

THÈSES D'ORSAY

STÉPHANE DRUEL

Structures différentielles en géométrie algébrique

Thèses d'Orsay, 2000

[<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_2000__0573__A1_0>](http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_2000__0573__A1_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses d'Orsay » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



NUMDAM

*Thèse numérisée par la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016
et diffusée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

ORSAY

N° d'ordre 6286

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité MATHÉMATIQUES

Présentée par Stéphane DRUEL

Sujet

STRUCTURES DIFFÉRENTIELLES EN GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE

Soutenue le 23 octobre 2000 devant la commission d'examen composée de :

M. Arnaud BEAUVILLE (*Directeur*)
M. Jean-Pierre DEMAILLY
M. Joseph LE POTIER
M. Thomas PETERNELL (*Rapporteur*)
M. Michel RAYNAUD
Mme. Claire VOISIN (*Rapporteur*)

REMERCIEMENTS

Je voudrais tout d'abord remercier Arnaud Beauville pour son aide constante durant ces années de thèse. Les nombreuses discussions que nous avons eues ont été décisives dans l'avancement de ce travail et je lui dois un enrichissement mathématique considérable.

Je voudrais aussi remercier Thomas Peternell et Claire Voisin qui ont rédigé des rapports sur cette thèse et plus particulièrement Claire Voisin pour ses nombreux commentaires.

Je voudrais également remercier Jean-Pierre Demailly, Joseph Le Potier et Michel Raynaud pour avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je voudrais enfin remercier le Département de Mathématiques et Applications de l'École Normale Supérieure pour les conditions exceptionnelles de travail durant ces années.

ABSTRACT.—This thesis deals on the one hand with some differential structures on algebraic varieties and on the other hand with sheaves on cubic hypersurfaces in the four dimensional projective space.

In a first part, we give a complete description of non trivial quasi-regular Poisson structures on projective threefolds.

The second part is devoted to contact structures on toric varieties and the third one to contact structures on projective five dimensional manifolds. We show furthermore that a contact manifold has negative Kodaira dimension.

In the fourth part, we describe projective manifolds whose tangent bundle split as a direct sum of line bundles with the assumption that the direct summands are integrable.

Finally, in the fifth part, we show that the moduli space of rank two semistable sheaves on a cubic threefold, with trivial first and third Chern classes and with second Chern class twice the class of a line, is isomorphic to the blow up of the intermediate Jacobian of the aforesaid cubic along a smooth surface.

KEY WORDS.—Algebraic geometry—Poisson manifolds—Contact manifolds—Toric varieties —Mori theory—Vector bundles—Moduli spaces—Intermediate Jacobians

MSC.—14D20—14F05—14J10—14J60—14K30—14M25—53D10—53D17

Table des matières

Introduction	9
Références bibliographiques	14
Structures de Poisson sur les variétés algébriques de dimension 3	15
0. Introduction	15
1. Propriétés	16
2. Cas où X n'est pas minimale	18
3. Cas où X est minimale et $\kappa(X) = 0$	22
4. Cas où X est minimale et $\kappa(X) = 1$	26
Références bibliographiques	36
Structures de contact sur les variétés toriques	37
1. Introduction	37
2. Rappels et notations	37
3. Preuve du théorème	39
Références bibliographiques	43
Structures de contact sur les variétés algébriques de dimension 5	45
Introduction	45
1. Rappels	46
2. Preuve du théorème	47
Références bibliographiques	50
Variétés algébriques dont le fibré tangent est totalement décomposé	51
Introduction	51
Démonstration des théorèmes	52
Références bibliographiques	63
Espace des modules des faisceaux de rang 2 semi-stables de classes de Chern	
$c_1 = 0$, $c_2 = 2$ et $c_3 = 0$ sur la cubique de \mathbf{P}^4	65
1. Introduction	65
2. Fibrés de rang 2 stables sur la cubique de \mathbf{P}^4	67
3. Faisceaux de rang 2 semi-stables sur la cubique de \mathbf{P}^4	71
4. Espace des modules des faisceaux semi-stables sur la cubique de \mathbf{P}^4	78
Références bibliographiques	83

Introduction

Cette thèse est centrée autour de l'étude de quelques problèmes de classification en géométrie algébrique.

La première partie de ce mémoire concerne les structures de Poisson dont nous rappelons la définition.

Soit X une variété algébrique lisse complexe. Une *structure de Poisson* sur X est la donnée d'une structure d'algèbre de Lie sur le faisceau structural \mathcal{O}_X de X , qui soit une dérivation en chacune des variables. Le *rang* de la structure en $x \in X$ est, par définition, le rang de l'application $\Omega_X^1 \otimes k(x) \longrightarrow T_X \otimes k(x)$ induite par ladite structure. Elle est dite *régulière* lorsque son rang est constant. Elle est dite *quasi-régulière* lorsqu'elle est régulière sauf en un nombre fini de points. Notons que le rang d'une structure de Poisson en un point est pair puisqu'une telle structure est par définition antisymétrique.

Exemple 1.—Une variété abélienne de dimension au moins deux possède de nombreuses structures de Poisson régulières non triviales. En effet, toute forme bilinéaire alternée non nulle sur l'espace cotangent à l'origine fournit une telle structure.

Exemple 2.—Les surfaces projectives admettant une structure de Poisson non triviale sont les surfaces $K3$, les surfaces abéliennes et certaines surfaces réglées ; une telle structure est alors définie par la seule donnée d'une section du fibré anticanonique.

Exemple 3.—Le choix d'une structure de Poisson non nulle sur une surface projective lisse induit une structure de Poisson non nulle sur l'espace des modules des faisceaux stables sur ladite surface ([Bo]).

La structure locale des variétés de Poisson est parfaitement comprise. Soit X une variété de Poisson de dimension $n \geq 1$ et soit $x \in X$. Notons $2k$ le rang de la structure de Poisson en x et supposons que ledit rang soit constant au voisinage de x . Il existe alors des coordonnées locales $(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-2k})$ au voisinage de x telles que ([W]) :

$$\{u_i, u_j\} = \{v_i, v_j\} = \{u_i, w_j\} = \{v_i, w_j\} = 0 \quad \{u_i, v_j\} = \delta_{ij} \quad \{w_i, w_j\} = 0$$

Ainsi X est localement isomorphe au produit de deux sous-variétés Y_1 et Y_2 de X de dimensions respectives $2k$ et $n - 2k$; la structure de Poisson sur X induit une structure symplectique sur Y_1 et ladite structure de Poisson est produit de la structure symplectique sur Y_1 et de la structure de Poisson triviale sur Y_2 . Nous démontrons le théorème :

THÉORÈME ([D1]).—*Soit X une variété projective lisse de dimension 3. La variété X admet une structure de Poisson régulière non nulle si et seulement si X vérifie l'une des conditions suivantes :*

(1) *X est une variété abélienne ; la structure de Poisson est déterminée par une forme bilinéaire alternée de rang 2 sur l'espace cotangent à l'origine.*

(2) *X possède une fibration en droites projectives munie d'une connexion plate, de base une surface abélienne S ; la structure de Poisson est définie par le pull-back de la structure symplectique sur S au moyen de la connexion.*

(3) *$X = (C \times S)/G$ où C est une courbe, S une surface abélienne et $G \subset \text{Aut}(C)$ un groupe fini opérant librement sur $C \times S$ par la formule :*

$$g.(c, s) = (g.c, t_g(c) + u_g(s)), \quad g \in G, \quad c \in C, \quad s \in S,$$

où u_g est un automorphisme de groupes de S respectant la structure symplectique et t_g un morphisme de C dans S ; la structure de Poisson est induite par la structure symplectique de S .

(4) *$X = (C \times S)/G$ où C est une courbe, S une surface K3 et G un groupe fini opérant librement sur C , opérant sur S en respectant la structure symplectique et sur le produit $C \times S$ par le produit de ses actions sur chacun des facteurs ; la structure de Poisson est induite par la structure symplectique de S .*

Une structure de Poisson non triviale sur une variété de dimension 3 est définie par un tenseur antisymétrique d'ordre 3 et on s'attend à ce que ladite structure ne s'annule qu'en un nombre fini de points ; nous démontrons également qu'une structure de Poisson quasi-régulière sur une variété de dimension 3 est en fait régulière ([D1]).

Les deuxième et troisième parties de ce mémoire concernent les structures de contact dont nous rappelons la définition.

Une structure de contact sur une variété algébrique lisse est la donnée d'un sous-fibré $D \subset T_X$ de rang $\dim X - 1$ de sorte que la forme \mathcal{O}_X -bilinéaire sur D à valeurs dans le fibré en droites $L = T_X/D$ déduite du crochet de Lie sur T_X soit non dégénérée en tout point de X . Cela entraîne que X est de dimension impaire $2n + 1$ et que le fibré canonique K_X est isomorphe à L^{-1-n} . On peut aussi définir la structure de contact par la donnée d'un élément $\theta \in H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L)$, la forme de contact, tel que $\theta \wedge (d\theta)^n$ soit partout non nul. La forme $d\theta$ est définie localement en utilisant une trivialisation du fibré L mais l'annulation de l'élément $\theta \wedge (d\theta)^n$ ne dépend pas du choix d'une trivialisation.

Soit L^\times le \mathbf{C}^* -fibré principal associé à L^{-1} sur lequel \mathbf{C}^* agit par homothéties et soit

p la projection de L^\times sur X . Le pull-back du fibré L à L^\times est naturellement trivialisé de sorte que $p^*\theta$ est canoniquement une 1-forme sur L^\times . Posons $\omega = d(p^*\theta)$. La 2-forme ω est équivariante sous l'action de \mathbf{C}^* , i.e., $\lambda^*\omega = \lambda\omega$. La 2-forme ω est une structure symplectique sur L^\times . Réciproquement, toute 2-forme symplectique ω sur L^\times \mathbf{C}^* -équivariante définit une unique forme de contact $\theta \in H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L)$ telle que $\omega = d(p^*\theta)$ ([Bel] et [L]).

Exemple 1.—Soient V un espace vectoriel complexe de dimension $2n + 2$ ($n \geq 0$) et $X = \mathbf{P}(V)$; toute forme symplectique $\omega \in \wedge^2 V$ définit une structure de contact sur X .

Exemple 2.—Soient Y une variété lisse et $X = \mathbf{P}_Y(T_Y)$. Le fibré cotangent $\mathbf{V}(T_Y)$ est canoniquement muni d'une structure symplectique $\omega = d\eta$ où η est la 1-forme tautologique sur le fibré cotangent: la valeur de η en un point (x, α) de $\mathbf{V}(T_Y)$ est le pull-back de la forme α par la projection $\mathbf{V}(T_Y) \rightarrow X$. La 2-forme ω est \mathbf{C}^* -équivariante et définit une structure de contact sur X .

Exemple 3.—Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple. Son groupe adjoint G agit sur $\mathbf{P}(\mathfrak{g})$ et n'a qu'une seule orbite fermée $X(\mathfrak{g}) = \mathbf{P}(\mathcal{O})$ où \mathcal{O} est l'unique orbite nilpotente minimale; la structure symplectique de Kostant-Kirillov sur \mathcal{O} définit une structure de contact sur $X(\mathfrak{g})$ ([Bel]). C'est une variété homogène dont le groupe des automorphismes de contact a pour algèbre de Lie \mathfrak{g} . On parlera de la variété de contact homogène de type \mathfrak{g} .

Conjecture ([Bel]).—Les seules variétés de contact sont les espaces homogènes $X(\mathfrak{g})$ et les fibrés $\mathbf{P}_Y(T_Y)$.

L'étude des variétés de contact se révèle difficile et plus particulièrement le cas des variétés de Fano:

- Soit X une variété de contact projective de dimension 3. Alors X est ou bien isomorphe à \mathbf{P}^3 ou bien à $\mathbf{P}_Y(T_Y)$ ([Y]).
- Soient X une variété de contact projective et $L = T_X/D$ où D est le fibré de contact. On suppose L ample et l'application rationnelle $X \dashrightarrow \mathbf{P}(H^0(X, L))$ génériquement finie. On suppose enfin que l'algèbre de Lie \mathfrak{g} du groupe des automorphismes de contact est réductive. Alors \mathfrak{g} est simple et X est isomorphe à $X(\mathfrak{g})$ ([Bel]).
- Soit X une variété projective de contact. Alors ou bien X est de Fano et $b_2(X) = 1$ ou bien $X = \mathbf{P}_Y(T_Y)$ ([KPSW] et [De]).

Nous étudions dans la deuxième partie les structures de contact sur les variétés toriques et montrons le:

THÉORÈME ([D2]).—Soit X une variété torique projective lisse complexe de dimension $2n + 1$ ($n \geq 1$) munie d'une structure de contact. Alors X est ou bien isomorphe à l'espace projectif complexe \mathbf{P}^{2n+1} ou bien isomorphe à la variété $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^1 \times \dots \times \mathbf{P}^1}(T_{\mathbf{P}^1 \times \dots \times \mathbf{P}^1})$.

Dans la troisième partie, nous étudions le cas des variétés de dimension 5. Nous montrons le :

THÉORÈME ([D3]).—*Soit X une variété projective lisse complexe de dimension 5 munie d'une structure de contact. Alors X est l'une des variétés précédentes sauf si le fibré canonique K_X est numériquement effectif et $\kappa(X) = -\infty$.*

En fait, le dernier cas ne se produit pas ([De]). Nous démontrons également qu'une variété de contact est de dimension de Kodaira $\kappa(X) = -\infty$ ([D3]).

Dans la quatrième partie de ce mémoire, nous étudions les variétés projectives lisses dont le fibré tangent est somme directe de fibrés en droites. Le problème est motivé par la remarque suivante. Soit X une variété compacte kählérienne dont le revêtement universel \tilde{X} est isomorphe au produit $\prod_{i \in I} U_i$ de variétés complexes lisses et sur lequel le groupe $\pi_1(X)$ agit diagonalement. Notons p_i la projection de \tilde{X} sur U_i . La décomposition $T_{\tilde{X}} = \oplus_{i \in I} p_i^* T_{U_i}$ induit alors une décomposition de T_X en somme directe de sous-fibrés intégrables.

Conjecture ([Be2]).—*Soit X une variété compacte kählérienne. Supposons qu'on ait $T_X = \oplus_{i \in I} E_i$ et que pour tout sous-ensemble d'indices $J \subset I$ les sous-fibrés $\oplus_{i \in J} E_i$ de T_X soient intégrables. Il existe alors une décomposition $\tilde{X} = \prod_{i \in I} U_i$ du revêtement universel de X telle que la décomposition de T_X se relève en la décomposition $T_{\tilde{X}} = \prod_{i \in I} T_{U_i}$.*

La conjecture est démontrée dans les trois cas suivants ([Be2]) :

- X admet une métrique de Kähler-Einstein,
- T_X est somme directe de fibrés en droites de degré négatif,
- X est une surface.

Nous démontrons le :

THÉORÈME ([D4]).—*(1) Soient X une variété projective lisse de dimension $n \geq 1$ dont le fibré tangent est totalement décomposé et $T_X = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ ladite décomposition. On suppose que les fibrés $\oplus_{i \in I} M_i$ sont intégrables, pour tout ensemble d'indices $I \subset \{1, \dots, n\}$. Le revêtement universel \tilde{X} de X est alors produit de surfaces de Riemann et la décomposition de T_X est induite par la décomposition canonique de $T_{\tilde{X}}$.*

(2) Soit X une variété projective lisse minimale de dimension $n \geq 1$ dont le fibré tangent est totalement décomposé. Le revêtement universel \tilde{X} de X est alors produit de surfaces de Riemann et la décomposition de T_X est induite par la décomposition canonique de $T_{\tilde{X}}$.

La cinquième et dernière partie de ce mémoire concerne les fibrés vectoriels stables sur une hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbf{P}^4$. Si E est un fibré vectoriel stable de rang 2 de première classe de Chern $c_1 = 0$ ou $c_1 = -1$ sur X alors $c_2 \geq 2$.

Nous étudions le cas le plus simple, c'est-à-dire le cas des fibrés stables de rang 2, de déterminant trivial et de seconde classe de Chern $c_2 = 2$. Soit M_X l'espace des modules des faisceaux semi-stables sur X de rang 2 et de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ et $c_3 = 0$. Nous démontrons qu'il n'existe que 3 types de faisceaux semi-stables :

- les fibrés vectoriels stables associés aux quintiques elliptiques linéairement normales par la construction de Serre,
- les faisceaux stables non localement libres paramétrés par les coniques lisses,
- les faisceaux strictement semi-stables dont les classes de S -équivalence sont paramétrées par les paires de droites de X .

