $[q, y_i] \perp l_i$ . Alors

$$(11.118) \quad \sum_{i=1}^3 |qy_i| = 3.$$

Notons que  $(Y^1 + q) \cap (\cup_{i=1}^3 (a_i \cup b_i)) = \{y_1, y_2, y_3\}$ . Par hypothèse,  $d_H(\cup_{i=1}^3 \{x_i\}, \cup_{i=1}^3 \{y_i\}) > \delta$ . Donc il existe  $1 \leq i \leq 3$ , tel que  $d(x_i, y_i) > \delta$ . Supposons par exemple que  $d(x_1, y_1) > \delta$ . Par conséquent

$$(11.119) \quad \begin{aligned} |x_1 q| &= \sqrt{|y_1 q|^2 + |x_1 y_1|^2} = |y_1 q| \sqrt{1 + \left(\frac{|x_1 y_1|}{|y_1 q|}\right)^2} \\ &\geq |y_1 q|(1 + \frac{1}{4}(\frac{|x_1 y_1|}{|y_1 q|})^2) = |y_1 q| + \frac{1}{4} \frac{|x_1 y_1|^2}{|y_1 q|}. \end{aligned}$$

Mais  $|y_1 q| < 2$ ,  $|x_1 y_1| \geq \delta$ , donc

$$(11.120) \quad |x_1 q| > |y_1 q| + \frac{1}{8} \delta^2.$$

D'autre part, puisque  $[y_j q] \perp l_j$ , et  $x_j \in l_j$ ,  $j = 2, 3$ , on a donc

$$(11.121) \quad |y_2 q| \leq |x_2 q|, |y_3 q| \leq |x_3 q|,$$

et donc

$$(11.122) \quad \sum_{i=1}^3 |x_i q| > \sum_{i=1}^3 |y_i q| + \frac{1}{8} \delta^2 \geq 3 + \frac{1}{8} \delta^2.$$

Posons  $C(\delta) = \frac{1}{8} \delta^2$ , et on obtient la conclusion.

Fin de la démonstration du lemme.  $\square$

## 12 Produit et calibration

On commence encore par l'histoire de la liste de cônes minimaux de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^4$ . A part de l'union de deux plans presque orthogonaux, un autre candidat potentiel est le produit de deux exemplaires de  $Y$  orthogonaux, où  $Y \subset \mathbb{R}^2$  est un  $\mathbb{Y}$  de dimension 1, qui est l'union de 3 demi-droites qui se rencontrent en faisant angles de  $120^\circ$ .

Il paraît très naturel que le produit de deux ensembles minimaux soit minimal. Mais en fait c'est beaucoup moins évident. Même pour  $Y \times Y \subset \mathbb{R}^4$ , on ne sait pas le démontrer. Ici on donnera un résultat partiel, qui dit que  $Y \times Y$  est de mesure minimale parmi toutes ses déformations injectives.

**Proposition 12.1.** *Notons  $E = Y_1 \times Y_2 \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}_1^2 \times \mathbb{R}_2^2$ , où  $Y_1 \subset \mathbb{R}_1^2, Y_2 \subset \mathbb{R}_2^2$ . Alors pour toute application  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  Lipschitzienne injective telle que  $f(x) = x$  hors d'une boule  $B \subset \mathbb{R}^4$ , alors*

$$(12.2) \quad H^2(E \setminus F) \leq H^2(F \setminus E).$$

Démonstration. Sans perdre de généralité, on peut supposer que  $f = id$  hors du cylindre  $D(0, 1) = [B(0, 1) \cap \mathbb{R}_1^2] \times [B(0, 1) \cap \mathbb{R}_2^2]$ , parce que  $E$  est un cône.

On sait que pour chaque  $i = 1, 2$ , il y a une calibration paire pour  $Y_i \subset \mathbb{R}_i^2$ . Plus précisément, notons  $Y_1 \cap \partial B(0, 1) = \{x_0, x_1, x_2\} = \{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}_3}$  et  $Y_2 \cap \partial B(0, 1) = \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}_3}$ . Notons aussi  $x_i, y_j, i, j \in \mathbb{Z}_3$  les vecteurs  $\overrightarrow{ox_i}, \overrightarrow{oy_j}$ . Notons  $v_i \in \mathbb{R}_1^2$  le vecteur unitaire perpendiculaire à  $[x_i, x_{i+1}]$ , dont l'angle avec  $\overrightarrow{ox_i}$  est  $60^\circ$ ,  $i \in \mathbb{Z}_3$ , et semblablement  $u_j \in \mathbb{R}_2^2$ ,  $j \in \mathbb{Z}_3$ . Posons  $w_i = \frac{\overrightarrow{x_i x_{i+1}}}{|\overrightarrow{x_i x_{i+1}}|} = \frac{\overrightarrow{x_i x_{i+1}}}{\sqrt{3}}$  et  $W_j = \frac{\overrightarrow{y_j y_{j+1}}}{|\overrightarrow{y_j y_{j+1}}|} = \frac{\overrightarrow{y_j y_{j+1}}}{\sqrt{3}}$ .

Maintenant fixons une base orthonormée  $\{e_1 = w_0, e_2 = W_0, e_3 = v_0, e_4 = u_0\}$  de  $\mathbb{R}^4$ .

On définit, pour chaque  $i, j \in \mathbb{Z}_3$ , le courant  $S_{ij}$  par,

$$(12.3) \quad \langle S_{ij}, \varphi \rangle = \int_{[o, x_i] \times [o, y_j]} \det(x_i \wedge y_j \wedge \varphi(x)) dH^2(x), \text{ pour tout champs de 2-vecteurs } \varphi,$$

et le courant  $T_{ij}$  par

$$(12.4) \quad \langle T_{ij}, \varphi \rangle = \int_{[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]} \det(w_i \wedge W_j \wedge \varphi(x)) dH^2(x), \text{ pour tout champs de 2-vecteurs } \varphi.$$

Alors pour  $f$ , on a

$$(12.5) \quad \begin{aligned} & \langle f \# S_{ij}, (v_{i+1} - v_i) \wedge (u_{j+1} - u_j) \rangle \\ &= \langle f \# S_{ij}, v_{i+1} \wedge u_{j+1} - v_{i+1} \wedge u_j - v_i \wedge u_{j+1} + v_i \wedge u_j \rangle, \end{aligned}$$

et en sommant sur  $i \in \mathbb{Z}_3, j \in \mathbb{Z}_3$  on obtient

$$(12.6) \quad \begin{aligned} & \sum_{i \in \mathbb{Z}_3, j \in \mathbb{Z}_3} \langle f \# S_{ij}, (v_i - v_{i-1}) \wedge (u_j - u_{j-1}) \rangle \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}_3, j \in \mathbb{Z}_3} \langle f \# S_{ij} + f \# S_{i+1, j+1} - f \# S_{i, j+1} - f \# S_{i+1, j}, v_i \wedge u_j \rangle. \end{aligned}$$

Mais  $f$  ne bouge pas le bord, on a donc

$$(12.7) \quad \partial[f \# S_{ij} + f \# S_{i+1, j+1} - f \# S_{i, j+1} - f \# S_{i+1, j}] = \partial[S_{ij} + S_{i+1, j+1} - S_{i, j+1} - S_{i+1, j}],$$

Alors  $dv_i \wedge u_j = 0$  implique que

$$(12.8) \quad \begin{aligned} & \sum_{i \in \mathbb{Z}_3, j \in \mathbb{Z}_3} \langle f \# S_{ij} + f \# S_{i+1, j+1} - f \# S_{i, j+1} - f \# S_{i+1, j}, v_i \wedge u_j \rangle \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}_3, j \in \mathbb{Z}_3} \langle S_{ij} + S_{i+1, j+1} - S_{i, j+1} - S_{i+1, j}, v_i \wedge u_j \rangle. \end{aligned}$$

Pour  $i, j \in \mathbb{Z}_3$  fixés, on veut montrer, par un calcul simple, que

$$(12.9) \quad \langle S_{ij} + S_{i+1,j+1} - S_{i,j+1} - S_{i+1,j}, v_i \wedge u_j \rangle = \langle T_{ij}, v_i \wedge u_j \rangle.$$

En effet, notons  $a$  le point au milieu de  $[x_i, x_{i+1}]$  et  $b$  le point au milieu de  $[y_j, y_{j+1}]$ . Prenons  $S_{ij}$  par exemple. On a

$$(12.10) \quad \langle S_{ij}, v_i \wedge u_j \rangle = \int_{[o,x_i] \times [o,y_j]} \det(x_i \wedge y_j \wedge v_i \wedge u_j).$$

Mais  $x_i, v_i \in \text{span}\{e_1, e_3\}$ ,  $y_j, u_j \in \text{span}\{e_2, e_4\}$ , donc

$$\begin{aligned} & \int_{[o,x_i] \times [o,y_j]} \det(x_i \wedge y_j \wedge v_i \wedge u_j) \\ &= - \int_{[o,x_i]} \det_{e_1 \wedge e_3}(x_i \wedge v_i) \int_{[o,y_j]} \det_{e_2 \wedge e_4}(y_j \wedge u_j) \\ &= - \int_{[o,x_i]} v_i \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(x_i - x_{i-1}) \int_{[o,y_j]} y_j \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(y_j - y_{j-1}) \\ (12.11) \quad &= - \int_{[a,x_i]} v_i \cdot v_i \int_{[b,y_j]} y_j \cdot u_j \\ &= - \int_{[a,x_i]} \det_{e_1 \wedge e_3}(w_i \wedge v_i) \int_{[b,y_j]} \det_{e_2 \wedge e_4}(W_j \wedge u_j) \\ &= \int_{[a,x_i] \times [b,y_j]} \det(w_i \wedge W_j \wedge v_i \wedge u_j). \end{aligned}$$

Les autres trois  $S_{i+1,j+1}, S_{i,j+1}, S_{i+1,j}$  sont pareil. On a donc

$$\begin{aligned} & \langle S_{i+1,j+1}, v_i \wedge u_j \rangle = \int_{[a,x_{i+1}] \times [b,y_{j+1}]} \det(w_i \wedge W_j \wedge v_i \wedge u_j); \\ (12.12) \quad & \langle S_{i+1,j}, v_i \wedge u_j \rangle = - \int_{[a,x_{i+1}] \times [b,y_j]} \det(w_i \wedge W_j \wedge v_i \wedge u_j); \\ & \langle S_{i,j+1}, v_i \wedge u_j \rangle = - \int_{[a,x_i] \times [b,y_{j+1}]} \det(w_i \wedge W_j \wedge v_i \wedge u_j). \end{aligned}$$

On somme sur les 4, et on obtient

$$\begin{aligned} & \langle S_{ij} + S_{i+1,j+1} - S_{i,j+1} - S_{i+1,j}, v_i \wedge u_j \rangle \\ (12.13) \quad &= \int_{[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]} \det(w_i \wedge W_j \wedge v_i \wedge u_j) = \langle T_{ij}, v_i \wedge u_j \rangle. \end{aligned}$$

On déduit de (12.9) que

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \mathbb{Z}_3, j \in \mathbb{Z}_3} \langle S_{ij} + S_{i+1,j+1} - S_{i,j+1} - S_{i+1,j}, v_i \wedge u_j \rangle \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}_3, j \in \mathbb{Z}_3} \langle T_{ij}, v_i \wedge u_j \rangle \\ (12.14) \quad &= \sum_{i \in \mathbb{Z}_3, j \in \mathbb{Z}_3} \int_{[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]} \det(w_i \wedge W_j \wedge v_i \wedge u_j) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}_3, j \in \mathbb{Z}_3} H^2([x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]) = 27. \end{aligned}$$

La deuxième égalité est parce que les  $w_i, W_j, v_i, u_j$  sont des vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux. Alors en combinant (12.6),(12.8) et (12.14) on a

$$(12.15) \quad \sum_{i \in \mathbb{Z}_3, j \in Z_3} \langle f_\# S_{ij}, (v_i - v_{i-1}) \wedge (u_j - u_{j-1}) \rangle = 27$$

pour toute déformation  $f$  (pas forcément injective) dans  $D(0, 1)$ .

Mais  $|(v_i - v_{i-1}) \wedge (u_j - u_{j-1})| = 3$  pour chaque  $i, j \in \mathbb{Z}_3$ , et donc par la définition du courant,

$$(12.16) \quad \langle f_\# S_{ij}, (v_i - v_{i-1}) \rangle \leq 3H^2(f(S_{ij})),$$

et donc

$$(12.17) \quad \sum_{i \in \mathbb{Z}_3, j \in Z_3} H^2(f(S_{ij})) \geq 9 = H^2(E \cap D(0, 1)).$$

Mais l'injectivité de  $f$  donne

$$(12.18) \quad \sum_{i \in \mathbb{Z}_3, j \in Z_3} H^2(f(S_{ij})) = H^2(f(E \cap D(0, 1))),$$

on a donc

$$(12.19) \quad H^2(f(E \cap D(0, 1))) \geq H^2(E \cap D(0, 1)),$$

ce qui donne (12.2).  $\square$

L'injectivité de  $f$  est juste pour montrer (12.18). Il est encore très possible que  $Y \times Y$  soit minimal parmi toutes les déformations. Mais on n'a pas encore trouvé de bon moyen pour le montrer.

Plus généralement, on voudrait savoir si le produit de deux ensembles minimaux  $E = E_1 \times E_2$  reste minimal. Mais puisque déjà dans le cas plus simple de  $Y \times Y$  on ne sait pas comment faire, le problème paraît plus compliqué. Un résultat partiel (et simple) est que si  $E$  est le support d'un courant qui minimise la taille (au sens des courants, ce qui implique la minimalité A1), alors  $E \times \mathbb{R}^d$  est minimal. On peut l'obtenir par slicing.

Par contre, on peut donner un résultat dans la direction réciproque, qui dit que la minimalité du produit de deux ensembles donne la minimalité des deux.

**Proposition 12.20.** *Soit  $E_i, i = 1, 2$  deux ensembles rectifiables réduits fermés de dimension  $d_i$  dans  $\mathbb{R}^{n_i}$  respectivement. Notons  $n = n_1 + n_2, d = d_1 + d_2$ . Alors si  $E = E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^n$  est un ensemble minimal de dimension  $d$  dans  $\mathbb{R}^n$ , alors  $E_i$  est minimal,  $i = 1, 2$ .*

Démonstration. On va suivre l'argument dans [9] proposition 8.3, en faisant quelques modifications.

Donc supposons par exemple que  $f$  est une déformation de  $E_1$  dans une boule  $B \subset \mathbb{R}^{n_1}$  (c'est à dire que  $f$  et  $B$  vérifient (1.12) (avec  $U = \mathbb{R}^{n_1}$ ) et (1.13). Notons

$$(12.21) \quad H^{d_1}(E_1 \cap B) - H^{d_1}(F \cap B) = c.$$

On veut construire une application Lipschitzienne  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et utiliser le fait que  $E$  est minimal.

Soit  $R > 0$  grand, à choisir plus tard, et on prend une application lisse  $\psi$  sur  $\mathbb{R}^{n_2}$ , avec

$$(12.22) \quad \begin{aligned} \psi(y) &= 1 && \text{pour } |y| \leq R; \\ 0 \leq \psi(y) &\leq 1 && \text{pour } R < |y| < R + 1; \\ \psi(y) &= 0 && \text{pour } |y| \geq R + 1, \end{aligned}$$

et  $|\nabla \psi(y)| \leq 2$  partout. Puis on définit  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$  par

$$(12.23) \quad g(x, y) = \psi(y)f(x) + (1 - \psi(y))(f(x) - x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^{n_1} \text{ et } y \in \mathbb{R}^{n_2},$$

et pose  $\varphi(x, y) = (g(x, y), y)$ . Notons que  $g(x, y) = x + \psi(y)(f(x) - x)$ , et que  $f(x) - x$  est borné,

$$(12.24) \quad g \text{ et } \varphi \text{ sont Lipschitzienne, avec une borne sur les normes Lipschitziennes } L \text{ qui ne dépend pas de } R.$$

Posons  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}; f(x, y) \neq (x, y)\}$ , alors si  $(x, y) \in W$ ,  $\psi(y) \neq 0$  et  $f(x) \neq x$ . Par conséquent

$$(12.25) \quad W \subset B \times B(0, R + 1).$$

Notons aussi que par définition de  $\varphi$ , pour chaque  $(x, y) \in E$ ,  $\pi\varphi(x, y) = y$ , où  $\pi$  désigne le projecteur sur  $\mathbb{R}^{n_2}$ . C'est-à-dire, la deuxième coordonnée ne change pas. Donc  $\pi[\varphi(E) \cap B \times B(0, R + 1)] \subset E_2$ . Par conséquent on peut appliquer la formule de la coaire (c.f [14] Cor 3.3.22) à l'ensemble  $E$ , qui est rectifiable en tant qu'ensemble minimal.

$$(12.26) \quad \begin{aligned} &\int_{\varphi(E) \cap (B \times B(0, R + 1))} ||\wedge_{d_2} \pi(x)|| dH^d(x) \\ &= \int_{E_2} dH^{d_2}(z) H^{d_1}[\pi^{-1}\{z\} \cap \varphi(E) \cap (B \times B(0, R))]. \end{aligned}$$

Pour le côté gauche, notons que  $||\wedge_{d_2} \pi(x)|| = 1$ , donc

$$(12.27) \quad \int_{\varphi(E) \cap (B \times B(0, R))} ||\wedge_{d_2} \pi(x)|| dH^d(x) = H^d(\varphi(E) \cap (B \times B(0, R))).$$

Pour le côté droit, notons que pour  $z \in B(0, R) \cap E_2$ ,  $\pi^{-1}\{z\} \cap \varphi(E) \cap (B \times B(0, R + 1)) = f(E) \cap B$ , et donc

$$(12.28) \quad H^{d_1}[\pi^{-1}\{z\} \cap \varphi(E) \cap (B \times B(0, R + 1))] = H^2(E_1 \cap B) - c.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 & \int_{E_2} dH^{d_2}(z) H^{d_1}[\pi^{-1}\{z\} \cap \varphi(E) \cap (B \times B(0, R))] \\
 (12.29) \quad & = \int_{E_2 \cap B(0, R)} dH^{d_2}(z) H^{d_1}[\pi^{-1}\{z\} \cap \varphi(E) \cap (B \times B(0, R + 1))] \\
 & = H^{d_2}(E_2 \cap B(0, R)) \times [H^{d_1}(E_1 \cap B) - c] \\
 & = H^d(E \cap (B \times B(0, R))) - cH^{d_2}(E_2 \cap B(0, R)).
 \end{aligned}$$

D'un autre côté, pour  $z \in B(0, R + 1) \setminus B(0, R)$ , notons que par définition de  $\varphi$ ,  $\varphi(E) \cap [B \times (B(0, R + 1) \setminus B(0, R))] = \varphi(E \cap [B \times (B(0, R + 1) \setminus B(0, R))])$ , donc par (12.24)

$$\begin{aligned}
 & H^d(\varphi(E) \cap [B \times (B(0, R + 1) \setminus B(0, R))]) \\
 (12.30) \quad & \leq CH^d(E \cap [B \times (B(0, R + 1) \setminus B(0, R))]) \\
 & = CH^{d_1}(E_1 \cap B) H^{d_2}(E_2 \cap B(0, R + 1) \setminus B(0, R)),
 \end{aligned}$$

où  $C = L^d$  ne dépend pas de  $R$ .

En combinant (12.27), (12.29) et (12.30) on trouve que

$$\begin{aligned}
 (12.31) \quad & H^d(\varphi(E) \cap (B \times B(0, R + 1))) \leq H^d(E \cap (B \times B(0, R))) - cH^{d_2}(E_2 \cap B(0, R)) \\
 & + CH^{d_1}(E_1 \cap B) H^{d_2}(E_2 \cap B(0, R + 1) \setminus B(0, R)).
 \end{aligned}$$

Notons  $CH^1 d_1(E_1 \cap B) = C'$ , alors

$$\begin{aligned}
 (12.32) \quad & H^d(E \cap (B \times B(0, R))) - H^d(\varphi(E) \cap (B \times B(0, R + 1))) \\
 & \geq cH^{d_2}(E_2 \cap B(0, R)) - C' H^{d_2}(E_2 \cap B(0, R + 1) \setminus B(0, R))
 \end{aligned}$$

où  $c, C'$  ne dépendent pas de  $R$ . Alors par la minimalité de  $E$  on obtient

$$(12.33) \quad cH^{d_2}(E_2 \cap B(0, R)) - C' H^{d_2}(E_2 \cap B(0, R + 1) \setminus B(0, R)) \leq 0 \text{ pour tout } R > 0.$$

Alors si on a

$$(12.34) \quad \liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{H^{d_2}(E_2 \cap B(0, R + 1) \setminus B(0, R))}{H^{d_2}(E_2 \cap B(0, R))} = 0,$$

on peut obtenir que  $c < 0$  pour tout  $f$  (rappelons la définition de  $c$  dans (12.21)), et donc  $E_1$  est minimal. Un argument semblable donne aussi que si

$$(12.35) \quad \liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{H^{d_1}(E_1 \cap B(0, R + 1) \setminus B(0, R))}{H^{d_1}(E_1 \cap B(0, R))} = 0$$

alors  $E_2$  est minimal.

On affirme qu'au moins une des deux relations (12.34) et (12.35) est vraie. En effet, notons  $B_i(0, r) = B(0, r) \cap \mathbb{R}^{d_i}$ , alors pour chaque  $R > 0$ ,

$$\begin{aligned}
 (12.36) \quad & (E_2 \cap B_2(0, R + 1) \setminus B_2(0, R)) \times (E_1 \cap B_1(0, R + 1) \setminus B_1(0, R)) \\
 & \subset E \cap [B_1(0, R + 1) \times B_2(0, R + 1)] \setminus [B_1(0, R) \times B_2(0, R)].
 \end{aligned}$$

Mais  $E$  est minimal, donc par la régularité d'Ahlfors on a

$$(12.37) \quad \begin{aligned} H^d(E \cap [B_1(0, R+1) \times B_2(0, R+1)] \setminus [B_1(0, R) \times B_2(0, R)]) \\ = o(R^d) = o(H^d(E \cap B_1(0, R) \times B_2(0, R))), \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$(12.38) \quad \begin{aligned} H^d[(E_2 \cap B_2(0, R+1) \setminus B_2(0, R)) \times (E_1 \cap B_1(0, R+1) \setminus B_1(0, R))] \\ = o(H^d(E \cap B_1(0, R) \times B_2(0, R))), \end{aligned}$$

ou également

$$(12.39) \quad \begin{aligned} H^{d_1}(E_1 \cap B_1(0, R+1) \setminus B_1(0, R)) \times H^{d_2}((E_2 \cap B_2(0, R+1) \setminus B_2(0, R))] \\ = o(H^{d_1}(E \cap B_1(0, R)) \times H^{d_2}(B_2(0, R))), \end{aligned}$$

et donc

$$(12.40) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{H^{d_2}(E_2 \cap B(0, R+1) \setminus B(0, R))}{H^{d_2}(E_2 \cap B(0, R))} \cdot \frac{H^{d_1}(E_1 \cap B(0, R+1) \setminus B(0, R))}{H^{d_1}(E_1 \cap B(0, R))} = 0,$$

ce qui implique que (12.34) ou (12.35) est vrai.

Supposons par exemple que (12.34) est vrai, alors  $E_1$  est minimal. Mais dans ce cas là on peut utiliser la régularité d'Ahlfors de  $E_1$ , qui donne (12.35), et par conséquent  $E_2$  est aussi minimal. On obtient donc la conclusion.  $\square$

## Deuxième partie

# Minimiseurs topologiques

## Sommaire

---

<b>13 Introduction de la deuxième partie</b>	<b>142</b>
<b>14 Minimiseurs A1 dans <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>144</b>
<b>15 Contrôler la topologie par mesure</b>	<b>153</b>
<b>16 Préliminaires sur la topologie</b>	<b>161</b>
16.1 Topologie algébrique . . . . .	161
16.1.1 Homologie simpliciale (à coefficient dans $\mathbb{Z}$ ) . . . . .	162
16.1.2 Homologie singulière (à coefficient dans $\mathbb{Z}$ ) . . . . .	163
16.1.3 Les relations entre les deux groupes d'homologies . . . . .	164
16.2 Transversalité . . . . .	165
<b>17 L'image réciproque d'une chaîne lisse par une application transverse</b>	<b>167</b>
<b>18 Minimiseur topologique</b>	<b>171</b>
<b>19 Une discussion sur <math>T</math></b>	<b>178</b>

---

## 13 Introduction de la deuxième partie

Dans cette partie, on va introduire une définition de minimiseurs topologiques, qui généralise celle des MS-minimiseurs (voir la définition plus bas). On montrera des propriétés des minimiseurs topologiques, qui sont vérifiées déjà par les MS-minimiseurs. Par exemple, tout minimiseur topologique est un minimiseur d'Almgren. On fera ensuite un premier pas dans la direction d'une caractérisation des minimiseurs topologiques dans  $\mathbb{R}^n$ , qui est motivé par le théorème 13.9, qui dit que tout MS-minimiseur de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^3$  est un cône. Ensuite, on reviendra au problème de caractérisation des minimiseurs d'Almgren de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^3$ , et on restreindra la classe potentielle des Almgren-minimiseurs qui ne seraient pas des cônes.

On rappelle la définition générale des ensembles minimaux. On se donne au préalable définition de la classe des compétiteurs d'un ensemble  $E$ . Par exemple, la classe des compétiteurs d'Almgren utilisée dans la partie I, mais deux autres classes seront utilisés ci-dessous. Et l'on définit les ensembles minimaux comme suit.

**Définition 13.1** (ensembles minimaux associés à une classe de compétiteurs donnée). *Soient  $0 < d < n$  des entiers,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . L'ensemble  $E$  fermé dans  $U$  est dit minimal de dimension  $d$  dans  $U$  si*

$$(13.2) \quad H^d(E \cap B) < \infty \text{ pour toute boule compacte } B \subset U$$

et

$$(13.3) \quad H^d(E \setminus F) \leq H^d(F \setminus E)$$

pour tout compétiteur  $F$  de  $E$  dans  $U$ .

Cette définition deviendra complète dès que nous aurons défini les classes de compétiteurs.

Dans cette partie, on va juste considérer des ensembles minimaux dans  $\mathbb{R}^n$ . C'est à dire, on prend  $U = \mathbb{R}^n$  dans la définition. Alors par la remarque 1.17, un compétiteur d'Almgren est défini comme suit.

**Définition 13.4** (compétiteur d'Almgren). *Un compétiteur d'Almgren de  $E$  dans  $\mathbb{R}^n$  est un ensemble  $F = f(E)$ , où :*

$$(13.5) \quad f = \text{id hors d'une boule } B,$$

et où on demande aussi que  $f$  soit Lipschitzienne.

**Remarque 13.6.** Comparé avec la définition 1.11, en prenant  $U = \mathbb{R}^n$ , ici on ne demande que (13.5), i.e. (1.12) dans (1.11). Mais par la continuité de  $f$ , il existe une boule plus grande  $B' \supset B$ , telle que  $f(B) \subset B'$ . Alors par (13.5), la boule  $B'$  vérifie (13.5) et (13.6). Donc en effet, cette définition coïncide avec la définition 1.11, avec  $U = \mathbb{R}^n$ .

Maintenant on va donner une classe plus grande de compétiteurs de codimension 1.

**Définition 13.7** (compétiteur de Mumford-Shah (MS)). *Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  un fermé de dimension  $n - 1$  dans  $\mathbb{R}^n$ . On dit qu'un fermé  $F \subset \mathbb{R}^n$  est un MS-compétiteur de  $E$  s'il existe une boule  $B$  telle que*

- 1)  $F \setminus B = E \setminus B$  ;
- 2) Pour tous  $y, z \in \mathbb{R}^n \setminus (B \cup E)$  qui sont séparés par  $E$ ,  $y, z$  sont aussi séparés par  $F$ .

Ici " $y, z$  sont séparés par  $E$ " veut dire que  $y$  et  $z$  appartiennent à 2 composantes connexes différentes de  $\mathbb{R}^n \setminus E$ .

On appelle  $E$  un ensemble minimal au sens d'Almgren (resp. MS) si  $E$  est comme dans la définition 13.1, en prenant la classe de compétiteurs d'Almgren (resp. MS).

**Remarque 13.8.** *La notion d'ensemble minimal de Mumford-Shah vient de la théorie de la fonctionnelle de Mumford-Shah, et en particulier des "minimas globaux" introduits par A.Bonnet. Dans ce cadre les ensembles MS-minimaux sont juste les minimas globaux pour lesquels la fonction supplémentaire  $u$  est constante. Voir [8] pour plus de détails.*

En codimension 1 (où l'on peut définir des compétiteurs MS), un compétiteur d'Almgren est automatiquement un compétiteur MS (voir [13] Chap XVII 4.3 pour la démonstration). Et par conséquent un ensemble minimal MS est automatiquement un ensemble minimal au sens d'Almgren. On ne sait pas si la classe des MS-minimiseurs est strictement plus petite que la classe de minimiseurs au sens d'Almgren, bien que la classe de compétiteurs Al est strictement plus petite que la classe de compétiteurs MS. Mais de toute façon, la régularité des ensembles minimaux de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^3$  plus la condition topologique qu'on pose sur les compétiteurs MS donne déjà de bons résultats.