Soit $U \subset M_X$ l'ouvert des fibrés vectoriels stables. Markushevich et Tikhomirov ont montré que l'ouvert U est irréductible ([MT]). Nous montrons que le fermé $M_X \setminus U$ est réunion de deux diviseurs irréductibles ([D5]). Soient $A_1(X)$ le groupe des 1-cycles algébriques modulo l'équivalence rationnelle et $A \subset A_1(X)$ le sous-groupe des cycles algébriquement équivalents à zéro. C'est une variété abélienne de dimension 5. Par l'application d'Abel-Jacobi, A s'identifie à la jacobienne intermédiaire $J(X)$ de X . La seconde classe de Chern à valeurs dans le groupe de Chow $A_1(X)$ induit un morphisme algébrique $U \rightarrow A$. Markushevich-Tikhomirov et Iliev-Markushevich ont montré que ce morphisme est un isomorphisme sur un ouvert de A ([MT] et [IM]). Nous montrons que M_X est lisse et que l'application rationnelle $M_X \dashrightarrow A$ est partout définie :

THÉORÈME ([D5]). — *Soient $X \subset \mathbf{P}^4$ une hypersurface cubique lisse et B la surface de Fano de X . Alors l'espace des modules M_X des faisceaux semi-stables de rang 2 sur X de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ et $c_3 = 0$ est isomorphe à l'éclatement d'un translaté de la surface $-B$ dans la jacobienne intermédiaire A de X .*

Références bibliographiques

- [Be1] A. Beauville, *Fano Contact Manifolds and Nilpotent Orbits*, Comment. Math. Helvet. 73 (1998), 566-583.
- [Be2] A. Beauville, *Complex manifolds with split tangent bundle* dans *Complex analysis and algebraic geometry*, Vol. en mémoire de M. Schneider, 61-70, de Gruyter (2000).
- [Bo] F. Bottacin, *Poisson structures on moduli spaces of sheaves over Poisson surfaces*, Invent. Math., 121 (1995), 421-436.
- [De] J. P. Demailly, *On the Frobenius integrability of certain holomorphic p -forms*, AG/0004067.
- [D1] S. Druel, *Structures de Poisson sur les variétés algébriques de dimension 3*, Bull. Soc. Math. France 127 (1999), 229-253.
- [D2] S. Druel, *Structures de contact sur les variétés toriques*, Math. Ann. 313 (1999), 429-435.
- [D3] S. Druel, *Structures de contact sur les variétés algébriques de dimension 5*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 327 (1998), 365-368.
- [D4] S. Druel, *Variétés algébriques dont le fibré tangent est totalement décomposé*, J. reine u. angew. Math. 522 (2000), 161-171.
- [D5] S. Druel, *Espace des modules des faisceaux de rang 2 semi-stables de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ et $c_3 = 0$ sur la cubique de \mathbf{P}^4* , à paraître dans Int. Math. Reser. Notices.
- [IM] A. Iliev, D. Markushevich, *The Abel-Jacobi map for a cubic threefold and periods of Fano threefolds of degree 14*, Documenta Math. 5 (2000), 23-47.
- [KPSW] S. Kebekus, T. Peternell, A. J. Sommese, J. Wisniewski, *Projective contact manifolds*, AG/9810102.
- [L] C. Lebrun, *Fano manifolds, contact structures and quaternionic geometry*, Int. Journ. of Math., 6 (1995), 419-437.
- [MT] D. Markushevich, A. S. Tikhomirov, *The Abel-Jacobi map of a moduli component of vectors bundles on the cubic threefold*, math. AG/9809140, à paraître dans J. Alg. Geom.
- [W] A. Weinstein, *The local structure of Poisson manifolds*, J. Diff. Geom., 18 (1983), 523-557.
- [Y] Y-G. Ye, *A note on complex projective threefolds admitting holomorphic contact structures*, Invent. Math., 121 (1995), 421-436.

Structures de Poisson sur les variétés algébriques de dimension 3

0. Introduction

Soit X une variété algébrique lisse sur le corps \mathbb{C} des nombres complexes. Une *structure de Poisson* sur X est la donnée d'une structure d'algèbre de Lie sur le faisceau structural \mathcal{O}_X de X , qui soit une dérivation en chacune des variables. Une telle structure est définie par un tenseur antisymétrique non nul $\sigma \in H^0(X, \wedge^2 T_X)$, le *bivecteur de Poisson*, duquel on déduit une flèche \mathcal{O}_X -linéaire $\Omega_X^1 \rightarrow T_X$. Le *rang* de la structure en $x \in X$ est, par définition, le rang de l'application $\Omega_X^1 \otimes k(x) \rightarrow T_X \otimes k(x)$. La structure est dite *régulière* lorsque son rang est constant. Elle est dite *quasi-régulière* lorsqu'elle est régulière sauf en un nombre fini de points. Notons que le rang d'une structure de Poisson en un point est pair puisqu'une telle structure est par définition antisymétrique.

Une variété abélienne de dimension au moins deux possède de nombreuses structures de Poisson régulières non triviales. En effet, toute forme bilinéaire alternée non nulle sur l'espace cotangent à l'origine fournit une telle structure.

Les surfaces projectives admettant une structure de Poisson non triviale sont les surfaces $K3$, les surfaces abéliennes et certaines surfaces réglées ; une telle structure est alors définie par la seule donnée d'une section du fibré anticanonique.

Ce travail est consacré à l'étude des variétés algébriques projectives lisses de dimension 3 admettant une structure de Poisson non triviale. Une telle structure étant définie par un tenseur antisymétrique d'ordre 3, on s'attend à ce que ladite structure ne s'annule qu'en un nombre fini de points, seul cas que nous étudierons. Le résultat principal est le théorème :

THÉOREME.—*Soit X une variété projective lisse de dimension 3. La variété X admet une structure de Poisson quasi-régulière non nulle si et seulement si X vérifie l'une des conditions suivantes :*

- (1) *X est une variété abélienne ; la structure de Poisson est déterminée par une forme bilinéaire alternée de rang 2 sur l'espace cotangent à l'origine.*
- (2) *X possède une fibration en droites projectives munie d'une connexion plate, de base*

une surface abélienne S ; la structure de Poisson est définie par le pull-back de la structure symplectique sur S au moyen de la connexion.

(3) $X = (C \times S)/G$ où C est une courbe, S une surface abélienne et $G \subset \text{Aut}(C)$ un groupe fini opérant librement sur $C \times S$ par la formule :

$$g.(c, s) = (g.c, t_g(c) + u_g(s)), \quad g \in G, c \in C, s \in S,$$

où u_g est un automorphisme de groupes de S respectant la structure symplectique et t_g un morphisme de C dans S ; la structure de Poisson est induite par la structure symplectique de S .

(4) $X = (C \times S)/G$ où C est une courbe, S une surface K3 et G un groupe fini opérant librement sur C , opérant sur S en respectant la structure symplectique et sur le produit $C \times S$ par le produit de ses actions sur chacun des facteurs ; la structure de Poisson est induite par la structure symplectique de S .

De plus, la structure de Poisson est régulière.

La démonstration de ce résultat repose sur la description des contractions extrémales d'une variété projective lisse non minimale de dimension trois ([Mo]). Ainsi, nous montrons qu'une variété projective non minimale de dimension trois admettant une structure de Poisson quasi-régulière non triviale est un fibré en coniques, ce qui fait l'objet du paragraphe 2, le paragraphe 1 donnant les propriétés essentielles de ces structures en dimension trois. Dans les paragraphes 3 et 4, nous étudions le cas où la variété est minimale en étudiant le morphisme d'Albanese puis le morphisme canonique.

1. Propriétés

Une variété (algébrique) désignera un schéma intègre, séparé et de type fini sur le corps \mathbb{C} des nombres complexes. Nous identifierons, sans le mentionner, un schéma et l'espace analytique complexe qui lui est associé et nous supposerons toujours qu'une variété est lisse, sauf mention du contraire.

Soit X une variété algébrique de dimension 3 munie d'une structure de Poisson régulière non nulle. Le bivecteur de Poisson $\sigma \in H^0(X, \wedge^2 T_X)$ fournit une application $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \wedge^2 T_X$, et, compte tenu de l'isomorphisme canonique $\wedge^2 T_X \otimes \omega_X \cong \Omega_X^1$, on en déduit une injection de fibrés vectoriels $\omega_X \hookrightarrow \Omega_X^1$. Réciproquement, une telle injection de fibrés vectoriels définit une structure de Poisson régulière dès que l'identité de Jacobi est satisfaite. Un calcul en coordonnées locales permet alors de prouver le :

LEMME 1.1.—*Soit X une variété algébrique (lisse) de dimension 3 non nécessairement projective.*

(1) *Si X est munie d'une structure de Poisson régulière non nulle alors on a une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \omega_X \longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow T_X \longrightarrow \omega_X^{-1} \longrightarrow 0 ;$$

le faisceau $\mathcal{F} = \text{Ker}(T_X \longrightarrow \omega_X^{-1})$ est un fibré vectoriel de rang 2 intégrable, c'est-à-dire stable par le crochet de Lie naturel sur T_X .

(2) *Réciproquement, une section partout non nulle du fibré $\bigwedge^2 T_X$ définit une structure de Poisson régulière non nulle dès que le fibré \mathcal{F} correspondant est intégrable.*

COROLLAIRE 1.2.—*Soit X une variété projective de dimension 3 munie d'une structure de Poisson quasi-régulière non nulle. Alors il existe une injection de faisceaux $\omega_X \hookrightarrow \Omega_X^1$ dont le conoyau est sans torsion et localement libre de rang 2 sauf en un nombre fini de points.*

PROPOSITION 1.3.—*Soit X une variété projective de dimension 3 munie d'une structure de Poisson quasi-régulière non nulle.*

(1) *La première classe de Chern de X $c_1(X) = -c_1(\omega_X) \in H^1(X, \Omega_X^1)$ provient de $H^1(X, \omega_X)$ par la flèche $H^1(X, \omega_X) \longrightarrow H^1(X, \Omega_X^1)$ associée à la structure de Poisson.*

(2) $c_1(X)^2 = 0$ dans $H^4(X, \mathbb{C})$.

Démonstration.—Remarquons que le point (2) est une conséquence immédiate du point (1). Soit U l'ouvert de Zariski où la structure de Poisson est non nulle. Le fermé $Y = X - U$ étant de codimension 3, les groupes de cohomologie $H_Y^i(X, \omega_X)$ et $H_Y^i(X, \Omega_X^1)$ sont nuls pour $i \in \{0, 1, 2\}$. Il en résulte des isomorphismes naturels $H^1(X, \omega_X) \cong H^1(U, \omega_U)$ et $H^1(X, \Omega_X^1) \cong H^1(U, \Omega_U^1)$. Le diagramme suivant étant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \omega_X) & \longrightarrow & H^1(X, \Omega_X^1) \\ \downarrow \iota & & \downarrow \iota \\ H^1(U, \omega_U) & \longrightarrow & H^1(U, \Omega_U^1) \end{array}$$

il suffit de prouver l'assertion lorsque la structure est régulière.

La distribution $\omega_X \subset \Omega_X^1$ est intégrable et donc localement définie par une 1-forme fermée ω_i sur l'ouvert U_i . Une telle 1-forme est définie à multiplication près par une fonction f_i telle que $df_i \wedge \omega_i = 0$, c'est-à-dire que df_i est proportionnelle à ω_i . Notons f_{ij} les fonctions de transitions du fibré ω_X relativement au recouvrement $(U_i)_{i \in I}$. L'élément $c_1(\omega_X)$ est représenté par le cocycle $\frac{df_{ij}}{f_{ij}}$ à valeurs dans ω_X . ■

Rappelons qu'une variété est dite *minimale* lorsque le fibré canonique est numériquement effectif.

COROLLAIRE 1.4.—*Soit X une variété projective minimale de dimension 3 munie d'une structure de Poisson quasi-régulière non nulle. Alors la dimension de Kodaira $\kappa(X)$ de X vérifie les inégalités $0 \leq \kappa(X) \leq 1$.*

Démonstration.—On a

$$\kappa(X) \leq \max\{i | c_1(\omega_X)^i c_1(\mathcal{O}_X(H))^{3-i} \neq 0\}$$

où H est une section hyperplane de X , de sorte que, par la proposition 1.3, on obtient les inégalités $0 \leq \kappa(X) \leq 1$. ■

2. Cas où X n'est pas minimale

LEMME 2.1.—*Soit X une variété projective non minimale munie d'une structure de Poisson quasi-régulière non nulle. Alors X est un fibré en coniques. En particulier, X est de dimension de Kodaira $\kappa(X) = -\infty$.*

Démonstration.—Par le théorème de structure de S.Mori ([Mo] thm. 3.3 et thm. 3.5) il suffit d'étudier les cas suivants.

Cas 1 Il existe une sous variété $Z \subset X$ de dimension 2 ou 3 telle que le fibré $\omega_X^{\otimes -1}|_Z$ soit ample. Ce cas est exclu par la proposition 1.3.

Cas 2 Il existe un morphisme $X \xrightarrow{\pi} S$, S étant une variété projective lisse, et une courbe lisse $C \subset S$ tels que X soit l'éclaté de la courbe C dans S . Soit E le diviseur exceptionnel. L'isomorphisme $\pi_* \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_S$ permet de définir une structure de Poisson sur S à l'aide de celle existant sur X . On vérifie que le diagramme suivant est commutatif, les flèches horizontales étant données par les structures de Poisson :

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \omega_X) & \longrightarrow & H^1(X, \Omega_X^1) \\ \uparrow \iota & & \uparrow \\ H^1(S, \omega_S) & \longrightarrow & H^1(S, \Omega_S^1) \end{array}$$

On déduit de la proposition 1.3 que $c_1(X)$ provient d'un élément de $H^1(S, \Omega_S^1)$, ce qui est absurde puisque $c_1(X) = -c_1(\mathcal{O}_X(E)) + \pi^* c_1(S)$ et puisque E est contracté par π .

Cas 3 Il existe un morphisme $X \rightarrow S$, S étant une surface projective lisse et connexe, tel que, pour tout point géométrique η de S , la fibre X_η soit une conique de $\mathbf{P}_{k(\eta)}^2$. ■

La fin de cette section est consacrée à l'étude de ce dernier cas.

PROPOSITION 2.2.—*Soit $X \xrightarrow{\pi} S$ un fibré en coniques muni d'une structure de Poisson quasi-régulière non nulle.*

- (1) *Le morphisme π est lisse et S est une surface K3 ou une surface abélienne.*
- (2) *La structure de Poisson est régulière.*

Démonstration.—Prouvons la première assertion. Le lieu de dégénérescence de π est un diviseur effectif C_0 réduit, à croisements normaux. Au-dessus d'un point régulier de C_0 , la fibre schématique de π est la réunion de deux courbes rationnelles lisses distinctes ([Be2] prop. 1.2). Nous allons prouver la formule

$$-4c_1(S) + c_1(\mathcal{O}_S(C_0)) \equiv 0.$$

Pour établir cette relation, il suffit de montrer l'égalité

$$(-4c_1(S) + c_1(\mathcal{O}_S(C_0))).c_1(\mathcal{O}_S(C)) = 0$$

pour toute courbe lisse C qui coupe transversalement C_0 . En particulier, C ne coupe pas le lieu singulier de C_0 . Posons $D = \pi^{-1}(C)$. Un calcul en coordonnées locales montre que D est une surface lisse (connexe). En outre, il n'est pas difficile de voir que l'on peut contracter l'une des composantes irréductibles de chaque fibre singulière du morphisme $D \xrightarrow{\pi|_D} C$, de sorte que D est l'éclaté en $c_1(\mathcal{O}_S(C_0)).c_1(\mathcal{O}_S(C))$ points d'une surface réglée lisse et connexe D_0 . Soit $D \xrightarrow{\phi} D_0$ le morphisme correspondant. L'application rationnelle naturelle $D_0 \dashrightarrow C$ se prolonge en un morphisme $D_0 \xrightarrow{\pi_0} C$ tel que $\pi|_D = \pi_0\phi$, de sorte que la surface $D_0 \xrightarrow{\pi_0} C$ est une surface géométriquement réglée au-dessus de C . La formule d'adjonction fournit l'égalité $\omega_{X|D} = \omega_D \otimes N_{D/X}^{-1}$. Or $N_{D/X} = \pi_{|D}^* N_{C/S}$ et $c_1(N_{D/X})$ est donc numériquement équivalent à $c_1(\mathcal{O}_S(C))^2$ fibres du morphisme $D \xrightarrow{\pi|_D} C$. On en déduit

$$\begin{aligned} c_1(D)^2 &= c_1(D_0)^2 - c_1(\mathcal{O}_S(C_0)).c_1(\mathcal{O}_S(C)) \\ &= 8(1 - g(C)) - c_1(\mathcal{O}_S(C_0)).c_1(\mathcal{O}_S(C)) \end{aligned}$$

et

$$c_1(D).c_1(N_{D/X}) = 2c_1(\mathcal{O}_S(C))^2$$

(cf. [H] Chap. V.2 et V.3). On a $c_1(X)^2 = 0$ (prop. 1.3) et on obtient la formule

$$8(1 - g(C)) - c_1(\mathcal{O}_S(C_0)).c_1(\mathcal{O}_S(C)) + 4c_1(\mathcal{O}_S(C))^2 = 0.$$

Or la formule d'adjonction donne la relation

$$2(g(C) - 1) = c_1(\mathcal{O}_S(C))^2 - c_1(\mathcal{O}_S(C)).c_1(S)$$

et on obtient finalement

$$(-4c_1(S) + c_1(\mathcal{O}_S(C_0))).c_1(\mathcal{O}_S(C)) = 0$$

ce qui prouve notre assertion.

Prouvons que le diviseur K_S est effectif. Par la proposition 1.3, l'élément $c_1(X) \in H^1(X, \Omega_X^1)$ est image d'un élément de $H^1(X, \omega_X)$ par l'application $H^1(X, \omega_X) \rightarrow H^1(X, \Omega_X^1)$. Puisque $c_1(X)$ est non nul, ce qui se vérifie par restriction à la fibre générique de π , il en résulte que l'espace vectoriel $H^1(X, \omega_X)$ est non nul. Par dualité de Serre, on a $h^1(X, \omega_X) = h^2(X, \mathcal{O}_X)$. Puisque $R^1\pi_*\mathcal{O}_X = (0)$ et $\pi_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$, on a $h^2(X, \mathcal{O}_X) = h^2(S, \mathcal{O}_S)$ et, par dualité de Serre à nouveau, on obtient finalement $h^0(S, \omega_S) \geq 1$ ce qui démontre l'assertion.