**Théorème 13.9** ([9], Thm 1.9). *Soit  $E$  un ensemble minimal au sens MS dans  $\mathbb{R}^3$ , alors il existe un ensemble  $E^* \subset E$ ,  $H^2(E \setminus E^*) = 0$ , tel que  $E^*$  est soit l'ensemble vide, soit un plan, soit un cône de type  $\mathbb{Y}$  ou  $\mathbb{T}$ .*

En bref, le théorème dit qu'un MS-minimiseur dans  $\mathbb{R}^3$  est un cône minimal. Rappelons que dans le cas des minimiseurs d'Almgren, on sait qu'un minimiseur d'Almgren de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^3$  est localement  $C^1$ -équivalent à un cône minimal. Mais l'analogie du théorème 13.9 pour les minimiseurs d'Almgren n'est pas encore connue.

Donc dans le paragraphe 14, on veut aussi savoir si le théorème 13.9 est vrai pour des ensembles minimaux Al. Il existe un contre exemple potentiel connu (c.f. [9], paragraphe 19). Mais on va montrer qu'il n'est pas un vrai contre exemple, puisqu'il n'est pas minimal (voir le corollaire 14.21). Par contre, on donnera un autre contre-exemple potentiel d'une structure plus compliquée.

Tous ces contre-exemples sont des exemples topologiques, parce qu'on utilise toujours des arguments topologiques pour montrer qu'un ensemble n'est pas minimal, c'est à dire, on utilise la topologie pour

contrôler la mesure. Mais au paragraphe 15 on donne une méthode pour contrôler la topologie par la mesure.

Ensuite, aux paragraphes 16-18, on essaye d'abord de généraliser la définition de MS-minimiseur en codimension plus haute, et de donner des propriétés fondamentales. L'idée est de remplacer la condition 2) de la définition 13.7 par une condition sur l'homologie de sphères contenues dans  $\mathbb{R}^n \setminus (B \cup E)$ ; voir la définition 18.1 pour la définition précise. On montre au corollaire 18.17 que tout minimiseur topologique est un minimiseur d'Almgren, ce qui permet d'utiliser la théorie de régularité qui est disponible dans ce cadre.

Dans le paragraphe 19, on essaye de regarder s'il y a de bons résultats semblables au théorème 13.9, et on donne un contre-exemple potentiel.

## 14 Minimiseurs Al dans $\mathbb{R}^3$

Dans ce paragraphe on se place à nouveau dans  $\mathbb{R}^3$ , et on va discuter du théorème 13.9 en remplaçant les ensembles minimaux MS par des ensembles minimaux Al.

Le théorème dit qu'un ensemble minimal MS de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^3$  est forcément un cône. L'idée de la démonstration est la suivante.

Etant donné un ensemble minimal Al, on regarde les limites par implosion de cet ensemble. C'est à dire, on prend n'importe quel point  $x \in E$  et on regarde les ensembles

$$(14.1) \quad E(r, x) = \frac{1}{r}(E - x)$$

en faisant tendre  $r$  vers l'infini.

Pour toute suite  $r_k$  qui tend vers l'infini telle que les  $E(r_k, x)$  convergent (sur tout compact pour la distance de Hausdorff), la limite, qui ne dépend pas de  $x$ , est un ensemble minimal avec densité constante, et est donc un cône minimal. De plus, toutes les limites par implosion de  $E$  ont la même densité. Or on a trois types d'ensembles minimaux, ceux qui ressemblent à un plan, un  $Y$ , et un  $T$ .

1° Si  $E$  ressemble à un plan à l'infini, on fixe n'importe quel point  $x \in E$ , alors la densité de  $E$  en  $x$  est au moins 1. Mais la densité à l'infini est 1. Par la monotonie par rapport à  $r$  de la fonction de densité  $d(r, x) = \frac{H^2(E \cap B(x, r))}{r^2}$  en  $x$  (c.f.[9], proposition 5.16), on sait que  $d(r, x)$  est constante, de sorte que  $E$  est un cône centré en  $x$  (c.f.[9] Théorème 6.2), et est donc un plan passant par  $x$ .

2° Si  $E$  ressemble à un  $Y$  à l'infini, alors l'enjeu est de trouver un point de type  $Y$  dans  $E$ . Une fois qu'on a un tel point, on obtiendra que la densité en ce point est constante, et donc que  $E$  est un  $Y$  centré en ce point. Pour trouver un point de type  $Y$ , notons d'abord qu'il n'existe pas de point de type  $T$ , à cause de la monotonie de la densité. Alors si il n'y a pas de point de type  $Y$ , tout point dans  $E$  est un point de type  $\mathbb{P}$ , et donc  $E$  est une variété de classe  $C^1$ , par la  $C^1$  régularité d'un ensemble minimal.

Alors par un argument de degré, on obtient une contradiction. (c.f.[9] proposition 16.24 et paragraphe 17).

3° Si  $E$  ressemble à un  $T$  à l'infini, on n'arrive pas à montrer l'existence d'un point de type  $T$  dans  $E$  par un argument topologique simple. En fait, il y a un contre exemple  $E_0$  qui coïncide avec un  $T$  hors d'une boule  $B$ , et est localement  $C^1$  équivalent à un plan ou un  $Y$  près de chaque point. (c.f.[9], paragraphe 19). Et donc pour garantir l'existence d'un point de type  $T$ , on ajoute une condition de séparation supplémentaire (voir [9], proposition 18.29), qui est vérifiée par tous les minimiseurs MS.

On peut donc observer que dans les cas 1° et 2°, la minimalité au sens Al garantit déjà que l'ensemble est un cône. Seulement pour 3° on a besoin d'un propriété supplémentaire. Mais en fait l'exemple  $E_0$  n'est qu'un exemple topologique. On va montrer tout de suite qu'il n'est pas un ensemble minimal Al. Donc il est encore possible qu'en fait tous les ensembles minimaux Al de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^3$  soient des cônes, ce qu'on va discuter aussi.

Soit  $E$  un ensemble minimal Al dont la limite d'implosion est un  $T$ . Le but est de trouver un point de type  $\mathbb{T}$  (dans  $\mathbb{R}^3$ , cela veut dire un point près duquel  $E$  est équivalent à  $T$ ) dans  $E$ , parce que l'on déduirait comme ci-dessus que la densité de  $E$  en ce point est constante, puis que  $E$  est un  $T$ .

Donc supposons que  $T$  est un cône minimal de type  $\mathbb{T}$  centré à l'origine, et qu'il existe une suite  $\{t_k\}$  tel que

$$(14.2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty \text{ et } \lim_{k \rightarrow \infty} d_{0,t_k}(E, T) = 0.$$

Alors d'abord, par la monotonie de la densité à l'origine, on sait que pour chaque  $k$ ,  $\frac{1}{t_k^2} H^2(E \cap B(0, t_k)) < d_T$ , et donc

$$(14.3) \quad H^2(E \cap B(0, t_k)) < H^2(T \cap B(0, t_k)).$$

Notons  $B = B(0, 1)$ . Notons  $y_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$  les quatre points de type  $\mathbb{Y}$  de  $T \cap B$ . Notons  $C$  l'enveloppe convexe de  $\{y_i, 1 \leq i \leq 4\}$ , qui est un tétraèdre régulier inscrit à  $B$ . Notons  $T_C = T \cap C$ .

On a alors

$$(14.4) \quad \frac{1}{2} H^2(\partial C) = \frac{4}{3} \sqrt{3} < 2\sqrt{2} = H^2(T_C).$$

En effet, notons  $o$  l'origine, alors l'angle  $\angle_{y_i o y_j} = \arccos(-\frac{1}{3})$ , de sorte que

$$(14.5) \quad |y_i y_j| = (\|oy_i\|^2 + \|oy_j\|^2 - 2\|oy_i\|\|oy_j\| \cos \angle_{y_i o y_j})^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}/\sqrt{3}.$$

Par conséquent

$$(14.6) \quad S_{\Delta y_1 y_2 y_3} = \frac{\sqrt{3}}{4} |y_i y_j|^2 = \frac{2}{3} \sqrt{3},$$

si bien que

$$(14.7) \quad \frac{1}{2}H^2(\partial C) = 2S_{\Delta y_1 y_2 y_3} = \frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

D'autre part,

$$(14.8) \quad S_{\Delta y_i oy_j} = \frac{1}{2} \sin \angle_{y_i oy_j} |oy_i| |oy_j| = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

de sorte que

$$(14.9) \quad H^2(T_C) = 6S_{\Delta y_i oy_j} = 2\sqrt{2}.$$

Notons  $\delta = \frac{1}{4}(H^2(T_C) - H^2(\partial C))$ . Alors la même démonstration du lemme 16.43 de [9] donne

**Lemme 14.10.** *Il existe  $\epsilon_1 > 0$  tel que si  $d_{0,2}(E, T) < \epsilon_1$ , alors*

$$(14.11) \quad H^2(E \cap C) > H^2(T_C) - \delta.$$

D'un autre côté, il existe  $\epsilon_2 > 0$  tel que si  $d_{0,2}(E, T) < \epsilon_2$ , alors dans  $B(0, \frac{3}{2}) \setminus B(0, \frac{1}{2})$ ,  $E$  est une version  $C^1$  de  $T$ .

Alors par (14.2), et quitte à faire une dilatation, on peut supposer que pour  $t_k = 2$ ,

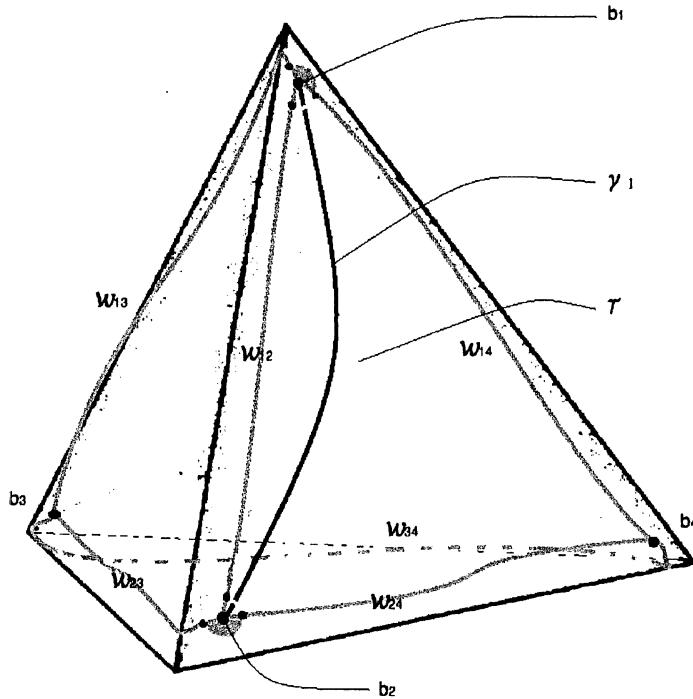
$$(14.12) \quad d_{0,2}(E, T) < \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\},$$

ce qui donne (14.11), et que dans  $B(0, \frac{3}{2}) \setminus B(0, \frac{1}{2})$   $E$  est une version  $C^1$  de  $T$ .

En particulier sur le bord de  $C$ ,  $E \cap \partial C$  est de la même topologie que  $T \cap \partial C$ , c'est à dire,  $E \cap \partial C$  est composé de six courbes  $C^1$  par morceaux, qui se rencontrent en 4 extrémités  $b_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , chaque  $b_i$  est très proche de chaque  $y_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , où les  $y_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , sont les quatre points de type  $\mathbb{Y}$  dans  $T \cap \partial C$ . Notons  $w_{ij}$  la courbe dans  $E \cap \partial C$  dont les extrémités sont  $b_i$  et  $b_j$ , alors  $w_{ij}$  est très proche de  $[b_i, b_j]$ , en particulier, si on note  $\Omega_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , la composante connexe de  $\partial C \setminus E$  qui est en face de  $b_i$  ( $b_i \notin \Omega_i$ ), bordée par  $w_{kl}$ ,  $k, l \neq i$ , alors on peut demander que  $\epsilon$  soit suffisamment petit pour que

$$(14.13) \quad \text{pour chaque } 1 \leq i \leq 4, H^2(\Omega_i) > \frac{1}{4}H^2(\partial C) - \delta,$$

où  $\frac{1}{4}H^2(\partial C)$  est la mesure d'une face de  $\partial C$ . (voir le dessin 14-1)



14-1

Maintenant, supposons qu'il n'y a pas de point de type  $\mathbb{T}$  dans  $E \cap C$ . Notons  $E_Y$  l'ensemble de points de type  $\mathbb{Y}$  dans  $E$ . Par la  $C^1$  régularité autour des points de type  $\mathbb{Y}$  (c.f. [10] théorème 1.15 et lemme 14.6),  $E_Y \cap C$  est composé de courbes  $C^1$ , dont les bouts sont des  $b_i, 1 \leq i \leq 4$ . Alors il existe deux de ces courbes  $\gamma_1, \gamma_2$  dont les bouts sont des  $b_i$ . Supposons par exemple que  $\gamma_1 \cap \partial C = \{b_1, b_2\}$  et  $\gamma_2 \cap \partial C = \{b_3, b_4\}$ .

Pour chaque point  $x \in \gamma_1$ , il existe un voisinage  $B(x, r)$  tel que dans  $B(x, r)$ ,  $E$  est une version  $C^1$  d'un  $Y + x$ , qui coupe  $B(x, r)$  en 3 composantes connexes. C'est aussi vrai pour les deux points  $b_1$  et  $b_2$ , parce que  $b_1, b_2$  sont des points de type  $\mathbb{Y}$  dans  $E$ . Alors par la compacité de  $\gamma_1 \cup \{b_1, b_2\}$ , il existe  $r > 0$  tel que dans le voisinage tubulaire  $B(\gamma_1, r)$  de  $\gamma_1$ ,  $E$  est un  $Y$  tordu, dont l'épine est  $\gamma_1$ , et qui découpe  $B(\gamma_1, r)$  en trois composantes connexes, chacun étant un tube long qui joint l'un des trois  $\Omega_i$  proches de  $b_1$  à l'un des trois  $\Omega_j$  qui sont proches de  $b_2$ . Notons que si  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$  sont liés par l'un de ces longs tubes, alors ils appartiennent à la même composante connexe de  $B \setminus E$ . Par conséquent, il existe  $1 \leq i, j \leq 4, i \neq j$  tel que  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$  sont dans la même composante connexe de  $B \setminus E$ , et il existe un tube  $T$  le long de  $\gamma_1$  qui les connecte.

Supposons qu'il existe une déformation  $f$  de  $E$  dans  $C$  (voir la définition 1.11),  $1 \leq i \neq j \leq 4$ , deux points  $x \in \Omega_i, y \in \Omega_j$  tels que

$$(14.14) \quad f(E) \subset C \setminus [x, y].$$

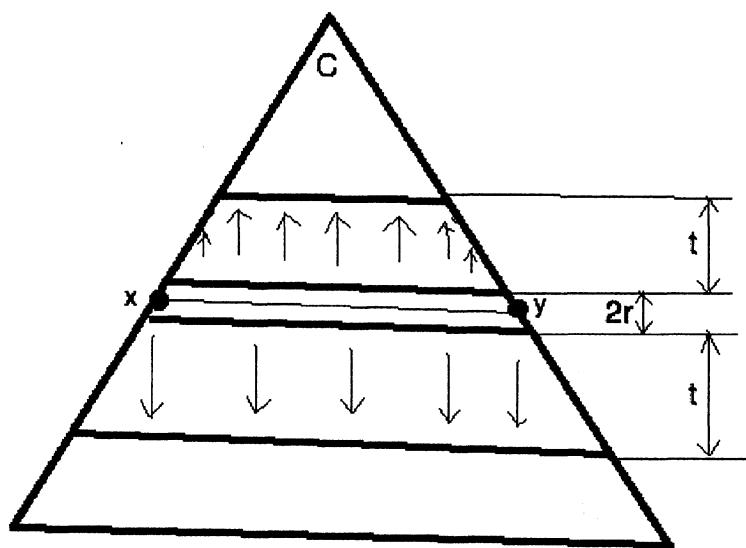
Puisque  $f(E)$  est fermé, il existe  $r > 0$  tel que

$$(14.15) \quad f(E) \subset C \setminus B([x, y], r).$$

Pour chaque  $t > 0$ , posons

$$(14.16) \quad g_t : C \setminus B([x, y], r) \rightarrow (\mathbb{R}^3 \setminus B([x, y], r + t)) \cup (\partial C \setminus B([x, y], r))$$

l'application définie comme suit :  $g_t = Id$  sur  $C \setminus B([x, y], r + t)$ ; pour chaque  $z \in C \cap B([x, y], r + t) \setminus B([x, y], r)$ , soit  $z_0$  le point de  $[x, y]$  tel que  $[z, z_0] \perp [x, y]$ , alors  $g_t(z)$  est l'intersection de la demi-droite  $[z_0, z]$  avec  $\partial(C \cap B([x, y], r + t))$ . Voir le dessin 14-2.



14-2

Par la définition on sait que  $g_t$  est une déformation Lipschitzienne. De plus, quand  $t$  est suffisamment grand (par exemple  $t > 2$ ), on a que  $(\mathbb{R}^3 \setminus B([x, y], r + t)) \cup (\partial C \setminus B([x, y], r))$ , donc  $g_t(E) \subset \partial C \setminus B([x, y], r)$ .

Maintenant notons  $h_x : \Omega_i \setminus B(x, r) \rightarrow \partial \Omega_i$  et  $h_y : \Omega_j \setminus B(y, r) \rightarrow \partial \Omega_j$  les déformations radiales centrées en  $x$  et  $y$ . C'est à dire, pour  $z \in \Omega_i \setminus B(x, r)$ ,  $h_x(z)$  est l'intersection de la demi-droite  $[x, z]$  avec  $\partial \Omega_i$ , et pour  $z \in \Omega_j \setminus B(y, r)$ ,  $h_y(z)$  est l'intersection de la demi-droite  $[y, z]$  avec  $\partial \Omega_j$ . Comme les  $\Omega_j$  sont localement des versions  $C^1$  de triangles, il y a en effet une unique intersection, et que  $h_x$  et  $h_y$  sont Lipschitzienne. Notons  $h_t = h_x \circ h_y \circ g_t \circ f$  la déformation de  $C \setminus B([x, y], r) \rightarrow C \setminus B([x, y], r)$ , qui envoie  $E$  dans  $G = \partial C \setminus (\Omega_i \cup \Omega_j)$  pour  $t$  grand, et de plus, les  $h_t$  ne bougent pas  $E \cap C = \bigcup_{k=1}^4 \partial \Omega_k$ .

Ceci implique qu'on peut déformer  $E$  dans  $C$  vers un sous ensemble de  $G$ .

Par (18.13) et (18.11),

$$(14.17) \quad \begin{aligned} H^2(G) &= H^2(\partial C) - H^2(\Omega_i) - H^2(\Omega_j) < \frac{1}{2}H^2(\partial C) + 2\delta \\ &= H^2(T_C) - 2\delta < H^2(E \cap C), \end{aligned}$$

ce qui contredit le fait que  $E$  est minimal. Par conséquent, si  $E$  ne contient pas de point de type  $\mathbb{T}$ , alors il n'existe pas de déformation  $f$  de  $E$  dans  $C$  telle que  $C \setminus f(E)$  contient un segment qui connecte deux  $\Omega_i$  différents. Mais d'un autre côté, si  $E$  contient un point de type  $\mathbb{T}$ , par l'argument au début de ce paragraphe,  $E$  est un  $T$  centré en ce point, de sorte qu'il n'existe pas de telle déformation  $f$  non plus. On a donc

**Proposition 14.18.** *Soit  $E$  un minimiseur Al dans  $\mathbb{R}^3$  tel que*

- 1)  $d_{0,2}(E, T) < \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$  ;
- 2)  $E$  ne contient pas de point de type  $\mathbb{T}$ .

*Soit  $C$ ,  $\Omega_i$  sont comme ci-dessus, alors il n'existe pas de déformation  $f$  de  $E$  dans  $C$  telle que  $C \setminus f(E)$  contient un segment qui connecte deux  $\Omega_i$  différents.*

Un corollaire immédiat est que les  $\gamma_i$  font des noeud. En effet, par le lemme ci-dessus, le tube  $T$  le long de  $\gamma_1$  ne peut pas être trop simple, parce que, par exemple, si  $\gamma_1$  ne fait pas de noeud, il existe un homéomorphisme Lipschitzien  $f$  qui est une déformation dans  $C$  telle que

$$(14.19) \quad f(\gamma_1) = [b_1, b_2]$$

alors

$$(14.20) \quad C \setminus f(E) = f(C \setminus E) \supset f(\gamma_1) = [b_1, b_2],$$

ce qui contredit la proposition 14.18.

Par conséquent, le contre exemple potential proposé par Guy David dans son article [9] n'est pas un vrai contre exemple, puisque les deux  $\gamma_i$  dans cet exemple ne font pas de noeud tous les deux. On a donc

**Corollaire 14.21.** *L'ensemble  $E_0$  donné dans le paragraphe 19 de [9] n'est pas minimal.*

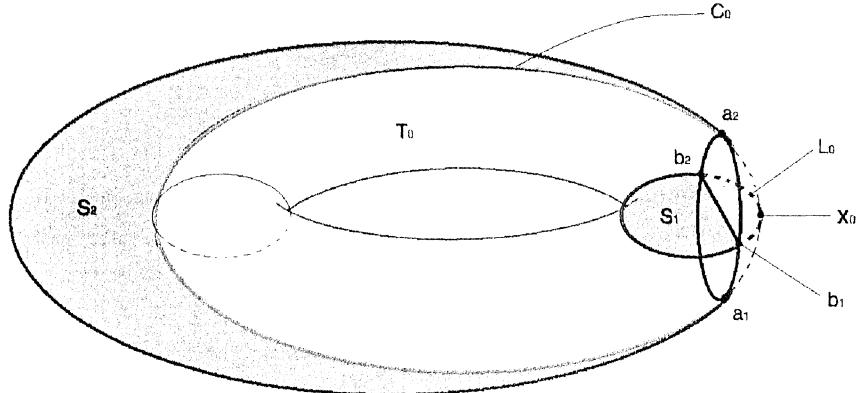
Par l'argument ci-dessus, quand on regarde à une grande échelle où  $E$  est très proche de  $T$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  font des noeuds tous les deux.

Topologiquement on ne peut pas éviter ce cas. Les discussions suivantes sont donc destinées à donner un tel exemple topologique. On va maintenant chercher des propriétés nécessaires de  $E$  si  $\gamma_1$  fait un noeud. Et ensuite on essayera de construire un exemple où  $\gamma_1$  fait un noeud, en profitant des propriétés obtenues.

On va donc construire notre exemple à partir d'une surface fermée orientable non simplement connexe.

Mais regardons d'abord le contre exemple  $E_0$  donné dans le paragraphe 19 de [10]. Bien que dans cet exemple les  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ne font pas des noeud, il est aussi un exemple qui contient une surface non simplement connexe. Regardons-le donc pour avoir une idée.

En effet, prenons un tore  $T_0$ , (voir le dessin 14-3), prenons le plus grand cercle horizontal (l'équateur)  $C_0$  (ligne verte), et prenons n'importe quel cercle vertical  $L_0$  (ligne rouge). Notons  $x_0$  leur intersection. Alors on prend  $r_0 > 0$  tel que  $B_0 = B(x_0, r_0) \cap T_0$  est un disque topologique. Notons  $a_1, a_2$  l'intersection  $\partial B_0 \cap C_0$ , et  $b_1, b_2$  l'intersection  $\partial B_0 \cap L_0$ .

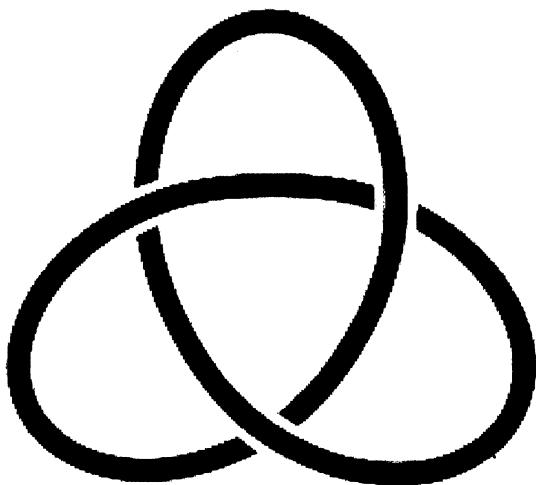


14-3

Notons  $\widehat{a_1 a_2} = C_0 \setminus B_0$  le grand arc entre  $a_1$  et  $a_2$ , et  $\widehat{b_1 b_2} = L_0 \setminus B_0$  le grand arc entre  $b_1$  et  $b_2$ . Puis notons  $S_1$  la partie verticale plane dont le bord est  $[b_1, b_2] \cup \widehat{b_1 b_2}$ . D'un autre côté, notons  $P$  le plan contenant  $E_0$ , et prenons un disque fermé  $\overline{B}_1 \subset P$  qui contient  $\widehat{a_1 a_2}$  et dont le bord contient  $a_1, a_2$ . Alors notons  $\widehat{a_1 a_2} = \partial B_1 \setminus B_0$  le grand arc du  $\partial B_1$  entre  $a_1$  et  $a_2$ , et notons  $S_2 \subset P$  la partie entre  $\widehat{a_1 a_2}$  et  $\widehat{a_1 a_2}$ .

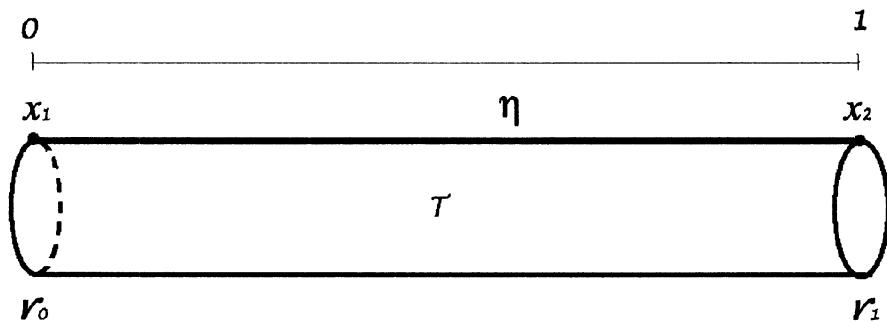
Alors l'ensemble  $(T_0 \setminus B_0) \cup S_1 \cup S_2$  est topologiquement l'exemple donné dans le paragraphe 19 de [10]. Ici  $a_1, a_2, b_1, b_2$  sont les 4 points de type  $\mathbb{Y}$  qui correspondent aux 4 points de type  $\mathbb{Y}$  dans  $E \cap \partial B(0, 1)$ ,  $\widehat{a_1 a_2}$  et  $\widehat{b_1 b_2}$  correspondent à  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  respectivement ; et  $\widehat{a_1 a_2}$  et  $[b_1, b_2]$  et les 4 arcs sur  $\partial B_0$  entre  $a_i$  et  $b_j$  pour  $i, j = 1, 2$  correspondent aux 6 courbes de  $E \cap \partial B(0, 1)$ .

Après la discussion ci-dessus, on est prêt à construire de la même manière, un exemple  $E$  où  $\gamma_1$  est la partie non-triviale d'un noeud de trèfle. Autrement dit, l'union de  $\gamma_1$  et du segment  $[b_1, b_2]$  fait un noeud de trèfle (voir le dessin 14-4). Mais c'est juste un exemple topologique, et il est peu probable que l'ensemble  $E$  décrit ci-dessous puisse en fait être minimal. Notons que toutes les constructions sont dans  $\mathbb{R}^3$  bien sûr.



14-4

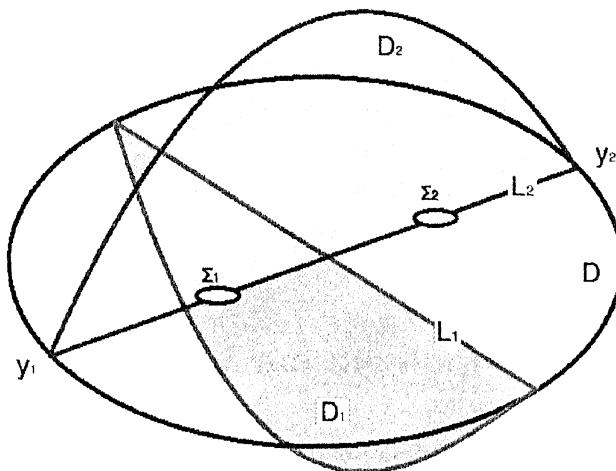
Donc prenons un tube fin droit  $T = \gamma \times [0, 1]$ , où  $\gamma$  est un cercle. Fixons un point  $x_0 \in \gamma$ . Notons les deux cercles  $\gamma_1 = \gamma \times \{0\}$  et  $\gamma_2 = \gamma \times 1$ , notons  $x_1 = (x_0, 0)$  et  $x_2 = (x_0, 1)$ . Notons  $\eta = \{x_0\} \times [0, 1]$  le segment horizontal. (voir le dessin 14-5)



14-5

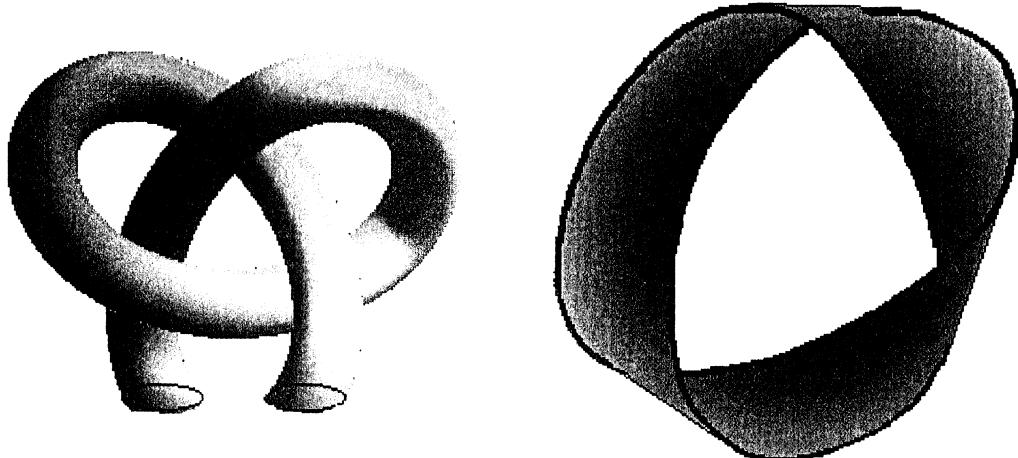
Prenons un grand disque  $D$  horizontal centré à l'origine de rayon  $R$ , fixons un de ces diamètres  $L_1$ , et notons  $L_2$  le diamètre orthogonal à  $L_1$ , ses extrémités  $y_1, y_2$ . Alors  $L_1$  sépare  $D$  en deux composantes connexes. On enlève deux petits disques  $\Sigma_1, \Sigma_2 \subset D$  symétriques par rapport à  $L_1$  dont les centres  $o_1, o_2$  appartiennent à  $L_2$  avec  $d(o_i, y_i) < \frac{1}{2}H^1(L_2)$ , et dont les bords sont de même taille que  $\gamma$ .

Notons  $Q$  le plan orthogonal à  $D$  et passant par  $L_1$ . Notons  $D_1 \subset Q$  un demi disque dont le diamètre est  $L_1$ . Notons aussi  $Q'$  le plan orthogonal à  $D$  et passant par  $L_2$ , et  $D_2 \subset Q'$  le demi disque dont le diamètre est  $L_2$ , et choisissons  $D_2$  de l'autre côté de  $D$  par rapport à  $D_1$ . (dessin 14-6)



14-6

On tord maintenant le tube  $T$  par un difféomorphisme  $f$  vers une partie d'un noeud de trèfle contenu dans  $B(0, R)$  (voir le dessin 14-7 à gauche), et on demande que  $f(\gamma_i) = \partial\Sigma_i$  et que  $f(x_i)$  soit le point le plus proche de  $y_i$  sur  $\partial\Sigma_i$ ,  $i = 1, 2$ . Donc  $f(x_i) \in L_2$ . Par conséquent la courbe fermée  $\eta_1 := f(\eta) \cup [f(x_1), y_1] \cup [f(x_2), y_2] \cup [\partial D_2 \setminus L_2]$  est un noeud de trèfle. On peut donc appuyer une surface  $S_1 \subset B(0, R)$  de classe  $C^1$  sur  $\eta_1$ . Voir le dessin 14-7 à droite qui décrit une surface s'appuyant sur un noeud de trèfle.



14-7

Maintenant notons  $E = [D \setminus \Sigma_1 \cup \Sigma_2] \cup f(T) \cup D_1 \cup S_1$ . Alors l'ensemble  $E$  est topologiquement l'exemple qu'on voulait décrire. Ici  $y_1, y_2$  et les deux extrémités de  $L_1$   $z_1, z_2$  sont les quatre points de type  $\mathbb{Y}$  dans  $E \cap \partial B(0, R)$ ,  $f(\eta) \cup [f(x_1), y_1] \cup [f(x_2), y_2]$  est  $\gamma_1$  qui fait un noeud, et  $L_1$  est  $\gamma_2$ . Les 4

arcs courts  $\widehat{y_i z_j}$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$  sur  $\partial D$ , et  $\partial D_1 \setminus L_1$ ,  $\partial D_2 \setminus L_2$  sont des six courbes de  $E \cap \partial B(0, R)$ .

On est donc arrivé à fabriquer un exemple pour lequel une courbe de  $E_Y$  fait un noeud. Vraisemblablement cet ensemble n'est pas minimal. Mais topologiquement on ne peut pas l'éviter.

Par contre quand on regarde un ensemble  $E$  dont l'intersection avec  $\partial B$  est vraiment  $T \cap \partial B$ , alors on sait montrer que  $E$  n'est pas minimal. On le fera dans le paragraphe suivant.

## 15 Contrôler la topologie par mesure

Rappelons que  $T$  est le cône sur le tétraèdre régulier centré à l'origine.

Notons  $B = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^3$  la boule unité ouverte et  $\overline{B}$  son adhérence. Alors  $T$  coupe la sphère  $\partial B$  en quatre régions triangulaires égales  $\{S_i\}_{1 \leq i \leq 4}$ . On a alors

$$(15.1) \quad \bigcup_{i=1}^4 \overline{S_i} = \partial B$$

et

$$(15.2) \quad \bigcup_{i=1}^4 S_i = \partial B \setminus T.$$

Notons  $a_j$ ,  $1 \leq j \leq 4$ , les quatre sommets de  $T \cap \partial B$ , où  $a_j = \cap_{i \neq j} \overline{S_i} \cap \partial B$  est le point qui se trouve en face de  $S_j$ .

**Proposition 15.3.** 1) Soit  $E \subset \overline{B} \cap \mathbb{R}^3$  un ensemble fermé, 2-rectifiable, Ahlfors régulier de dimension 2, avec

$$(15.4) \quad E \cap \partial B = T \cap \partial B.$$

Alors si  $H^2(E) < H^2(T \cap \partial B)$ ,

$$(15.5) \quad \begin{aligned} &\text{il existe } 1 \leq i < j \leq 4, \text{ et quatre points } a, b, c, d \text{ appartenant à un plan,} \\ &\text{tels que } a \in S_i, d \in S_j, b, c \in B \setminus E, \angle abc > \frac{\pi}{2}, \angle bcd > \frac{\pi}{2} \\ &\text{et } [a, b] \cup [b, c] \cup [c, d] \subset \overline{B} \setminus E. \end{aligned}$$

où  $[x, y]$  désigne le segment d'extrémités  $x$  et  $y$  et  $\angle abc \leq \pi$  l'angle du plus petit secteur délimité par  $\overline{ba}$  et  $\overline{bc}$ .

2) Si de plus  $E$  est minimal dans  $B$  et vérifie (15.4), alors

$$(15.6) \quad \text{soit } E = T \cap \overline{B}, \text{ soit (15.5) est vrai.}$$

Voici un corollaire direct de la proposition 15.3.

**Corollaire 15.7.**

$$(15.8) \quad H^2(E) \leq H^2((T \cap B \setminus C) \cup G) = H^2(T) - (2\sqrt{2} - \frac{4}{3}\sqrt{3}).$$

Démonstration. Si  $E \subset \overline{B}$  est un ensemble minimal réduit qui vérifie (15.4), et qui n'est pas  $T \cap \overline{B}$ , alors par (15.6), (15.5) est vrai. Mais (15.5) donne l'existence d'une déformation  $f$  dans  $B(0, 1)$  telle que  $f(E) \subset B \setminus [a, d]$ , on peut donc déformer  $E$  sur un sous ensemble de  $(T \cap B \setminus C) \cup G$ , où  $C, G$  sont comme dans le paragraphe précédent. On a donc par (14.4),  $\square$

$$(15.9) \quad H^2(E) \leq H^2((T \cap B \setminus C) \cup G) = H^2(T) - (2\sqrt{2} - \frac{4}{3}\sqrt{3}).$$

Démonstration de la proposition 15.3.

Pour 1), on va démontrer la contraposée. Supposons donc que (15.5) n'est pas vrai.

Notons  $P_j$  le plan orthogonal à  $o\vec{a}_j$  et tangent à la sphère unité,  $p_j$  son projecteur. Notons  $R_j = p_j(\overline{S}_j) \subset p_j(\cup_{i \neq j} \overline{S}_i) \subset P_j$ . Alors pour chaque  $1 \leq j \leq 4$  et chaque  $x \in R_j$ ,

$$(15.10) \quad p_j^{-1}(x) \cap E \neq \emptyset.$$

En fait sinon, on a  $R_j \setminus p_j(E) \neq \emptyset$ , où  $p_j(E)$  est compact, en tant que projection d'un compact. Donc  $R_j \setminus p_j(E) \neq \emptyset$  est ouvert. Notons que puisque  $R_j \setminus (\cup_{i \neq j} p_j(S_i))$  est de mesure nulle, on a

$$(15.11) \quad (R_j \setminus p_j(E)) \cap (\cup_{i \neq j} p_j(S_i)) \neq \emptyset.$$

Prenons  $x \in (R_j \setminus p_j(E)) \cap (\cup_{i \neq j} p_j(S_i))$ . Alors  $x \notin \partial R_j$ , parce que  $\partial S_j \subset E$  et donc  $\partial R_j = \partial p_j(S_j) = p_j(\partial S_j) \subset p_j(E)$ . Par conséquent,  $p_j^{-1}(x) \cap B$  est un segment  $[a, d]$  perpendiculaire à  $P_j$  avec  $a \neq d$ ,  $a \in S_j^\circ$  et  $d \in \cup_{i \neq j} S_i^\circ$ . Prenons  $b, c \in [a, d]$  tels que  $a, b, c, d$  sont différents, et alors (15.5) est vérifié. Une contradiction avec notre hypothèse.

Maintenant pour chaque  $x \in R_j$ , notons  $f_j(x)$  le point dans  $p_j^{-1}(x) \cap E$  qui est le plus proche de  $R_j$ . Autrement dit,  $f_j(x)$  est le premier point dans  $E$  dont la projection est  $x$ . Ce point existe et est unique, puisque  $E$  est compact et que  $p_j^{-1}(x)$  est une droite orthogonale à  $R_j$ .

Notons  $A_j = f_j(R_j)$ . Alors  $A_j$  est mesurable. En effet,

$$(15.12) \quad \begin{aligned} A_j &= \{x \in E : \forall y \in E \text{ tel que } d(y, P_j) < d(x, P_j), |p_j(y) - p_j(x)| > 0\} \\ &= \bigcap_{p,q} \{x \in E : \forall y \in E \text{ tel que } d(y, P_j) < d(x, P_j) - 2^{-p}, |p_j(y) - p_j(x)| > 2^{-q}\}. \end{aligned}$$

Maintenant puisque  $E$  est rectifiable,  $A_j \subset E$  l'est aussi. Donc pour presque tout  $x \in A_j$ , le plan tangent approximatif  $T_x A_j$  de  $A_j$  en  $x$  existe. Notons  $v_j$  le vecteur normal extérieur unitaire de  $P_j$ , et notons  $w_j(x)$  le vecteur unitaire normal de  $T_x A_j$  tel que  $\langle v_j, w_j(x) \rangle \geq 0$ . Alors  $w_j(x)$  est bien défini pour  $x$  tel que  $T_x A_j \neq P_j$ .

Posons

$$(15.13) \quad E_j = \{x \in A_j : T_x A_j \not\subset P_j\}.$$

Alors  $w_j$  est un champs de vecteurs mesurable sur  $E_j$ . Par le théorème de Sard, on a

$$(15.14) \quad H^2(p_j(A_j \setminus E_j)) = 0.$$

Mais  $p_j$  est injective sur  $A_j$ , donc  $p_j(A_j \setminus E_j) = p_j(A_j) \setminus p_j(E_j) = R_j \setminus p_j(E_j)$ , et donc  $R_j \setminus p_j(E_j)$  est de mesure nulle. De plus, pour presque tout  $x \in E_j$ ,  $T_x A_j = T_x E_j$ .

On veut montrer que

$$(15.15) \quad \int_{E_j} \langle v_j, w_j(x) \rangle dx = H^2(R_j).$$

Donc appliquons la formule de l'aire (c.f.[14] 3.2.20), avec  $m = \nu = 2$ ,  $W = E_j$ ,  $f = p_j$ ,  $g = 1_{R_j}$  ; on obtient

$$(15.16) \quad \int_{E_j} \|\wedge_2 apDp_j(x)\| dH^2 x = \int_{R_j} N(p_j, z) dH^2 z.$$

De plus par (15.10),  $N(p_j, z) \geq 1$  pour tout  $z \in R_j$ . Par contre  $N(p_j, z) \leq 1$  puisque  $E_j \subset A_j$  sur lequel  $p_j$  est injective. Donc  $N(p_j, z) = 1$  pour tout  $z \in R_j$ . Par conséquent

$$(15.17) \quad \int_{R_j} N(p_j, z) dH^2 z = H^2(R_j).$$

Pour le membre de gauche de (15.16), prenons  $w_j^1(x)$  un vecteur unitaire dans  $T_x E_j$  tel que  $w_j^1(x) \parallel R_j$ , et  $w_j^2(x)$  le vecteur unitaire dans  $T_x E_j$  orthogonal à  $w_j^1(x)$ . Alors  $p_j(w_j^1(x)) \perp p_j(w_j^2(x))$ , par géométrie élémentaire dans  $\mathbb{R}^3$ . On a alors

$$(15.18) \quad \begin{aligned} \|\wedge_2 apDp_j(x)\| &= \|p_j(w_j^1(x)) \wedge p_j^j(w_j^2(x))\| = |p_j(w_j^1(x))| |p_j(w_j^2(x))| \\ &= |p_j(w_j^2(x))|. \end{aligned}$$

La première égalité est vraie parce que  $p_j$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ , la deuxième égalité parce que  $p_j(w_j^1(x)) \perp p_j(w_j^2(x))$ , et la dernière parce que  $w_j^1(x) \parallel S_j$ .

Maintenant notons  $v_j^2(x) = \frac{p_j(w_j^2(x))}{|p_j(w_j^2(x))|} \in P_j$ . Il est bien défini parce que  $T_x E_j \not\subset P_j$  et donc  $|p_j(w_j^2(x))| > 0$ . Alors  $w_j(x), w_j^2(x), v_j, v_j^2(x)$  sont tous orthogonaux à  $w_j^1(x)$ , et donc appartiennent à un même plan, avec  $w_j(x) \perp w_j^2(x), v_j \perp v_j^2(x)$ . Donc

$$(15.19) \quad |\langle w_j(x), v_j \rangle| = |\langle w_j^2(x), v_j^2(x) \rangle| = |p_j(w_j^2(x))|.$$

Mais par définition on a  $\langle w_j(x), v_j \rangle \geq 0$ , donc

$$(15.20) \quad \langle w_j(x), v_j \rangle = |p_j(w_j^2(x))| = \|\wedge_2 apDp_j(x)\|$$

par (19.18). En combinant avec (15.16) et (15.17) on obtient (15.15). Notons qu'ici  $v_j$  ne dépend pas de  $E$ .

Maintenant pour  $x \in A_j \setminus E_j$ , on définit un champs de vecteur mesurable  $w_j(x)$  tel que  $w_j(x) \perp T_x A_j$ . Alors  $\langle w_j(x), v_j \rangle = 0$  pour presque tout  $x \in A_j \setminus E_j$ . Et donc

$$(15.21) \quad \int_{A_j} \langle v_j, w_j(x) \rangle dx = H^2(R_j).$$

En sommant sur  $j$ , on a

$$(15.22) \quad \sum_{j=1}^4 \int_{A_j} \langle v_j, w_j(x) \rangle dx = \sum_{j=1}^4 \int_{E_j} \langle v_j, w_j(x) \rangle dx = \sum_{i=1}^4 H^2(R_j).$$



Ensuite, notons  $E_j^0 = E_j \setminus \cup_{i \neq j} E_i$ ,  $E_{ij} = (E_i \cap E_j) \setminus \cup_{k \neq i,j} E_k$  pour  $i \neq j$ . On affirme que

$$(15.23) \quad E_j \setminus (E_j^0 \cup \cup_{i \neq j} E_{ij}) \text{ est de mesure nulle pour tout } j.$$

Supposons que non. Alors il existe  $i, j, k$  différents tel que  $E_i \cap E_j \cap E_k$  est de mesure non nulle. Supposons par exemple que  $i = 1, j = 2, k = 3$ , et notons  $E_{123} = E_1 \cap E_2 \cap E_3$ . Maintenant puisque  $E_{123}$  est un ensemble rectifiable mesurable de mesure positive, et que  $E_{123} \subset E$ , donc pour presque tout  $x \in E_{123}$ , le plan tangent approximatif  $T_x E_{123}$  de  $E_{123}$  en  $x$  existe et est égal à  $T_x E$ . Et de plus puisque  $E$  est Ahlfors régulier,  $T_x E$  est un vrai plan tangent (voir, par exemple, [8], Exercice 41.21, page 277). Choisissons donc un tel  $x \in E_{123}$ .

Alors par définition de  $A_j$ , on a que pour  $j = 1, 2, 3$ , le segment  $[x, p_j(x)] \cap E = \{x\}$ . Et par définition de  $E_j$ , on a que  $T_x E \not\subset P_j$  et donc  $[x, p_j(x)] \cap (T_x E + x) = \{x\}$ , puisque  $[x, p_j(x)] \perp P_j$ . Maintenant le sous espace affine  $T_x E + x$  sépare  $\mathbb{R}^3$  en 2 demi espaces, et puisque pour  $j = 1, 2, 3$ ,  $[x, p_j(x)] \cap (T_x E + x) = \emptyset$ , il existe  $1 \leq i < j \leq 3$  tel que  $[x, p_i(x)]$  et  $[x, p_j(x)]$  se situent du même côté de  $T_x E + x$ . Supposons par exemple que  $i = 1, j = 2$ .

Notons, pour  $i = 1, 2$ ,  $\alpha_i$  l'angle entre  $[x, p_i(x)]$  et  $T_x E + x$ . Posons  $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ . Alors puisque  $T_x E$  est un vrai plan tangent, il existe  $r > 0$  tel que pour tout  $y \in E \cap B(x, r)$ ,

$$(15.24) \quad d(y, T_x E + x) < \frac{r}{2} \sin \alpha.$$

Posons  $b = [x, p_1(x)] \cap \partial B(x, r)$ ,  $c = [x, p_2(x)] \cap \partial B(x, r)$ , alors par définition de  $\alpha$ ,  $d(b, T_x E + x) \geq r \sin \alpha$ , et  $d(c, T_x E + x) \geq r \sin \alpha$ . Mais  $b, c$  sont du même côté de  $T_x E + x$ , donc pour tout  $y \in [b, c]$ ,  $d(y, T_x E + x) \geq r \sin \alpha$ , et donc  $[b, c] \cap E = \emptyset$ , à cause de (15.24).

Maintenant on pose  $a = p_1(x)$ ,  $d = p_2(x)$ . Notons que dans le triangle  $\Delta_{abc}$ ,  $|xb| = |xc|$ , de sorte que  $\angle xbc = \angle xcb$ . Mais  $\angle xbc + \angle xcb + \angle bxc = \pi$ ,  $\angle bxc > 0$ , donc  $\angle xbc = \angle xcb < \frac{\pi}{2}$ . Par conséquent,  $\angle abc = \pi - \angle xbc > \frac{\pi}{2}$ ,  $\angle bcd = \pi - \angle xcb > \frac{\pi}{2}$ . Ainsi on a trouvé quatre points  $a, b, c, d$  tel que (19.5) est vrai. Une contradiction.

On obtient donc (15.23). Et par conséquent, on a

$$(15.25) \quad H^2(\cup_{j=1}^4 E_j) = \sum_{j=1}^4 H^2(E_j^0) + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} H^2(E_{ij}).$$

Pour estimer les mesures, on va appliquer la méthode de calibration. Rappelons que  $v_j$  est le vecteur normal extérieur unitaire de  $P_j$ . Alors on a par (15.22),

$$(15.26) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^4 H^2(R_j) &= \sum_{j=1}^4 \int_{E_j} \langle v_j, w_j(x) \rangle dx \\ &= \sum_{j=1}^4 \int_{E_j^0} \langle v_j, w_j(x) \rangle dx + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \int_{E_{ij}} \langle v_i, w_i(x) \rangle + \langle v_j, w_j(x) \rangle dx \end{aligned}$$

Pour le premier terme

$$(15.27) \quad \begin{aligned} \left| \int_{E_j^0} \langle v_j, w_j(x) \rangle dx \right| &\leq \int_{E_j^0} |\langle v_j, w_j(x) \rangle| dx \\ &\leq \int_{E_j^0} |v_j| |w_j(x)| dx = H^2(E_j^0) \end{aligned}$$

et donc

$$(15.28) \quad \left| \sum_{j=1}^4 \int_{E_j^0} \langle v_j, w_j(x) \rangle dx \right| \leq \sum_{j=1}^4 \left| \int_{E_j^0} \langle v_j, w_j(x) \rangle dx \right| \leq \sum_{j=1}^4 H^2(E_j^0).$$

Pour le deuxième terme, observons que  $w_i(x) = \pm w_j(x)$  pour  $x \in E_{ij}$ , et notons  $\epsilon_x = \frac{w_i(x)}{w_j(x)}$ . Alors

$$(15.29) \quad \begin{aligned} |\langle v_i, w_i(x) \rangle + \langle v_j, w_j(x) \rangle| &= |\langle v_i + \epsilon(x)v_j, w_i(x) \rangle| \\ &\leq |v_i + \epsilon(x)v_j| |w_i(x)| = |v_i + \epsilon(x)v_j| \leq \max\{|v_i + v_j|, |v_i - v_j|\}. \end{aligned}$$

Par définition de  $v_j$ , l'angle entre  $v_i$  et  $v_j$  est l'angle supplémentaire de l'angle  $\theta_{ij}$  entre  $P_i$  et  $P_j$ . Alors un calcul simple donne

$$(15.30) \quad |v_i + v_j| = \frac{2}{\sqrt{3}} < 1, |v_i - v_j| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} > 1.$$

Donc  $\max\{|v_i + v_j|, |v_i - v_j|\} = |v_i - v_j| > 1$ . Notons  $D$  cette valeur. Par (15.29),

$$(15.31) \quad \begin{aligned} \left| \int_{E_{ij}} \langle v_i, w_i(x) \rangle + \langle v_j, w_j(x) \rangle dx \right| &\leq \int_{E_{ij}} |\langle v_i, w_i(x) \rangle + \langle v_j, w_j(x) \rangle| dx \leq D H^2(E_{ij}) \end{aligned}$$

et donc

$$(15.32) \quad \begin{aligned} \left| \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \int_{E_{ij}} \langle v_i, w_i(x) \rangle + \langle v_j, w_j(x) \rangle dx \right| &\leq \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \left| \int_{E_{ij}} \langle v_i, w_i(x) \rangle + \langle v_j, w_j(x) \rangle dx \right| = D \sum_{1 \leq i < j \leq 4} H^2(E_{ij}). \end{aligned}$$

En combinant (15.26), (15.28) et (15.32) on obtient

$$(15.33) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^4 H^2(R_j) &\leq \sum_{j=1}^4 H^2(E_j^0) + D \sum_{1 \leq i < j \leq 4} H^2(E_{ij}) \\ &\leq D \left[ \sum_{j=1}^4 H^2(E_j^0) + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} H^2(E_{ij}) \right] (\text{puisque } D > 1) \\ &= D H^2(\bigcup_{j=1}^4 E_j) \leq D H^2(E). \end{aligned}$$

D'un autre côté, on peut faire la même chose pour  $T$ , le cône sur l'union des arêtes de  $C$ , puisque  $T$  sépare les quatre faces de  $C$  et donc (15.5) est automatiquement faux. Alors par les définitions, on peut bien voir que  $T_i^0 = \emptyset$  pour tout  $i$ ,  $\epsilon_{ij} = -1$  pour tout  $i \neq j$ , et  $(v_i - v_j) \perp T_x T$  pour presque tout  $x \in T_{ij}$ , ce qui implique que

$$(15.34) \quad \langle v_i, w_i(x) \rangle + \langle v_j, w_j(x) \rangle = D$$

pour tout  $x \in T_{ij}$ . En bref, toutes les inégalités sont des égalités pour  $T$ , par conséquent

$$(15.35) \quad DH^2(E) \geq \sum_{i=1}^4 H^2(R_j) = DH^2(T),$$

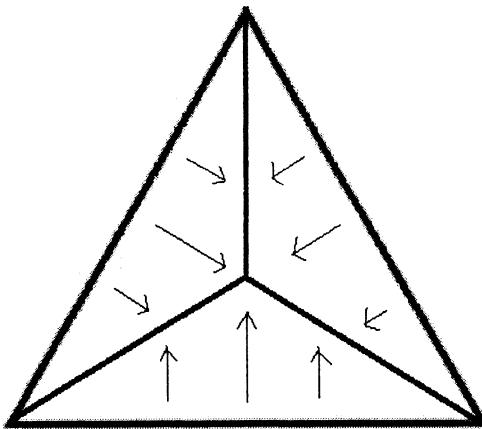
et donc

$$(15.36) \quad H^2(E) \geq H^2(T)$$

pour tout  $E$  qui ne vérifie pas (15.5).

Démontrons 2). Soit  $E$  un ensemble minimal réduit, alors il est automatiquement rectifiable et Ahlfors régulier (c.f.[11]).

Notons d'abord que  $H^2(E) \leq H^2(T)$ . En effet, pour chaque  $x \in \overline{B} \setminus T$ , il existe  $1 \leq i \leq 4$ , tel que  $x$  et  $S_i$  appartiennent à la même composante connexe de  $B \setminus T$ . Alors posons  $f(x)$  l'intersection de  $x + [0, a_i]$  avec  $T$ . Alors  $f : \overline{B} \rightarrow T$  est une rétraction Lipschitzienne (voir le dessin ci-dessous). Maintenant si  $E$  est un ensemble minimal qui vérifie (15.4), alors posons  $g : \partial B \cup E \rightarrow T \cup \partial B$ ,  $g(x) = f(x)$  pour  $x \in E$ ,  $g(x) = x$  pour  $x \in \partial T$ . Ensuite on étend  $g$  en une fonction qui envoie  $\overline{B}$  dans  $\overline{B}$ . (dessin 15-1). Donc  $g$  déforme  $E$  en un sous-ensemble de  $T \cap \overline{B}$ .



15-1

Mais  $E$  est minimal, donc

$$(15.37) \quad H^2(E) \leq H^2(g(E)) \leq H^2(T \cap \overline{B}).$$

Donc pour montrer 2), il faut montrer que si (15.5) n'est pas vrai, et  $H^2(E) = H^2(T \cap \overline{B})$ , alors  $E = T \cap \overline{B}$ . Et en particulier  $E$  contient un point de type T.

Par les arguments dans 1), si (15.5) n'est pas vrai, et  $H^2(E) = H^2(T)$ , alors les inégalités (15.27)-(15.29) et (15.31)-(15.33) sont tous des égalités.

On a donc

- 1) pour presque tout  $x \in E_{ij}$ ,  $T_x E_{ij} \perp v_i - v_j$ . Notons  $P_{ij}$  le plan perpendiculaire à  $v_i - v_j$ , alors pour presque tout  $x \in E_{ij}$ ,  $T_x E_{ij} = P_{ij}$ .
- 2)  $H^2(E_j^0) = 0$  pour tout  $j$ , puisque  $D > 1$ .
- 3)  $H^2(A_j \setminus E_j) = 0$ .
- 4)  $p_j(E) = p_j(E_j) = R_j$ .

Alors pour presque tout  $x \in E$ ,  $T_x E$  est l'un des  $P_{ij}$ . Si  $x$  est un point tel que  $T_x E$  existe, par la  $C^1$  régularité (c.f.[10], Thm 1.15 et Lem 14.4), il existe  $r = r(x) > 0$  tel que dans  $B(x, r)$ ,  $E$  est le graphe d'une fonction  $C^1$  sur  $T_x E$ , ce qui implique que dans  $B(x, r)$ , la fonction  $f : E \cap B(x, r) \rightarrow G(3, 2)$ ,  $f(y) = T_y E$  est continue. Mais pour  $T_y E$  on n'a que six choix  $P_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$ , qui sont des points isolés dans  $G(3, 2)$ , et donc  $T_y E = T_x E$  pour tout  $y \in B(x, r) \cap E$ . Par conséquent  $E \cap B(x, r) = (T_x E + x) \cap B(x, r)$ , un disque parallèle à  $P_{ij}$ .