Le diviseur $4K_S + C_0$ étant numériquement trivial et K_S étant effectif, les diviseurs K_S et C_0 sont triviaux. Il en résulte que π est lisse et que S est soit une surface $K3$ soit une surface abélienne.

Montrons maintenant que la structure de Poisson est régulière. Puisque π est lisse, π est en particulier topologiquement localement trivial et on a donc

$$e(X) = e(\mathbf{P}^1)e(S) = 2e(S)$$

où $e(\cdot)$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré. Soit $\sigma \in H^0(X, \wedge^2 T_X)$ le bivecteur de Poisson définissant la structure de Poisson sur X . Le lieu Z des zéros de σ étant de codimension 3, on a

$$\begin{aligned} \deg(Z) &= c_3(\wedge^2 T_X) \\ &= c_1(X)c_2(X) - c_3(X) \end{aligned}$$

En outre, pour un fibré en coniques, on a $\chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_S)$ puisque $R^1\pi_*\mathcal{O}_X = (0)$ et $\pi_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$. La formule de Noether donne la relation

$$\begin{aligned} 12\chi(\mathcal{O}_S) &= c_1(S)^2 + c_2(S) \\ &= e(S) \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} \deg(Z) &= c_1(X)c_2(X) - c_3(X) \\ &= 24\chi(\mathcal{O}_X) - e(X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

en utilisant la formule de Riemann-Roch $\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{1}{24}c_1(X)c_2(X)$. ■

PROPOSITION 2.3.—*Soit $X \xrightarrow{\pi} S$ une fibration en droites projectives munie d'une structure de Poisson régulière non nulle. Alors la surface S admet une structure de Poisson non triviale induite par l'isomorphisme naturel $\mathcal{O}_S \cong \pi_* \mathcal{O}_X$.*

Démonstration.—Supposons que la structure de Poisson induite sur S soit identiquement nulle. Dans ce cas, les fibres de $\pi^* \Omega_S^1 \subset \Omega_X^1$ sont des sous-espaces isotropes de dimension 2 et contiennent les fibres du faisceau ω_X , puisque ce dernier est le noyau de la structure de Poisson. On en déduit l'inclusion $T_{X/S} \subset \mathcal{F} (\subset T_X)$ (notations du lemme 1.1). Les fibres de π sont donc des sous-variétés intégrales du champ \mathcal{F} et, puisque ce dernier est de rang constant, chaque fibre est contenue dans une unique feuille symplectique.

Remarquons alors que le feuilletage sur X induit un feuilletage sur S par des courbes. Choisissons un point $s \in S$ et un disque ouvert Δ inclus dans la feuille contenant s . Clairement

$$\Sigma = \pi^{-1}(\Delta) = \Delta \times \mathbf{P}^1.$$

Or, la structure de Poisson induit une structure symplectique sur Σ , c'est-à-dire une trivialisatation du fibré $\wedge^2 T_\Sigma$, ce qui est évidemment impossible. ■

PROPOSITION 2.4.—*Soit $X \xrightarrow{\pi} S$ une fibration en droites projectives. On suppose X munie d'une structure de Poisson régulière non nulle. Alors S est une surface $K3$ et $X = S \times \mathbf{P}^1$, ou bien S est une surface abélienne et la fibration est munie d'une connexion plate.*

Démonstration.—Nous savons que S est une surface $K3$ ou une surface abélienne par la proposition 2.2. La structure de Poisson induite sur S est donc partout non nulle. Un calcul en coordonnées locales permet de se rendre compte que la flèche $\mathcal{F} \rightarrow \pi^* \Omega_S^1$, déduite de la projection naturelle $T_X \rightarrow \pi^* \Omega_S^1$ et de l'inclusion $\mathcal{F} \subset T_X$, est un isomorphisme (notations du lemme 1.1). On en déduit l'existence d'une section $\pi^* T_S \xrightarrow{s} T_X$ de la projection $T_X \rightarrow \pi^* T_S$, telle que $s(\pi^* T_S) = \mathcal{F}$. La distribution définie par cette section est donc intégrable (lemme 1.1) et détermine une connexion plate sur π ; celui-ci est analytiquement localement trivial et les fonctions de transition sont localement constantes. La fibration précédente est donc associée à une représentation de $\pi_1(X)$ dans le groupe $PGL(2, \mathbf{C})$. Rappelons enfin qu'une surface $K3$ est simplement connexe et donc qu'une telle fibration est triviale, ce qui achève la preuve de notre proposition. ■

PROPOSITION 2.5.—*La variété $S \times \mathbf{P}^1$, S étant une surface $K3$, admet une structure de Poisson régulière non nulle et il en est de même pour toute fibration en droites projectives munie d'une connexion plate, de base une surface abélienne.*

Démonstration.—La première assertion est claire. Soit $X \xrightarrow{\pi} S$ une fibration en droites projectives munie d'une connexion plate, de base une surface abélienne. Soit $(U_\alpha)_\alpha$ un recouvrement ouvert de S et ϕ_α des isomorphismes $\pi^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times \mathbf{P}^1$ au dessus de U_α de sorte que les fonctions de transition $\phi_\alpha \phi_\beta^{-1}$ soient localement constantes. On munit le produit $U_\alpha \times \mathbf{P}^1$ de la structure de Poisson produit, une structure symplectique étant fixée au préalable sur S . On vérifie que les isomorphismes ϕ_α sont des morphismes de Poisson, de sorte que l'on obtient sur X une structure de Poisson régulière non triviale, ce qui termine la preuve de notre proposition. ■

Nous avons donc démontré le théorème :

THÉORÈME 2.6.—*Soit X une variété projective de dimension 3 non minimale. Alors X admet une structure de Poisson quasi-régulière non nulle si et seulement si $X = S \times \mathbf{P}^1$ où S est une surface K3, ou bien X possède une fibration en droites projectives munie d'une connexion plate, de base une surface abélienne S .*

En outre, la structure de Poisson est régulière et induite par le pull-back de la structure symplectique sur S au moyen de la connexion.

3. Cas où X est minimale et $\kappa(X) = 0$

REMARQUES 3.1.—La formule numérique donnant la dimension de Kodaira entraîne $c_1(X) \equiv 0$. La variété X étant de dimension de Kodaira $\kappa(X) = 0$, il existe donc un entier $n \geq 1$ tel que $\omega_X^{\otimes n} = \mathcal{O}_X$. Réciproquement, si le fibré canonique est de torsion, X est minimale et $\kappa(X) = 0$.

Rappelons quelques résultats utiles pour cette section.

THÉORÈME 3.2 ([KA2]).—*Soit X une variété projective lisse minimale de dimension de Kodaira $\kappa(X) = 0$.*

(1) *Le morphisme d'Albanese $X \xrightarrow{\alpha_X} \text{Alb}(X)$ est surjectif, à fibres lisses et connexes; il existe un revêtement étale galoisien trivialisant la fibration précédente.*

(2) *Il existe un isomorphisme naturel $H^0(X, T_X) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathcal{O}_X)$.*

Dans la suite de notre travail, l'entier $h^1(X, \mathcal{O}_X)$ sera noté $q(X)$.

PROPOSITION 3.3.—*Soit X une variété projective minimale de dimension de Kodaira $\kappa(X) = 0$.*

(1) Les champs de vecteurs non nuls sur X ne sont pas tangents à la fibration d'Albanese de X .

(2) Supposons X de dimension 3. On a $q(X) \in \{0, 1, 2, 3\}$ et si $q(X) = 3$ alors X est une variété abélienne.

Démonstration.—Considérons la suite exacte de cohomologie :

$$0 \longrightarrow H^0(X, T_{X/\text{Alb}(X)}) \longrightarrow H^0(X, T_X) \longrightarrow H^0(X, \alpha_X^* T_{\text{Alb}(X)}).$$

L'espace $H^0(X, T_{X/\text{Alb}(X)})$ est donc nul si et seulement si l'application

$$H^0(X, T_X) \longrightarrow H^0(X, \alpha_X^* T_{\text{Alb}(X)})$$

est surjective, puisque ces deux espaces vectoriels ont même dimension, la dimension de la variété d'Albanese étant précisément $q(X)$.

Soit $B \xrightarrow{r} \text{Alb}(X)$ un revêtement étale galoisien de groupe G tel que le produit fibré $B \times_{\text{Alb}(X)} X$ soit isomorphe au dessus de B au produit $B \times F$ où F est une variété projective lisse, de sorte que X est isomorphe au quotient $B \times F/G$. Remarquons que, puisque $B/G \cong \text{Alb}(X)$ est une variété abélienne, le groupe G est formé de translations de B . Soit donc $\theta_0 \in H^0(\text{Alb}(X), T_{\text{Alb}(X)})$ et posons

$$\theta_1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g_* \theta_0 \in H^0(B \times F, T_{B \times F})^G = H^0(X, T_X)$$

où nous avons identifié les espaces $H^0(\text{Alb}(X), T_{\text{Alb}(X)})$ et $H^0(B, T_B)$. Le groupe G agissant de manière compatible sur B et $B \times F$, l'image de θ_1 par l'application

$$H^0(X, T_X) \longrightarrow H^0(\text{Alb}(X), T_{\text{Alb}(X)})$$

est θ_0 , ce qui prouve notre assertion.

L'inégalité $q(X) \leq 3$ résulte de la surjectivité du morphisme d'Albanese (thm. 3.2). La dernière assertion étant évidente, la preuve de notre proposition est achevée. ■

PROPOSITION 3.4.—*Soit X une variété projective de dimension 3 et de dimension de Kodaira $\kappa(X) = 0$. Supposons en outre que X soit munie d'une structure de Poisson quasi-régulière non nulle. Alors $q(X) \neq 0$ et la structure est régulière. En outre, si $q(X) = 1$ alors le fibré canonique est trivial.*

Démonstration.—Rappelons que X est minimale (lemme 2.1) et démontrons la première assertion. L'inclusion $\omega_X \subset \Omega_X^1$ entraîne l'inégalité $h^0(X, \omega_X) \leq h^0(X, \Omega_X^1)$. Par dualité de

Serre, $h^0(X, \omega_X) = h^3(X, \mathcal{O}_X)$ et par la théorie de Hodge, $h^0(X, \Omega_X^1) = q(X)$. On obtient $h^3(X, \mathcal{O}_X) \leq q(X)$. Or, par le théorème de Riemann-Roch, on a

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{O}_X) &= \frac{1}{24}c_1(X)c_2(X) \\ &= 0\end{aligned}$$

($c_1(X) \equiv 0$ par la remarque 3.1). Il en résulte finalement

$$\begin{aligned}1 + h^2(X, \mathcal{O}_X) &= q(X) + h^3(X, \mathcal{O}_X) \\ &\leq 2q(X)\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Montrons maintenant que la structure est régulière. Soit $\sigma \in H^0(X, \wedge^2 T_X)$ la section définissant la structure de Poisson sur X . Le lieu Z des zéros de σ étant de codimension 3, on a

$$\begin{aligned}\deg(Z) &= c_3(\wedge^2 T_X) \\ &= c_1(X)c_2(X) - c_3(X) \\ &= -c_3(X) \\ &= -e(X)\end{aligned}$$

Le morphisme d'Albanese $X \xrightarrow{\alpha_X} \text{Alb}(X)$ est lisse et donc topologiquement localement trivial. Soit F une fibre dudit morphisme. On a donc $e(X) = e(\text{Alb}(X))e(F) = 0$ puisque $q(X) \neq 0$. Il en résulte $\deg(Z) = 0$, ce qui démontre l'assertion.

Supposons enfin $q(X) = 1 = \dim(\text{Alb}(X))$. Par la proposition 3.3, $h^0(X, T_{X/\text{Alb}(X)}) = 0$ et la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \wedge^2 T_{X/\text{Alb}(X)} = \omega_X^{-1} \longrightarrow \wedge^2 T_X \longrightarrow T_{X/\text{Alb}(X)} \longrightarrow 0$$

fournit donc l'égalité $h^0(X, \omega_X^{-1}) = h^0(X, \wedge^2 T_X)$. Or $h^0(X, \wedge^2 T_X) \geq 1$ et donc $h^0(X, \omega_X^{-1}) \geq 1$. Le diviseur $-K_X$ étant effectif et numériquement trivial (rmq. 3.1), il est nul, ce qui termine la preuve de la proposition. ■

PROPOSITION 3.5.—*Soit X une variété projective de dimension 3, à fibré canonique trivial, vérifiant $q(X) = 1$. La variété X vérifie alors l'une des conditions suivantes :*

- (1) $X = (C \times S)/G$ où C est une courbe elliptique, S une surface K3 et G un groupe fini de translations de C opérant sur S en respectant la structure symplectique,
- (2) $X = (C \times S)/G$ où C est une courbe elliptique, S une surface abélienne et G un groupe fini de translations de C opérant sur $C \times S$ par la formule :

$$g.(c, s) = (g.c, t_g(c) + u_g(s)), \quad g \in G, \quad c \in C, \quad s \in S,$$

où u_g est un automorphisme de groupes respectant la structure symplectique de S et t_g un morphisme de C dans S .

De plus, toute variété du type précédent admet une structure de Poisson régulière, induite par la structure symplectique de S .

Démonstration.—Le morphisme d'Albanese $X \xrightarrow{\alpha_X} \text{Alb}(X)$ étant lisse (thm. 3.2), on a l'inclusion de fibrés vectoriels

$$(\alpha_X)^* \omega_{\text{Alb}(X)} = \mathcal{O}_X \subset \Omega_X^1.$$

Puisque le fibré canonique ω_X est trivial, cette application définit une structure de Poisson régulière sur X (lemme 1.1) dont les feuilles symplectiques sont les fibres du morphisme d'Albanese.

Nous savons qu'il existe un revêtement étale galoisien de groupe G , $C \rightarrow \text{Alb}(X)$ tel que $C \times_{\text{Alb}(X)} X$ soit isomorphe à $C \times F$ au-dessus de C , où F est une surface projective lisse; de sorte que X est isomorphe au quotient $C \times F/G$, G opérant sur $C \times F$ et C de manière compatible. Puisque $\omega_X = \mathcal{O}_X$, on a $\omega_{C \times F} = \mathcal{O}_{C \times F}$ et donc $\omega_F = \mathcal{O}_F$. La variété F est donc une surface abélienne ou une surface $K3$. Puisque $C/G = \text{Alb}(X)$ est une variété abélienne, le groupe G est formé de translations de C . Remarquons alors que la structure de Poisson que nous venons de construire sur X se relève à $C \times F$ en une structure de Poisson régulière qui est le produit de la structure nulle sur C et d'une structure symplectique sur F . Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner le feuilletage défini par ladite structure. On constate ensuite que le groupe G respecte la structure de Poisson sur $C \times F$. Enfin, la structure de l'action de G résulte du fait que le groupe des automorphismes d'une surface $K3$ ainsi que le groupe des automorphismes de groupes d'une surface abélienne sont discrets. Un calcul permet de vérifier que la structure symplectique sur F est respectée, ce qui achève la preuve de notre proposition, puisque la dernière assertion est évidente. ■

PROPOSITION 3.6.—*Soit X une variété projective minimale de dimension 3 et de dimension de Kodaira $\kappa(X) = 0$, vérifiant $q(X) = 2$. Alors X est de la forme $(F \times S)/G$ où F est une courbe elliptique, S une surface abélienne et G un groupe fini de translations de S opérant sur F de sorte que $F/G = \mathbf{P}^1$ et sur $F \times S$ par le produit de ses actions sur chacun des facteurs.*

De plus, toute variété de cette forme admet une structure de Poisson régulière non nulle, induite par la structure symplectique de S .

Démonstration.—Soit $S \rightarrow \text{Alb}(X)$ un revêtement étale galoisien de groupe G tel que le produit fibré $X \times_{\text{Alb}(X)} S$ soit isomorphe au-dessus de S au produit $F \times S$, F étant une

courbe lisse, de sorte que X est isomorphe au quotient $F \times S/G$, G opérant sur $F \times S$ et S de manière compatible. L'égalité $\kappa(X) = 0$ entraîne $\kappa(F \times S) = 0$. Aussi $\kappa(F) = 0$ et F est une courbe elliptique. Remarquons que, puisque $S/G \cong \text{Alb}(X)$ est une variété abélienne, le groupe G est formé de translations de S . Utilisant un lemme de Beauville ([Be1] lemme VI 10, l'argument donné dans le cas des surfaces s'adapte facilement à notre situation), on peut toujours supposer que le groupe G opère sur la courbe elliptique F et que l'action de G sur le produit $F \times S$ est le produit des actions de G sur F et S . Enfin, si F/G est une courbe elliptique, alors G opère sur F par translations et il en résulte que X est une variété abélienne, ce qui est impossible puisque $q(X) = 2$.

La dernière assertion étant immédiate, notre proposition est démontrée. ■

Nous avons donc prouvé le théorème suivant :

THÉORÈME 3.7.—*Soit X une variété projective de dimension 3 et de dimension de Kodaira $\kappa(X) = 0$. Alors X admet une structure de Poisson régulière non nulle si et seulement si X est minimale et vérifie l'une des trois conditions suivantes :*

- (1) $q(X) = 3$ (auquel cas X est une variété abélienne)
- (2) $q(X) = 2$
- (3) $q(X) = 1$ et $p_g(X) = 1$.