Encore à cause de la régularité  $C^1$ , on a que  $E_P = \{x \in E \cap B : T_x E \text{ existe}\}$  est un variété de classe  $C^1$ , qui est ouverte dans  $E$ . Et donc

$$(15.38) \quad \begin{aligned} &\text{chaque composante connexe de } E_P \text{ est une partie} \\ &\text{d'un plan qui est parallèle à l'un des } P_{ij}. \end{aligned}$$

Notons  $E_Y = \{x \in E : x \text{ est de type } Y\}$ . Alors si  $x \in E_Y$ , par la  $C^1$  régularité (c.f.[10], Thm 1.15 et Lem 14.6), il existe  $r = r(x) > 0$  tel que dans  $B(x, r)$ ,  $E$  est  $C^1$  équivalent à un  $Y$ . Notons  $L_Y$  l'épine de ce  $Y$ , et  $S_1, S_2, S_3$  les trois demi plans ouverts de ce  $Y$ , alors si on note  $\varphi$  l'homéomorphisme  $C^1$  qui envoie  $Y$  sur  $E$  dans  $B(x, r)$ , les  $\varphi(S_i) \cap B(x, r)$  sont des variétés  $C^1$  connexes, et donc chacune est une partie d'un  $P_{ij}$ . Par conséquent,  $\varphi(L_Y) \cap B(x, r)$  est un segment ouvert passant par  $x$  et est parallèle à un  $D_j$ , où  $D_j = P_{ij} \cap P_{jk}$ .

Donc  $E_Y \cap B$  est l'union de segments ouverts  $I_1, I_2, \dots$ , chaque segment est parallèle à l'un des  $D_j$ , et son extrémité est soit un point dans la sphère  $\partial B$ , soit un point de type  $T$ . De plus

$$(15.39) \quad \begin{aligned} &\text{pour chaque } x \in E_Y \text{ tel que } T_x E_Y = D_j, \text{ il existe } r > 0 \\ &\text{tel que dans } B(x, r), E \text{ est un } Y \text{ dont l'épine est } x + D_j. \end{aligned}$$

Maintenant si  $x \in E$  est un point de type  $T$ , alors par les arguments ci-dessus, la limite d'exposition  $C_x E$  de  $E$  en  $x$  est  $T$ . Par conséquent, pour chaque segment  $I_i$ , au moins une de ses extrémité est dans

la sphère unité. En effet, si  $I_i$  est limité par deux points  $x, y$  de type  $T$ , alors au moins l'un de  $C_x E$  et  $C_y E$  n'est pas  $T$  (deux  $T$  parallèles ne peuvent pas être connectés par une épine commune).

Donc les segments  $I_i$  vont jusqu'au bord.

**Lemme 15.40.** *Si  $x$  est de type  $T$ , alors  $(T+x) \cap B \subset E$ .*

Démonstration. Par la régularité  $C^1$  autour des point de type  $T$ , il existe  $r > 0$  tel que dans  $B(x, r)$   $E$  est un exemple  $C^1$  de  $T+x$ . Mais par (15.38) et (15.39) on a que en fait  $E \cap B(x, r) = (T+x) \cap B(x, r)$ . Notons  $L_i, 1 \leq i \leq 4$  les 4 épines de  $T+x$ , alors  $L_i \cap B \subset E_Y$ , parce que  $L_i \cap B(x, r)$  est une partie d'un segment  $I_j \subset E_Y$ , qui a déjà une extrémité  $x$  de type  $T$ , donc l'autre extrémité est dans la sphère, ce qui veut dire  $I_j = L_i \cap B(0, 1)$ .

Maintenant on prend une famille à un paramètre de boules ouvertes  $B_s$  de rayon  $r \leq s \leq 1$  qui vérifie

- 1)  $B(x, r) \subset B_s \subset B$  pour tout  $s > r$ ;
- 2)  $B_s \subset B_{s'}$  pour tout  $s < s'$ ;
- 3)  $\cap_{1 > t > s} B_t = \overline{B}_s$  et  $\cup_{t < s} B_t = B_s$  pour tout  $r < s < 1$ .

Notons  $R = \inf\{s > r, (T+x) \cap B_s \not\subset E\}$ . On affirme que  $R = 1$ .

Supposons que non.

Alors par définition de  $B_s$ , les quatre épines et les six faces de  $T+x$  ne sont jamais tangentes à  $\partial B_s$ ,  $r < s < 1$ , puisque  $B(x, r) \subset B_s$ .

Pour chaque  $y \in \partial B_R \cap (T+x)$ ,  $y$  n'est pas un point de type  $T$ . En effet, si  $y$  appartient à l'un des  $L_i$ , alors  $y$  est automatiquement un point de type  $\mathbb{Y}$ , puisque  $L_i \setminus \{x\} \subset E_Y$ ; Si  $y$  n'est pas de type  $\mathbb{Y}$ , il existe alors  $i, j$  tels que  $y \in x + P_{ij}$ . Donc il existe  $r_y > 0$  tel que  $B(y, r_y) \cap (x+T)$  est un disque  $D_y$  centré en  $y$ . Maintenant par la définition de  $R$ , pour tout  $s < R$ ,  $B_s \cap (T+x) \subset E$ , et par conséquent  $B_R \cap (T+x) \subset E$ . Et donc  $D \cap B_R \cap B(y, r_y) \subset E$ , ce qui implique que  $y$  ne peut pas être un point de type  $\mathbb{T}$ .

Alors si  $y$  est un point de type  $\mathbb{P}$ , supposons que  $y \in P_{ij} + x$ , alors  $T_y E = P_{ij}$ . Par (15.38), et puisque  $R < 1$ , il existe un  $r_y > 0$  tel que  $E \cap B(y, r_y) = (P_{ij} + y) \cap B(y, r_y)$ . Cela signifie que

$$(15.41) \quad \text{il existe } r_y > 0 \text{ tel que } E \text{ coïncide avec } T+x \text{ dans } B_R \cap B(y, r_y).$$

Si  $y$  est un point de type  $\mathbb{Y}$ , alors il est forcément dans l'un des  $L_i$ . Par le même argument que ci-dessus en utilisant (15.39), on obtient aussi (15.41).

Donc (15.39) est vrai pour tout  $y \in \partial B_R \cap (T+x)$ . Mais  $\partial B_R \cap (T+x)$  est compact, on peut donc obtenir un  $r > 0$  uniforme tel que pour chaque  $y$  (15.39) est vrai en posant  $r_y = r$ . Cela contredit la définition de  $R$ .

Donc  $R = 1$ . Mais  $B_1 \subset B$  est de rayon 1, de sorte que  $B_1 = B$ . Par définition de  $R$  on obtient la conclusion.

Fin de la démonstration du lemme.

Par le lemme, on sait que si  $x$  est un point de type  $T$ , alors  $x$  est forcément l'origine, à cause de (15.4). Donc  $T \cap B \subset E$ . Mais dans ce cas là, on a  $E = T \cap \overline{B}$ , parce que  $H^2(E) = H^2(T \cap \overline{B})$ .

Il reste donc le cas où il n'y a pas de point de type  $T$ . Mais dans ce cas, le même sorte d'argument que le lemme 15.40 donne ce qui suit.

**Lemme 15.42.** *Soit  $x$  un point de type  $\mathbb{Y}$  dans  $E$ , et  $T_x E_Y = D_j$ . Notons  $Y_j$  le  $Y$  dont l'épine est  $D_j$ . Alors*

$$(15.43) \quad (Y_j + x) \cap B \subset E.$$

Mais c'est impossible, parce que  $E \cap \partial B = T \cap \partial B$  ne contient pas à la fois les deux bouts d'un  $(Y_j + x) \cap \partial B(0, 1)$ .

On obtient donc  $E = T \cap \overline{B}$ . Et donc (15.6). □

## 16 Préliminaires sur la topologie

A partir de ce paragraphe, on commence à essayer de généraliser le concept de minimiseur de Mumford Shah aux codimensions plus grandes.

Dans ce paragraphe, on donne d'abord quelques rappels sur des définitions et théorèmes (sans démonstration) de topologie algébrique et de transversalité. Les lecteurs qui connaissent bien ce sujet peuvent bien sûr sauter ce paragraphe.

### 16.1 Topologie algébrique

Dans cette section on va discuter de deux sortes de groupes d'homologie. Un groupe d'homologie associé à un espace topologique est un invariant topologique, c'est à dire, à deux espaces homéomorphes sont associées deux groupes d'homologie isomorphes. Donc les groupes d'homologie sont utiles pour distinguer des espaces topologiques.

On donne d'abord les définitions de deux groupes d'homologies. Ensuite on donne des liens nécessaires entre les deux, pour continuer à discuter de la généralisation des minimiseurs MS.

### 16.1.1 Homologie simpliciale (à coefficient dans $\mathbb{Z}$ )

**Définition 16.1** (simplexe). *Un  $n$ -simplexe  $s$  est l'enveloppe convexe des  $n + 1$  points utilisés pour former un repère affine dans un espace euclidien de dimension  $n$ . L'enveloppe convexe de tout sous-ensemble de ces  $n + 1$  points est appelé une face du simplexe. Les faces sont des simplexes elles-mêmes. En particulier, l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble de taille  $m + 1$  (de ces  $n + 1$  points) est un  $m$ -simplexe, appelé une  $m$ -face du simplexe initial. En particulier, pour  $m = n$ , une  $n$ -face d'un  $n$ -simplexe est lui-même.*

Par exemple, un 1-simplexe est un segment, un 2-simplexe est un triangle, un 3-simplexe est un tétraèdre, etc.

**Remarque 16.2.** *Un simplexe est une généralisation du triangle à une dimension quelconque. C'est la raison pour laquelle on parle de "triangulation" dans les définitions suivantes.*

**Définition 16.3** (complexe simplicial). *Un complexe simplicial  $\mathcal{K}$  est un ensemble de simplexes tel que*

- 1° *Toutes les faces de chaque simplexe de  $\mathcal{K}$  appartiennent aussi à  $\mathcal{K}$  ;*
- 2° *L'intersection de n'importe quels deux simplexes non disjoints  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{K}$  est une face des deux  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .*

*Un  $k$ -complexe simplicial  $\mathcal{K}$  est un complexe simplicial où la plus grande dimension de n'importe quel simplexe de  $\mathcal{K}$  est  $k$ . On dit qu'un complexe  $\mathcal{K}$  est fini si  $\mathcal{K}$  est un ensemble fini.*

**Définition 16.4** (Polyèdre et triangulation). *Le polyèdre associé à un complexe simplicial  $\mathcal{K}$  est simplement la réunion de tous les simplexes qu'il contient. Il est noté  $|\mathcal{K}|$ . La donnée  $(\mathcal{K}, \pi)$  d'un complexe simplicial et d'un homéomorphisme entre son polyèdre  $|\mathcal{K}|$  et un espace topologique  $X$  est appelée une triangulation de  $X$ . La triangulation est dite finie si  $\mathcal{K}$  est un complexe simplicial fini.*

Ainsi un cube ne se présente pas naturellement comme un complexe simplicial, notamment parce que ses faces ne sont pas triangulaires, mais il admet plusieurs triangulations possibles.

**Définition 16.5** (chaîne simpliciale). *Soit  $\mathcal{K}$  un complexe simplicial. Une  $k$ -chaîne simpliciale (à coefficient dans  $\mathbb{Z}$ ) est une somme formelle de  $k$ -simplexes*

$$(16.6) \quad \sum_{i=1}^N c_i \sigma^i, \text{ où } c_i \in \mathbb{Z}, \sigma^i \in \mathcal{K} \text{ est le } i\text{-ème } k\text{-simplexe.}$$

*Le groupe des  $k$ -chaînes sur  $\mathcal{K}$  est le groupe abélien libre engendré par l'ensemble des  $k$ -simplexes dans  $\mathcal{K}$ , et est noté  $C_k^\Delta(\mathcal{K})$ .*

**Définition 16.7** (l'application bord). *L'application bord*

$$(16.8) \quad \partial_k : C_k^\Delta(\mathcal{K}) \rightarrow C_{k-1}^\Delta(\mathcal{K})$$

est l'homomorphisme défini par

$$(16.9) \quad \partial_k(\sigma) = \sum_{i=0}^k (-1)^i < v^0, \dots, \hat{v}^i, \dots, v^k >,$$

où le simplexe  $< v^0, \dots, \hat{v}^i, \dots, v^k >$  est la  $i$ -ème face de  $\sigma$  obtenue en supprimant son  $i$ -ème sommet.

Notons que

$$(16.10) \quad \partial_k \circ \partial_{k+1} = 0 \text{ pour tout } k.$$

**Définition 16.11** (cycles et bords, groupes d'homologies). *Puisque  $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ , on a  $Im(\partial_{k+1}) \subset Ker(\partial_k)$ . Les éléments de  $Im(\partial_{k+1})$  sont appelés bords ; ce sont les chaînes qui sont images d'une autre chaîne par l'application bord. Les éléments de  $Ker(\partial_k)$  sont appelés cycles ; ce sont les chaînes dont le bord est nul. Tout bord est un cycle.*

Le  $k$ -ème groupe  $H_k^\Delta(\mathcal{K}, \mathbb{Z})$  d'homologie simpliciale (à coefficient dans  $\mathbb{Z}$ ) du complexe simplicial  $\mathcal{K}$  est le quotient

$$(16.12) \quad H_k^\Delta(\mathcal{K}, \mathbb{Z}) = Ker(\partial_k)/Im(\partial_{k+1}).$$

La définition du groupe d'homologie simpliciale demande une bonne régularité de l'espace, c'est à dire, on peut la définir sur un espace qui admet une triangulation. On ne peut pas le définir sur n'importe quel espace topologique. Par contre il est relativement facile à comprendre et à calculer, par rapport au groupe d'homologie singulière, dont on va donner la définition tout de suite.

### 16.1.2 Homologie singulière (à coefficient dans $\mathbb{Z}$ )

**Définition 16.13** (simplexe standard). *On appelle simplexe standard  $\Delta_n$  de dimension  $n$  l'enveloppe convexe dans  $\mathbb{R}^n$  des points  $e_0, e_1, \dots, e_n$  où  $e_0 = (0, \dots, 0)$  et où  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , le 1 étant placé à la  $i$ -ème position.*

**Définition 16.14** (simplexe singulier). *Un  $n$ -simplexe singulier d'un espace topologique  $X$  est une application continue de  $\Delta_n$  dans  $X$ . Notons  $S_n(x)$  l'ensemble des  $n$ -simplices singuliers de  $X$ .*

Ainsi, un 0-simplexe s'identifie à un point de  $X$ . Un 1-simplexe est un chemin reliant deux points, paramétré par  $[0, 1]$ .

**Définition 16.15** (chaîne singulière). *Soit  $X$  un espace topologique. Une  $k$ -chaîne singulière (à coefficient dans  $\mathbb{Z}$ ) sur  $X$  est une somme formelle de  $k$ -simplices*

$$(16.16) \quad \sum_{i=1}^N c_i \sigma^i, \text{ où } c_i \in \mathbb{Z}, \sigma^i \in S_k(X) \text{ est le } i\text{-ème } k\text{-simplexe singulier.}$$

Le groupe de  $k$ -chaînes singulières sur  $X$  est le groupe abélien libre engendré par  $S_k(X)$ , et est noté  $C_k(X, \mathbb{Z})$ .

**Définition 16.17** (l'application bord). Soit  $\sigma$  un  $n$ -simplexe de  $X$  ( $n > 0$ ), la  $i$ -ème face  $\sigma_i$  de  $\sigma$  est la restriction de l'application au  $n$ -simplexe standard, enveloppe convexe des points  $e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n$ .

Le bord  $\partial\sigma$  de  $\sigma$  est par définition égal à  $\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_i$ . On convient que le bord d'un point (un 0-simplexe) est 0. L'application bord est étendue par linéarité aux chaînes. Donc l'application bord  $\partial_n$  va de  $C_n(X, \mathbb{Z})$  dans  $C_{n-1}(X, \mathbb{Z})$  (si  $n = 0$ ,  $C_{-1}(X, \mathbb{Z}) = 0$ ).

Notons que

$$(16.18) \quad \partial_n \circ \partial_{n+1} = 0 \text{ pour tout } k.$$

**Définition 16.19** (cycles et bords, groupes d'homologies). Puisque  $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ , on a  $Im(\partial_{n+1}) \subset Ker(\partial_n)$ . Les éléments de  $Im(\partial_{n+1})$  sont appelés bords ; ce sont les chaînes qui sont images d'une autre chaîne par l'application bord. Les éléments de  $Ker(\partial_n)$  sont appelés cycles ; ce sont les chaînes dont le bord est nul. Tout bord est un cycle.

Le groupe quotient  $Ker(\partial_n)/Im(\partial_{n+1})$  est le  $n$ -ème groupe  $H_n(X, \mathbb{Z})$  d'homologie singulière de l'espace topologique  $X$ .

On associe ainsi à tout espace topologique une suite de groupes abéliens.

### 16.1.3 Les relations entre les deux groupes d'homologies

L'homologie singulière est définie sur tout espace topologique. Mais elle est, en général, difficile à calculer directement à partir de la définition. On veut donc décider, sur quel espace les deux homologies sont bien définies et coïncident, de sorte qu'on peut décider l'homologie singulière en calculant l'homologie simpliciale, qui est plus facile.

Notons d'abord que, si  $\mathcal{K}$  est un complexe simplicial, il existe un homomorphisme canonique  $H_n^\Delta(\mathcal{K}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(|\mathcal{K}|, \mathbb{Z})$ , induit par l'application des chaînes  $C_n^\Delta(\mathcal{K}, \mathbb{Z}) \rightarrow C_n(|\mathcal{K}|, \mathbb{Z})$ , en envoyant chaque  $n$ -simplexe de  $\mathcal{K}$  dans son application caractéristique  $\sigma : \Delta^n \rightarrow |\mathcal{K}|$ .

**Théorème 16.20** (c.f.[18], Thm 2.27). Les homomorphismes  $H_n^\Delta(\mathcal{K}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(|\mathcal{K}|, \mathbb{Z})$  sont isomorphismes pour tout  $n$ .

**Remarque 16.21.** Soit  $X$  un espace topologique qui admet une triangulation  $|\mathcal{K}| \cong X$ , alors pour toute triangulation  $|\mathcal{K}'| \cong X$  on a

$$(16.22) \quad H_n^\Delta(\mathcal{K}, \mathbb{Z}) \cong H_n(|\mathcal{K}|, \mathbb{Z}) \cong H_n(X, \mathbb{Z}) \cong H_n(|\mathcal{K}'|, \mathbb{Z}) \cong H_n^\Delta(\mathcal{K}', \mathbb{Z}),$$

ce qui implique qu'on peut définir l'homologie simpliciale sur  $X$

$$(16.23) \quad H_n^\Delta(X, \mathbb{Z}) = H_n^\Delta(\mathcal{K}, \mathbb{Z}).$$

Par le théorème, pour tout espace qui admet une triangulation, on peut calculer l'homologie singulière par l'homologie simpliciale de la triangulation. Ensuite on va décider quels espaces admettent des triangulation.

**Définition 16.24** (triangulation  $\mu$ -lisse). *Soit  $\mu \geq 1$  un entier, ou  $\mu = \infty$ . Soit  $M$  une variété de classe  $C^\mu$  de dimension  $n$ . Une triangulation  $(\mathcal{K}, \pi)$  (voir la définition 16.4) de  $M$  est dite  $\mu$ -lisse si pour chaque  $n$ -simplexe  $\sigma$  de  $\mathcal{K}$ , il existe une carte  $(U, \xi)$  de  $M$  ( $\xi : U \cong V \subset \mathbb{R}^n$ ) telle que  $\pi(\sigma) \subset U$ , et  $\xi \circ \pi$  est affine sur  $\sigma$ . Si de plus  $\mathcal{K}$  est un  $n$ -complexe simplicial, la triangulation est dite une  $\mu$ -lisse  $n$ -triangulation.*

**Théorème 16.25** (c.f.[33],Chap. IV,§ 14B, Thm 12). *Toute variété  $M$  de classe  $C^\mu$  admet une triangulation  $\mu$ -lisse.*

L'idée (qui vient de S.S.Cairns, [5]) pour démontrer ce théorème n'est pas compliquée. On plonge d'abord  $M$  dans un espace euclidien  $\mathbb{R}^N$ . On donne d'abord une triangulation lisse à  $\mathbb{R}^N$  (par des cubes dyadiques) très fine, et on bouge un peu cette triangulation de sorte qu'elle soit transverse à  $M$ . Alors l'intersection de  $M$  avec la triangulation induit une triangulation sur  $M$ .

Une autre démonstration intéressante est donnée par le même mathématicien, voir [6].

**Remarque 16.26** (c.f.[33],Chap.IV,§ 14B, Thm 12). *a) Pour une sous-variété  $M \subset \mathbb{R}^n$ , il existe une triangulation lisse de  $\mathbb{R}^n$  dont  $M$  est un sous-complexe ;*

*b) On peut aussi trianguler une "variété à bord", par la même méthode.*

**Remarque 16.27.** *Notons que toute triangulation  $(\mathcal{K}, \pi)$  d'une variété de dimension  $n$  est forcément une  $n$ -triangulation.*

**Définition 16.28** ( $k$ -chaîne simpliciale lisse). *Soit  $k \leq n$  deux entiers,  $M$  une variété lisse de dimension  $n$ . Une somme formelle  $\Gamma$  est dite une  $k$ -chaîne simpliciale lisse sur  $M$  (par rapport à la triangulation  $(\mathcal{K}, \pi)$ ), s'il existe une triangulation  $(\mathcal{K}, \pi)$   $\infty$ -lisse de  $M$ , et une  $k$ -chaîne simpliciale  $S = \sum_{i=1}^N c_i \sigma^i$  sur  $\mathcal{K}$  (avec les  $\sigma^i \in \mathcal{K}$  des  $k$ -simplices,  $c_i \in \mathbb{Z}$ ), tel que  $\Gamma = \sum_{i=1}^N c_i \pi(\sigma^i)$ . Les images  $\pi(\sigma)$  des  $d$ -faces  $\sigma$  de  $\mathcal{K}$ ,  $d \leq k$ , sont appelées les  $d$ -faces de  $\Gamma$ . Le bord  $\partial\Gamma$  de  $\Gamma$  est défini par*

$$(16.29) \quad \partial\Gamma = \sum_{i=1}^N c_i \pi(\partial\sigma^i) =: \pi(\partial S).$$

*C'est une  $k-1$ -chaîne lisse.*

## 16.2 Transversalité

La propriété de transversalité décrit, en bref, une position générale de l'intersection de sous-espaces ou de sous-variétés. Elle est en quelque sorte l'opposé de la notion de tangence.

**Définition 16.30.** Soit  $M, N$  deux variétés lisses de dimensions  $m$  et  $n$ ,  $f : M \rightarrow N$  une application lisse. Soit  $\Gamma \subset N$  une sous-variété lisse de  $N$ . On dit que  $f$  est transverse à  $\Gamma$ , noté  $f \pitchfork \Gamma$ , si pour tout  $x \in M$  tel que  $y = f(x) \in \Gamma$ , le plan tangent  $T_y\Gamma$  et l'image  $f_*(T_xM)$  engendrent  $T_yN$ .

La propriété utilisée le plus souvent est la suivante.

**Proposition 16.31** (c.f.[4], Chapt II, Thm15.2). Soit  $M, N, f, \Gamma$  comme dans la définition. Si  $f \pitchfork \Gamma$  alors  $f^{-1}(\Gamma)$  est une sous-variété régulière (ou sous-variété plongée). De plus la codimension de  $f^{-1}(\Gamma)$  dans  $M$  est la même que celle de  $\Gamma$  dans  $N$ .

**Corollaire 16.32.** Soit  $M, N, f, \Gamma, m, n$  comme dans la proposition précédente. Si de plus,  $M, N, \Gamma$  sont orientables, alors  $f^{-1}(\Gamma)$  est aussi orientable.

Démonstration. Notons  $\Gamma' = f^{-1}(\Gamma)$ . Notons  $d$  la codimension de  $\Gamma$  dans  $N$ , et donc aussi celle de  $\Gamma'$  dans  $M$ , par la proposition.

$\Gamma$  est orientable, ce qui implique qu'il existe sur  $\Gamma$  un champs de  $d$ -vecteurs normal lisse ne s'anulant pas  $v : \Gamma \rightarrow \wedge_d(TN)$ , avec  $v(x) \in \wedge_d(T_x\Gamma^\perp)$ .

Maintenant pour chaque  $y \in \Gamma'$ ,  $x = f(y) \in \Gamma$ , puisque  $f$  est transverse,  $f_*(T_yM) \oplus T_x\Gamma$  engendre  $T_xN$ . Notons  $N_y\Gamma'$  l'espace orthogonal de  $T_y\Gamma'$  dans  $T_yM$ , et  $N_x\Gamma$  l'espace orthogonal de  $T_x\Gamma$  dans  $T_xN$ . On sait que  $f_*(T_y\Gamma') \subset T_x\Gamma$ , donc  $f_*(N_y\Gamma') \oplus T_x\Gamma$  engendre  $N_x\Gamma \oplus T_x\Gamma$ . Notons  $\pi_x$  la projection orthogonale de  $T_xN$  sur  $N_x\Gamma$ , alors  $\pi_x \circ f_*(N_y\Gamma')$  est surjective linéaire sur  $N_x\Gamma$ . Notons que par la proposition,  $N_y\Gamma'$  et  $N_x\Gamma$  sont tous les deux de dimension  $d$ , donc  $\pi_x \circ f_*$  est bijective linéaire. Donc pour chaque  $y \in \Gamma'$ , définissons  $v'(y) \in N_y\Gamma'$  l'image réciproque de  $v(x)$  par  $\pi_x \circ f_*$ , alors  $v'$  est un champ de  $d$ -vecteurs normal lisse, partout non nul sur  $\Gamma'$ , ce qui implique que  $\Gamma'$  est orientable.  $\square$

**Remarque 16.33.** Par la démonstration du corollaire, l'orientation  $v'$  de  $f^{-1}(\Gamma)$  est dite l'orientation induite par  $f$  de l'orientation  $v$  de  $\Gamma$ , noté  $f^*(v)$ . Il est facile à voir que si  $\Gamma$  est une variété lisse à bord orientable,  $f$  transverse à  $\Gamma$  et  $\partial\Gamma$ , alors  $\partial f^{-1}(\Gamma) = f^{-1}(\partial\Gamma)$ , et de plus si on note  $\partial v$  l'orientation de  $\partial\Gamma$  induite par  $v$ ,  $\partial f^*(v)$  l'orientation de  $\partial f^{-1}(\Gamma)$  induite par  $f^{-1}(\Gamma)$ , on a alors

$$(16.34) \quad \partial f^*(v) = f^*(\partial v).$$

Le théorème suivant dit que les fonctions transverses à une certaine variété forment un grand ensemble dans l'ensemble des fonctions de classe  $C^\infty$ .

**Théorème 16.35** (Théorème de transversalité, c.f.[20], Chapt 3, Thm 2.1). Soit  $M$  et  $W$  deux variétés lisses. Soit  $F$  un fermé de  $M$ . Soit  $Z$  une sous-variété lisse de  $W$ . Soit  $f$  une application de classe  $C^\infty$  de  $M$  dans  $W$  qui est transverse à  $Z$  en tout point de  $F$ . Soit  $X$  l'ensemble des applications  $C^\infty$  de  $M$  dans  $W$  qui coïncident avec  $f$  sur  $F$ . Alors l'ensemble des fonctions  $C^\infty$  de  $M$  dans  $W$  qui coïncident avec  $f$  sur  $F$  et sont transverses à  $Z$  est une intersection dénombrable d'ouverts dense de  $X$  par rapport à la topologie de Whitney.

**Remarque 16.36.** *Ici on n'explique pas ce que signifie la topologie de Whitney. Tout ce qu'on a besoin de savoir ici est que la topologie de Whitney est une topologie sur l'espace de fonctions  $C^\infty$ , et que pour tout compact  $K \subset M$ , pour tout  $\epsilon > 0$ , pour tout  $f : M \rightarrow W$  de classe  $C^\infty$ , l'ensemble des fonctions  $g : M \rightarrow W$  de classe  $C^\infty$  telles que  $|g - f| < \epsilon$  sur  $K$  est un ouvert pour la topologie de Whitney.*

**Remarque 16.37.** *Notons que si  $A_i, i \in \mathbb{N}$ , est une suite d'ensembles, chacun est une intersection dénombrable d'ouverts denses, alors leur intersection  $\cap_{i \in \mathbb{N}} A_i$  est aussi une intersection dénombrable d'ouverts dense. Par conséquent, si  $Z_i, i \in \mathbb{N}$ , est une suite de sous-variétés lisses dans  $W$ , alors l'ensemble des fonctions lisses qui sont transverses à tous les  $Z_i$  est toujours une intersection dénombrable d'ouverts denses.*

## 17 L'image réciproque d'une chaîne lisse par une application transverse

On va maintenant généraliser le théorème au cas où  $\Gamma$  est une  $k$ -chaîne simpliciale lisse. Notons que pour toute  $d$ -face  $\sigma$  de  $\Gamma$ , l'intérieur  $\sigma^\circ$  de  $\sigma$  est une  $d$ -sous-variété régulière lisse.