4. Cas où X est minimale et $\kappa(X) = 1$

Les propositions 4.5 et 4.6 sont dues à M. Reid ([R]) dans le cas où $\dim(X) = 2$.

REMARQUE 4.1.—*Soient S un schéma intègre, E un faisceau localement libre sur X , $L, \bar{L} \subset E$ deux faisceaux inversibles tels que le quotient E/\bar{L} soit sans torsion, et tels qu'il existe un ouvert $U \subset X$ non vide au dessus duquel $L|_U \subset \bar{L}|_U \subset E|_U$. Alors $L \subset \bar{L} \subset E$.*

LEMME 4.2.—*Soient X une variété localement factorielle, E un faisceau localement libre sur X et $L \subset E$ un sous-faisceau inversible de E . Il existe alors un unique faisceau inversible $\bar{L} \subset E$ tel que $L \subset \bar{L} \subset E$ et tel que le faisceau quotient E/\bar{L} soit sans torsion ; \bar{L} est le saturé de L dans E .*

DÉFINITION 4.3.—*Soient X une variété algébrique, C une courbe et $X \xrightarrow{f} C$ un morphisme. On définit le diviseur de ramification de f par la formule :*

$$D_f = \sum_{P \in C} f^*P - (f^*P)_{\text{red}}$$

qui a un sens par le théorème de Sard.

LEMME 4.4.—*Soit X une variété projective. Supposons qu'il existe un morphisme surjectif à fibres connexes $X \xrightarrow{f} C$ vers une courbe lisse C . Alors l'inclusion naturelle $f^*\omega_C \subset \Omega_X^1$ fournit l'inclusion $L = f^*\omega_C(D_f) \subset \Omega_X^1$, D_f étant le diviseur de ramification de f . De plus, le quotient Ω_X^1/L est sans torsion, et on a l'égalité $f_*L = \omega_C$.*

Démonstration.—Soient $P \in C$ un point de C et $f^*P = \sum_i n_i D_i$ la décomposition schématique de la fibre de f au dessus de P . Fixons i . Au voisinage d'un point régulier de la composante D_i , il existe des coordonnées locales (z_1, \dots, z_n) sur X (le point considéré ayant pour coordonnées $(0, \dots, 0)$) et une coordonnée locale t sur C au voisinage du point $f(P)$ (ayant pour coordonnée $t = 0$) telles que le morphisme f soit donné par $(z_1, \dots, z_n) \longrightarrow z_1^{n_i}$. On a donc

$$f^*dt = n_i z_1^{n_i-1} dz_1$$

et la première assertion est claire.

Il reste à établir la relation $f_*L = \omega_C$. Nous allons vérifier que l'inclusion naturelle $\omega_C \subset f_*L$ est un isomorphisme en le montrant en chaque point de C . En un point de C au dessus duquel la fibre est réduite, le résultat est clair. Prenons donc $P \in C$ tel que la fibre schématique f^*P soit non réduite. Les inclusions

$$f^*\omega_C \subset L \subset f^*\omega_C(P)$$

fournissent, en prenant les images directes, les inclusions

$$\omega_C \subset f_*L \subset \omega_C(P).$$

Une section au voisinage de P de $\omega_C(P)$ qui n'appartient pas à ω_C engendre nécessairement $\omega_C(P)$ en P et correspond à une section rationnelle de $f^*\omega_C$ dont le diviseur des pôles au voisinage de $f^{-1}(P)$ est f^*P . Cette section ne peut donc appartenir à L , ce qui permet de conclure. ■

PROPOSITION 4.5.—*Soient X une variété projective et $L \subset \Omega_X^1$ un sous faisceau inversible de Ω_X^1 tel que le faisceau quotient Ω_X^1/L soit sans torsion. On suppose qu'il existe un système linéaire $\Lambda \subset |L|$ sans points bases tel que $\phi(X)$ soit une courbe, où $X \xrightarrow{\phi} \mathbf{P}^N$ est le morphisme associé au système linéaire Λ . Alors il existe un morphisme surjectif, à fibres connexes $X \xrightarrow{f} C$ vers une courbe lisse C , tel que $f^*\omega_C \subset L \subset \Omega_X^1$, où l'inclusion $f^*\omega_C \subset \Omega_X^1$ est l'inclusion naturelle. En outre, on a l'égalité $L = f^*\omega_C(D_f)$, D_f étant le diviseur de ramification de f , et $f_*L = \omega_C$.*

Démonstration.—Remarquons que, supposant l'existence d'un tel morphisme, l'application naturelle

$$f^*\omega_C \xrightarrow{df} \Omega_X^1$$

est une inclusion. En effet, par le théorème de lissité générique, le noyau de ce morphisme est de torsion et, puisque $f^*\omega_C$ est sans torsion, ce noyau est trivial.

Par le théorème de factorisation de Stein, il existe une courbe C lisse et connexe, un morphisme $X \xrightarrow{f} C$ surjectif et à fibres connexes, et un morphisme $C \xrightarrow{\pi} \mathbf{P}^N$, fini au dessus de $\phi(X)$ tels que $\phi = \pi f$. Soient H_0 et H_1 deux hyperplans de \mathbf{P}^N distincts, ne contenant pas la courbe $\phi(X)$ et d'équations respectives $X_1 = 0$ et $X_2 = 0$ avec $X_i \in H^0(\mathbf{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}(1))$. Il existe alors un ouvert de Zariski $U \subset \mathbf{P}^N$ tel que la 1-forme $d(\frac{X_1}{X_0})$ y soit holomorphe, partout non nulle et tel que $\pi^*d(\frac{X_1}{X_0})$ soit partout non nulle sur $\pi^{-1}(U)$, de sorte que $\phi^*d(\frac{X_1}{X_0})$ engendre $f^*\omega_C$ au dessus de l'ouvert $\phi^{-1}(U)$. Posons alors

$$s_i = \phi^*X_i \in H^0(X, L).$$

On a donc

$$s_1 = \phi^*\left(\frac{X_1}{X_0}\right)s_0.$$

La variété X étant compacte kählerienne, toute 1-forme holomorphe sur X est fermée. Par suite,

$$ds_1 = \phi^*d\left(\frac{X_1}{X_0}\right) \wedge s_0 = 0.$$

Par choix de H_0 , le fermé $\phi^{-1}(H_0)$ est un diviseur et donc un fermé propre de X . Il en résulte alors que

$$\phi^*d\left(\frac{X_1}{X_0}\right)_{|V} \in H^0(V, L)$$

où $V = \phi^{-1}(U \cap (\mathbf{P}^N/H_0))$. Mais, puisque $\phi^*d(\frac{X_1}{X_0})_{|V}$ engendre $f^*\omega_{C|V}$ en tout point de V , il en résulte les inclusions $f^*\omega_C \subset L \subset \Omega_X^1$, où l'inclusion $f^*\omega_C \subset \Omega_X^1$ est l'inclusion naturelle (cf remarque 4.1).

Par le lemme 4.2, il suffit de prouver que $f^*\omega_C(D_f) \subset \Omega_X^1$ et que le faisceau quotient $\Omega_X^1/f^*\omega_C(D_f)$ est sans torsion pour que l'égalité $L = f^*\omega_C(D_f)$ soit vérifiée, ce que donne le lemme 4.4. ■

PROPOSITION 4.6.—*Soient X une variété projective et $L \subset \Omega_X^1$ un faisceau inversible tel que le faisceau quotient Ω_X^1/L soit sans torsion. On suppose qu'il existe un entier $n \geq 2$ et un système linéaire $\Lambda \subset |L^{\otimes n}|$ sans points bases tel que $\phi(X)$ soit une courbe, où ϕ est le morphisme associé au système linéaire Λ . Alors on a la même conclusion que dans la proposition 4.5.*

Démonstration.—Soient (s_0, \dots, s_N) une base du système linéaire Λ . Il existe un morphisme projectif, génériquement fini

$$Y \xrightarrow{\pi} X$$

Y étant une variété algébrique, et des sections t_1, \dots, t_N du fibré π^*L telles que

$$t_i^n = \pi^*s_i$$

([BPV]). Notons $\bar{\Lambda} \subset |\pi^*L|$ le système linéaire engendré par les sections t_i . Ce système linéaire est sans points bases puisque π est surjectif et, si $\bar{\phi}$ désigne le morphisme associé à Λ , $\bar{\phi}(X)$ est une courbe. L'inclusion $L \subset \Omega_X^1$ se relève en une inclusion

$$\pi^*L \subset \pi^*\Omega_X^1$$

et l'injection naturelle $\pi^*\Omega_X^1 \hookrightarrow \Omega_Y^1$ fournit alors un sous faisceau inversible $\pi^*L \subset \Omega_Y^1$ de Ω_Y^1 , le faisceau quotient Ω_Y^1/π^*L n'étant pas nécessairement sans torsion. Considérons alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\pi} & X \\ \downarrow g & & \downarrow f \\ D & & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{P}^N & \longrightarrow & \mathbf{P}^N \\ (x_0 : \dots : x_N) & \longmapsto & (x_0^n : \dots : x_N^n) \end{array}$$

où les flèches de gauche sont données par la proposition 4.5 appliquée au système linéaire $\bar{\Lambda} \subset |\pi^*L|$, les notations étant celles du lemme 4.2, et les flèches de droite par la factorisation de Stein de ϕ . Remarquons enfin que l'inclusion $f^*\omega_C \subset L$ est équivalente à la condition qu'en un point assez général (pour la topologie de Zariski) de X , les fibres de f sont tangentes au feuilletage défini par L . D'après la proposition 4.5, nous savons que $g^*\omega_D$ et π^*L coïncident sur un ouvert non vide de Y et donc que les fibres de g sont tangentes au feuilletage défini par π^*L . Comme le diagramme est commutatif, on en déduit qu'en un point générique de X , les fibres de f sont tangentes au feuilletage défini par L , ce qui permet de conclure.

Par le lemme 4.2, il suffit de prouver que $f^*\omega_C(D_f) \subset \Omega_X^1$ et que le faisceau quotient $\Omega_X^1/f^*\omega_C(D_f)$ est sans torsion pour que l'égalité $L = f^*\omega_C(D_f)$ soit vérifiée, ce que donne le lemme 4.4. ■

Rappelons enfin le lemme suivant qui nous sera utile par la suite.

LEMME 4.7 ([BE1] LEMME VI 7 BIS).—Soient $\Delta \subset \mathbb{C}$ le disque unité, U une variété analytique (non compacte) lisse de dimension 3 et $p : U \rightarrow \Delta$ un morphisme. On suppose que $p^*0 = nD$ où $n \geq 1$ et D est un diviseur effectif réduit. Soit $\Delta \xrightarrow{q} \Delta$ le morphisme $z \mapsto z^n$, \tilde{U} le produit fibré défini par le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{\tilde{q}} & U \\ \downarrow \tilde{p} & & \downarrow p \\ \Delta & \xrightarrow{q} & \Delta \end{array}$$

\bar{U} la normalisation de \tilde{U} , \bar{p} et \bar{q} les projections de \bar{U} sur Δ et U . Alors, \bar{U} est lisse, \bar{q} est étale fini et la fibre \bar{p}^*0 est réduite.

PROPOSITION 4.8.—Soit X une variété projective de dimension 3 munie d'une structure de Poisson quasi-régulière non nulle; on suppose X de dimension de Kodaira $\kappa(X) = 1$. Alors il existe un morphisme surjectif $X \xrightarrow{f} C$ vers une courbe C , dont les fibres lisses sont des surfaces K3 ou des surfaces abéliennes. Si l'une des fibres est une surface K3, le morphisme f est lisse, analytiquement localement trivial et on a la formule $\omega_X = f^*\omega_C$. Si l'une des fibres est une surface abélienne, les fibres lisses sont des surfaces abéliennes et les fibres non lisses sont multiples de surfaces abéliennes et on a l'égalité $\omega_X = f^*\omega_C(D_f)$, D_f étant le diviseur de ramification de f . Enfin, la structure de Poisson est régulière.

Démonstration.—La variété X étant minimale (lemme 2.1), le système linéaire $|K_X|$ est semi-ample ([Ka2]). L'existence d'un morphisme $X \xrightarrow{f} C$ surjectif, à fibres connexes, vers une courbe lisse tel que $f^*\omega_C(D_f) = \omega_X$, D_f étant le diviseur de ramification de f , résulte du corollaire 1.2 et de la proposition 4.6.

Montrons que les fibres ensemblistes du morphisme f sont normales. La formule $\omega_X = f^*\omega_C(D_f)$ entraîne que les fibres lisses sont des feuilles symplectiques pour la distribution définie par la structure de Poisson. Il en résulte que toutes les feuilles symplectiques de dimension 2 sont verticales pour f . Aussi, les singularités des fibres de f correspondent aux points où la structure n'est pas régulière, ce qui prouve l'assertion. Il en résulte en particulier que les fibres du morphisme f sont irréductibles puisqu'elles sont connexes.

Si F désigne une fibre lisse de f , la formule d'adjonction fournit l'égalité $\omega_F = \omega_X|_F$ et donc $\omega_F = \mathcal{O}_F$ puisque $\mathcal{O}_F(D_f) = \mathcal{O}_F$ dans ce cas. Par suite, F est une surface K3 ou une surface abélienne.

Supposons maintenant que l'une des fibres de f soit une surface K3. Pour toute fibre F de f , on a donc $\chi(\mathcal{O}_F) = 2$. Supposons que la fibre schématique F soit non réduite. On

peut donc écrire

$$F = n(F_{red})$$

avec $n \geq 2$. A l'aide du théorème de Riemann Roch, il n'est pas difficile de voir que

$$\chi(\mathcal{O}_F) = n\chi(\mathcal{O}_{F_{red}}).$$

En outre, par la formule d'adjonction, on a

$$\begin{aligned} \omega_{F_{red}}^0 &= \omega_X \otimes \mathcal{O}_X(F_{red}) \otimes \mathcal{O}_{F_{red}} \\ &= f^*\omega_C(D_f + F_{red}) \otimes \mathcal{O}_{F_{red}} \\ &= f^*\omega_C(n(F_{red})) \otimes \mathcal{O}_{F_{red}} \\ &= \mathcal{O}_{F_{red}} \end{aligned}$$

car $n(F_{red}) = F$. Or, une surface projective normale S dont le faisceau dualisant est trivial vérifie $h^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$ sauf si S est une surface abélienne ([U] cor. 1). Par suite $\chi(\mathcal{O}_{F_{red}}) = 2$ et donc $n = 1$. Aussi, le morphisme f est non ramifié et on a la formule $\omega_X = f^*\omega_C$. Le fibré dualisant relatif étant de torsion, le morphisme f est lisse et analytiquement localement trivial ([F] thm. 4.8), ce que l'on voulait démontrer. En outre, la structure de Poisson est régulière puisque, comme nous l'avons déjà remarqué, les points où la structure n'est pas régulière correspondent aux singularités des fibres de f .

Supposons maintenant que l'une des fibres de f soit une surface abélienne. Par un résultat de J.Kollár ([Ko] preuve du thm. 2.2, étape 6), le faisceau $R^1 f_* \mathcal{O}_X$ est localement libre de rang 2 et sa formation commute aux changements de base. Une fibre réduite F de f vérifie donc $h^1(F, \mathcal{O}_F) = 2$ et est donc lisse par le résultat de Y.Umezue ([U] cor. 1) puisque son faisceau dualisant relatif est trivial. Si F est une fibre de f non réduite, on pose $F = n(F_{red})$ et $P = f(F)$. Choisissons une boule $\Delta \subset C$ contenant le point P et posons $U = f^{-1}(\Delta)$. On suppose que P est le seul point de Δ au dessus duquel la fibre est non réduite. En appliquant le lemme 4.7, on obtient alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \overline{U} & \xrightarrow{\overline{q}} & U \\ \downarrow \overline{f} & & \downarrow f \\ \Delta & \xrightarrow{z \mapsto z^{n_i}} & \Delta \end{array}$$

où \overline{q} est un revêtement étale fini et \overline{f} est à fibres réduites et connexes. Il n'est pas difficile de voir que

$$\overline{q}^* \omega_U = \overline{f}^* \omega_\Delta$$

puisque nous avons la relation $\omega_X = f^* \omega_C(D_f)$. Le morphisme \overline{q} étant étale on a $\overline{q}^* \omega_U = \omega_{\overline{U}}$ et donc

$$\omega_{\overline{U}} = \overline{f}^* \omega_\Delta$$

de sorte que les fibres de \bar{f} ont toutes un faisceau dualisant trivial. Enfin, puisque la formation du faisceau $R^1 f_* \mathcal{O}_X$ commute aux changements de base, on en déduit que toutes les fibres \bar{F} de \bar{f} vérifient $h^1(\bar{F}, \mathcal{O}_{\bar{F}}) = 2$ ce qui implique encore par le résultat de Y. Umezū ([U] cor. 1) que ces fibres sont lisses. On en déduit que les fibres singulières de f sont multiples de surfaces lisses. Or, nous savons que les singularités des fibres du morphisme f (munies de leurs structures réduites) correspondent aux singularités de l'injection de faisceaux $\omega_X \hookrightarrow \Omega_X^1$ (cf. corollaire 1.2), ce qui prouve que la structure de Poisson est régulière. Enfin, il n'est pas difficile de voir que le fibré canonique $\omega_{F_{red}}$ est trivial pour toute fibre F de f , de sorte que, pour des raisons de caractéristique d'Euler-Poincaré, les fibres de f sont soit des surfaces abéliennes, soit des multiples de surfaces abéliennes. ■

Les deux propositions qui suivent complètent naturellement les résultats de la proposition précédente.