**Définition 17.1.** *Soit  $m, n$  deux entiers,  $k < \min\{m, n\}$ ,  $M, N$  deux variétés lisses de dimensions  $m$  et  $n$ . Soit  $\Gamma \subset N$  une  $k$ -chaîne lisse, on dit qu'une application lisse  $f : M \rightarrow N$  est transverse à  $\Gamma$ , si pour tout  $d \leq k$ , pour toute  $d$ -face  $\sigma$  de  $\Gamma$ ,  $f$  est transverse à la sous-variété  $\sigma^\circ$ .*

Maintenant on va regarder l'image réciproque d'une chaîne simpliciale lisse par une application transverse à elle, et on veut obtenir un résultat semblable à (16.34). Pour avoir une idée, on énonce d'abord la proposition suivante, sans préciser certaines notations.

**Proposition 17.2.** *Soit  $M, N$  deux variétés lisses orientées de dimensions  $m$  et  $n$ ,  $f : M \rightarrow N$  lisse et propre,  $k \leq \min\{m, n\}$ . Soit  $\Gamma$  une  $n - k$ -chaîne simpliciale lisse dans  $N$ , et supposons que  $f$  est transverse à  $\Gamma$ . Alors  $f^{-1}(\Gamma)$  est aussi une  $m - k$ -chaîne simpliciale lisse (sous une certaine triangulation) dans  $M$  ; de plus,*

$$(17.3) \quad \partial f^{-1}(\Gamma) = f^{-1}(\partial \Gamma).$$

Dans la discussion suivante on va expliquer les notations inconnues, et donner aussi une démonstration de la proposition.

Soit  $M, N$  deux variétés lisses orientées de dimensions  $m$  et  $n$ , notons leur orientations  $v_M, v_N$ . Soit  $f : M \rightarrow N$  une application lisse et propre (c'est à dire, l'image réciproque d'un compact est compact).

Etape 1 : structure autour d'un simplexe lisse.

Soit  $\Sigma \subset N$  un  $n$ -simplexe lisse. Soit  $f$  transverse à  $\Sigma$ .

Par définition, il existe une triangulation lisse  $(K, \pi)$  de  $N$ , un  $n$ -simplexe  $\sigma \in K$ , telle que  $\pi(\sigma) = \Sigma$ . Par la définition de triangulation lisse, il existe une carte  $(U, \xi)$  de  $N$  ( $\xi : U \cong V \subset \mathbb{R}^n$ ) telle que  $\Sigma = \pi(\sigma) \subset U$ , et  $\xi \circ \pi$  est affine sur  $\sigma$ .

Mais  $\sigma$  est un sous ensemble d'intérieur non-vide de  $\mathbb{R}^n$ , et  $\xi \circ \pi$  est affine sur  $\sigma$ , donc en fait  $\xi \circ \pi$  est affine dans un voisinage  $w$  de  $\sigma$ . Notons  $G = \xi \circ \pi(w) \cap V \subset \mathbb{R}^n$ , il est alors une sous-variété ouverte de dimension  $n$ , qui contient  $\xi(\Sigma) = \xi \circ \pi(\sigma)$ . Notons que  $\xi \circ \pi$  est affine, et est un homéomorphisme, donc  $\Sigma' := \xi \circ \pi(\sigma)$  est un  $n$ -simplexe dans  $G \subset \mathbb{R}^n$ . D'un autre côté, notons que  $\xi \circ f$  est transverse à  $\Sigma'$  par définition.

Notons que  $\xi$  est un difféomorphisme, donc sans perdre de généralité, en remplaçant  $f$  par  $\xi \circ f$ ,  $N$  par  $G$ ,  $\Sigma$  par  $\Sigma'$ , on peut juste discuter le cas où  $N$  est un ouvert dans  $\mathbb{R}^n$ , et  $\Sigma \subset N$  est un  $n$ -simplexe.

Pour chaque  $k \leq n$ ,  $\sigma$  une  $k$ -face de  $\Sigma$ , notons  $V_\sigma$  l'intersection de  $N$  avec le  $k$ -espace affine contenant  $\sigma$ .

On sait que  $f$  est transverse à  $\sigma$ . Alors pour chaque point  $x \in \sigma$ , il existe  $d \leq k$  tel que  $x$  appartient à l'intérieur d'une  $d$ -face  $\gamma$  de  $\sigma$  (pour  $d = 0$ , l'intérieur d'un point est défini comme ce point là). Par définition, pour chaque  $y \in f^{-1}(x)$ ,  $f_*(T_y M) \supset N_x V_\gamma$  (l'espace normal de  $V_\gamma$ ). Mais  $V_\gamma \subset V_\sigma$ , donc  $N_x V_\gamma \supset N_x V_\sigma$ . Par conséquent,  $f_*(T_y M) \supset N_x V_\sigma$  pour tout  $x \in \sigma$  et  $y \in f^{-1}(x)$ . Donc  $f$  est transverse à  $V_\sigma$  en tout point de  $\sigma$ .

Notons  $E$  l'ensemble des points dans  $N$  où  $f$  est transverse à  $V_\sigma$ . Il contient alors un voisinage ouvert  $O_\sigma$  de  $\sigma$ . En effet, prenons un compact  $A \subset N$  tel que  $\sigma \subset A^\circ$ . Alors si  $\{y_l\}_{l \in \mathbb{N}} \subset A$  est une suite de points où  $f$  n'est pas transverse à  $V_\sigma$ , et  $y_\infty \in A$  est sa limite, alors par définition il existe  $\{z_l\}_{l \in \mathbb{N}} \subset f^{-1}(A)$  tel que  $f(z_l) = y_l$  et que  $Df(z_l)(T_{z_l} M) \oplus T_{y_l} V_\sigma \neq T_{y_l} N$ . Notons que les espaces normaux  $N_{y_l} V_\sigma$  et  $N_{z_l} f^{-1}(V_\sigma)$  sont de même dimension, et  $Df(z_l)(T_{z_l} f^{-1}(V_\sigma)) \subset T_{y_l} V_\sigma$ , donc  $\text{Det}_{N_{z_l} f^{-1}(V_\sigma) \rightarrow N_{y_l} V_\sigma} p_{y_l} \circ Df(z_l) = 0$ , où  $p_{y_l}$  désigne la projection orthogonale de  $T_{y_l} N$  sur  $N_{y_l} V_\sigma$ .

On sait que  $f$  est propre,  $A$  est compact, donc  $f^{-1}(A)$  est compact. La suite  $\{z_l\}$  admet donc un point d'adhérence  $z_\infty$ . Alors  $f(z_\infty) = y_\infty \subset A$ , et par la continuité de  $f$  et sa dérivée, on a aussi  $\text{Det}_{N_{z_\infty} f^{-1}(V_\sigma) \rightarrow N_{y_\infty} V_\sigma} [p_{y_\infty} \circ Df(z_\infty)] = 0$ , ce qui implique que  $f$  n'est pas transverse à  $V_\sigma$  en  $y_\infty$ .

On a donc que l'ensemble  $E^C$  des points où  $f$  n'est pas transverse à  $V_\sigma$  est fermé dans  $A$ . Donc  $E$  est ouvert dans  $A$ . Notons que  $\sigma \subset A^\circ$ , il existe alors un voisinage ouvert  $O_\sigma \subset E$  tel que  $\sigma \subset O_\sigma$ . On peut demander aussi que  $O_\sigma \supset \Sigma$ . En effet,  $E \supset N \setminus V_\sigma$ , et on peut donc remplacer  $O_\sigma$  par  $(O_\sigma \cap V_\sigma) \cup N \setminus V_\sigma = E \setminus (V_\sigma \setminus O_\sigma)$ .

Notons que la nombre de faces dans  $\Sigma$  est fini, donc  $\cap_{k \leq n} \cap_{\sigma \in \{k\text{-faces}\}} O_\sigma$  est un ouvert. Il est non vide, parce qu'il contient  $\Sigma$ . Prenons un ouvert  $O \subset \cap_{k \leq n} \cap_{\sigma \in \{k\text{-faces}\}} O_\sigma$  qui est difféomorphe à une boule. Remplaçons  $V_\sigma$  par  $V_\sigma \cap O$ .

Jusqu'à maintenant, pour chaque  $k$ -face  $\sigma$  de  $\Sigma$ , on a trouvé une  $k$ -variété affine  $V_\sigma$  dans  $O$  qui contient  $\sigma$  telle que  $f$  est transverse à  $V_\sigma$ .

Notons que pour chaque  $V_\sigma$  et  $V_{\sigma'}$  de dimension  $k$  et  $k - 1$ , soit ils sont disjoints, soit  $V_{\sigma'} \subset V_\sigma$  et  $V_{\sigma'}$  coupe  $V_\sigma$  en deux parties ouvertes.

Etape 2 : la structure de  $f^{-1}(\Sigma)$ .

Maintenant notons  $\sigma^1, \dots, \sigma^{n+1}$  les  $n + 1$   $n - 1$ -faces de  $\Sigma$ . Notons  $G_i$  la composante connexe de  $O \setminus \sigma^i$  qui contient  $\Sigma^\circ$ . Alors  $f^{-1}(\Sigma^\circ) = f^{-1}(\cap_{1 \leq i \leq n+1} G_i) = \cap_{1 \leq i \leq n+1} f^{-1}(G_i)$ , c'est une région dans  $M$ , bordée par des variétés orientées  $f^{-1}(V_{\sigma^i})$ ,  $1 \leq i \leq n + 1$ . (On donne l'orientation induite par  $f$  de  $v_N$  à  $f^{-1}(\Sigma^\circ)$ , et l'orientation induite par  $\partial v_N$  à  $f^{-1}(\sigma^{i_0})$ , et donc aussi aux  $f^{-1}(V_{\sigma^i})$ ,  $1 \leq i \leq n + 1$ .)

Par conséquent, le bord topologique de  $f^{-1}(\Sigma^\circ)$  est contenu dans l'union des  $\cap_{j \neq i} \overline{f^{-1}(G_j)} \cap f^{-1}(V_{\sigma^i}) = f^{-1}(\sigma^i)$ .

D'un autre côté, chaque  $f^{-1}(\sigma^i)$  est contenu dans le bord de  $f^{-1}(\Sigma^\circ)$ . En effet, pour un point  $x$  qui appartient à l'intérieur  $\sigma^i$ , il existe une boule ouverte  $B \subset O$  contenant  $x$ , tel que dans  $B$ ,  $\sigma^i$  sépare  $B$  en deux parties  $\Sigma^\circ \cap B$  et  $B \setminus \Sigma$ . Par conséquent dans  $f^{-1}(B)$ ,  $f^{-1}(\sigma^i)$  sépare aussi  $f^{-1}(\Sigma^\circ)$  et  $f^{-1}(O \setminus \Sigma)$ . Mais  $f^{-1}(\sigma_{n-1}^\circ)$  est une sous-variété lisse, donc  $f^{-1}(\Sigma \cap B)$  est une variété lisse à bord orienté, dont le bord est  $f^{-1}(\sigma_{n-1}) \cap f^{-1}(B)$ .

Donc le bord de  $f^{-1}(\Sigma^\circ)$  est l'union des  $f^{-1}(\sigma^i)$ ,  $1 \leq i \leq n + 1$ . Et de plus, près de chaque point intérieur de  $f^{-1}(\sigma^i)$ , le bord est aussi le bord au sens "variété à bord". Et en des points où deux  $f^{-1}(\sigma^i)$  se rencontrent, ils se rencontrent en une variété lisse.

On obtient aussi, par l'argument ci-dessus, que comme le bord, la multiplicité de chaque  $f^{-1}(\sigma^i)$  est 1, c'est à dire, c'est impossible que  $f^{-1}(\sigma^i)$  touche  $f^{-1}(\Sigma^\circ)$  de ses deux côtés.

On donne alors l'orientation induite par  $f$  de  $\Sigma$ ,  $\sigma^i$  à  $f^{-1}(\Sigma)$  et des  $f^{-1}(\sigma^i)$ ,  $1 \leq i \leq n + 1$ .

On peut faire la même chose que  $\Sigma$  pour chaque  $\sigma^i$ , en remplaçant  $M$  par  $f^{-1}(V_{\sigma^i})$ ,  $N$  par  $V_{\sigma^i}$ . On obtient donc que formellement le bord de  $f^{-1}(\sigma^i)$  est l'union des images reciproques de ses  $m - 2$ -faces. On peut continuer jusqu'à la dimension 0.

Etape 3 : triangulation.

On fait maintenant une triangulation lisse sur  $f^{-1}(O)$ , en demandant que pour chaque  $k \leq \min\{n, m\}$ , pour chaque  $n - k$ -face  $\sigma$ ,  $f^{-1}(V_\sigma)$  est l'union dénombrable de  $m - k$ -simplexes lisses. Ce n'est pas très compliqué.

En effet, prenons une triangulation lisse  $(K, \pi)$  de  $f^{-1}(O)$ . Pour des  $m - 1$ -faces  $\sigma^1, \dots, \sigma^{n+1}$ , on bouge un peu  $\pi$  de façon que  $f^{-1}(V_\sigma^1)$  soit transverse à cette triangulation. Alors  $f^{-1}(V_{\sigma^1})$  coupe chaque  $m$ -simplexe de cette triangulation en polyèdres lisses. On fait alors une subdivision pour chaque polyèdre lisse, et on obtient une nouvelle triangulation  $(K_1, \pi_1)$ . (Voir [33] pour plus de détails). Ensuite

on le fait pour  $f^{-1}(V_{\sigma^2})$ , et obtient  $(K_2, \pi_2)$ . Une remarque à faire est que quand on faire bouger  $\pi_1$  pour obtenir la transversalité, on ne bouge pas les simplexes lisse contenus dans  $f^{-1}(V_{\sigma^1})$ . On peut le faire parce que sur  $f^{-1}(V_{\sigma^1})$  on est déjà transverse à  $f^{-1}(V_{\sigma^2})$ , et on applique le théorème 16.35.

On fait ce processus jusqu'à  $\sigma_{n+1}$ , et on obtient  $(K_{n+1}, \pi_{n+1})$ . C'est la triangulation dont on a besoin. Notons-la  $(L, \chi)$ . Supposons aussi que  $\chi$  préserve l'orientation.

On sait aussi que  $f^{-1}(\Sigma)$  est compact. Alors pour chaque  $n-k$ -face  $\sigma$  de  $\Sigma$ , il est l'union finie de  $m-k$ -simplexes lisses de  $(L, \chi)$ . Notons aussi  $f^{-1}\sigma$  la  $k$ -chaîne de  $(L, \chi)$ , qui est la somme de tous les  $m-k$ -simplexes lisses de  $(L, \chi)$  contenu dans  $\sigma$  dont l'orientaion est induite par  $f$  de  $\sigma$ .

On a alors, par l'étape 2,

$$(17.4) \quad \partial f^{-1}(\Sigma) = \sum_{i=1}^{n+1} f^{-1}(\sigma_i).$$

Etape 4 : Passer aux chaînes.

Maintenant soit  $\Gamma = \sum_{i=1}^l c_i \Sigma^i$  une  $n$ -chaîne lisse. On va définir la triangulation par récurrence sur  $j$  sur  $\cup_{i=1}^j f^{-1}(\Sigma^i)$ ,  $1 \leq j \leq l$ .

Pour  $i = 1$ , on fait d'abord la triangulation  $(L_1, \chi_1)$  décrite dans l'étape 3 pour  $f^{-1}(\Sigma^1)$ , qui est un  $n$ -simplexe lisse. On garde la triangulation dans  $f^{-1}(\Sigma^1)$ , et laisse libre son complémentaire. Notons que la triangulation restreinte à  $f^{-1}(\Sigma^1)$  est finie, puisque  $f^{-1}(\Sigma^1)$  est compact.

Maintenant supposons qu'il existe une triangulation lisse  $(L_{j-1}, \chi_{j-1})$  pour  $\cup_{i=1}^j f^{-1}(\Sigma^i)$ , telle que pour chaque  $k \leq \min\{m, n\}$ , chaque  $n-k$ -simplexe de chaque  $f^{-1}(\Sigma^i)$  est une  $m-k$ -chaîne dans cette triangulation. On fait comme dans l'étape 3 une triangulation  $(L'_j, \chi'_j)$  sur  $f^{-1}(\Sigma^j)$ , mais en demandant aussi que cette triangulation soit transverse à la restriction de  $(L_{j-1}, \chi_{j-1})$  sur ses  $n-1$  faces qui touchent les  $f^{-1}(\Sigma^i)$ ,  $1 \leq i \leq j-1$ .

On fait une subdivision sur  $(L_{j-1}, \chi_{j-1})$  par rapport à la restriction de  $(L'_j, \chi'_j)$  sur les  $m-1$ -faces de  $f^{-1}(\Sigma^j)$  qui touchent les  $f^{-1}(\Sigma^i)$ ,  $1 \leq i \leq j-1$ , et on fait la même chose sur  $(L'_j, \chi'_j)$  par rapport à  $(L_{j-1}, \chi_{j-1})$ . On peut le faire parce que la triangulation  $(L'_j, \chi'_j)$  restreinte à l'union des faces est finie, parce que l'union est compacte. L'ensemble de ces triangulation, notée  $(L_j, \chi_j)$ , est la triangulation dont on a envie pour  $\cup_{i=1}^j f^{-1}(\Sigma^i)$ .

On arrive donc à définir une triangulation  $(L_l, \chi_l)$  sur  $\cup_{i=1}^l f^{-1}(\Sigma^i)$ , telle que pour chaque  $k \leq \min\{m, n\}$ , pour chaque  $n-k$ -face de  $\Gamma$ , son image réciproque par  $f$  est une  $m-k$ -chaîne de  $(L_m, \chi_m)$ . On continue à trianguler la reste de  $M$ . En effet,  $M \setminus (\cup_{i=1}^l f^{-1}(\Sigma^i))^\circ$  est aussi une variété à bord topologique, dont le bord est l'union des  $m-1$ -faces des  $f^{-1}(\Sigma^i)$  qui touchent  $M \setminus \cup_{i=1}^l f^{-1}(\Sigma^i)$ . On peut donc trianguler  $M \setminus (\cup_{i=1}^l f^{-1}(\Sigma^i))^\circ$ , en demandant que cette triangulation soit transverse à tous les sous-simplexes de son bord. Notons  $(L_0, \chi_0)$  cette triangulation. Ensuite on fait comme avant, on fait des subdivisions pour que  $(L_l, \chi_l)$  et  $(L_0, \chi_0)$  soient cohérentes. Alors leur union est une triangulation

lisse sur  $M$ , telle que pour chaque  $k \leq \min\{m, n\}$ , l'image réciproque de chaque  $n - k$ -simplexe de  $\Gamma$  est une  $m - k$ -chaîne.

De plus, on a

$$(17.5) \quad \partial f^{-1}(\Gamma) = \sum_{i=1}^l c_i \partial f^{-1}(\Sigma^i),$$

où  $\partial f^{-1}(\Sigma^i)$  est défini dans (17.4).

On peut vérifier la cohérence avec les dimensions plus petites. C'est à dire, soit  $\sigma$  un  $k$ -simplexe lisse, il est contenu alors dans une sous-variété régulière lisse  $N^k$  de  $N$ . On travaille alors sur  $N^k$  et  $f^{-1}(N^k) \subset M$ , la dernière est une sous-variété régulière de codimension  $n - k$  de  $M$ , par la transversalité de  $f$ . On continue comme précédemment. On arrive à la même conclusion. On obtient donc la proposition 17.2.

## 18 Minimiseur topologique

On va généraliser le concept MS-minimiseur à des codimensions plus hautes.

Dans ce paragraphe, soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert, alors pour toute  $k$ -variété lisse à bord orientée compacte  $\Gamma \subset U$ ,  $\Gamma$  représente aussi la chaîne  $\sum_{i=1}^N \Sigma^i$ , où  $\{\Sigma^i, 1 \leq i \leq N\}$  est l'ensemble de tous les  $k$ -simplexes simpliciaux lisses de n'importe quelle triangulation sur la variété à bord  $\Gamma$  qui préserve l'orientation. Notons que par le théorème 16.20, l'élément représenté par une variété sans bord  $\Gamma$  (noté encore  $\Gamma$ ) dans le groupe d'homologie singulière  $H_k(U, \mathbb{Z})$  ne dépend pas de la triangulation.

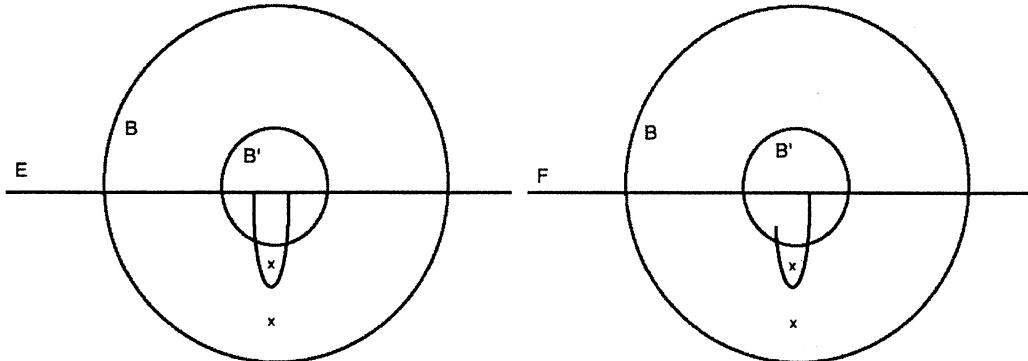
**Définition 18.1** (compétiteur topologique). *Soit  $E$  un fermé dans  $\mathbb{R}^n$ . On dit qu'un fermé  $F$  est un compétiteur topologique de dimension  $d$  ( $d < n$ ) de  $E$ , s'il existe une boule  $B$  telle que*

- 1)  $F \setminus B = E \setminus B$  ;
- 2) Pour tout  $n - d - 1$ -sphère euclidienne  $S \subset \mathbb{R}^n \setminus (B \cup E)$ , si  $S$  représente un élément non nul du groupe d'homologie singulière  $H_{n-d-1}(\mathbb{R}^n \setminus E; \mathbb{Z})$ , alors il est aussi non nul dans  $H_{n-d-1}(\mathbb{R}^n \setminus F; \mathbb{Z})$ .

**Remarque 18.2.** *Notons que si  $d = n - 1$ , une sphère de dimension 1 est composée de deux points. Donc la sphère est nulle en homologie si et seulement si les deux points sont dans la même composante connexe. Donc dans le cas de la codimension 1, la définition de compétiteur topologique coïncide avec la définition de MS-compétiteur.*

**Remarque 18.3.** *Dans la définition, si  $F$  est un compétiteur topologique de  $E$ , et  $B$  est une boule qui vérifie 1) et 2), alors pour toute boule  $B'$  tel que  $B \subset B'$ , elle vérifie aussi 1) et 2); par contre pour une boule  $B'$  plus petite que  $B$  qui vérifie 1), 2) n'est pas forcément vrai pour  $B'$ . Voir le dessin 18-1 pour un contre exemple, où l'ensemble  $F'$  est un compétiteur de  $E$  par rapport à la grande boule  $B$ , mais*

pas pour la petite boule  $B'$ . En effet,  $E$  sépare les deux points (marqués par deux petites croix sur les dessins), mais  $F$  non.



18-1

On a donné d'abord la définition 18.1 en utilisant le groupe d'homologie singulière, pour éviter des ambiguïtés, parce que le groupe d'homologie est définie sur tout espace topologique, et ne dépend pas de triangulations, etc. Mais comme on a dit avant, l'homologie singulière n'est pas facile à calculer. Pour cette raison on donne aussi la définition suivante. Notons que  $E$  et  $F$  sont des fermés, et donc  $\mathbb{R}^n \setminus E$  et  $\mathbb{R}^n \setminus F$  sont des  $n$ -variétés lisses, donc par le théorème 16.25 et le théorème 16.20 on peut donner la définition équivalente suivante. Notons que par la remarque 16.21, la définition ne dépend pas de triangulations.

**Définition 18.4** (compétiteur topologique). Soit  $E$  un fermé dans  $\mathbb{R}^n$ . On dit qu'un fermé  $F$  est un compétiteur topologique de dimension  $d$  ( $d < n$ ) de  $E$ , s'il existe une boule  $B$  telle que

- 1)  $F \setminus B = E \setminus B$  ;

2) Pour tout  $n - d - 1$ -sphère euclidienne  $S \subset \mathbb{R}^n \setminus (B \cup E)$ , si  $S$  est le bord d'une  $n - d$ -chaîne simpliciale lisse dans  $\mathbb{R}^n \setminus F$ , alors elle est aussi le bord d'une  $n - d$ -chaîne simpliciale lisse dans  $\mathbb{R}^n \setminus E$ .

**Proposition 18.5.** Les définitions 18.1 et 18.4 sont équivalentes.

Démonstration. Il faut juste montrer que pour tout fermé  $E \subset \mathbb{R}^n$ , pour toute  $n - d - 1$ -sphère  $S \subset \mathbb{R}^n$ , elle est un élément nul dans  $H_{n-d-1}(\mathbb{R}^n \setminus E; \mathbb{Z})$  si et seulement si elle est le bord d'une  $n - d$  chaîne simpliciale lisse.

La partie "si" est triviale, à cause de l'homomorphisme canonique  $H_d^\Delta(K, \mathbb{Z}) \rightarrow H_d(|K|, \mathbb{Z})$  ;

Pour la partie "seulement si", on donne d'abord une triangulation  $(K, \pi)$  de la  $n$ -variété lisse  $\mathbb{R}^n \setminus E \subset \mathbb{R}^n$ , telle que  $S$  est une  $n - d - 1$ -chaîne lisse. Alors par le théorème 16.20,  $S$  est nul dans le groupe d'homologie singulière si et seulement s'elle est nulle dans le groupe d'homologie simpliciale par rapport à la triangulation  $(K, \pi)$ , ce qui implique qu'elle est le bord d'une  $n - d$  chaîne simpliciale lisse de cette triangulation.  $\square$

**Définition 18.6** (minimiseur topologique). *Un ensemble minimal topologique est un minimiseur défini dans 13.1 en prenant les compétiteurs topologiques comme la classe de compétiteurs.*

Par la remarque 18.2, en codimension 1, la définition des minimiseurs topologiques coïncident avec celle des minimiseurs MS.

**Remarque 18.7.** *Il serait encore possible de définir des compétiteurs topologiques par le groupe d'homotopie  $\pi_{n-d-1}$ , où  $\pi_0$  coïncide aussi avec la séparation quand  $d = n - 1$ . Mais on connaît un exemple simple dans  $\mathbb{R}^3$ , un arc de Fox-Artin, dont une déformation ne préserve pas le groupe  $\pi_1$  de son complément. Voir [16] pour plus de détails. Mais on a de la chance avec notre définition.*

**Proposition 18.8.** *Tout compétiteur d'Almgren est un compétiteur topologique.*

Démonstration.

Soit  $E$  un ensemble fermé de dimension  $d$  dans  $\mathbb{R}^n$ , et  $F$  un compétiteur Al de  $E$ , c'est à dire, il existe  $B = B(x, R) \subset \mathbb{R}^n$  une boule,  $f$  une application de  $\mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}^n$  telles que

$$(18.9) \quad f(B) \subset B, f|_{\mathbb{R}^n \setminus B} = id \text{ et } f(E) = F.$$

On note, pour chaque  $r > 0$ ,  $rB = B(x, rR)$ . On va montrer que  $F$  est un compétiteur topologique par rapport à  $2B$ .

Soit  $S \subset \mathbb{R}^n \setminus (2B \cup E)$  une sphère de dimension  $n - d - 1$ , alors  $S \subset \mathbb{R}^n \setminus F$ . Supposons qu'il existe une  $n - d$ -chaîne lisse  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \setminus F$  dont le bord est  $S$ , on va montrer qu'il existe aussi une  $n - d$ -chaîne lisse  $\Gamma' \subset \mathbb{R}^n \setminus E$  dont le bord est  $S$ .

Notons  $\delta = \text{dist}(\Gamma, F)$ . Alors on peut trouver une application  $g$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^\infty$ , avec

$$(18.10) \quad g|_{\mathbb{R}^n \setminus \frac{3}{2}B} = f = id$$

et

$$(18.11) \quad \|g - f\|_\infty = \sup\{\|f(x) - g(x)\|, s \in \frac{3}{2}B\} < \frac{\delta}{4}.$$

Par (16.10),  $g$  est transverse à  $\Gamma$  sur  $\mathbb{R}^n \setminus \frac{3}{2}B$ , puisque'elle est l'identité.

Alors par le théorème 16.35 et la remarque 16.37, l'ensemble des fonctions lisses de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  transverses à  $\Gamma$  et coïncidant avec  $g$  sur  $\mathbb{R}^n \setminus \frac{3}{2}B$  est un ensemble  $G_\delta$  dense dans l'ensemble des fonctions lisses de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  qui coïncide avec  $g$  sur  $\mathbb{R}^n \setminus \frac{3}{2}B$ , pour la topologie de Whitney (voir la remarque 16.36). En particulier, il existe une application lisse  $h$  de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que

$$(18.12) \quad h|_{\mathbb{R}^n \setminus \frac{3}{2}B} = g = id,$$

$$(18.13) \quad \|g - h\|_\infty = \sup\{\|h(x) - g(x)\|, x \in \frac{3}{2}B\} < \frac{\delta}{4},$$

et

$$(18.14) \quad h \text{ est transverse à } \Gamma.$$

Notons que (18.12) implique que  $h$  est surjective et propre. Par la proposition 17.2, (18.14) donne que  $\Gamma' = h^{-1}\Gamma$  est une  $k$ -chaîne simpliciale lisse dans  $\mathbb{R}^n$ , et de plus

$$(18.15) \quad \partial\Gamma' = f^{-1}(\partial\Gamma) = S.$$

Mais  $\Gamma' \cap E = \emptyset$ . En effet, si  $x \in \Gamma' \cap E$ , alors  $|h(x) - f(x)| \leq \|g - h\|_\infty + \|g - f\|_\infty \leq \frac{\delta}{2}$ . Mais  $x \in E$  implique que  $f(x) \in F$ , et  $h(x) \in \Gamma$ , donc

$$(18.16) \quad d(F, \Gamma) \leq \frac{\delta}{2} < \delta = \text{dist}(\Gamma, F),$$

une contradiction.

On obtient donc que  $\Gamma'$  est une chaîne simpliciale lisse dans  $\mathbb{R}^n \setminus E$ , dont le bord est  $S$ . Donc  $F$  est un compétiteur topologique de  $E$  par rapport à  $2B$ .  $\square$

**Corollaire 18.17.** *Tout ensemble minimal topologique est un ensemble minimal Al.*

**Proposition 18.18.** *Soit  $E$  un ensemble de dimension  $d$ . Alors s'il existe  $m > d$  tel que  $E$  est minimal topologique dans  $\mathbb{R}^m$ , il est minimal topologique dans  $\mathbb{R}^n$  pour tout  $n > d$  tel que  $E \subset \mathbb{R}^n$ .*

Démonstration. Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$ . On va juste le montrer pour deux cas : 1)  $E$  est minimal topologique dans  $\mathbb{R}^n \Rightarrow E$  est minimal topologique dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ ; 2)  $E$  est minimal topologique dans  $\mathbb{R}^{n+1} \Rightarrow E$  est minimal topologique dans  $\mathbb{R}^n$ . La proposition suivra par récurrence.

1) Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  un minimiseur topologique de dimension  $d$ . Soit  $F$  un compétiteur topologique de  $E$  dans  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . C'est à dire, il existe une boule  $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , telle que  $F \setminus B = E \setminus B$ , et pour chaque  $n-d$ -sphère  $S \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus (B \cup E)$ , si  $S$  est non nulle dans  $H_{n-d}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus E, \mathbb{Z})$ , alors elle est aussi non nulle dans  $H_{n-d}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus F, \mathbb{Z})$ .

Par la remarque 18.3, on peut supposer que le centre de  $B$  appartient à  $\mathbb{R}^n$ . Notons que  $E \subset \mathbb{R}^n$ , donc  $F \setminus B = E \setminus B \subset \mathbb{R}^n$ . Notons  $\pi$  le projecteur sur  $\mathbb{R}^n$ , alors par la proposition 18.8,  $\pi(F) \subset \mathbb{R}^n$  est un compétiteur topologique de  $E$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , par rapport à la boule  $2B$ . Puisque  $\pi$  est 1-Lipschitzienne,  $\pi(F)$  est un meilleur compétiteur topologique que  $F$  de  $E$ , c'est à dire,

$$(18.19) \quad H^d(\pi(F) \setminus F) \leq H^d(F \setminus \pi(F)).$$

Notons  $B' = \pi(2B) = 2B \cap \mathbb{R}^n$  (puisque le centre de  $2B$  appartient à  $\mathbb{R}^n$ ). On va montrer que  $\pi(F)$  est un compétiteur topologique de  $E$  dans  $\mathbb{R}^n$  par rapport à  $B'$ .

Soit  $S \subset \mathbb{R}^n \setminus (B' \cup E)$  une  $n-d-1$ -sphère. Si  $S$  est nulle dans  $\mathbb{R}^n \setminus \pi(F)$ , il existe une  $n-d$ -chaîne singulière  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \setminus \pi(F)$ , telle que  $\partial\Gamma = S$ .

Prenons  $U \subset \mathbb{R}^n \setminus B'$  la  $n-d$ -boule dans  $\mathbb{R}^n$  telle que  $\partial U = S$ .

On sait que  $H_{n-d}(\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}) = 0$  pour  $d \geq 1$ , et que  $U - \Gamma$  est une  $n-d$  chaîne singulière sans bord, il existe donc une  $n-d+1$ -chaîne  $R \subset \mathbb{R}^n$  telle que  $\partial R = U - \Gamma$ .

Posons  $T = R \times \{1\} - R \times \{-1\} + \Gamma \times [-1, 1]$ , alors  $T$  est une  $n-d+1$ -chaîne singulière, avec  $\partial T = S \times [-1, 1] + U \times \{1\} - U \times \{-1\}$ . Alors  $\partial T$  est une variété topologique compacte sans bord, et est lisse sauf autour de  $S \times \{-1, 1\}$ . Donc on bouge un peu  $\partial T$  dans un petit voisinage de  $S \times \{-1, 1\}$ , et obtient que dans  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus (2B \cup \pi(F))$ , elle est homotope à la  $n-d$ -sphère  $S'$  dont le centre appartient à  $\mathbb{R}^n$  et telle que  $S' \cap \mathbb{R}^n = S$ .

Or  $\partial T$  est nulle dans  $H_{n-d}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \pi(F), \mathbb{Z})$ , donc  $S' \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus 2B$  est nulle dans  $H_{n-d}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \pi(F), \mathbb{Z})$ . Mais  $\pi(F)$  est un compétiteur de  $E$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  par rapport à  $2B$ , donc  $S'$  est nulle dans  $H_{n-d}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus E, \mathbb{Z})$ . Par la proposition 18.5, il existe alors une  $n-d+1$ -chaîne simpliciale lisse  $R' \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus E$  dont le bord est  $S'$ . Prenons  $B_1$  une boule telle que  $R' \subset B_1$ .

Notons  $i$  le plongement de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Alors  $i$  est transverse à  $R'$  sur  $S' \cup B_1^C$ . Donc par le théorème 16.35, l'ensemble des fonctions de classe  $C^\infty$  qui coïncident avec  $i$  sur  $S' \cup B_1^C$  et sont transverses à  $R'$  est un  $G_\delta$ -dense dans l'ensemble des fonctions dans  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$  qui coïncident avec  $i$  sur  $S' \cup B_1^C$ . En particulier, il existe un plongement  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$ , transverse à  $R'$ , et tel que  $\|g - i\|_\infty$  est aussi petit qu'on veut, tel que  $g^{-1}(R') \cap E = \emptyset$ , puisque l'ensemble des plongements est ouvert. Par conséquent, la proposition 17.2 donne que  $\Gamma' = g^{-1}(R')$  est une  $n-d$ -chaîne simpliciale lisse dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $\partial \Gamma' = g^{-1}(S') = S$ , ce qui implique que  $S$  est nulle dans  $H_{n-d-1}(\mathbb{R}^n \setminus E, \mathbb{Z})$ .

Donc  $\pi(F)$  est un compétiteur topologique de  $E$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Par la minimalité de  $E$ , on a que

$$(18.20) \quad H^d(E \setminus \pi(F)) \leq H^d(\pi(F) \setminus E).$$

En combinant avec (18.19) on obtient

$$(18.21) \quad H^d(E \setminus F) \leq H^d(F \setminus E),$$

et donc  $E$  est minimal topologique dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

2) Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  un minimiseur topologique de dimension  $d$  dans  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Soit  $F \subset \mathbb{R}^n$  un compétiteur de  $E$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Donc il existe une boule  $B \subset \mathbb{R}^n$  telle que  $F \setminus B = E \setminus B$ , et pour chaque  $n-d-1$ -sphère  $S \subset \mathbb{R}^n \setminus (B \cup E)$ , si  $S$  est le bord d'une  $n-d$ -chaîne simpliciale lisse dans  $\mathbb{R}^n \setminus E$ , alors elle est aussi le bord d'une  $n-d$ -chaîne simpliciale lisse dans  $\mathbb{R}^n \setminus F$ .

Notons  $B'$  la boule dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  avec le même centre et le même rayon que  $B$ . Alors  $F \setminus B' = E \setminus B'$ . On veut montrer que  $F$  est un compétiteur topologique de  $E$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  aussi.

Soit  $S' \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus (F \cup B')$  une sphère de dimension  $n-d$ , qui est nulle dans  $H_{n-d}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus F, \mathbb{Z})$ , on veut montrer que  $S'$  est nulle dans  $H_{n-d}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus E, \mathbb{Z})$ .

Si  $S' \cap \mathbb{R}^n = \emptyset$ , alors puisque  $S'$  est connexe, et  $\mathbb{R}^n$  sépare  $\mathbb{R}^{n+1}$  en 2 composantes, on voit que  $S'$

appartient à l'une des deux composantes, qui est homéomorphe à  $\mathbb{R}^{n+1}$ , dont le groupe  $H_{n-d}$  est nul. Par conséquent,  $S'$  est nul dans  $H_{n-d}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus E, \mathbb{Z})$  ;

Si  $S' \cap \mathbb{R}^n \neq \emptyset$ , mais l'intersection est justement un point, c'est le cas où  $\mathbb{R}^n$  est tangent à  $S'$ . Alors  $S'$  appartient aussi à un des demi espaces fermés  $V$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  bordé par  $\mathbb{R}^n$ . Notons  $D$  le  $n-d+1$ -disque dans  $V$  dont le bord est  $S'$ , alors  $\mathbb{R}^n$  est tangent à  $D$  aussi, et  $D \cap \mathbb{R}^n = S' \cap \mathbb{R}^n$ , qui n'intersecte pas  $F$  et  $E$ . Donc  $S'$  est nul dans  $H_{n-d}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus E, \mathbb{Z})$  ;

Si  $S' \cap \mathbb{R}^n$  est d'intérieur non vide dans  $\mathbb{R}^n$ , alors par la proposition 18.5, il existe une  $n-d+1$ -chaîne simpliciale lisse  $\Gamma' \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus F$  dont le bord est  $S'$ . Notons  $S = S' \cap \mathbb{R}^n$ , Alors par un argument semblable à celui qui montre le  $S$  dans 1) est un élément nul, il existe une  $n-d-1$ -chaîne simpliciale lisse  $\Gamma$  dans  $\mathbb{R}^n \setminus F$  dont le bord est  $S$ . Mais  $F$  est un compétiteur topologique de  $E$  dans  $\mathbb{R}^n$ , il existe donc une  $n-d-1$ -chaîne simpliciale lisse  $R$  dans  $\mathbb{R}^n \setminus E$  dont le bord est  $S$ . Prenons  $D \subset \mathbb{R}^n \setminus B'$  une variété lisse compacte à bord de dimension  $n-d$  telle que  $\partial D = -S$ . Alors  $D + R$  est une  $n-d$ -chaîne sans bord dans  $\mathbb{R}^n$ , il existe alors une  $n-d+1$ -chaîne  $U \subset \mathbb{R}^n$  telle que  $\partial U = D + R$ , puisque  $H_{n-d}(\mathbb{R}^n, \mathbb{Z})$  est nul.

Notons  $R' = R \times [-1, 1] + U \times \{1\} - U \times \{-1\}$ , alors  $R' \cap E = \emptyset$  et  $\partial R' = S \times [-1, 1] + D \times \{1\} - D \times \{-1\}$ , qui est homotope à  $S'$ . Donc  $S'$  est nulle dans  $H_{n-d}(\mathbb{R}^n \setminus E, \mathbb{Z})$ .

Par conséquent,  $F$  est un compétiteur topologique de  $E$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  par rapport à  $B'$ , de sorte que

$$(18.22) \quad H^d(E \setminus F) \leq H^d(F \setminus E).$$

Donc  $E$  est minimal topologique dans  $\mathbb{R}^n$ . □

On considère aussi le produit de deux ensembles. C'est à dire, si  $E = E_1 \times E_2$ , avec  $E_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $E \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ , quelles sont les relations entre les minimalités des trois ensembles ?

Nous avons vu dans paragraphe 12 que si  $E$  est minimal Al dans  $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ , les  $E_i$  sont forcément des minimiseurs Al dans  $\mathbb{R}^{n_i}$ ,  $i = 1, 2$ .

Pour l'autre direction, si les  $E_i$  sont minimaux au sens Al dans  $\mathbb{R}^{n_i}$ ,  $i = 1, 2$ , on ne sait pas encore montrer la minimalité Al de leur produit  $E$ . En fait on ne sait même pas le montrer si l'un des deux  $E_i$  est  $\mathbb{R}$ . En effet, on aimeraient procéder par "slicing". Pour  $E_1 \times \mathbb{R}$  par exemple, on voudrait se servir de la minimalité de  $E_1$ , donc naturellement on regarde la tranche  $\pi^{-1}(x)$  pour chaque  $x \in \mathbb{R}$ , où  $\pi$  est le projecteur sur  $\mathbb{R}$ . Mais malheureusement on ne peut pas garantir que la tranche  $\pi^{-1}(x)$  est une déformation de  $E_1$ , donc on ne peut pas utiliser la minimalité de  $E_1$  directement.

Alors pour le cas général  $E = E_1 \times E_2$ , la situation est encore plus compliquée. Les tranches  $\pi^{-1}(x)$ ,  $x \in E_2$  ne sont pas de la même dimension que  $E_1$ , parce que  $E_2$  n'est pas de dimension pleine. Il faut sans doute trouver une moyen de faire le slicing plus intelligent.

**Remarque 18.23.** *Un moyen de slicing généralisé est de le faire par rapport à un groupe. C'est à dire, soit  $G$  un groupe opérant sur  $\mathbb{R}^n$ . Notons  $O_x$  l'orbite de  $x \in \mathbb{R}^4$ , et  $G_x$  le sous groupe stable de  $x$ . Alors*

a priori si  $G$  est suffisamment bon,  $G_x = G_y$  pour tout  $x, y$  et  $G_x \perp O_y$  pour tout  $x, y$ . Donc on a une décomposition de  $\mathbb{R}^4$  en  $\cup_{y \in O_x} G_x(y)$ . Et on peut regarder les tranches  $G_x(y) \cap E$  si  $E$  est invariant par rapport à  $G$ . Mais on ne sait pas mieux faire comme ceci.

Par contre pour les minimiseurs topologique, on peut au moins montrer la minimalité topologique pour le produit d'un minimiseur topologique avec  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition 18.24.** Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  un minimiseur topologique de dimension  $d$  dans  $\mathbb{R}^n$ , alors pour tout  $m > 0$ ,  $E \times \mathbb{R}^m$  est minimal topologique de dimension  $d + m$  dans  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

Démonstration. On va juste le montrer pour  $m = 1$ . Le cas où  $m > 1$  s'en déduit aussitôt par récurrence.

On restreint d'abord la classe des compétiteur topologiques de  $E \times \mathbb{R}$  à l'ensemble de compétiteurs topologiques rectifiables. En effet, si un ensemble  $F$  non rectifiable est un compétiteur topologique de  $E \times \mathbb{R}$ , par rapport à une boule  $B$  par exemple, alors forcément il n'est pas rectifiable dans  $B$ , parce que  $E$  est minimal topologique implique qu'il est Al minimal (par le corollaire 18.17), donc  $E$  est rectifiable, de sorte que  $F \setminus B = E \setminus B$  est rectifiable.

Mais  $F$  n'est pas rectifiable dans  $B$  implique que  $F$  n'est pas Al minimal dans  $B$  (c.f. [11] Théorème 2.11). Alors par le théorème 4.1, il existe un ensemble  $F'$ , obtenu par déformation de  $F$  dans  $B$ , qui est quasi-minimal (donc est rectifiable, c.f. [11], Thm 2.11), et dont la mesure dans  $B$  est strictement plus petite que celle de  $F$  dans  $B$ . Par la proposition 18.8,  $F'$  est aussi un compétiteur topologique de  $E \times \mathbb{R}$ . Et comme  $F'$  est rectifiable, cela implique que

$$(18.25) \quad \begin{aligned} & \inf\{H^d(F); F \text{ est un compétiteur topologique de } E\} \\ &= \inf\{H^d(F'); F' \text{ est rectifiable et est un compétiteur topologique de } E\}. \end{aligned}$$

Donc soit  $F$  un compétiteur topologique de  $E \times \mathbb{R}$ , qui est aussi rectifiable. Par définition, on peut trouver  $R > 0$  tel que

$$(18.26) \quad F \setminus B(0, R) = (E \times \mathbb{R}) \setminus B(0, R),$$

et pour toute  $n - d - 1$ -sphère  $S \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus (E \times \mathbb{R} \cup B(0, R))$ ,

$$(18.27) \quad \begin{aligned} & S \text{ est non nul dans } H_{n-d-1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus E \times \mathbb{R}, \mathbb{Z}) \\ & \Rightarrow \text{il est non nul dans } H_{n-d-1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus F, \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

On remplace  $B(0, R)$  par  $C(R) := B_n(0, R) \times [-R, R]$ , où  $B_n(0, R) = B(0, R) \cap \mathbb{R}^n$ , alors (18.26) et (18.27) sont encore vrais.

Notons  $\pi$  le projecteur sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout  $t \in [-R, R]$ , notons  $F_t = \pi^{-1}(t) \cap F$ . Alors  $F_t - t$  est un compétiteur topologique de  $E$  dans  $\mathbb{R}^n$ . En effet, soit  $S \subset \mathbb{R}^n \setminus [(F_t - t) \cup B_n(0, R)]$  est une  $n - d - 1$ -sphère, qui s'annule dans  $H_{n-d-1}(\mathbb{R}^n \setminus (F_t - t), \mathbb{Z})$ . Ceci implique qu'il existe une  $n - d$  chaîne singulière

$\Gamma \subset \mathbb{R}^n \setminus (F_t - t)$  telle que  $\partial\Gamma = S$ . Alors  $\Gamma_t := \Gamma \times \{t\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus F$  est une  $n-d$ -chaîne et  $\partial\Gamma_t = S \times \{t\}$ . Notons que  $S \times \{t\} \subset (\mathbb{R}^n \setminus [(F_t - t) \cup B_n(0, R)]) \times \{t\} = [\mathbb{R}^n \setminus B_n(0, R)] \times \{t\} \setminus F_t \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus (F \cup B(0, R))$ , et que  $\Gamma_t \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus F$  est tel que  $\partial\Gamma_t = S \times \{t\}$ , donc  $[S \times \{t\}]$  s'annule dans  $H_{n-d-1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus F, \mathbb{Z})$ . Par conséquent  $[S \times \{t\}]$  s'annule dans  $H_{n-d-1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus (E \times \mathbb{R}), \mathbb{Z})$ , puisque  $F$  est un compétiteur topologique de  $E \times \mathbb{R}$  par rapport à  $B(0, R)$ . Il existe alors une  $n-d$ -chaîne singulière  $\Gamma' \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus (E \times \mathbb{R})$  telle que  $\partial\Gamma' = S \times \{t\}$ . Notons  $\Gamma'' = p(\Gamma')$ , où  $p$  désigne le projecteur de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $\Gamma'' \subset \mathbb{R}^n \setminus E$  et  $\partial\Gamma'' = s$ . Donc  $S$  s'annule dans  $H_{n-d-1}(\mathbb{R}^n \setminus E)$ . Donc  $F_t - t$  est un compétiteur topologique de  $E$ .

Par la minimalité topologique de  $E$ ,

$$(18.28) \quad \begin{aligned} H^d(\pi^{-1}(t) \cap F \cap C(R)) &= H^d([(F_t - t) \cap B_n(0, R)] \times \{t\}) \\ &= H^d((F_t - t) \cap B_n(0, R)) \geq H^d(E \cap B_n(0, R)). \end{aligned}$$

Or par la formule de coaire (c.f.[14] Thm 3.2.22)

$$(18.29) \quad \int_{F \cap C(R)} \|apD\pi(x)\| dH^{d+1}(x) = \int_{-R}^R H^d(\pi^{-1}(t) \cap F \cap B_n(0, R) \times \{t\}) dH^1(t).$$

Mais  $\pi$  est 1-Lipschitzienne, donc  $\|apD\pi(x)\| \leq 1$ , et

$$(18.30) \quad \int_{F \cap C(R)} \|apD\pi(x)\| dH^{d+1}(x) \leq H^{d+1}(F \cap C(R)).$$

D'un autre côté par (18.28)

$$(18.31) \quad \int_{-R}^R H^d(\pi^{-1}(t) \cap F \cap B_n(0, R)) dH^1(t) \geq 2RH^d(E \cap B_n(0, R)).$$

On obtient donc

$$(18.32) \quad H^{d+1}(F \cap C(R)) \geq 2RH^d(E \cap B_n(0, R)) = H^{d+1}(E \cap C(R)),$$

ce qui donne la minimalité topologique de  $E \times \mathbb{R}$ .  $\square$

## 19 Une discussion sur $T$

Maintenant on veut démontrer, pour des ensembles minimaux de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^4$ , un théorème semblable au théorème 13.9. Dans [9], on l'a démontré pour chaque type de limite d'implosion, qui est un cône minimal, et on a traité les cas un par un. Si on veut faire la même chose dans notre cas, cela demande encore une liste complète des cônes minimaux, qui est sans doute encore loin d'être connue.

Mais commençons par les types de singularité qu'on connaît bien.

On sait déjà que pour un cône minimal (au sens d'Almgren) de type  $\mathbb{T}$ , sa densité à l'origine est toujours plus grande qu'un certain nombre  $d_T$ , qui est strictement supérieure à  $\frac{3}{2}$ . Ici un cône minimal de type  $\mathbb{T}$  veut dire seulement un cône minimal qui n'est pas un plan, ni un  $\mathbb{Y}$ . (c.f. [9], lemme 14.12).

Dans  $\mathbb{R}^3$ , il n'y a qu'un cône minimal (au sens MS ou Al) de type  $\mathbb{T}$ , qui est le cône sur le tétraèdre, et qu'on note  $T$ . Et donc sa densité à l'origine est juste  $d_T$ , qui vaut environ 1.8. Notons que dans  $\mathbb{R}^3$ , tous les cônes minimaux au sens Al de dimension 2 sont aussi minimaux au sens MS.

Pour notre cas  $\mathbb{R}^4$ , on connaît déjà 2 cônes minimaux de type  $\mathbb{T}$  : le cône sur le tétraèdre  $T$ , de densité environ 1.8, et l'union de deux plans presque orthogonaux, de densité 2. Un autre cône potentiel est le produit de 2 ensembles  $Y$  de dimension 1, dont on ne sait pas encore montrer la minimalité (mais on va en discuter un peu plus tard), et qui serait de densité  $\frac{9}{4}$ .

On ne sait pas non plus si dans  $\mathbb{R}^4$  il existe un cône de type  $\mathbb{T}$  avec une densité inférieure à celle d'un  $T$ . Mais apparemment  $T$  est le cône qui admet la structure topologique la plus simple parmi tous les cônes de type  $\mathbb{T}$ . Donc supposons que la densité de  $T$  vaut  $d_T$  dans  $\mathbb{R}^4$  aussi. Alors on voudrait montrer un théorème semblable au théorème 13.9.

**Remarque 19.1.** *Rappelons que la stratégie pour montrer le théorème 13.9 est que, pour chaque ensemble minimal  $E$ , on regarde la densité  $d_E$  d'une de ses limites d'implosion, et on essaye de trouver un point  $p$  dans  $E$  de densité  $d_E$ . Alors par la monotonie de la fonction  $f(t) = \frac{H^2(E \cap B(p,t))}{t^2}$ , on obtient que  $f$  est constante, c'est à dire que la densité de  $E$  en  $p$  est constante. Cela montre que  $E$  est un cône centré en  $p$ .*

*L'enjeu est donc de trouver un point de la densité caractéristique pour chaque type de cône minimal, et ça entraîne souvent un argument topologique correspondant à chaque type de cône minimal. Donc jusqu'à maintenant, on ne sait que de traiter les cônes un par un, et à condition qu'on sache déjà leur structure topologique.*

Maintenant on va regarder un minimiseur topologique  $E$  qui ressemble à un  $T$  à l'infini, c'est à dire, on suppose qu'il existe un  $T$  centré à l'origine, et une suite  $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  telle que

$$(19.2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} r_k \rightarrow \infty \text{ et } \lim_{k \rightarrow \infty} d_{0,r_k}(E, T) = 0.$$

On suppose aussi, dans tout ce qui suit, que la densité de  $T$  est  $d_T$  (ce qui n'est pas démontré à ce jour).

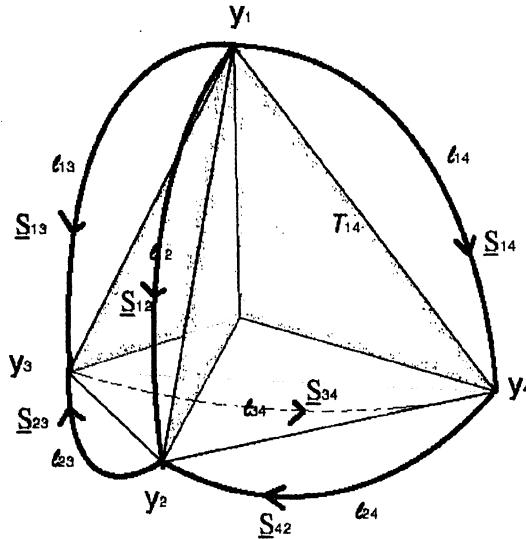
Notre ensemble  $E$  est maintenant de codimension 2, et donc la condition topologique est définie par le groupe  $H_1(\mathbb{R}^4 \setminus E, \mathbb{Z})$ .

Notons  $\{y_i\}_{1 \leq i \leq 4}$  les quatre points de type  $\mathbb{Y}$  dans  $T \cap \partial B(0, 1)$ . Notons  $l_{ij} \subset T \cap \partial B(0, 1)$  l'arc de grand cercle connectant  $y_i$  et  $y_j$ . Le cône  $T$  est composé de 6 secteurs fermés  $\{T_{ij}\}_{1 \leq i \neq j \leq 4}$ , où  $T_{ij}$  est le cône sur  $l_{ij}$ . Notons  $x_{ij}$ ,  $1 \leq i \neq j \leq 4$ , le milieu de  $l_{ij}$ . Notons  $P_{ij}$  le 2-plan orthogonal à  $T_{ij}$  et passant par  $x_{ij}$  (et donc passant par l'origine aussi). Posons  $B_{ij} = B(x_{ij}, \frac{1}{10}) \cap P_{ij}$  et  $s_{ij}$  le bord de  $B_{ij}$ . Alors les  $s_{ij}$  sont des cercles, qui ne touchent pas  $T$ , et  $B_{ij} \cap T = B_{ij} \cap T_{ij} = x_{ij}$ .

Fixons une base orthonormée  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq 4}$  de  $\mathbb{R}^4$ . Nous allons définir des cercles orientés  $\vec{s}_{ij}$ , c'est à dire, donner une orientation aux  $s_{ij}$ . Il y a deux orientations  $\sigma_1 = x \wedge y, \sigma_2 = -x \wedge y$  pour  $B_{ij}$ ,

où  $x, y$  sont deux vecteurs unitaires orthogonaux appartenant au plan qui contient  $B_{ij}$ . Choisissons le  $k \in \{1, 2\}$  tel que  $\det_{\{e_i\}_{1 \leq i \leq 4}} \overrightarrow{ox_{ij}} \wedge \overrightarrow{y_i y_j} \wedge \sigma_k > 0$ , et notons  $\vec{B}_{ij}$  le disque orienté  $B_{ij}$  avec cette orientation. Notons  $\vec{s}_{ij} = \partial \vec{B}_{ij}$  le cercle orienté. Et  $[\vec{s}_{ij}]$  l'élément représenté par  $\vec{s}_{ij}$  dans  $H_1(\mathbb{R}^4 \setminus T; \mathbb{Z})$ . Les  $[\vec{s}_{ij}], 1 \leq i < j \leq 4$  sont deux à deux différents, par contre ils sont algébriquement dépendants.