PROPOSITION 4.9.—*Soit X une variété projective de dimension 3. On suppose qu'il existe un morphisme surjectif $X \xrightarrow{f} C$ vers une courbe algébrique C dont les fibres sont soit des surfaces abéliennes, soit multiples de surfaces abéliennes. Enfin, on suppose qu'on a la formule $\omega_X = f^* \omega_C(D_f)$, D_f étant le diviseur de ramification de f . Alors X est de la forme $(\bar{C} \times S)/G$ où \bar{C} est une courbe lisse, S une surface abélienne et $G \subset \text{Aut}(\bar{C})$ un groupe fini opérant librement sur $\bar{C} \times S$ par la formule :*

$$g.(c, s) = (g.c, t_g(c) + u_g(s)), \quad g \in G, c \in \bar{C}, s \in S,$$

où u_g est un automorphisme de groupes de S respectant la structure symplectique et t_g un morphisme de \bar{C} dans S .

De plus, toute variété de cette forme admet une structure de Poisson régulière non nulle induite par la structure symplectique de S .

Démonstration.—Démontrons la première assertion. Notons P_1, \dots, P_k les points de C tels que les fibres schématiques $f^* P_i$ soient non réduites et n_1, \dots, n_k les multiplicités desdites fibres. Il existe un revêtement galoisien $\bar{C} \xrightarrow{\pi} C$ (\bar{C} étant une courbe projective) ramifié au dessus des points P_i , étale ailleurs et tel que l'indice de ramification d'un point de $\pi^{-1}(P_i)$ soit n_i ([KO], lemme 6.1). Toutefois, il faut vérifier que lorsque $C = \mathbf{P}^1$, le morphisme f a au moins trois fibres non réduites. Notons N le nombre de fibres non réduites et soit $k \geq 1$ un entier. En utilisant la formule de projection, on obtient :

$$\begin{aligned} h^0(X, \omega_X^{\otimes k} \Pi_i n_i) &= h^0(C, \omega_C^{\otimes k} \Pi_i n_i \otimes f_* \mathcal{O}_X(k \Pi_i n_i D_f)) \\ &= h^0(C, \omega_C^{\otimes k} \Pi_i n_i \otimes \mathcal{O}_C(\sum_i (n_i - 1)(\Pi_{j \neq i} n_j) P_i)) \end{aligned}$$

Or :

$$\deg(\omega_C^{\otimes k} \prod_i n_i \otimes \mathcal{O}_C(\sum_i (n_i - 1)(\prod_{j \neq i} n_j) P_i)) = k((N - 2) \prod_i n_i - \sum_i \prod_{j \neq i} n_j),$$

et on en déduit que $N \geq 3$, puisque $\kappa(X) = 1$.

Soit \overline{X} la normalisation du produit fibré $X \times_C \overline{C}$. Le morphisme naturel $\overline{X} \xrightarrow{\overline{f}} \overline{C}$ est lisse, et le morphisme $\overline{X} \xrightarrow{\overline{\pi}} X$ est un revêtement étale fini (lemme 4.7). La formule $\omega_X = f^* \omega_C(D_f)$ entraîne l'égalité $\omega_{\overline{X}} = \overline{f}^* \omega_{\overline{C}}$ et le morphisme \overline{f} est donc localement trivial ([F] thm. 4.8). Fixons un entier $n \geq 3$. Quitte à faire un changement de base étale, on peut supposer que la fibration $\overline{X} \rightarrow \overline{C}$ est un schéma en groupes abéliens muni d'une structure de niveau n . La fibration étant localement triviale (pour la topologie analytique), l'existence d'un espace de modules fin pour les surfaces abéliennes munies d'une polarisation de degré donné et d'une structure de niveau n , permet de conclure à la trivialité de ladite fibration. La variété \overline{X} est donc isomorphe, au-dessus de \overline{C} , au produit $\overline{C} \times S$ où S est une surface abélienne. Remarquons enfin que le revêtement $\overline{C} \rightarrow C$ est galoisien et que son groupe G agit naturellement sur $\overline{X} = \overline{C} \times S$ de manière compatible à son action sur \overline{C} .

Montrons que X peut être munie d'une structure de Poisson régulière non nulle. Le conoyau \mathcal{F} de l'injection de faisceaux

$$\omega_X \cong f^* \omega_C(D_f) \hookrightarrow \Omega_X^1$$

s'identifie, après le revêtement étale $\overline{X} \rightarrow X$, au fibré $\Omega_{\overline{X}/\overline{C}}^1$. Le faisceau \mathcal{F} est donc localement libre de rang 2 et détermine une structure de Poisson régulière non nulle dont les feuilles symplectiques sont les fibres du morphisme f .

Prenons $g \in G$ et $(c, s) \in \overline{C} \times S$. Il n'est pas difficile de voir que

$$g.(c, s) = (g.c, t_g(c) + u_g(s))$$

où u_g est un automorphisme de groupes et t_g est un morphisme de \overline{C} dans S . Remarquons alors que la structure de Poisson que nous avons construite sur X se relève en une structure de Poisson sur \overline{X} qui est produit de la structure symplectique sur S et de la structure nulle sur \overline{C} et que les automorphismes du revêtement $\overline{X} \rightarrow X$ sont des morphismes de Poisson. Un calcul montre alors que les éléments u_g respectent la structure symplectique sur S , ce qui est l'assertion souhaitée. L'assertion réciproque est immédiate. ■

PROPOSITION 4.10.—*Soit X une variété projective de dimension 3. On suppose qu'il existe un morphisme surjectif et lisse $X \xrightarrow{f} C$ vers une courbe algébrique C , dont les fibres sont des surfaces K3. On suppose en outre qu'on a la formule $\omega_X = f^* \omega_C$. Alors X est de la forme $(\overline{C} \times S)/G$ où \overline{C} est une courbe algébrique, S une surface K3 et G un groupe fini opérant librement sur \overline{C} , opérant sur S en respectant la structure symplectique et sur $\overline{C} \times S$*

par le produit de ses actions sur chacun des facteurs.

De plus, toute variété de cette forme admet une structure de Poisson régulière non nulle induite par la structure symplectique sur S .

Démonstration.—Un argument analogue à celui utilisé dans la proposition précédente permet de montrer que la variété X peut être munie d'une structure de Poisson régulière correspondant à l'injection de fibrés vectoriels $\omega_X = f^*\omega_C \hookrightarrow \Omega_X^1$.

Rappelons qu'il existe un espace de modules fini $\mathcal{K}_{d,n}$ pour les surfaces $K3$ munies d'une polarisation de degré d fixé et d'une trivialisaton du système local de fibres $H^2(., \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ avec $n \geq 3$ fixé, déduit de l'espace de modules fini pour les surfaces $K3$ marquées ([Be3] exposé VIII). En effet, le groupe des automorphismes projectifs d'une surface $K3$ est fini et un automorphisme d'ordre fini induisant l'identité sur $H^2(., \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ est l'identité ([G], Appendice).

Puisque le groupe $\text{Aut}(H^2(., \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}))$ est fini, il existe un revêtement étale fini et connexe $\overline{C} \rightarrow C$ de C trivialisant le système local précédent. Par suite, il existe un morphisme $\overline{C} \rightarrow \mathcal{K}_{d,n}$. Mais, puisque le morphisme f est localement trivial ([F] thm. 4.8), ce morphisme est constant et, puisque l'espace de modules est fini, la famille $X \times_C \overline{C}/\overline{C}$ est triviale.

On peut toujours supposer que le revêtement $\overline{C} \rightarrow C$ est galoisien de groupe G . On sait que $\overline{C} \times_C X \cong \overline{C} \times S$ où S est une surface $K3$. Le groupe G agit sur le produit $\overline{C} \times S$ et sur la courbe \overline{C} de manière compatible. Puisque le groupe des automorphismes d'une surface $K3$ est discret, le groupe G agit en fait sur S et son action sur le produit $S \times \overline{C}$ est finalement le produit de ses actions sur chacun des facteurs. De plus, la structure de Poisson sur X induit une structure de Poisson régulière sur $S \times \overline{C}$. Il n'est pas difficile de voir que sur une telle variété, une structure de Poisson régulière est nécessairement le produit d'une structure symplectique sur S et de la structure triviale sur \overline{C} et que le groupe G respecte la structure symplectique sur S , ce qui termine la preuve de notre proposition, puisque la dernière assertion est évidente. ■

Nous avons donc prouvé le théorème :

THÉORÈME 4.11.—*Soit X une variété projective de dimension 3. On suppose en outre que X est de dimension de Kodaira $\kappa(X) = 1$. Alors X admet une structure de Poisson quasi-régulière non nulle si et seulement si X appartient à l'une des deux familles suivantes :*

(1) $X = (C \times S)/G$ où C est une courbe de genre au moins 2, S une surface $K3$ et G un groupe fini opérant librement sur C et opérant sur S en respectant la structure symplectique,

(2) $X = (C \times S)/G$ où C est une courbe de genre au moins 2, S une surface abélienne

et $G \subset \text{Aut}(C)$ un groupe fini opérant librement sur $C \times S$ par la formule:

$$g.(c, s) = (g.c, t_g(c) + u_g(s)), g \in G, c \in C, s \in S,$$

où u_g est un automorphisme de groupes de S respectant la structure symplectique et t_g un morphisme de C dans S .

Enfin, X est alors minimale, la structure de Poisson est régulière et provient de la structure symplectique sur S .

REMARQUE 4.12.—Les groupes finis d'automorphismes symplectiques d'une surface $K3$ ont été classifiés par S.Mukai ([Mu]) et on dispose donc d'une description assez précise de ces variétés.

Références bibliographiques

- [BPV] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, Springer-Verlag (1984).
- [Be1] A. Beauville, *Surfaces algébriques complexes*, Astérisque 54 (1978).
- [Be2] A. Beauville, *Variétés de Prym et Jacobiennes intermédiaires*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4^{ième} série, 10 (1977), 309-391.
- [Be3] A. Beauville, JP. Bourguignon, M. Demazure, *Géométrie des surfaces K3 : modules et périodes*, Astérisque 126 (1985).
- [F] T. Fujita, *On Kähler fiber spaces over curves*, J. Math. Soc. Japan, 30 (1978), 779-794.
- [G] A. Grothendieck, *Construction de l'espace de Teichmüller*, Séminaire H.Cartan, 13, 1960-61.
- [H] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag (1977).
- [Ka1] Y. Kawamata, *Minimal models and the Kodaira dimension of algebraic fiber spaces* J. de Crelle, 363 (1985), 1-46.
- [Ka2] Y. Kawamata, *Pluricanonical systems on minimal algebraic varieties*, Invent. Math., 79 (1985), 567-588.
- [KO] S. Kobayashi, T. Ochiai, *Holomorphic structures modeled after hyperquadrics*, Tôhoku Math. J., 34 (1982), 587-629.
- [Ko] J. Kollár, *Higher direct images of dualizing sheaves*, Ann. of Math., 123 (1986), 11-42.
- [MP] Y. Miyaoka, T. Peternell, *Geometry of Higher Dimensional Algebraic Varieties*, DMV seminar, 26, Birkhäuser (1997).
- [Mo] S. Mori, *Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective*, Ann. of Math., 116 (1982), 133-176.
- [Mu] S. Mukai, *Finite groups of automorphisms of K3 surfaces and the Mathieu group*, Invent. Math., 94 (1988), 183-221.
- [R] M. Reid, *Bogomolov's theorem $c_1^2 \leq 4c_2$* , Int. Sympos. on Algebraic Geometry Kyoto (1977), 623-642.
- [U] Y. Umezū, *On normal projective surfaces with trivial dualizing sheaf*, Tokyo J. Math, 4 (1981), 343-354.

Structures de contact sur les variétés toriques

1. Introduction

Une *structure de contact* sur une variété algébrique lisse est la donnée d'un sous-fibré $D \subset T_X$ de rang $\dim X - 1$ de sorte que la forme \mathcal{O}_X -bilinéaire sur D à valeurs dans le fibré en droites $L = T_X/D$ déduite du crochet de Lie sur T_X soit non dégénérée en tout point de X . Cela entraîne que X est de dimension impaire $2n + 1$ et que le fibré canonique K_X est isomorphe à L^{-1-n} . On peut aussi définir la structure de contact par la donnée d'un élément $\theta \in H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L)$, la *forme de contact*, tel que $\theta \wedge (d\theta)^n$ soit partout non nul.

Les espaces projectifs complexes et les variétés $\mathbf{P}_Y(T_Y)$, où Y est une variété lisse, sont des exemples de variétés de contact.

En quelques mots, une *variété torique* est une compactification équivariante d'un tore ([D], [O1], [O2], [F]).

L'étude des variétés de contact se révèle difficile. En dimension 3, elles ont été classifiées par Y-G.Ye ([Y]) en utilisant la théorie de Mori. D'autres auteurs étudient les structures de contact sur les variétés de Fano ([B], [L]), mais les résultats ne sont ici encore que partiels.

Le résultat principal de ce travail est le :

THÉORÈME.—*Soit X une variété torique projective lisse complexe de dimension $2n + 1$ ($n \geq 1$) munie d'une structure de contact. Alors X est ou bien isomorphe à l'espace projectif complexe \mathbf{P}^{2n+1} ou bien isomorphe à la variété $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^1 \times \dots \times \mathbf{P}^1}(T_{\mathbf{P}^1 \times \dots \times \mathbf{P}^1})$.*

2. Rappels et notations

Soit X une variété projective lisse sur le corps \mathbf{C} des nombres complexes. Le produit d'intersection entre 1-cycles et diviseurs met en dualité les deux espaces vectoriels réels :

$$N_1(X) = (\{1\text{-cycles}\} / \equiv) \otimes \mathbf{R} \text{ et } N^1(X) = (\{\text{diviseurs}\} / \equiv) \otimes \mathbf{R},$$

où \equiv désigne l'équivalence numérique. La dimension commune de ces espaces vectoriels est appelée le *nombre de Picard* de X . On considère le cône $NE(X) \subset N_1(X)$ engendré par les classes des 1-cycles effectifs. Une *raie extrémale* est une demi-droite R dans $\overline{NE}(X)$, adhérence de $NE(X)$ dans $N_1(X)$, vérifiant $K_X \cdot R^* < 0$ et telle que pour tout $Z_1, Z_2 \in \overline{NE}(X)$, si $Z_1 + Z_2 \in R$ alors $Z_1, Z_2 \in R$ ([M]). Une *courbe rationnelle extrémale* est une courbe rationnelle irréductible C telle que $\mathbf{R}_+[C]$ soit une raie extrémale et telle que $-K_X \cdot C \leq \dim X + 1$. Toute raie extrémale R est engendrée par une courbe rationnelle extrémale et admet une contraction, i.e., il existe une variété projective normale Y et un morphisme $X \xrightarrow{\phi} Y$, surjectif à fibres connexes, contractant les courbes irréductibles C telles que $[C] \in R$ (théorème de Kawamata-Shokurov).

Dans le cas des variétés toriques, nous avons un résultat plus précis ([R]). Soit X une variété torique projective lisse associée à l'éventail Δ . Nous utilisons les notations de T. Oda ([O2]). Il existe alors des éléments $\tau_1, \dots, \tau_s \in \Delta(d-1)$ tels que :

$$NE(X) = \overline{NE}(X) = \mathbf{R}_+[V(\tau_1)] + \dots + \mathbf{R}_+[V(\tau_s)].$$

Les demi-droites $\mathbf{R}_+[V(\tau_i)]$ sont appelées *raies extrémales généralisées*. Soit $R \subset NE(X)$ une raie extrémale généralisée. Alors il existe une variété torique projective Y et un morphisme équivariant $X \xrightarrow{\phi} Y$ qui soit une contraction au sens de Mori. Notons $A \subset X$ le lieu exceptionnel de ϕ et $B = \phi(A)$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y \\ \cup & & \cup \\ A & \xrightarrow{\phi|_A} & B \end{array}$$

Alors A et B sont deux strates toriques irréductibles, le morphisme $A \xrightarrow{\phi|_A} B$ est plat et ses fibres sont des espaces projectifs pondérés. Enfin, lorsque la contraction est de type fibrée, la variété Y est régulière et le morphisme ϕ est lisse.

Rappelons enfin un résultat général de J. Wisniewski ([W1], [W2]) sur le lieu exceptionnel d'une contraction extrémale. Soit F une composante irréductible d'une fibre non triviale d'une contraction élémentaire associée à la raie extrémale R . Nous appelons *lieu de R* , le lieu couvert par les courbes dont la classe d'équivalence numérique appartient à R . On a alors l'inégalité :

$$\dim F + \dim(\text{lieu de } R) \geq \dim X + \ell(R) - 1,$$

où $\ell(R)$ désigne la *longueur* de la raie extrémale R :

$$\ell(R) = \inf\{-K_X \cdot C_0 \mid C_0 \text{ étant une courbe rationnelle et } C_0 \in R\}.$$

3. Preuve du théorème

LEMME 1.—*Soit Y une variété torique projective lisse de dimension n et \mathcal{E} un fibré vectoriel de rang $r + 1$ sur Y . On suppose que $X = \mathbf{P}_Y(\mathcal{E})$ est une variété torique et que le morphisme naturel $X \xrightarrow{\phi} Y$ est équivariant. Alors le fibré \mathcal{E} est totalement décomposé.*

Démonstration.—Notons T le tore de dimension $n + r$ agissant sur X , T' le tore de dimension n agissant sur Y et $T \xrightarrow{\phi_*} T'$ le morphisme de groupes algébriques associé à ϕ . Les hypothèses faites entraînent que ce morphisme est surjectif. Notons N le noyau $N = \ker(\phi_*)$, c'est un groupe algébrique produit d'un tore T'' de dimension r par un groupe fini.