Le dessin 19-1 ci-dessous donne un schéma (mais dans  $\mathbb{R}^3$ ). Comme  $T$  est contenu dans un  $\mathbb{R}^3$ , alors si on fixe l'orientation de la dimension restante de  $\mathbb{R}^4$ , l'orientation de  $B_{ij}$  s'obtient en prenant l'orientaiton du vecteur normal à  $T_{ij}$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Cette orientation correspond à l'orientation de  $l_{ij}$  par la règle de la main droite. Donc dans le dessin on marque l'orientation de  $l_{ij}$  par des flèches, pour désigner l'orientation de  $[\vec{s}_{ij}]$ . Dans le dessin, l'orientation  $\underline{S}_{ij}$  désigne  $[\vec{s}_{ij}]$ .



19-1

Nous avons alors que

$$(19.3) \quad \vec{s}_{ij} = -\vec{s}_{ji}, [\vec{s}_{ij}] = -[\vec{s}_{ji}].$$

Notons que  $\{[\vec{s}_{ij}], 1 \leq i, j \leq 4\}$  est un ensemble des générateurs du groupe d'homologie  $H_1(\mathbb{R}^4 \setminus T; \mathbb{Z})$ . Pour montrer ceci, notons  $C_i, 1 \leq i \leq 4$  le cône fermé sur le triangle dont les sommets sont les  $y_j, j \neq i$ . Notons  $V_{ij} = \mathbb{R}^4 \setminus (C_i \cup C_j)$ , et  $U_{ij} = V_{ij} \setminus T_{ij} \subset \mathbb{R}^4 \setminus T$ . Notons que  $C_i \cup C_j$  est un cône de dimension 3 et homéomorphe à un cône sur un disque fermé de dimension 2, donc  $V_{ij}$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^4$ , et  $U_{ij}$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^2$ . Pour chaque  $U_{ij}$ , le groupe d'homologie singulière  $H_1(U_{ij}; \mathbb{Z})$  est donc le groupe libre engendré par l'élément enlaçant  $T_{ij}$ , qui est  $[\vec{s}_{ij}]$ . D'un autre côté, chaque  $U_{ij}$  est connexe, de sorte que  $H_0(U_{ij}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ .

Maintenant pour les deux ouverts  $U_{12}$  et  $U_{13}$ , on a la suite exacte de Mayer-Vietoris (c.f.[18] Chap

2.2, Mayer-Vietoris Sequences)

$$(19.4) \quad \begin{aligned} H_1(U_{12} \cap U_{13}) &\rightarrow H_1(U_{12}) \oplus H_1(U_{13}) \rightarrow H_1(U_{12} \cup U_{13}) \\ &\rightarrow H_0(U_{12} \cap U_{13}) \rightarrow H_0(U_{12}) \oplus H_0(U_{13}) \rightarrow H_0(U_{12} \cup U_{13}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Notons que  $U_{12} \cap U_{13} = \mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^3 \cup C_4^\circ \cong \mathbb{R}^4$ , il est donc connexe et simplement connexe, de sorte que  $H_1(U_{12} \cap U_{13}) = 0$ ,  $H_0(U_{12} \cap U_{13}) = \mathbb{Z}$ ;  $U_{12} \cup U_{13} = \mathbb{R}^4 \setminus (T \cup C_1)$  est connexe, on a donc  $H_0(U_{12} \cup U_{13}) = \mathbb{Z}$ . Par conséquent, (19.4) devient

$$(19.5) \quad 0 \rightarrow <[\vec{s}_{12}]> \oplus <[\vec{s}_{13}]> \rightarrow H_1(U_{12} \cup U_{13}) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

On a donc

$$(19.6) \quad 0 \rightarrow <[\vec{s}_{12}]> \oplus <[\vec{s}_{13}]> \rightarrow H_1(U_{12} \cup U_{13}) \rightarrow 0,$$

ce qui donne

$$(19.7) \quad H_1(U_{12} \cup U_{13}) = <[\vec{s}_{12}]> \oplus <[\vec{s}_{13}]>.$$

Ensuite regardons les deux ensembles  $U_{12} \cup U_{13}$  et  $U_{34}$ . On a la suite exacte de Mayer-Vietoris

$$(19.8) \quad \begin{aligned} H_1([U_{12} \cup U_{13}] \cap U_{34}) &\rightarrow H_1(U_{12} \cup U_{13}) \oplus H_1(U_{34}) \rightarrow H_1(U_{12} \cup U_{13} \cup U_{34}) \rightarrow \\ H_0([U_{12} \cup U_{13}] \cap U_{34}) &\rightarrow H_0(U_{12} \cup U_{13}) \oplus H_0(U_{34}) \rightarrow H_0(U_{12} \cup U_{13} \cup U_{34}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

L'union des deux ouverts est  $\mathbb{R}^4 \setminus T$ , qui est connexe, de sorte que  $H_0(\mathbb{R}^4 \setminus T) = \mathbb{Z}$ . L'intersection des deux ouverts est  $\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^3 \cup C_2 \cong \mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^3 \cup C_4 = U_{12} \cap U_{13}$ , dont les groupes d'homologies sont les mêmes que ceux de  $U_{12} \cap U_{13}$ . Par conséquent, (19.8) devient

$$(19.9) \quad 0 \rightarrow <[\vec{s}_{12}]> \oplus <[\vec{s}_{13}]> \oplus <[\vec{s}_{34}]> \rightarrow H_1(\mathbb{R}^4 \setminus T) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

On a donc

$$(19.10) \quad H_1(\mathbb{R}^4 \setminus T) = <[\vec{s}_{12}]> \oplus <[\vec{s}_{13}]> \oplus <[\vec{s}_{34}]>.$$

**Remarque 19.11.** Notons que si on remplace  $\vec{s}_{34}$  par  $\vec{s}_{23}$  ou  $\vec{s}_{24}$ , on a toujours le même résultat que (19.10). Par contre  $\vec{s}_{14}$  ne marche pas. En effet, si trois  $T_{ij}$  ne partagent pas un sommet  $y_l$ , alors  $H_1(\mathbb{R}^4 \setminus T)$  est le groupe libre engendré par les trois  $s_{ij}$  correspondants.

On dit que  $[s_{ij}]$  et  $[s_{kl}]$  (sans flèche de vecteur) sont différents (dans un groupe d'homologie) si

$$(19.12) \quad [\vec{s}_{ij}] \neq \pm [\vec{s}_{kl}],$$

et on note  $s_{ij} \sim s_{kl}$  si  $[\vec{s}_{ij}] = \pm [\vec{s}_{kl}]$ .

Revenons à notre ensemble  $E$ . Sans perdre de généralité, on peut supposer (quitte à remplacer  $E$  par un  $E/r_k$ ,  $k$  grand) que  $d_{0,3}(E, T)$  est aussi petit qu'on veut (inférieur à  $\epsilon_0$  par exemple). Vérifions qu'alors, dans  $B(0, \frac{5}{2}) \setminus B(0, \frac{1}{2})$ ,  $E$  est une version  $C^1$  de  $T$ . En effet, l'ensemble  $E_Y$  des points de type  $\mathbb{Y}$  dans  $E \cap B(0, \frac{5}{2}) \setminus B(0, \frac{1}{2})$  est l'union de 4 courbes de classe  $C^1$   $\gamma_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , chaque  $\gamma_i$  est très proche de la demi droite  $[oy_i]$ , et autour de chaque  $\gamma_i$ , il existe un voisinage tubulaire  $T_i$  de  $\gamma_i$  qui contient  $B([oy_i], r)$  pour un  $r > 0$ , tel que  $E$  est une version  $C^1$  de  $Y$  (voir [9] paragraphe 18 pour plus de détails). Pour des points dans  $E$  qui sont dans  $B(T_{ij} \setminus B([oy_i], r))$ , on peut montrer, par un argument semblable à celui de paragraphe 6, que  $E$  est le graphe d'une fonction  $C^1$  de  $T_{ij}$ . Donc au total, dans  $B(0, \frac{5}{2}) \setminus B(0, \frac{1}{2})$ ,  $E$  est l'image de  $T$  par un homéomorphisme  $\varphi$ , dont la dérivé est très proche de l'identité. Notons  $E_{ij} = \varphi(T_{ij})$ ,  $1 \leq i \neq j \leq 4$ . De plus, comme  $E$  est très proche de  $T$ ,  $s_{ij} \cap E = \emptyset$ ,  $B_{ij} \cap E = B_{ij} \cap E_{ij}$  est aussi un ensemble qui ne contient qu'un point, si bien que localement chaque  $s_{ij}$  enlace  $E_{ij}$ , et est donc un élément dans  $H_1(\mathbb{R}^4 \setminus E, \mathbb{Z})$  aussi.

**Lemme 19.13.** *Soit  $E$  un ensemble minimal au sens Al et vérifiant (19.2). On continue à supposer que  $d_T$  vaut la densité de  $T$ . Prenons toutes les conventions ci-dessus. Alors si*

$$(19.14) \quad \text{pour tout } 1 \leq i < j \leq 4, [s_{ij}] \neq 0 \text{ dans } H_1(\mathbb{R}^4 \setminus E, \mathbb{Z}),$$

et

$$(19.15) \quad \text{au moins 5 des } [s_{ij}] \text{ sont deux à deux différents dans } H_1(\mathbb{R}^4 \setminus E, \mathbb{Z}),$$

alors  $E$  contient au moins un point de type  $\mathbb{T}$ .

Démonstration du lemme : On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il n'existe pas de point de type  $\mathbb{T}$ . Pour tout point  $x \in E$ , la densité  $d_E(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{H^2(B(x, r) \cap E)}{r^2}$  de  $E$  en  $x$  est strictement inférieure à  $d_T$ , qui vaut aussi la densité de  $T$  à l'origine. Alors  $d_E(x)$  est soit  $\frac{3}{2}$ , soit 1. Autrement dit, tous les points singuliers de  $E$  sont de type  $\mathbb{Y}$ .

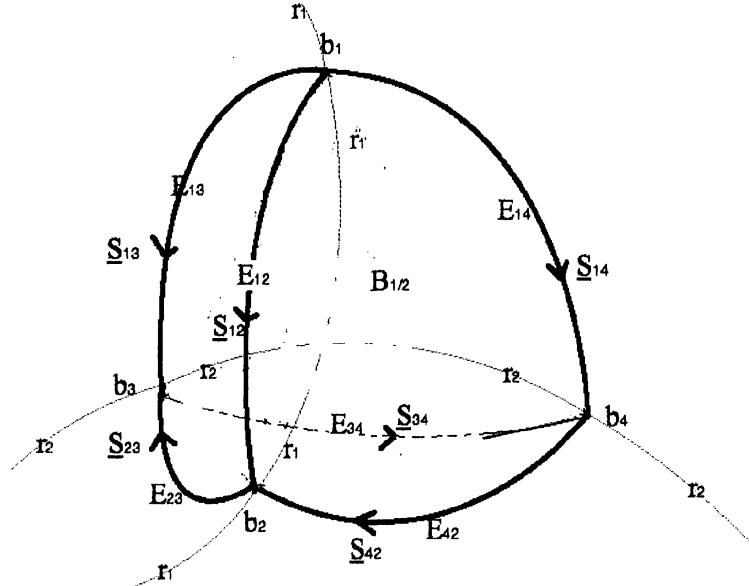
Notons  $E_Y$  l'ensemble des points de type  $\mathbb{Y}$  de  $E$ . Alors  $E_Y \cap B(0, 2)$  est composé de courbes localement bi-Hölder équivalentes à une droite, dont des bouts sont situés dans la sphère  $\partial B(0, 2)$ . (c.f.[9], lemme 18.11).

L'argument ci-dessous est le même que celui après le lemme 18.11 dans [9] paragraphe 18, que l'on pourra donc consulter pour plus de détails. Ici on ne donne pas trop de détail.

Puisque  $E$  ressemble assez à un  $T$  dans  $B(0, \frac{5}{2}) \setminus B(0, \frac{1}{2})$ , on a donc  $E_Y \cap \partial B(0, 2) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ,  $E_Y \cap \partial B(0, 1) = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ , où  $b_i$  est le point le plus proche de  $a_i$  parmi les  $b_j$ ,  $1 \leq j \leq 4$ . Alors par chaque  $a_i$  passe une courbe de  $E_Y$ , et donc localement  $a_i$  est situé dans l'intersection de 3 demi surfaces  $E_{ij}$ ,  $j \neq i$ ,  $1 \leq j \leq 4$ .

Maintenant puisqu'on a 4 bouts, sans perdre de généralité, on peut supposer que la courbe  $\gamma_1$  de  $E_Y$  entre dans la boule  $B(0, 2)$  par  $a_1$  et sort par  $a_2$ , l'autre courbe  $\gamma_2$  part par  $a_3$  et sort par  $a_4$  (voir

le dessin 19-2 ci-dessous, où les traits verts représentent les  $\gamma_i$ , et on ne connaît pas trop la structure de  $E$  dans  $B_{1/2} = B(0, \frac{1}{2})$ .



19-2

Autour de chaque point  $x$  de  $\gamma_1$ , il existe une boule bi-hölderienne  $B(x, r_x)$  de  $x$ . Par compacité de la courbe  $\gamma_1$ , il existe donc un voisinage tubulaire  $I_1$  de  $\gamma_1$ , tel que  $E \cap I_1$  est composé exactement de trois surfaces qui se rencontrent le long de  $\gamma_1$ .

Mais  $\gamma_1$  connecte  $a_1$  et  $a_2$ , donc il passe par  $b_1$  et  $b_2$ . Mais autour de  $y_i$   $E$  est composé de trois surfaces  $E_{ij}, j \neq i$ . Alors puisque  $E$  est composé de trois surfaces tout le long de  $\gamma_1$ , ces trois surfaces se connectent  $E_{12}, E_{13}, E_{14}$  à  $E_{21}, E_{23}, E_{24}$ . On sait donc que  $s_{12}, s_{13}, s_{14}$  sont homotopes à  $s_{21}, s_{23}, s_{24}$  (sans connaître l'attribution), et un argument semblable donne que  $s_{31}, s_{32}, s_{34}$  sont homotopes à  $s_{41}, s_{42}, s_{43}$ . Pour la partie  $\gamma_1$  on a donc 6 cas.

$$\begin{aligned}
 & s_{12} \sim s_{21}, \quad s_{13} \sim s_{23}, \quad s_{14} \sim s_{24}; \\
 & s_{12} \sim s_{21}, \quad s_{13} \sim s_{24}, \quad s_{14} \sim s_{23}; \\
 (19.16) \quad & s_{12} \sim s_{23}, \quad s_{13} \sim s_{21}, \quad s_{14} \sim s_{24}; \\
 & s_{12} \sim s_{23}, \quad s_{13} \sim s_{24}, \quad s_{14} \sim s_{21}; \\
 & s_{12} \sim s_{24}, \quad s_{13} \sim s_{21}, \quad s_{14} \sim s_{23}; \\
 & s_{12} \sim s_{24}, \quad s_{13} \sim s_{23}, \quad s_{14} \sim s_{21}.
 \end{aligned}$$

Notons que naturellement  $s_{12} \sim s_{21}$ , on a donc 4 cas (modulo la symétrie des indices 3 et 4)

$$\begin{aligned}
 (19.17) \quad & s_{13} \sim s_{23}, s_{14} \sim s_{24}; \\
 & s_{13} \sim s_{24}, s_{14} \sim s_{23}; \\
 & s_{12} \sim s_{23} \sim s_{13}, s_{14} \sim s_{24}; \\
 & s_{12} \sim s_{23} \sim s_{14}, s_{13} \sim s_{24}.
 \end{aligned}$$

Semblablement on a, pour la partie  $\gamma_2$

$$(19.18) \quad \begin{aligned} s_{31} &\sim s_{41}, s_{32} \sim s_{42}; \\ s_{31} &\sim s_{42}, s_{32} \sim s_{41}; \\ s_{34} &\sim s_{41} \sim s_{31}, s_{32} \sim s_{42}; \\ s_{34} &\sim s_{41} \sim s_{32}, s_{31} \sim s_{42}. \end{aligned}$$

En combinant (19.17) et (19.18) on a 8 cas

$$(19.19) \quad \begin{aligned} 1^\circ \quad &s_{13} \sim s_{23} \sim s_{42} \sim s_{14}; \\ 2^\circ \quad &s_{13} \sim s_{23} \sim s_{42} \sim s_{14} \sim s_{43}; \\ 3^\circ \quad &s_{13} \sim s_{24}, s_{14} \sim s_{23}; \\ 4^\circ \quad &s_{34} \sim s_{41} \sim s_{32}, s_{13} \sim s_{24}; \\ 5^\circ \quad &s_{13} \sim s_{23} \sim s_{42} \sim s_{14} \sim s_{12}; \\ 6^\circ \quad &s_{13} \sim s_{24}, s_{12} \sim s_{23} \sim s_{14}; \\ 7^\circ \quad &s_{12} \sim s_{13} \sim s_{23} \sim s_{42} \sim s_{14} \sim s_{43}; \\ 8^\circ \quad &s_{13} \sim s_{24}, s_{12} \sim s_{14} \sim s_{23} \sim s_{34}. \end{aligned}$$

Par conséquent, au plus 4 des  $[s_{ij}], 1 \leq i < j \leq 4$ , sont différents, d'où se produit la contradiction avec notre hypothèse, qui dit qu'au moins 5 des  $\{[s_{ij}], 1 \leq i < j \leq 4\}$  sont des éléments différents de  $H^1(\mathbb{R}^4 \setminus E; \mathbb{Z})$ .

Fin de la démonstration du lemme.

**Corollaire 19.20.** *Soit  $E$  un ensemble minimal au sens Al de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^4$  tel que (19.2), (19.14) et (19.15) sont vrais. Alors  $E$  est un T.*

Démonstration. Par le lemme 19.13,  $E$  contient un point  $x$  de type T, donc la densité  $d_E(x)$  de  $E$  en  $x$  est supérieure ou égale à  $d_T$ . Posons  $\theta(t) = t^{-2}H^2(E \cap B(x, t))$  la fonction de densité de  $E$  en  $x$ , elle est monotone, par la proposition 5.16 de [9]. Alors (19.2) et le lemme 16.43 de [9] donnent  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_t = d_T$ . Notons que  $d_E(x) = \theta(0) \geq d_T$ , donc la monotonie de  $\theta$  dit que  $\theta(t) = d_T$  pour tout  $t > 0$ . Par conséquent, le théorème 6.2 de [9] donne que  $E$  est un cône minimal centré en  $x$ , de densité  $d_T$ . Donc par (19.2)  $E$  est un T centré en  $x$ .  $\square$

D'après le corollaire 19.20, il ne nous reste (pour démontrer un théorème semblable au théorème 13.9) qu'à discuter les cas où  $E$  est minimal topologique, et au plus 4 des  $[s_{ij}]$  sont différents.

On va d'abord établir quelques propriétés des  $s_{ij}$ .

**Lemme 19.21. 1)**

$$(19.22) \quad \sum_{j \neq i} [\vec{s}_{ij}] = 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq 4.$$

2) Pour chaque  $i \neq j \neq k$ ,

$$(19.23) \quad [\vec{s}_{ij}] \neq 0,$$

et

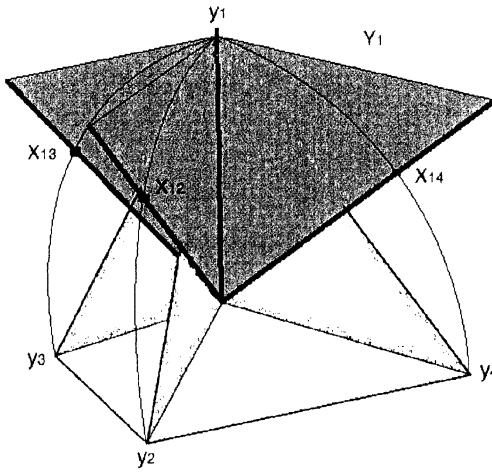
$$(19.24) \quad [\vec{s}_{ij}] \neq [\vec{s}_{jk}].$$

Démonstration. 1) Fixons un  $1 \leq i \leq 4$ .

On décompose  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ , où  $T \subset \mathbb{R}^3$ .

Rappelons que les  $y_i, 1 \leq i \leq 4$  sont les 4 points de type  $\mathbb{Y}$  de  $T \cap \partial B(0, 1)$ ,  $T_{ij}$  est le secteur de  $T$  passant par l'origine et  $y_i, y_j$ ,  $x_{ij}$  est le milieu du grand cercle passant par  $y_i, y_j$ ,  $P_{ij}$  est le plan passant par  $x_{ij}$  et orthogonal à  $T_{ij}$ , et  $s_{ij} = \partial B_{ij}$  où  $B_{ij} = B(x_{ij}, \frac{1}{10}) \cap P_{ij}$ .

Notons  $Y_i$  le cône sur  $Z_i := \cup_{j \neq i} \widehat{y_i x_{ij}}$ , où  $\widehat{y_i x_{ij}}$  désigne l'arc de cercle entre  $y_i$  et  $x_{ij}$  (voir le dessin 19-3 de  $Y_1 \subset \mathbb{R}^3$  ci-dessous),  $C_T$  l'enveloppe convexe de  $Y_i$ . Posons  $C = C_T \times \mathbb{R}$ . Notons que  $C$  est un cône, et donc  $C \setminus T$  l'est aussi. Noter que  $Z_i \subset S^3 \cap C$  est comme un  $Y$  de dimension 1. On va montrer que  $\sum_{j \neq i} [\vec{s}_{ij}] = 0$  dans  $H_1(C \setminus T, \mathbb{Z})$ .



19-3

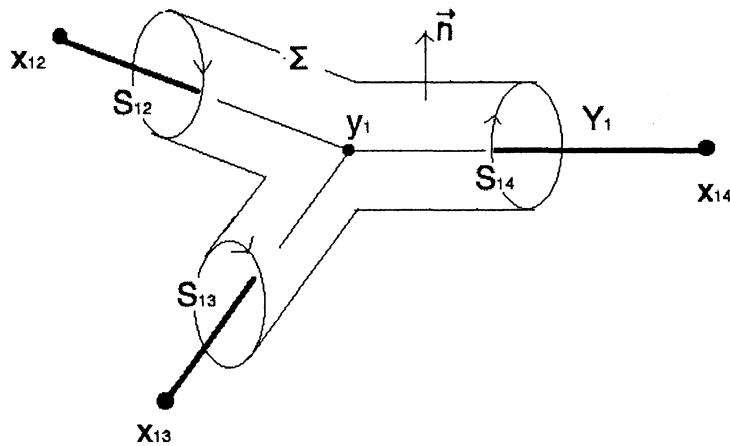
Observons d'abord que  $\vec{s}_{ij}$  est homotope dans  $C \setminus T$  à sa projection radiale  $\vec{s}'_{ij}$  sur  $S^3$  (dont l'orientation est induite par  $\vec{s}_{ij}$  sur la sphère  $S^3$ ). En effet, notons  $\pi_S$  le projecteur radial de  $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$  sur  $S^3$ , alors pour chaque  $x \in s_{ij}$ , le segment  $[x, \pi_S(x)]$  appartient à une droite radiale, qui ne rencontre aucune autre droite radiale, en particulier, puisque  $x \in \mathbb{R}^4 \setminus T$ , où  $T$  est décomposé de droites radiales,  $[x, \pi_S(x)] \cap T = \emptyset$ . Alors si on pose  $f_t(x) = (1-t)x + t\pi_S(x), 0 \leq t \leq 1$ , alors  $f_t$  est un homotopie entre  $\vec{s}_{ij}$  et  $\vec{s}'_{ij} = \pi_S(\vec{s}_{ij})$ .

Alors sur la sphère, dans  $C \cap S^3$ , topologiquement les  $s_{ij}, j \neq i$  sont trois cercles enlaçant les trois branches de  $Z_i$  (rappelons que le couple d'espaces topologiques  $(C \cap S^3, Z_i)$  est homéomorphe à  $(\mathbb{R}^3, Y)$  avec  $Y$  un ensemble de type  $\mathbb{Y}$  de dimension 1). Alors dans  $(\mathbb{R}^3, Y)$ , l'union des trois cercles orientés

enlaçant les trois branches de  $Y$  est le bord d'une variété orientée à bord contenue dans  $\mathbb{R}^3 \setminus Y$ , ce qui donne qu'il existe une variété orientée à bord  $\Sigma \subset C \cap S^3 \setminus Z_i$  de dimension 2 telle que  $\partial\Sigma = \cup_{j \neq i} \vec{s}_{ij}$  (voir le dessin 19-4 ci-dessous, où  $s_{ij}$  désigne le cercle orienté  $\vec{s}_{ij}$ , et l'orientation de  $\Sigma$  est marquée par un vecteur normal extérieur  $\vec{n}$ ), de sorte que, après une triangulation lisse dont  $\Gamma$  et les  $s_{ij}$  sont des chaînes lisses, on a  $\partial[\Sigma] = \cup_{j \neq i} [\vec{s}_{ij}]$ . Mais  $\Sigma \subset C \cap S^3 \setminus Z_i \subset \mathbb{R}^4 \setminus T$ , par conséquent  $\sum_{j \neq i} [\vec{s}_{ij}] = 0$  dans  $H_1(\mathbb{R}^4 \setminus T, \mathbb{Z})$ . Alors puisque  $\vec{s}'_{ij}$  est homotope à  $\vec{s}_{ij}$ , on obtient

$$(19.25) \quad \sum_{j \neq i} [\vec{s}_{ij}] = 0 \text{ dans } H_1(\mathbb{R}^4 \setminus T, \mathbb{Z}).$$

Puisque  $E$  est très proche de  $T$ , on peut supposer que  $\Sigma$  et les  $f_t(s_{ij})$  ne touchent pas  $E$ . On obtient donc la conclusion.



19-4

2) Supposons par exemple que  $i = 1, j = 2, k = 3$ . Si  $[\vec{s}_{12}] = [\vec{s}_{23}]$ , alors par (19.22)

$$(19.26) \quad [\vec{s}_{24}] = 0,$$

Donc il faut juste montrer (19.23). Supposons par exemple  $i = 2, j = 4$ . Alors (19.26) veut dire qu'il existe une 2-chaîne simpliciale lisse  $\Gamma$  dans  $\mathbb{R}^4 \setminus E$  telle que  $\partial\Gamma = \vec{s}_{24}$ . Mais  $E$  est fermé, il existe donc un voisinage  $U$  de  $\Gamma$  tel que  $U \cap E = \emptyset$ . En particulier,  $s_{24} \subset U$ .

Posons  $D = E \cap \overline{B}(x_{24}, \frac{1}{10})$ . Alors par la régularité de  $E$  qui est très proche de  $T$ ,  $E$  est dans  $B(x_{24}, \frac{1}{8})$  égale à un morceau de surface qui est presque un disque. Par conséquent  $D$  est une surface de mesure non nulle.

On note  $F = E \setminus D$ , alors  $F \setminus B(0, 2) = E \setminus B(0, 2)$ . On va montrer que  $F$  est un compétiteur topologique de  $E$  par rapport à la boule  $B(0, 2)$ . Supposons donc que  $\gamma \subset \mathbb{R}^4 \setminus (B(0, 2) \cup E)$  est un cercle orienté. On veut montrer que si  $[\gamma]$  est nul dans  $H_1(\mathbb{R}^4 \setminus F, \mathbb{Z})$ , alors il est nul dans  $H_1(\mathbb{R}^4 \setminus E, \mathbb{Z})$ .

Puisque  $[\gamma]$  est nul dans  $H_1(\mathbb{R}^4 \setminus F, \mathbb{Z})$ , il existe un 2-chaine simpliciale lisse  $\Sigma \subset \mathbb{R}^4 \setminus F$  tel que  $\partial\Sigma = \gamma$ . Par le théorème 16.35 et la remarque 16.37, et un argument semblable à celui de la proposition 18.8, on peut demander que  $\Sigma$  soit transverse à  $\partial B(x_{24}, \frac{1}{10})$ .

Si  $\Sigma \cap B(x_{24}, \frac{1}{10}) = \emptyset$ , alors  $\Sigma \subset \mathbb{R}^4 \setminus E$  aussi, d'où  $[\gamma] = 0 \in H_1(\mathbb{R}^4 \setminus E, \mathbb{Z})$ . Si  $\Sigma \cap B(x_{24}, \frac{1}{10}) \neq \emptyset$ , alors par la transversalité de  $\Sigma$  et  $\partial B(x_{24}, \frac{1}{10})$ , par la proposition 17.2, leur intersection est une 1-chaîne simpliciale lisse  $s \subset \partial B(x_{24}, \frac{1}{10})$  sans bord.

Maintenant on se place dans la boule  $\overline{B}_1 := \overline{B}(x_{24}, \frac{1}{10})$ . Puisque  $D$  est topologiquement un disque, on a

$$(19.27) \quad H_1(\overline{B}_1 \setminus D) = \mathbb{Z},$$

donc l'élément générateur est  $[\vec{s}_{24}]$ . Par conséquent, il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $[s] = n[\vec{s}_{24}]$ . Il existe donc une 1-chaîne simpliciale lisse  $R \subset \overline{B}_1 \setminus D$  tel que  $\partial R = s - n\vec{s}_{24}$ .

Rappelons que  $\Gamma \subset \mathbb{R}^4 \setminus E$  est tel que  $\partial\Gamma = \vec{s}_{24}$ . Par conséquent,  $\Sigma' = \Sigma \setminus \overline{B}_1 + n\Gamma + R$  est un 2-chaine tel que  $\partial[\Sigma'] = [\gamma]$ . De plus  $\Sigma' \subset \mathbb{R}^4 \setminus E$ . Donc  $[\gamma]$  est aussi nul dans  $H^1(\mathbb{R}^4 \setminus E, \mathbb{Z})$ . Ainsi  $F$  est un compétiteur topologique de  $E$ .

Mais puisque  $D$  est de mesure non nulle,

$$(19.28) \quad H^2(F) < H^2(E),$$

ce qui contredit le fait que  $E$  est MS minimal.

Fin de la démonstration du lemme 19.21.

On va maintenant reprendre la discussion des cas où  $E$  est très proche d'un  $T$  à l'échelle 1, et ne contient pas de point de type  $\mathbb{T}$ . On va donc discuter les 8 cas qui apparaissent dans (19.19). Notons que parmi les 8 cas, le troisième cas contient déjà tous les autres 7. Mais on va comme même discuter tous les 8, pour en éliminer certains.

1°  $s_{13} \sim s_{23} \sim s_{42} \sim s_{14}$ .

Par (19.24),  $[\vec{s}_{13}] \neq [\vec{s}_{32}]$ , donc  $[\vec{s}_{13}] = [\vec{s}_{23}]$ ; en fait

$$(19.29) \quad [\vec{s}_{13}] = [\vec{s}_{23}] = [\vec{s}_{24}] = [\vec{s}_{14}] := \alpha,$$

ensuite par (19.22)

$$(19.30) \quad [\vec{s}_{43}] = [\vec{s}_{24}] + [\vec{s}_{14}] = [\vec{s}_{13}] + [\vec{s}_{23}] = [\vec{s}_{34}],$$

donc

$$(19.31) \quad [\vec{s}_{43}] = [\vec{s}_{34}] = 2\alpha \text{ et } 4\alpha = 0.$$

On a semblablement

$$(19.32) \quad [\vec{s}_{12}] = [\vec{s}_{21}] = 2\alpha.$$

Dans ce cas, on a au plus 2 éléments différents parmi les  $s_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq 4$ .

2°  $s_{13} \sim s_{23} \sim s_{42} \sim s_{14} \sim s_{43}$ .

On a  $s_{13} \sim s_{43} \sim s_{14}$ , (19.24) donne

$$(19.33) \quad [\vec{s}_{13}] = [\vec{s}_{43}], [\vec{s}_{13}] = [\vec{s}_{14}], [\vec{s}_{14}] = [\vec{s}_{34}],$$

donc

$$(19.34) \quad [\vec{s}_{13}] = [\vec{s}_{43}] = [\vec{s}_{14}] := \alpha \text{ avec } 2\alpha = 0.$$

Mais dans ce cas, par (19.22),

$$(19.35) \quad [\vec{s}_{12}] = [\vec{s}_{41}] + [\vec{s}_{31}] = 2\alpha = 0,$$

ce qui contredit (19.23). Donc ce cas n'existe pas.

3°  $s_{13} \sim s_{24}, s_{14} \sim s_{23}$ .

Ici on a 4 cas

- $$(19.36) \quad \begin{aligned} 1) & [\vec{s}_{13}] = [\vec{s}_{24}] := \alpha, \quad [\vec{s}_{14}] = [\vec{s}_{23}] := \beta; \\ 2) & [\vec{s}_{13}] = [\vec{s}_{24}] := \alpha, \quad [\vec{s}_{14}] = -[\vec{s}_{23}] := \beta; \\ 3) & [\vec{s}_{13}] = -[\vec{s}_{24}] := \alpha, \quad [\vec{s}_{14}] = [\vec{s}_{23}] := \beta; \\ 4) & [\vec{s}_{13}] = -[\vec{s}_{24}] := \alpha, \quad [\vec{s}_{14}] = -[\vec{s}_{23}] := \beta. \end{aligned}$$

Pour 1), on a  $[\vec{s}_{34}] = -[\vec{s}_{24}] - [\vec{s}_{14}] = -\alpha - \beta$ , aussi  $[\vec{s}_{34}] = [\vec{s}_{13}] + [\vec{s}_{23}] = \alpha + \beta$ . D'autre part,  $[\vec{s}_{12}] = -[\vec{s}_{13}] - [\vec{s}_{14}] = -\alpha - \beta = \alpha + \beta = [\vec{s}_{23}] + [\vec{s}_{24}]$ . On a donc

$$(19.37) \quad 2\alpha + 2\beta = 0 \text{ et } [\vec{s}_{34}] = [\vec{s}_{12}],$$

et dans ce cas on a au plus 3 éléments différents parmi les  $s_{ij}, 1 \leq i, j \leq 4$ ;

Pour 2), on a  $\alpha - \beta = [\vec{s}_{13}] + [\vec{s}_{23}] = [\vec{s}_{34}] = -[\vec{s}_{24}] - [\vec{s}_{14}] = -\alpha - \beta$ ,  $\alpha - \beta = [\vec{s}_{23}] + [\vec{s}_{24}] = [\vec{s}_{12}] = -[\vec{s}_{13}] - [\vec{s}_{14}] = -\alpha - \beta$ . Donc

$$(19.38) \quad 2\alpha = 0 \text{ et } [\vec{s}_{34}] = [\vec{s}_{12}],$$

et dans ce cas on a au plus 3 éléments différents parmi les  $s_{ij}, 1 \leq i, j \leq 4$ ;

Pour 3), on a  $\alpha + \beta = [\vec{s}_{13}] + [\vec{s}_{23}] = [\vec{s}_{34}] = -[\vec{s}_{24}] - [\vec{s}_{14}] = \alpha - \beta$ ,  $\beta - \alpha = [\vec{s}_{23}] + [\vec{s}_{24}] = [\vec{s}_{12}] = -[\vec{s}_{13}] - [\vec{s}_{14}] = -\alpha - \beta$ , donc

$$(19.39) \quad 2\beta = 0 \text{ et } [\vec{s}_{34}] = -[\vec{s}_{12}],$$

et dans ce cas on a au plus 3 éléments différents parmi les  $s_{ij}, 1 \leq i, j \leq 4$ ;

Pour 4), on a  $\alpha - \beta = [\vec{s}_{13}] + [\vec{s}_{23}] = [\vec{s}_{34}] = -[\vec{s}_{24}] - [\vec{s}_{14}] = \alpha - \beta$ ,  $-\beta - \alpha = [\vec{s}_{23}] + [\vec{s}_{24}] = [\vec{s}_{12}] = -[\vec{s}_{13}] - [\vec{s}_{14}] = -\alpha - \beta$ , donc

$$(19.40) \quad [\vec{s}_{34}] = \alpha - \beta, [\vec{s}_{12}] = -\alpha - \beta,$$

et dans ce cas on a au plus 4 éléments différents parmi les  $s_{ij}, 1 \leq i, j \leq 4$ .

4°  $s_{34} \sim s_{41} \sim s_{32}, s_{13} \sim s_{24}$ .

Par (19.24) on a

$$(19.41) \quad [\vec{s}_{34}] = [\vec{s}_{14}] = [\vec{s}_{32}] := \alpha,$$

alors

$$(19.42) \quad [\vec{s}_{24}] = [\vec{s}_{14}] - [\vec{s}_{34}] = -2\alpha, [\vec{s}_{21}] = -[\vec{s}_{24}] + [\vec{s}_{32}] = 3\alpha, [\vec{s}_{13}] = [\vec{s}_{32}] + [\vec{s}_{34}] = 2\alpha.$$

C'est un cas particulier de 3°4), et dans ce cas on a au plus 3 éléments différents parmi les  $s_{ij}, 1 \leq i, j \leq 4$ .

5°  $s_{13} \sim s_{23} \sim s_{42} \sim s_{14} \sim s_{43}$ .

Cas semblable que 2°, impossible.

6°  $s_{13} \sim s_{24}, s_{12} \sim s_{23} \sim s_{14}$ .

Par (19.24) on a

$$(19.43) \quad [\vec{s}_{12}] = [\vec{s}_{32}] = [\vec{s}_{14}] := \alpha,$$

et donc

$$(19.44) \quad [\vec{s}_{42}] = -[\vec{s}_{12}] - [\vec{s}_{32}] = -2\alpha, [\vec{s}_{43}] = -[\vec{s}_{42}] + [\vec{s}_{14}] = 3\alpha, [\vec{s}_{13}] = [\vec{s}_{32}] + [\vec{s}_{34}] = -2\alpha.$$

C'est un cas particulier de 3°4), et dans ce cas on a au plus 3 éléments différents parmi les  $s_{ij}, 1 \leq i, j \leq 4$ .

7°  $s_{12} \sim s_{13} \sim s_{23} \sim s_{42} \sim s_{14} \sim s_{43}$ .

C'est un cas contenu dans 2° ou 5°, donc impossible.

8°  $s_{13} \sim s_{24}, s_{12} \sim s_{14} \sim s_{23} \sim s_{34}$ .

C'est un sous cas de 6°, et donc par la conclusion de 6°,  $s_{34} \sim s_{14}$  donne  $3\alpha = [\vec{s}_{43}] = [\vec{s}_{41}] = -\alpha$ , de sorte que  $2\alpha = 0$ , ce qui implique que  $[\vec{s}_{13}] = 0$ , impossible.

En gros, topologiquement tous les cas sont contenus dans le cas 3° 4) ( notons que les cas 1°, 3°, 4°, 6° sont tous des cas particuliers de 3° 4)). Alors dans le cas 3° 4), il y a au plus 2 éléments indépendants parmi les  $s_{ij}, 1 \leq i, j \leq 4$ . Modulo changement de noms, on a

$$(19.45) \quad [\vec{s}_{13}] = -[\vec{s}_{24}] = \alpha, [\vec{s}_{14}] = -[\vec{s}_{23}] = \beta, [\vec{s}_{34}] = \alpha - \beta, [\vec{s}_{12}] = -\alpha - \beta.$$

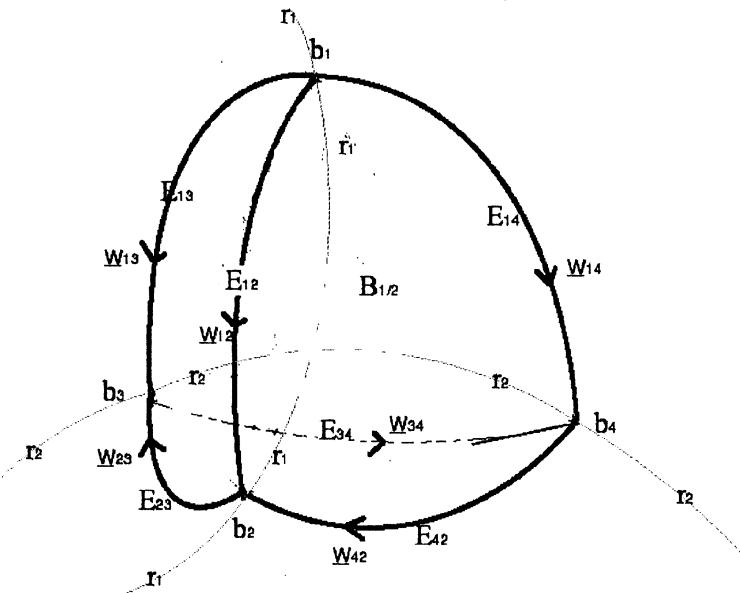
On obtient donc la proposition suivante.

**Proposition 19.46.** Soit  $E$  un minimiseur topologique réduit de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^4$ , qui vérifie (19.2). Prenons toutes les conventions énoncées au début du paragraphe, et supposons aussi que  $\gamma_1$  connecte  $a_1, a_2$ ,  $\gamma_2$  connecte  $a_3, a_4$ . Alors s'il existe  $r > 0$  tel que  $d_{0,3r}(E, T) < \epsilon_0$  (où  $\epsilon_0$  est celui juste après (19.12)), mais les  $s_{ij}$  ne vérifie pas (19.45) par rapport à  $\frac{1}{r}E$ , alors  $E$  est un  $T$ .

La proposition ci-dessus n'est pas encore aussi forte que le théorème 13.9. On n'arrive pas à exclure le cas 3° 4). Mais cela vient d'une discussion plutôt algébrique. On regarde ci-dessous ce que signifie-t-il topologiquement.

Supposons que (19.45) est vrai.

Notons  $w_{ij} = E_{ij} \cap \partial B(0, 1)$ , (voir le dessin 19-5 ci-dessous, où  $\underline{w}_{ij}$  désigne  $\vec{w}_{ij}$ ), alors les  $w_{ij}$  sont des courbes  $C^1$ . Notons aussi  $\vec{w}_{ij}$  la courbe orientée de  $b_i$  vers  $b_j$ .



19-5

Maintenant supposons que  $E_Y = \gamma_1 \cup \gamma_2$ . C'est à dire, tout point est de type  $\mathbb{P}$ , sauf les deux courbes. (Pour le cas où  $E_Y \neq \gamma_1 \cup \gamma_2$ , on sait que  $E_Y \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2)$  est une union de courbes fermées, parce que les seuls bouts des courbes dans  $E_Y$  sont les  $\{b_i\}_{1 \leq i \leq 4}$ . C'est donc un cas plus compliqué.)

**Lemme 19.47.**  $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup w_{12} \cup w_{34}$  est le bord d'une surface  $S_0 \subset E$  de classe  $C^1$ , et  $S_0$  ne contient que des points de type  $\mathbb{P}$ .

Démonstration. Par la  $C^1$  régularité des ensembles minimaux, la partie de  $E$  qui est dans  $B(0, 1)$  est composé de variétés  $S_1, S_2, \dots$  de classe  $C^1$  dont les bords sont composés des éléments dans l'ensemble  $Bd = \{w_{ij}, \gamma_1, \gamma_2\}$ . Alors  $w_{12}$  fait partie du bord d'une variété  $S_k$ . Mais  $\partial S_k$  doit être une union de plusieurs courbes fermées. Il existe donc une courbe  $\gamma$  dans  $Bd$  qui touche  $w_{12}$  et telle que  $\gamma$  fait partie de

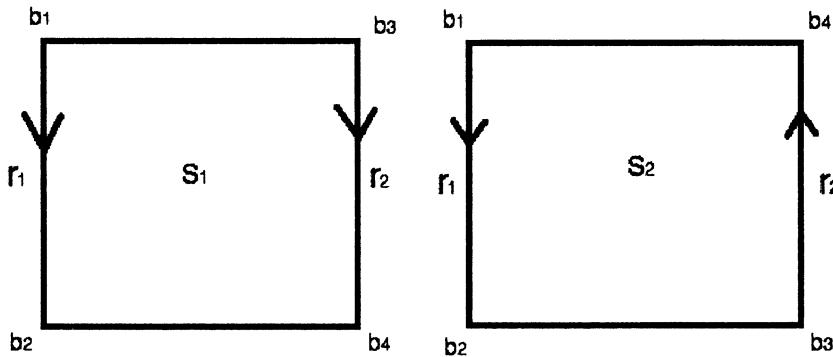
$\partial S_k$  aussi. Si l'un des  $w_{1i}$  (resp. l'un des  $w_{2j}$ ) est contenu dans  $\partial S_k$  à la suite de  $w_{12}$ , on a  $[\vec{s}_{12}] = [\vec{s}_{i1}]$  (avec orientation) (resp.  $[\vec{s}_{12}] = [\vec{s}_{2i}]$ ), ce qui contredit (19.24).

Par conséquent la seule possibilité est  $\gamma_1$ . C'est à dire,  $w_{12}$  et  $\gamma_1$  font partie du bord d'une même variété  $S_k$ , et sauf  $w_{34}$ , le bord de  $S_k$  ne contient pas les autres  $w_{ij}$ . Un argument semblable donne que  $w_{12}$  et  $\gamma_1$  font partie d'une même variété  $S_l$ , dont le bord ne contient pas les autres  $w_{ij}$ , sauf  $w_{12}$ .

Alors soit l'union des quatre est le bord d'une surface, soit l'union de  $w_{34}$  et  $\gamma_2$  est le bord d'une surface et l'union des deux autres est le bord d'une autre surface. En tout cas, l'union des quatre est le bord d'une surface (pas forcément connexe).

Fin de la démonstration du lemme.

D'après ce lemme, si on enlève la surface  $S_0$  de  $E$ , alors  $E \setminus S$  est composé de surfaces de classe  $C^1$  dont les bords sont composés d'éléments de l'ensemble  $Bd' = \{w_{13}, w_{14}, w_{23}, w_{24}, \gamma_1, \gamma_2\}$ . Alors par le même argument, il y a 2 surfaces  $S_1, S_2$ , avec  $\partial S_1 = w_{13} \cup \gamma_2 \cup w_{24} \cup \gamma_1$ , et l'autre  $\partial S_2 = w_{23} \cup \gamma_2 \cup w_{14} \cup \gamma_1$ . De plus  $S_1 \cup S_2$  est aussi une variété topologique connexe, dont on peut définir l'orientation locale, y compris près de  $\partial S_1$  et  $\partial S_2$ .



19-6

Donc topologiquement, les bords des deux surfaces  $S_1, S_2$  sont comme les bords de deux carrés, l'un avec les quatre sommets (écrit dans l'ordre voisin)  $b_1, b_3, b_4, b_2$ , l'autre avec les sommets  $b_1, b_4, b_3, b_2$ . De plus, on doit coller  $b_1 \bar{b}_2$  ensemble, et  $b_3 \bar{b}_4$  ensemble. Notons que (voir le dessin 19-6 par exemple) ces deux collages sont de directions contraires.

Alors si l'un des  $S_1, S_2$  est non orientable,  $S_1 \cup S_2$  est automatiquement non-orientable. Si  $S_1, S_2$  sont orientables, alors par la collage,  $S_1 \cup S_2$  est aussi non-orientable. En tout cas  $S_1 \cup S_2$  est non-orientable.

**Remarque 19.48.** Puisque  $S_1 \cup S_2$  n'est pas orientable,  $[\vec{s}_{13}], [\vec{s}_{14}], [\vec{s}_{24}], [\vec{s}_{23}]$  sont tous d'ordre 2 dans  $H_1(\mathbb{R}^4 \setminus E, \mathbb{Z})$ .

En effet pour une surface connexe  $S$ , la non-orientabilité veut dire que pour chaque point  $x \in S$  on peut trouver un chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$  tel que  $\gamma(0) = \gamma(1) = x$ , et si on note  $n(t) = x(t) \wedge y(t) \in \wedge_2 N_{\gamma(t)} S$

un champ de 2-vecteurs normal unitaire sur  $\gamma$ , où  $x(t), y(t) \in N_{\gamma(t)}S$  des champs de vecteurs unitaires,  $n, x, y$  continus par rapport à  $t$ , alors  $n(0) = -n(1)$ . Notons que  $n(t)$  désigne aussi le plan orienté dans  $\mathbb{R}^4$ . Notons, pour chaque  $r > 0$   $s_r(t) : T = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow P_t = P(x(t) \wedge y(t)), \theta \mapsto r[\cos(2\pi\theta)x(t) + \sin(2\pi\theta)y(t)]$ . Alors l'image de  $s_r(0)$  et  $s_r(1)$  sont le même cercle, mais ils sont d'orientation contraire :  $s_r(0)(t) = s_r(1)(-t)$ .

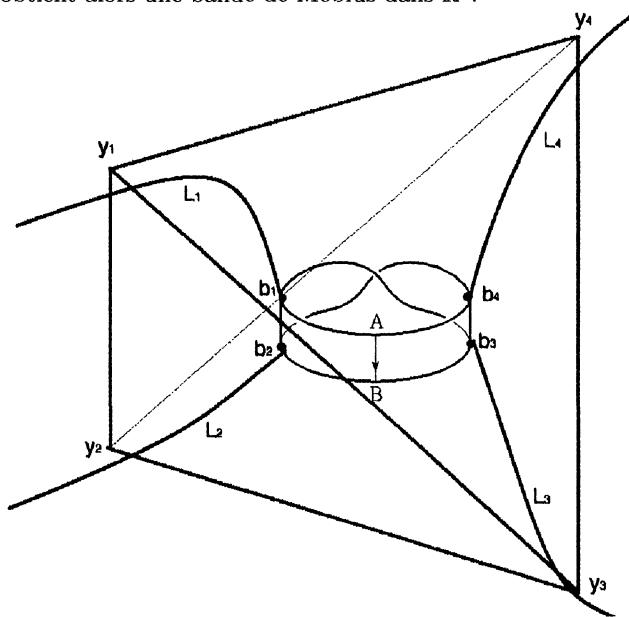
Notons  $Q_t = \gamma(t) + P(t)$ . Fixons  $r > 0$  suffisamment petit, tel que pour chaque  $t \in [0, 1]$ ,  $B(\gamma(t), r) \cap Q_t \cap S = \{\gamma(t)\}$ .

Notons  $G : T \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^4, G(\theta, t) = s_r(t)(\theta) + \gamma(t)$ . C'est une application continue, telle que  $G(T \times \{0\}) = s_r(0)$  et  $G(T \times \{1\}) = s_r(1) = -s_r(0)$ . Par conséquent, le cercle orienté  $s_r(0)$  est homotope à  $-s_r(0)$ , il est donc d'ordre 2.

Maintenant pour chaque  $s \in \{[\vec{s}_{13}], [\vec{s}_{14}], [\vec{s}_{24}], [\vec{s}_{23}]\}$ , on peut trouver d'abord trouver un  $s'$  homotope à  $s$ , tel qu'il existe  $x, \gamma$  comme avant, et qu'il existe  $R > 0$  tel que  $s_R(0) = s'$ . On peut trouver  $r > 0$  comme ci-dessus, alors  $s_r(0)$  est homotope à  $s'$ , et donc  $s$ . Par conséquent  $[s] = [s_r(0)]$  est d'ordre 2.

On va construire un ensemble  $E \subset \mathbb{R}^4$ , avec les propriétés ci-dessus, c'est à dire, dans  $B(0, 1)$ , l'ensemble  $E$  est composé de  $S_0$  et  $S_1 \cup S_2$  comme ci-dessus,  $S_1 \cup S_2$  est une variété topologique non-orientable ;  $S_0$  a deux composante connexe, qui rencontre  $S_1 \cup S_2$  en  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  respectivement. Hors de la boule  $B(0, 1)$ ,  $E$  est une versions  $C^1$  de  $T$ , et il ressemble à  $T$  à l'infini. De plus,  $H_1(\mathbb{R}^4 \setminus E)$  est juste comme le cas 3°4) ci-dessus.

Prendons deux exemplaires de carrés (voir le dessin 19-6), l'un avec des sommets (écrit dans les sens des aiguilles d'une montre)  $b_1, b_3, b_4, b_2$ , l'autre avec les sommets  $b_1, b_4, b_3, b_2$ . On colle les deux côtés  $\overrightarrow{b_3 b_4}$  et  $\overrightarrow{b_1 b_2}$ . On obtient alors une bande de Möbius dans  $\mathbb{R}^3$ .



En suite, prenons un grand tétraèdre (dont les sommets  $y_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ ) régulier qui contient la bande de Möbius. Prenons, pour chaque  $i$ , une courbe lisse  $L_i$  émise de  $b_i$  et allant à l'infini, telle que  $L_i$  tends vers la demi droite émise du centre de  $T$  et passant par  $y_i$ . (voir le dessin 19-7).

Prenons, pour chaque  $1 \leq i \neq j \leq 4$ , une surface  $E_{ij}$  de classe  $C^1$ , homéomorphe à  $\mathbb{R}^2$ , dont le bord est  $L_i \cup L_j \cup [b_i b_j]$ . Notons que tous les  $E_{ij}$  vont à l'infini, de sorte que dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $E_{23}$  et  $E_{14}$ , ou  $E_{13}$  et  $E_{24}$  se croisent forcément. Donc on déménage dans  $\mathbb{R}^4$  pour l'éviter.

On obtient comme ça un ensemble qui ressemble à un  $T$  à l'infini, et du premier coup, on ne peut pas dire facilement qu'il existe pas un ensemble minimal topologique qui admet une telle topologie.

## Références

- [1] William K. Allard. On the first variation of a varifold. *Ann. of Math.(2)*, 95 :417–491, 1972.
- [2] F. J. Almgren. Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 4(165), 1976.
- [3] A. Bonnet. On the regularity of edges in image segmentation. *Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse non linéaire*, 13(4) :485–528, 1996.
- [4] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*. Graduate Texts in Mathematics 139. Springer-Verlag, 1993.
- [5] S. S. Cairns. On the triangulation of regular loci. *Ann. of Math.*, 35 :579–587, 1934.
- [6] S. S. Cairns. A simple triangulation method for smooth manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 67(4) :389–390, 1961.
- [7] Guy David. Limits of Almgren-quasiminimal sets. *Proceedings of the conference on Harmonic Analysis, Mount Holyoke, A.M.S. Contemporary Mathematics series*, 320 :119–145, 2003.
- [8] Guy David. *Singular sets of minimizers for the Mumford-Shah functional*. Progress in Mathematics. Birkhäuser, 2005.
- [9] Guy David. Hölder regularity of two-dimensional almost-minimal sets in  $\mathbb{R}^n$ . *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, XVIII(1) :65–246, 2009.
- [10] Guy David.  $C^{1+\alpha}$ -regularity for two-dimensional almost-minimal sets in  $\mathbb{R}^n$ . *Journal of geometric analysis*, à paraître.
- [11] Guy David and Stephen Semmes. Uniform rectifiability and quasiminimizing sets of arbitrary codimension. *Memoirs of the A.M.S.*, 144(687), 2000.
- [12] D. Mumford and J. Shah. Boundary detection by minimizing functionals. In *IEEE Conference on computer vision and pattern recognition, San Francisco*, 1985.
- [13] James Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon.Inc.,Boston, 1966.

- [14] Herbert Federer. *Geometric measure theory*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 153. Springer Verlag, 1969.
- [15] Vincent Feuvrier. *Un résultat d'existence pour les ensembles minimaux par optimisation sur des grilles polyédrales*. PhD thesis, Université de Paris-Sud 11, orsay, september 2008.
- [16] Ralph H. Fox and E. Artin. Some wild cells and spheres in three-dimensional space. *Ann. of Math.*, 49 :979–990, 1948.
- [17] Mariano Giaquinta and Luca Martinazzi. *An introduction to the regularity theory for elliptic systems, harmonic maps and minimal graphs*. Edizioni della normale, 2005.
- [18] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. cambridge university press, 2001.
- [19] A. Heppes. Isogonal sphärischen netze. *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.*, 7 :41–48, 1964.
- [20] Morris W. Hirsch. *Differential Topology*. Graduate Texts in Mathematics 33. Springer-Verlag, 1976.
- [21] E. Lamarle. Sur la stabilité des systèmes liquides en lames minces. *Mémoires de l'Académie Royale de Belgique*, 35 :3–104, 1864.
- [22] Gary Lawlor. The angle criterion. *Invent.math.*, 95 :437–446, 1989.
- [23] Gary Lawlor. Pairs of planes which are not size-minimizing. *Indiana Univ. Math. J.*, 43 :651–661, 1994.
- [24] Pertti Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean space*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 44. Cambridge University Press, 1995.
- [25] Frank Morgan. Examples of unoriented area-minimizing surfaces. *Transactions of the American mathematical society*, 283(1) :225–237, 1984.
- [26] Frank Morgan. Soap films and mathematics. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 54 :Part 1, 1993.
- [27] Dana Nance. Sufficient conditions for a pair of  $n$ -planes to be area-minimizing. *Math. Ann.*, 279 :161–164, 1987.
- [28] Thierry De Pauw. Size minimising surfaces. *Annales scientifiques de l'école normale supérieure*, 42 :37–101, 2009.
- [29] Thierry De Pauw and Robert Hardt. Size minimization and approximating problems. *Calculus of Variations*, 17 :405–442, 2003.
- [30] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGRAW-HILL Publishins Co., 3rd edition, 1987.
- [31] Elias Stein and Guido Weiss. *Introduction to Fourier analysis on Euclidiean spaces*. Princeton University Press, 1971.
- [32] Jean Taylor. The structure of singularities in soap-bubble-like and soap-film-like minimal surfaces. *Ann. of Math.(2)*, 103 :489–539, 1976.
- [33] Hassler Whitney. *Geometric integration theory*. Princeton University Press, 1957.