Puisque X est une variété torique, le fibré $\mathcal{O}_X(1)$ est T -linéarisé et en particulier T'' -linéarisé. Le tore T'' agissant trivialement sur Y , il en résulte facilement que le fibré \mathcal{E} est T'' -linéarisé. Par suite, le fibré \mathcal{E} est somme directe de ses composantes isotypiques :

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{\chi \in X(T'')} \mathcal{E}_\chi$$

où $X(T'')$ désigne le groupe des caractères de T'' . Si l'un des fibrés vectoriels \mathcal{E}_χ est de rang supérieur ou égal à deux, nous allons voir qu'un sous-tore non trivial de T'' agit trivialement sur X , ce qui est impossible. Notons χ_1, \dots, χ_k ($k \geq 1$) les caractères de T'' intervenant dans la décomposition précédente et supposons $k \leq r - 1$. Considérons la composante neutre de l'intersection des noyaux de ces caractères. Par construction, l'action de ce tore sur le fibré \mathcal{E} est triviale, ce qui est la conclusion souhaitée. ■

LEMME 2.—*Soit X une variété torique projective lisse de dimension $n \geq 1$ dont le fibré tangent est totalement décomposé. Alors X est isomorphe à $\mathbf{P}^1 \times \dots \times \mathbf{P}^1$.*

Démonstration.—Notons Δ l'éventail définissant la variété torique X , T le tore agissant sur X et $N = \text{Hom}_{\text{gr. alg.}}(\mathbf{G}_m, T)$. Par hypothèse, il existe des fibrés en droites L_1, \dots, L_n sur X tels que $T_X = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$.

Le fibré tangent est naturellement linéarisé. Montrons que ladite linéarisation est induite par un choix convenable de linéarisations des fibrés L_i ($1 \leq i \leq n$). Remarquons que pour toute courbe rationnelle lisse $C \subset X$ on a $-K_X.C \geq 2$ ([Dru] corollaire 1); on en déduit que $-K_X$ est ample puis que $(-K_X)^n > 0$. Or $(-K_X)^n = L_1 \cdots L_n$ puisque $L_i^2 = 0$ ([Dru] lemme 1) et les fibrés $(L_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ sont donc deux à deux non isomorphes. Les fibrés L_i sont facteurs directs équivariants de T_X pour un choix convenable de linéarisations desdits fibrés ([K]). Prenons $\sigma \in \Delta(n)$ et considérons l'ouvert $U_\sigma = \text{Spec}(\mathbf{C}[M \cap \sigma^*])$ où

$M = \text{Hom}_{gr. alg.}(T, \mathbf{G}_m) = \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(N, \mathbf{Z})$. Puisque X est lisse, on a

$$\sigma = \mathbf{R}_+ e_{1,\sigma} + \dots + \mathbf{R}_+ e_{n,\sigma}$$

où $(e_{1,\sigma}, \dots, e_{n,\sigma})$ est une base de N . Notons $(x_{1,\sigma}, \dots, x_{n,\sigma})$ la base duale de $(e_{1,\sigma}, \dots, e_{n,\sigma})$. Les $(x_{i,\sigma})_{1 \leq i \leq n}$ sont naturellement des caractères de T et forment un système de coordonnées locales sur U_σ . Nous notons φ_σ l'isomorphisme sur \mathbf{C}^n ainsi obtenu. L'action du tore est alors donnée par la formule

$$t.(x_{1,\sigma}, \dots, x_{n,\sigma}) = (x_{1,\sigma}(t)x_{1,\sigma}, \dots, x_{n,\sigma}(t)x_{n,\sigma}).$$

Aussi, les sections

$$s_{i,\sigma} = \varphi_\sigma^*(\partial_{x_{i,\sigma}}) \in H^0(U_\sigma, T_X)$$

sont semi-invariantes, engendrent le fibré tangent en tout point de U_σ et sont respectivement associées aux caractères $(x_{i,\sigma})_{1 \leq i \leq n}$. On vérifie enfin qu'une section du fibré tangent semi-invariante relativement à l'un des caractères $x_{i,\sigma}$ est multiple de la section $s_{i,\sigma}$ correspondante. On peut trouver pour chaque fibré L_i , une section qui soit semi-invariante sous T et qui engendre le fibré en tout point de U_σ . En évaluant cette section en l'unique point fixe de U_σ on vérifie que ladite section est associée à l'un des caractères $x_{i,\sigma}$ puis que cette section est proportionnelle à la section $s_{i,\sigma}$ correspondante. Si deux desdites sections sont proportionnelles alors les fibrés correspondants sont égaux comme sous-fibrés de T_X au dessus de l'ouvert U_σ et sont donc globalement isomorphes puisque les quotients T_X/L_i sont sans torsion, ce qui est impossible. Les fibrés L_i sont donc en somme directe, ce qui prouve l'assertion souhaitée.

Nous savons que chaque section $s_{i,\sigma}$ trivialise l'un des L_j . Par suite, si σ' est un autre cône de dimension n , l'image de la droite $\mathbf{C}^* s_{i,\sigma}|_{U_{\sigma\sigma'}}$ ($1 \leq i \leq n$) par la fonction de transition $\varphi_{\sigma'}\varphi_\sigma^{-1}$ est l'une des droites $\mathbf{C}^* s_{i,\sigma'}|_{U_{\sigma\sigma'}}$ ($1 \leq i \leq n$). Autrement dit, la matrice associée à la fonction de transition $\varphi_{\sigma'}\varphi_\sigma^{-1}$ exprimée dans les bases $(s_{i,\sigma'}|_{U_{\sigma\sigma'}})_{1 \leq i \leq n}$ et $(s_{i,\sigma}|_{U_{\sigma\sigma'}})_{1 \leq i \leq n}$ n'a qu'un seul terme non nul par ligne et par colonne.

C'est ce résultat que nous allons maintenant exploiter. Considérons un cône $\tau \in \Delta(n-1)$ et soient σ et σ' les deux cônes de dimension n séparés par τ . Il existe donc une famille (e_1, \dots, e_{n-1}) d'éléments de N et deux autres éléments de N , e_n et e_{n+1} , tels que les familles $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ et $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_{n+1})$ soient des bases de N et tels que l'on ait

$$\tau = \mathbf{R}_+ e_1 + \dots + \mathbf{R}_+ e_{n-1}$$

et

$$\sigma = \tau + \mathbf{R}_+ e_n \quad \sigma' = \tau + \mathbf{R}_+ e_{n+1}.$$

On a en outre une relation :

$$e_{n+1} + e_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i = 0,$$

où $\alpha_i \in \mathbf{Z}$. Notons (x_1, \dots, x_n) la base duale de la base $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ et (z_1, \dots, z_n) la base duale de la base $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_{n+1})$. Le changement de cartes est alors donné par la formule :

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto \left(\frac{z_1}{z_n^{\alpha_1}}, \dots, \frac{z_{n-1}}{z_n^{\alpha_{n-1}}}, \frac{1}{z_n} \right).$$

La fonction de transition $\varphi_{\sigma\sigma'}$ est donc donnée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} z_n^{-\alpha_1} & 0 & \dots & \dots & 0 & -\alpha_1 z_1 z_n^{-\alpha_1-1} \\ 0 & z_n^{-\alpha_2} & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & z_n^{-\alpha_{n-1}} & -\alpha_{n-1} z_1 z_n^{-\alpha_{n-1}-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -z_n^{-2} \end{pmatrix}$$

Il en résulte les égalités $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ et donc $e_{n+1} = -e_n$.

Soit $e \in \Delta(1)$ et soit $\sigma \in \Delta(n)$ un cône dont e est une face de dimension 1. On identifie le cône e et l'élément primitif de N qui le détermine. Alors il existe une base $(e_1 = e, \dots, e_n)$ de N telle que $\sigma = \mathbf{R}_+ e_1 + \dots + \mathbf{R}_+ e_n$. Le cône $\mathbf{R}_+ e_2 + \dots + \mathbf{R}_+ e_n$ est une face de dimension $n-1$ de σ et donc d'après ce qui précède, on a que $-e \in \Delta(1)$ et que le cône $\mathbf{R}_+(-e_1) + \dots + \mathbf{R}_+ e_n \in \Delta(n-1)$. Il en résulte que $\pm e_i \in \Delta(1)$ ($1 \leq i \leq n$) et que tous les cônes possibles de dimension n formés sur ces vecteurs sont des cônes de l'éventail Δ . Si $e' \in \Delta(1)$, alors e' est contenu dans l'un des cônes précédents et donc e' est l'un des $(\pm e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et on a donc déterminé tous les cônes de dimension maximale, ce qui détermine Δ et termine la preuve du lemme. ■

THÉORÈME.—*Soit X une variété torique projective lisse de dimension $2n+1$ ($n \geq 1$) munie d'une structure de contact. Alors X est ou bien isomorphe à l'espace projectif complexe \mathbf{P}^{2n+1} ou bien isomorphe à la variété $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^1 \times \dots \times \mathbf{P}^1}(T_{\mathbf{P}^1 \times \dots \times \mathbf{P}^1})$.*

Démonstration.—La preuve de ce théorème repose sur l'étude des contractions extrémales de X . Notons T le tore agissant sur X . Puisque le diviseur canonique K_X de X n'est pas effectif, il existe une raie extrémale R au sens de Mori engendrée par une courbe rationnelle lisse C invariante sous l'action du tore T . Puisque $K_X = -(n+1)L$, on a $\ell(R) = n+1$ ou $\ell(R) = 2n+2$, où $\ell(R)$ désigne la longueur de la raie extrémale R . Dans ce dernier cas, X est de Fano et $\text{Pic}(X) = \mathbf{Z}$ ([W1] prop. 2.4). Il en résulte que X est isomorphe à l'espace

projectif complexe \mathbf{P}^{2n+1} ([O1] thm.7.1).

Il nous reste donc à étudier le cas où $\ell(R) = n + 1$. Notons $X \xrightarrow{\phi} Y$ la contraction de Mori associée à la raie R , où Y est une variété torique projective. Notons T' le tore agissant sur Y . Notons $A \subset X$ le lieu exceptionnel de ϕ et $B = \phi(A)$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y \\ \cup & & \cup \\ A & \xrightarrow{\phi|_A} & B \end{array}$$

Puisque la courbe C est T -invariante, elle est contractée sur un point fixe $y \in B$ sous T' . Le morphisme ϕ étant équivariant, la fibre $F = \phi^{-1}(y)$ au dessus de y est donc T -invariante. Par suite, puisque cette fibre est irréductible, on en déduit que F est une strate torique et donc que F est lisse puisque X l'est. La fibre F est donc isomorphe à un espace projectif \mathbf{P}^k ($k \geq 1$) et, puisque C est une strate torique de la variété torique \mathbf{P}^k , il en résulte que la courbe C s'identifie à une droite de \mathbf{P}^k . Nous savons aussi qu'il existe une courbe rationnelle $C_1 \subset X$ telle que $C_1 \in R$ et $-K_X.C_1 = n + 1$. Mais, puisqu'il existe un diviseur D sur X tel que $D.C = 1$ et puisque $R = \mathbf{R}_+[C]$, il en résulte facilement que $C \equiv C_1$, de sorte que $C.L = 1$. Par suite, on a $(F, L|_F) = (\mathbf{P}^k, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^k}(1))$.

Puisque $H^0(\mathbf{P}^k, \Omega_{\mathbf{P}^k}^1(1)) = (0)$, la restriction de la forme de contact θ à \mathbf{P}^k est nulle et on vérifie par un calcul en coordonnées locales que, pour tout $x \in \mathbf{P}^k$, le sous espace vectoriel $T_{\mathbf{P}^k}(x) \subset D(x)$ est totalement isotrope pour la forme alternée de contact qui, par hypothèse est non-dégénérée. Il en résulte l'inégalité $k \leq n$ et donc l'égalité $k = n$ puisque $\dim F \geq \ell(R) - 1 = n$. Utilisant à nouveau l'inégalité de Wisniewski, on en déduit que la contraction est de type fibrée et donc que Y est régulière, de dimension $n + 1$ et que ϕ est lisse.

Considérons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow T_{X/Y} \longrightarrow T_X \longrightarrow \phi^*T_Y \longrightarrow 0$$

La flèche $T_{X/Y} \longrightarrow L$ obtenue par composition avec la projection $T_X \longrightarrow L$ étant identiquement nulle par le théorème de Grauert et les résultats ci-dessus, il existe une flèche surjective $\phi^*T_Y \longrightarrow L \longrightarrow 0$ et donc un morphisme $X \longrightarrow \mathbf{P}_Y(T_Y)$ au dessus de Y qui induit un isomorphisme sur chaque fibre. Il en résulte que ce morphisme est en fait un isomorphisme. Le résultat découle alors des lemmes 1 et 2. ■

Références bibliographiques

- [B] A. Beauville, *Fano Contact Manifolds and Nilpotent Orbits*, Comment. Math. Helvet. 73 (1998), 566-583.
- [D] V.I. Danilov, *The geometry of toric varieties*, Russian Math. Surveys, 33 (1978), 97-154.
- [Dru] S. Druel, *Variétés algébriques dont le fibré tangent est totalement décomposé*, J. reine u. angew. Math. 522 (2000).
- [F] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 131 (1993).
- [K] A.A. Klyachko, *Equivariant Bundles on Toral Varieties*, Math. USSR Izv., 35 (1990), 337-375.
- [L] C. Lebrun, *Fano manifolds, contact structures and quaternionic geometry*, Int. Journ. of Math., 6 (1995), 419-437.
- [M] S. Mori, *Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective*, Ann. Math., 116 (1982), 133-176.
- [O1] T. Oda, *Lectures on Torus Embeddings and Applications*, Tata Inst. of Fund. Research, 58, Springer (1978).
- [O2] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry*, 15, Springer-Verlag (1988).
- [R] M. Reid, *Decomposition of toric morphisms*, dans *Arithmetic and Geometry, papers dedicated to I.R. Shafarevitch on the occasion of his 60th birthday*, Progress in Math. 36 (1983), Birkhäuser, 395-418.
- [W1] J. Wisniewski, *Length of extremal rays and generalized adjunction*, Math. Z., 200 (1989), 409-427.
- [W2] J. Wisniewski, *On contractions of extremal rays on Fano manifolds*, J. reine u. angew. Math. 417 (1991), 141-157.
- [Y] Y-G. Ye, *A note on complex projective threefolds admitting holomorphic contact structures*, Invent. Math. 121 (1995), 421-436.

Structures de contact sur les variétés algébriques de dimension 5

Introduction

Une *structure de contact* sur une variété algébrique lisse est la donnée d'un sous-fibré $D \subset T_X$ de rang $\dim X - 1$ de sorte que la forme \mathcal{O}_X -bilinéaire sur D à valeurs dans le fibré en droites $L = T_X/D$ déduite du crochet de Lie sur T_X soit non dégénérée en tout point de X . Cela entraîne que X est de dimension impaire $2n + 1$ et que le fibré canonique K_X est isomorphe à L^{-1-n} . On peut aussi définir la structure de contact par la donnée d'un élément $\theta \in H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L)$, la *forme de contact*, tel que $\theta \wedge (d\theta)^n$ soit partout non nul.

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple. Son groupe adjoint G agit sur $\mathbf{P}(\mathfrak{g})$ et n'a qu'une seule orbite fermée; on montre que celle-ci admet une structure de contact ([Be] prop.2.6). Ce sont des variétés de Fano homogènes dont le groupe des automorphismes de contact a pour algèbre de Lie \mathfrak{g} . On parlera de la variété de contact homogène de type \mathfrak{g} . Les fibrés $\mathbf{P}_Y(T_Y)$, où Y est une variété lisse, fournissent d'autres exemples de variétés de contact. En dimension 3, Y.-G. Ye a montré que ce sont les seules ([Y]). D'autres auteurs étudient les structures de contact sur les variétés de Fano ([Be], [L]), mais les résultats ne sont ici encore que partiels.

Le résultat principal de ce travail est le

THÉORÈME.—*Soit X une variété projective lisse de dimension 5 munie d'une structure de contact. Alors X est l'une des variétés précédentes sauf si le fibré canonique K_X est numériquement effectif et $\kappa(X) = -\infty$.*

Notons que le dernier cas ne devrait pas se produire par la conjecture d'Abondance ([KMM]).

1. Rappels

Soit X une variété projective lisse sur le corps \mathbf{C} des nombres complexes. Le produit d'intersection entre 1-cycles et diviseurs met en dualité les deux espaces vectoriels réels :

$$N_1(X) = (\{1\text{-cycles}\} / \equiv) \otimes \mathbf{R} \text{ et } N^1(X) = (\{\text{diviseurs}\} / \equiv) \otimes \mathbf{R},$$

où \equiv désigne l'équivalence numérique. La dimension commune de ces espaces vectoriels est appelée le *nombre de Picard* de X . On considère le cône $NE(X) \subset N_1(X)$ engendré par les classes des 1-cycles effectifs. Une *raie extrémale* est une demi-droite R dans $\overline{NE}(X)$, adhérence de $NE(X)$ dans $N_1(X)$, vérifiant $K_X \cdot R^* < 0$ et telle que pour tout $Z_1, Z_2 \in \overline{NE}(X)$, si $Z_1 + Z_2 \in R$ alors $Z_1, Z_2 \in R$. Une *courbe rationnelle extrémale* est une courbe rationnelle irréductible C telle que $\mathbf{R}_+[C]$ soit une raie extrémale et $-K_X \cdot C \leq \dim X + 1$. Toute raie extrémale R est engendrée par une courbe rationnelle extrémale et admet une *contraction*, i.e., il existe une variété projective normale Y et un morphisme $X \xrightarrow{\phi} Y$, surjectif à fibres connexes, contractant les courbes irréductibles C telles que $[C] \in R$ (théorème de Kawamata-Shokurov).

Rappelons un résultat fondamental de J. Wisniewski ([W1], [W2]) sur le lieu exceptionnel d'une contraction extrémale. Soit F une composante irréductible d'une fibre non triviale d'une contraction élémentaire associée à la raie extrémale R . Nous appelons *lieu de R* , le lieu couvert par les courbes dont la classe d'équivalence numérique appartient à R . On a alors l'inégalité :

$$\dim F + \dim(\text{lieu de } R) \geq \dim X + \ell(R) - 1,$$

où $\ell(R)$ désigne la *longueur* de la raie extrémale R :

$$\ell(R) = \inf\{-K_X \cdot C_0 \mid C_0 \text{ étant une courbe rationnelle et } C_0 \in R\}.$$

En particulier :

$$2\dim(\text{lieu de } R) \geq \dim X + \ell(R) - 1.$$

Nous terminons ces rappels par un théorème de structure ([AW1], [AW2]). Considérons une contraction extrémale $X \xrightarrow{\phi} Y$ d'une variété projective lisse. Soit L un fibré inversible ϕ -ample et $r \geq 1$ un entier. On dit que $K_X + rL$ *supporte la contraction ϕ* si ce fibré est trivial sur les fibres de ϕ . Soit $F = \phi^{-1}(y)$ une fibre de ϕ munie de sa structure de schéma réduite. On suppose qu'il existe un ouvert de Y contenant y tel que les fibres de ϕ au dessus de cet ouvert soient toutes de dimension au plus $\dim(F)$:

1. si $\dim(F) \leq r - 1$ alors Y est lisse en y et ϕ est un fibré projectif au voisinage de F ,

2. si $\dim(F) = r$ alors Y est lisse au voisinage de y et :

- (a) si ϕ est birationnel alors ϕ est l'éclatement d'une sous variété lisse de Y de codimension $r + 1$,
- (b) si $\dim(Y) = \dim(X) - r$ alors ϕ est un fibré en quadriques,
- (c) si $\dim(Y) = \dim(X) - r + 1$ alors $r \leq \dim(X)/2$ et $F = \mathbf{P}^r$.

2. Preuve du théorème

PROPOSITION 1.—*Soit X une variété projective lisse de dimension $2n + 1$. On suppose que X est de dimension de Kodaira $\kappa(X) \geq 0$. Alors X ne possède aucune structure de contact.*

Démonstration.—Raisonnons par l'absurde et supposons que X soit munie d'une structure de contact. Il résulte des hypothèses, qu'il existe une variété projective lisse \bar{X} et un morphisme $\bar{X} \xrightarrow{\pi} X$ génériquement fini tel que $h^0(\bar{X}, \bar{L}^{-1}) \geq 1$, où l'on a posé $\bar{L} = \pi^*(L)$. Considérons un ouvert $U \subset X$ non vide au dessus duquel π est étale et fini. La structure de contact sur X induit une structure de contact sur $\pi^{-1}(U)$ associée au fibré \bar{L} . Quitte à restreindre $\pi^{-1}(U)$, on peut supposer que \bar{L} est trivialisé par une section globale $\bar{\theta} \in H^0(\bar{X}, \bar{L}^{-1}) \subset H^0(\bar{X}, \Omega_{\bar{X}}^1)$. Sur cet ouvert, la structure de contact est donnée par la forme de contact $\bar{\theta}$, ce qui constitue la contradiction cherchée puisque $d(\bar{\theta}) = 0$. ■

LEMME.—*Soit X une variété projective lisse de dimension $2n + 1$ munie d'une structure de contact définie par la forme $\theta \in H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L)$. Soit $Y \subset X$ une sous-variété analytique complexe lisse telle que la restriction de la forme de contact à Y soit identiquement nulle. Alors la dimension de Y est au plus n .*

Démonstration.—On vérifie par un calcul en coordonnées locales que pour tout $y \in Y$, l'espace vectoriel $T_Y(y) \subset D(y)$ est un sous espace totalement isotrope pour la forme alternée de contact qui, par hypothèse, est non dégénérée. ■

PROPOSITION 2.—*Soit X une variété de Fano de dimension 5 munie d'une structure de contact. On suppose que $b_2(X) = 1$. Alors X est soit isomorphe à l'espace projectif \mathbf{P}^5 soit à la variété de contact homogène de type G_2 .*

Démonstration.—Le groupe de Picard de X est un \mathbf{Z} -module libre de rang 1 puisque $b_2(X) = 1$. Rappelons que nous avons la formule $K_X = -3L$ et que l'ordre de divisibilité de K_X est au plus 6. Il en résulte que soit L engendre $\text{Pic}(X)$ soit $L = 2L_0$ où L_0 est

un générateur du groupe de Picard de X . Dans ce dernier cas, X est isomorphe à l'espace projectif complexe \mathbf{P}^{2n+1} par le critère de Kobayashi-Ochiai ([KO]).

Il nous reste donc à traiter le cas où L est un générateur de $\text{Pic}(X)$. Dans ce cas, X est une variété de Mukai et le fibré L est très ample ([Mu] prop. 1, [Me]). En effet, lorsque X est un revêtement double de \mathbf{P}^5 ou d'une quadrique lisse de dimension 5, on vérifie que $H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L) = 0$ et donc X n'a aucune structure de contact. Par suite, X est homogène ([Be] cor. 1.8) et isomorphe à la variété de contact homogène de type G_2 ([Bo]). ■

THÉORÈME 1.—*Soit X une variété projective lisse de dimension 5 munie d'une structure de contact. On suppose que le fibré canonique n'est pas numériquement effectif. Alors X est soit isomorphe à l'espace projectif \mathbf{P}^5 , soit à $\mathbf{P}_Y(T_Y)$ où Y est une variété lisse de dimension 3, soit à la variété de contact homogène de type G_2 .*

Démonstration.—La preuve de ce théorème repose sur l'étude des contractions extrémales de X . Soit R une raie extrême de X . Puisqu'on a la formule $K_X = -3L$, $\ell(R) = 3$ ou 6. Dans le dernier cas, X est de Fano et $b_2(X) = 1$ ([W1]) et la proposition 1 permet de conclure.

Il nous reste à traiter le cas où $\ell(R) = 3$. Notons $X \xrightarrow{\phi} Y$ la contraction extrême associée à R . Par l'inégalité de Wisniewski, la contraction est soit de type fibrée soit divisorielle. De plus, le fibré L est ϕ -ample et $K_X + 3L$ supporte la contraction extrême.

Etude des contractions de type fibrée. En utilisant à nouveau l'inégalité de Wisniewski on vérifie que $\dim(Y) \leq 3$ et que toute composante irréductible d'une fibre non triviale est de dimension au moins 2.

Cas 1 : $\dim(Y) = 3$. Puisque ϕ est une contraction extrême et $\dim(Y) > 1$, ϕ n'a pas de fibre de dimension 4. Par 2.(c), le morphisme ϕ ne peut avoir de fibre de dimension 3 et il en résulte donc que toutes les fibres de ϕ sont de dimension au plus 2, ce qui entraîne que Y est lisse et que ϕ est un fibré projectif par 1. Remarquons alors que $L|_F \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1)$ pour toute fibre F de ϕ et considérons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow T_{X/Y} \longrightarrow T_X \longrightarrow \phi^*T_Y \longrightarrow 0$$

La flèche $T_{X/Y} \longrightarrow L$ obtenue par composition avec la projection $T_X \longrightarrow L$ étant identiquement nulle par le théorème de Grauert et les résultats ci-dessus, il existe une flèche surjective $\phi^*T_Y \longrightarrow L \longrightarrow 0$ et donc un morphisme $X \longrightarrow \mathbf{P}_Y(T_Y)$ au dessus de Y qui induit un isomorphisme sur chaque fibre. Il en résulte que ce morphisme est en fait un isomorphisme, ce qui termine la preuve du théorème dans ce cas.

Cas 2: $\dim(Y) = 2$. Par le critère de Kobayashi-Ochiai ([KO]), une fibre générique lisse est une quadrique $\mathcal{Q} \subset \mathbf{P}^4$ de dimension 3. On vérifie que $L|_{\mathcal{Q}} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(1)$ et que $H^0(\mathcal{Q}, \Omega_{\mathcal{Q}}^1(1)) = 0$; ce cas est éliminé par le lemme.

Cas 3: $\dim(Y) = 1$. Une fibre générique lisse F de ϕ est une variété de Del Pezzo de dimension 4 et $L|_F$ est la polarisation naturelle. En utilisant la classification de T.Fujita ([F1], [F2], [F3]), on vérifie que $H^0(F, \Omega_F^1 \otimes L|_F) = 0$ et le lemme permet de conclure.

Cas 4: $\dim(Y) = 0$. Dans ce cas X est de Fano et, puisque le nombre de Picard de X est 1, on a $b_2(X) = 1$ et on peut appliquer la proposition 1.

Etude des contractions divisorielles. Notons E le lieu exceptionnel de ϕ . C'est un diviseur irréductible. Par l'inégalité de Wisniewski, $\phi(E)$ est de dimension 0 ou 1.

Cas 1: $\dim(\phi(E)) = 1$. Par 2(a), une fibre non triviale F de ϕ est un espace projectif \mathbf{P}^3 et $L|_F \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(1)$. Ce cas est à nouveau éliminé par le lemme.

Cas 2: $\dim(\phi(E)) = 0$. Dans ce cas, E est soit isomorphe à \mathbf{P}^4 , soit à une quadrique irréductible de dimension 4, soit à une variété de Del Pezzo de dimension 4 ([A]). Les deux premiers cas s'éliminent par le lemme. Dans le dernier cas, le fibré normal $N_{F|X}$ est \mathcal{O}_F . Par suite le schéma de Hilbert Hilb_X est lisse au point F et de dimension 1. Puisque ϕ est extrémale, les déformations de F doivent être contractées par ϕ , ce qui constitue la contradiction cherchée. ■

COROLLAIRE.—*Les seules variétés de Fano de dimension 5 admettant une structure de contact sont, à isomorphisme près, \mathbf{P}^5 , $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^3}(T_{\mathbf{P}^3})$ et la variété de contact homogène de type G_2 .*

Démonstration.—Le corollaire est une conséquence de la conjecture d'Hartshorne-Frenkel, démontrée par S.Mori ([Mo]). ■

Références bibliographiques

- [A] T. Ando, *On extremal rays of the higher dimensional varieties*, Invent. Math. 81 (1985), 347-357.
- [AW1] M. Andreatta, J. Wisniewski, *A note on vanishing and applications*, Duke Math. J. 72 (1993), 739-755.
- [AW2] M. Andreatta, J. Wisniewski, *A view on contractions of higher dimensional varieties*, Proc. Sympos. Pure Math. 62, Part 1 (1997), 153-183.
- [Be] A. Beauville, *Fano Contact Manifolds and Nilpotent Orbits*, Comment. Math. Helvet. 73 (1998), 566-583.
- [Bo] W.M. Boothby, *Homogeneous complex contact manifolds*, Proc. Symp. Proc. Math. 3 (1959), 144-154.
- [F1] T. Fujita, *On the structure of polarized manifolds with total deficiency one, I*, J. Math. Soc. Japan 32 (1980), 709-725.
- [F2] T. Fujita, *On the structure of polarized manifolds with total deficiency one II*, J. Math. Soc. Japan 33 (1981), 415-434.
- [F3] T. Fujita, *On the structure of polarized manifolds with total deficiency one III*, J. Math. Soc. Japan 36 (1984), 75-89.
- [KO] S. Kobayashi, T. Ochiai, *Characterization of complex projective spaces and hyperquadrics*, J. Math. Kyoto Univ. 13 (1973), 31-47.
- [KMM] Y. Kawamata, K. Matsuda, K. Matsuki, *Introduction to the minimal model problem*, Adv. Stud. Pure Math. 10 (1987), 283-360.
- [L] C. Lebrun, *Fano manifolds, contact structures and quaternionic geometry*, Int. Journ. of Math. 6 (1995), 419-437.
- [Me] M. Mella, *Existence of good divisors on Mukai varieties*, J. Algebraic Geom. 8 (1999), 197-206.
- [Mo] S. Mori, *Projective manifolds with ample tangent bundles*, Ann. of Math. 110 (1979), 593-606.
- [Mu] S. Mukai, *Biregular classification of Fano 3-folds and Fano manifolds of coindex 3*, Proc. Nat. Sci. USA 86 (1989), 3000-3002.
- [W1] J. Wisniewski, *Length of extremal rays and generalized adjunction*, Math. Zeit. 200 (1989), 409-427.
- [W2] J. Wisniewski, *On contractions of extremal rays on Fano manifolds*, J. reine u. angew Math. 417 (1991), 141-157.
- [Y] Y-G. Ye, *A note on complex projective threefolds admitting holomorphic contact structures*, Invent. Math. 121 (1995), 421-436.

Variétés algébriques dont le fibré tangent est totalement décomposé

Introduction

Soit X une variété compacte kählérienne dont le revêtement universel \tilde{X} est isomorphe au produit $\prod_{i \in I} U_i$ de variétés complexes lisses et sur lequel le groupe $\pi_1(X)$ agit diagonalement. La décomposition $T_{\tilde{X}} = \oplus_{i \in I} p_i^* T_{U_i}$ induit alors une décomposition de T_X en somme directe de sous-fibrés intégrables. Ce travail contribue à l'étude de l'assertion réciproque et complète les résultats déjà obtenus par Beauville ([B1]) :

THÉORÈME 1.—*Soient X une variété projective lisse de dimension $n \geq 1$ dont le fibré tangent est totalement décomposé et $T_X = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ ladite décomposition. On suppose que les fibrés $\oplus_{i \in I} M_i$ sont intégrables, pour tout ensemble d'indices $I \subset \{1, \dots, n\}$. Le revêtement universel \tilde{X} de X est alors produit de surfaces de Riemann et la décomposition de T_X est induite par la décomposition canonique de $T_{\tilde{X}}$.*

REMARQUE ([B2]).—L'hypothèse d'intégrabilité dans le théorème 1 est effectivement nécessaire. En effet, notons X le produit $A \times \mathbf{P}^1$ où A est une surface abélienne. Il n'est pas difficile d'exhiber une connexion non intégrable sur la projection canonique $X \rightarrow A$; la décomposition de T_X ainsi obtenue ne se relève donc pas en la décomposition canonique du fibré tangent $T_{\tilde{X}}$ où \tilde{X} est le revêtement universel de X .

Rappelons qu'une variété projective lisse est dite *minimale* si K_X est numériquement effectif.

THÉORÈME 2.—*Soit X une variété projective lisse minimale de dimension $n \geq 1$ dont le fibré tangent est totalement décomposé. Le revêtement universel \tilde{X} de X est alors produit de surfaces de Riemann et la décomposition de T_X est induite par la décomposition canonique de $T_{\tilde{X}}$.*

Nous démontrons ces résultats en exhibant une fibration lisse de X munie d'une connexion intégrable compatible à la décomposition de T_X .

Démonstration des théorèmes

LEMME 1 ([B1] lemme 3.1).—*Soient X une variété lisse et E un facteur direct de T_X . La classe d'Atiyah $at(E) \in H^1(X, \Omega_X^1 \otimes \mathcal{E}nd(E))$ provient de $H^1(X, E^* \otimes \mathcal{E}nd(E))$. En particulier, tout élément de $H^r(X, \Omega_X^r)$ donné par un polynôme en les classes de Chern de E est nul, pour r strictement plus grand que le rang de E .*

COROLLAIRE 1.—*Soient X une variété projective lisse de dimension $n \geq 1$, E un facteur direct de T_X de rang 1 et $C \subset X$ une courbe rationnelle irréductible. Alors $\deg(E|_C) = 0$ ou $\deg(E|_C) \geq 2$.*

Démonstration.—Soit $\mathbf{P}^1 \xrightarrow{v} C$ la normalisation de C . Supposons $\deg(E|_C) \leq 1$; le groupe de cohomologie $H^1(\mathbf{P}^1, E_{|\mathbf{P}^1}^*)$ est donc nul. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, E^*) & \longrightarrow & H^1(X, \Omega_X^1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(\mathbf{P}^1, E_{|\mathbf{P}^1}^*) & \longrightarrow & H^1(\mathbf{P}^1, \Omega_{\mathbf{P}^1}^1) \end{array}$$

L'élément $c_1(E) \in H^1(X, \Omega_X^1)$ provient de $H^1(X, E^*)$ (lemme 1); son image $c_1(E|_{\mathbf{P}^1}) = \deg(E|_C)$ dans $H^1(\mathbf{P}^1, \Omega_{\mathbf{P}^1}^1)$ est donc nulle, ce qui prouve le corollaire. ■

COROLLAIRE 2.—*Soient X une variété projective lisse de dimension $n \geq 1$ dont le fibré tangent est totalement décomposé et $\mathbf{P}^1 \xrightarrow{v} X$ un morphisme non constant. Alors X n'est pas minimale.*

Démonstration.—Ecrivons $v^*T_X = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_n)$ avec $a_1 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$ (corollaire 1). L'application tangente $T_{\mathbf{P}^1} \xrightarrow{dv} v^*T_X$ étant génériquement injective, on a $a_1 \geq 2$. On en déduit $\deg(v^*K_X) \leq -2$ et X n'est donc pas minimale. ■

Soit X une variété projective lisse complexe. Le produit d'intersection entre 1-cycles et diviseurs met en dualité les deux espaces vectoriels réels $N_1(X) = (\{1\text{-cycles}\} / \equiv) \otimes \mathbf{R}$ et $N^1(X) = (\{\text{diviseurs}\} / \equiv) \otimes \mathbf{R}$, où \equiv désigne l'équivalence numérique. Soit $NE(X) \subset N_1(X)$ le cône engendré par les classes des 1-cycles effectifs. Une *raie extrême* est une demi-droite R dans $\overline{NE}(X)$, adhérence de $NE(X)$ dans $N_1(X)$, vérifiant $K_X \cdot R^* < 0$ et telle que pour tout $Z_1, Z_2 \in \overline{NE}(X)$, si $Z_1 + Z_2 \in R$ alors $Z_1, Z_2 \in R$ ([M2]). Une *courbe*

rationnelle extrémale est une courbe rationnelle irréductible C_0 telle que $\mathbf{R}_+[C_0]$ soit une raie extrémale et telle que $-K_X.C_0 \leq \dim X + 1$. Si X est une variété projective lisse non minimale alors X contient une courbe rationnelle extrémale ([M2] thm. 1.5). La longueur de la raie extrémale R est ([W]) :

$$\ell(R) = \inf\{-K_X.C \mid C \text{ étant une courbe rationnelle et } C \in R\}.$$

L'étude des courbes rationnelles extrémales sur les variétés dont le fibré tangent est totalement décomposé fait l'objet du :

LEMME 2.—*Soit X une variété projective lisse non minimale de dimension $n \geq 1$ dont le fibré tangent est totalement décomposé. Il existe alors un revêtement étale fini $Z \rightarrow X$ tel que Z soit un fibré en droites projectives pour la topologie étale.*

Démonstration.— Soit $R = \mathbf{R}_+[C_0]$ une raie extrémale engendrée par une courbe rationnelle C_0 telle que $\ell(R) = -K_X.C_0$. Notons $\mathbf{P}^1 \xrightarrow{v_0} C_0$ la normalisation de C_0 . Les hypothèses faites entraînent la lissité du schéma $\text{Hom}(\mathbf{P}^1, X)$ (corollaire 1). Soit $V \subset \text{Hom}(\mathbf{P}^1, X)$ la composante connexe (de dimension $\ell(R) + n$) contenant le point v_0 . Le groupe $G = PGL_2(\mathbf{C})$ agit de manière naturelle sur V par la formule $g.v = vg^{-1}$. Soient $\text{Chow}(X)$ la variété projective paramétrant les 1-cycles effectifs et $V \xrightarrow{\alpha} \text{Chow}(X)$ le morphisme naturel G -équivariant qui à $\mathbf{P}^1 \xrightarrow{v} X$ associe le 1-cycle $v(\mathbf{P}^1)$ (v est birationnel au dessus de $v(\mathbf{P}^1)$). Enfin, soit Y la normalisation de $\overline{\alpha(V)}$ dans le corps $k(V)^G$. Alors Y est le quotient géométrique de V par G et l'action de G sur V est libre ([M1] lemme 9 et [W] Appendice A4); Y est une variété projective et lisse de dimension $n + \ell(R) - 3$. Soit $\mathbf{P}^1 \times V \xrightarrow{F} X \times Y$ le morphisme naturel et soit $Z = \text{Spec}((F_*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1 \times V})^G)$. Alors Z est le quotient géométrique de $\mathbf{P}^1 \times V$ par G , l'action de G étant donnée par la formule $g.(z, v) = (g(z), vg^{-1})$; Z est une variété projective et lisse de dimension $n + \ell(R) - 2$ et $Z \rightarrow Y$ est un fibré en droites projectives pour la topologie étale ([M1] p. 603). Le morphisme universel G -équivariant $\mathbf{P}^1 \times V \rightarrow X$ (l'action de G sur X étant triviale) est lisse ([K] II 3.5.4) et induit un morphisme propre et lisse $Z \rightarrow X$ de dimension relative $\ell(R) - 2$.

Montrons que $\ell(R) = 2$. Soit $v \in V$. Ecrivons $v^*T_X = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_n)$ avec $a_1 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$ et $a_1 \geq 2$. Il existe un ouvert $U \subset V$ non vide tel que le n -uplet (a_1, \dots, a_n) soit indépendant de $v \in U$. Considérons le morphisme :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\psi} & X \times X \\ v & \longrightarrow & (v(0), v(\infty)) \end{array}$$

La différentielle de ψ est donnée par la formule ([K] II 3.4) :

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathbf{P}^1, v^*T_X) & \xrightarrow{d\psi(v)} & v^*T_X \otimes k(0) \oplus v^*T_X \otimes k(\infty) \\ s & \longrightarrow & (s(0), s(\infty)) \end{array}$$

Calculons le rang de ladite différentielle. Considérons les applications linéaires $(d\psi)_i(v)$ ($1 \leq i \leq n$) :

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_i)) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_i) \otimes k(0) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_i) \otimes k(\infty) \\ s_i & \longrightarrow & (s_i(0), s_i(\infty)) \end{array}$$

Le rang de $(d\psi(v))_i$ est 2 si $a_i \geq 1$ et 1 si $a_i = 0$, de sorte que, pour $v \in U$:

$$\text{rang}(d\psi(v)) = 2\text{Card}\{i|a_i \geq 1\} + \text{Card}\{i|a_i = 0\}.$$

Evaluons la dimension de l'image de ψ . Soient p et q les projections de $X \times X$ sur chacun des facteurs. Le morphisme $Z \rightarrow X$ étant propre et lisse, $p(\text{Im}(\psi)) = X$. Si $x \in p(\text{Im}(\psi)) = X$, $p^{-1}(x) \cap \text{Im}(\psi)$ s'identifie, via la projection q , au lieu des points de X par lesquels il passe une courbe rationnelle $v(\mathbf{P}^1)$ ($v \in V$) contenant x et sa dimension est donc au moins $\ell(R) - 1$ ([W] 1.11). Il en résulte que la dimension de l'image de ψ est au moins égale à $n + \ell(R) - 1$. On a donc :

$$\dim(\text{Im}(\psi)) = 2\text{Card}\{i|a_i \geq 1\} + \text{Card}\{i|a_i = 0\} \geq n + \ell(R) - 1 = n - 1 + \sum_{i=1}^n a_i.$$

Comme $a_1 \geq 2$:

$$n - 1 + \sum_{i=1}^n a_i \geq n - 1 + 2 + (\text{Card}\{i|a_i \geq 1\} - 1) = 2\text{Card}\{i|a_i \geq 1\} + \text{Card}\{i|a_i = 0\}.$$

D'où :

$$\text{Card}\{i|a_i \geq 1\} = \ell(R) - 1 = \sum_{i=1}^n a_i - 1$$

On en déduit $\ell(R) = 2$ et $(a_1, \dots, a_n) = (2, 0, \dots, 0)$ puisque $a_i = 0$ ou bien $a_i \geq 2$ (corollaire 1). Le morphisme $Z \rightarrow X$ est donc un revêtement étale fini, ce qui termine la preuve du lemme. ■

COROLLAIRE 3.—*Soit X une variété projective lisse de dimension $n \geq 1$ dont le fibré tangent est totalement décomposé. Si X n'est pas minimale alors X est uniréglée.*

Démonstration.—Supposons X non minimale. Le lemme 2 entraîne l'existence d'un revêtement étale fini Z de X , avec Z uniréglée. La variété X est donc uniréglée, ce qui termine la preuve du corollaire. ■

Soient X et Y deux variétés projectives lisses et $X \xrightarrow{\phi} Y$ un morphisme lisse. Une *connexion* sur ϕ est un scindage de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \phi^* \Omega_Y^1 \longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow \Omega_{X/Y}^1 \longrightarrow 0,$$

c'est-à-dire un sous-fibré $E \subset \Omega_X^1$ tel que le morphisme $E \longrightarrow \Omega_{X/Y}^1$ induit par la projection $\Omega_X^1 \twoheadrightarrow \Omega_{X/Y}^1$ soit un isomorphisme. La connexion est dite *intégrable* si

$$dE \subset E \wedge \Omega_X^1$$

ou bien, ce qui est équivalent, si le noyau de la surjection $T_X \twoheadrightarrow E^*$ est intégrable au sens usuel. Le morphisme ϕ est alors analytiquement localement trivial de fibre F et X s'identifie au quotient de $\tilde{Y} \times F$ par le groupe $\pi_1(Y)$ agissant diagonalement où \tilde{Y} est le revêtement universel de Y ; le scindage $\Omega_X^1 = \phi^* \Omega_Y^1 \oplus E$ se relève en la décomposition $\Omega_{\tilde{Y} \times F}^1 = \Omega_{\tilde{Y}}^1 \oplus \Omega_F^1$ ([B1] 4.5). ■

PROPOSITION 1.—*Si le théorème 1 est vrai en dimension $n \geq 1$, il est vrai en dimension $n + 1$ pour les variétés non minimales.*

Démonstration.—Soient X une variété projective lisse non minimale de dimension $n + 1$ ($n \geq 1$) dont le fibré cotangent est totalement décomposé et $\Omega_X^1 = L_1 \oplus \cdots \oplus L_{n+1}$ la dite décomposition. Quitte à passer à un revêtement étale, on peut toujours supposer qu'il existe une variété projective lisse Y de dimension n et un morphisme $X \xrightarrow{\phi} Y$ dont les fibres sont des droites projectives (lemme 2). Soit C une fibre de ϕ . Posons $d_i = L_i \cdot C$ et supposons $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_{n+1}$. Considérons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow N_{C/X}^* = \mathcal{O}_C^{\oplus n} \longrightarrow \Omega_{X|C}^1 \longrightarrow \Omega_C^1 = \mathcal{O}_C(-2) \longrightarrow 0.$$

Le groupe $\text{Ext}_{\mathcal{O}_C}^1(\mathcal{O}_C(-2), \mathcal{O}_C^{\oplus n})$ est nul et l'extension précédente est donc triviale. On en déduit $d_1 = -2$ et $d_i = 0$ pour $i \geq 2$ puis, par les théorèmes de changement de base, qu'il existe des fibrés inversibles $(E_i)_{2 \leq i \leq n+1}$ sur Y tels que $L_i = \phi^* E_i$. On vérifie par restriction aux fibres que l'application $\phi^* \Omega_Y^1 \longrightarrow L_1$ est identiquement nulle; les sous-fibrés $\phi^* \Omega_Y^1$ et $L_2 \oplus \cdots \oplus L_{n+1}$ de Ω_X^1 sont donc égaux et l'application $L_1 \longrightarrow \Omega_{X/Y}^1$ est un isomorphisme. On en déduit que T_Y est totalement décomposé et on vérifie que la condition d'intégrabilité du théorème est satisfaite. Le fibré L_1 détermine une connexion intégrable sur ϕ et l'assertion souhaitée en résulte facilement. ■

La suite de notre travail est consacrée à l'étude des variétés minimales dont le fibré

tangent est totalement décomposé.

LEMME 3.—*Soient X une variété projective lisse minimale dont le fibré tangent est totalement décomposé et $T_X = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ ($n \geq 1$) ladite décomposition. Soit H une section hyperplane de X . Alors $M_i H^{n-1} \leq 0$ et si l'inégalité précédente est une égalité on a $c_1(M_i) = 0$.*

Démonstration.—La variété X n'étant pas uniréglée (corollaire 3) il existe une courbe lisse $C \in |mH| \cap \cdots \cap |mH|$ ($m \gg 0$) telle que le fibré $\Omega_{X|C}^1$ soit numériquement effectif ([Mi]), c'est-à-dire telle que le faisceau inversible $\mathcal{O}_Z(1)$ soit numériquement effectif, où $Z = \mathbf{P}_C(\Omega_{X|C}^1)$. Soit σ_i la section de $Z \rightarrow C$ associée à la surjection $\Omega_{X|C}^1 \rightarrow M_i^{-1}|_C$. On a donc $\sigma_i(C) \cdot \mathcal{O}_Z(1) = C \cdot M_i^{-1} \geq 0$, ce qui prouve la première assertion. La seconde résulte du théorème de l'indice de Hodge puisque $M_i^2 = 0$ (lemme 1). ■

PROPOSITION 2 ([B1] théorème C).—*Soient X une variété projective lisse de dimension $n \geq 1$ dont le fibré tangent est totalement décomposé et $T_X = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ ladite décomposition. On suppose qu'il existe une section hyperplane H de X telle que $M_i \cdot H^{n-1} < 0$ pour $1 \leq i \leq n$. Le revêtement universel \tilde{X} de X est alors isomorphe au produit D^n où $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ et la décomposition de T_X est induite par la décomposition canonique de $T_{\tilde{X}}$.*

LEMME 4.—*Soit X une variété projective lisse minimale dont le fibré tangent est totalement décomposé. La composante neutre G du groupe des automorphismes de X est alors une variété abélienne.*

Démonstration.—Soit $T_X = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ ($n \geq 1$) la décomposition de T_X . On a $H^0(X, M_i) = (0)$ sauf si le fibré M_i est trivial (lemme 3). Soit $k = h^0(X, T_X)$ la dimension de G et soit $\mathcal{O}(x)$ une orbite de dimension minimale ($x \in X$) en particulier fermée. Considérons les applications tangentes :

$$T_{G, id} = H^0(X, T_X) \longrightarrow T_{\mathcal{O}(x), x} \longrightarrow T_{X, x}.$$

L'application $H^0(X, T_X) \rightarrow T_{X, x}$ obtenue est l'évaluation en x qui est injective. On en déduit que l'application $T_{G, id} \rightarrow T_{\mathcal{O}(x), x}$ est un isomorphisme puis que le morphisme $G \rightarrow \mathcal{O}(x)$ est un revêtement étale fini. Les variétés G et $\mathcal{O}(x)$ sont donc des variétés abéliennes de dimension k . ■

LEMME 5 ([B2] proposition 2.1).—*Soient X une variété projective lisse de dimension $n \geq 2$*

et M un fibré inversible non trivial dont la première classe de Chern $c_1(M) \in H^2(X, \mathbf{Z})$ est nulle. On suppose qu'il existe deux 1-formes non nulles $\alpha \in H^0(X, \Omega_X^1 \otimes M)$ et $\omega \in H^0(X, \Omega_X^1)$ telles que $\alpha \wedge \omega = 0$. Alors il existe un morphisme surjectif à fibres connexes $X \rightarrow C$ vers une courbe lisse C de genre $g(C) \geq 1$ tel que ω provienne par image réciproque de $H^0(C, \Omega_C^1)$.

Soient X une variété projective lisse et $X \xrightarrow{\phi} C$ un morphisme surjectif vers une courbe lisse C . Le diviseur de ramification de ϕ est défini par la formule :

$$D(\phi) = \sum_{p \in C} \phi^* p - (\phi^* p)_{red};$$

on démontre que les sections du fibré $\phi^* \omega_C(D(\phi))$ sont holomorphes, i.e., $\phi^* \omega_C(D(\phi)) \subset \Omega_X^1$ ([D] lemme 4.4).

LEMME 6 ([B2]).—Soient X une variété projective lisse de dimension $n \geq 2$, $X \xrightarrow{\phi} C$ un morphisme surjectif vers une courbe projective lisse C et D un diviseur vertical. Soit H une section hyperplane de X . On a $D^2 H^{n-2} \leq 0$ et si $D^2 H^{n-2} = 0$ alors il existe $r \in \mathbf{Q}^*$ tel que $rD \in \phi^* \text{Pic}(C)$.

LEMME 7.—Soient X une variété projective lisse de dimension $n \geq 2$ et $X \xrightarrow{\phi} C$ un morphisme surjectif vers une courbe lisse C . Soit $L = \phi^* \omega_C(D(\phi)) \subset \Omega_X^1$ où $D(\phi)$ est le diviseur de ramification de ϕ . Si L est un sous-fibré du fibré cotangent et $L^2 = 0$ alors les fibres de ϕ sont lisses ou multiples de variétés lisses.

Démonstration.—Ecrivons $D(\phi) = D_1 + \dots + D_k$ ($k \geq 1$) où $D_i = \phi^* p_i - (\phi^* p_i)_{red}$, les points $p_i \in C$ étant tous distincts et soit $\phi^* p_i = \sum_j n_{i,j} D_{i,j}$ la décomposition de la fibre schématique $\phi^* p_i$ en somme de ses composantes irréductibles ($n_{i,j} \geq 1$). Le diviseur $D(\phi)$ est vertical et on a donc $D_i^2 = 0$ pour tout entier $i \in \{1, \dots, k\}$ (lemme 6). On en déduit qu'il existe $r_i \in \mathbf{Q}^*$ tel que $r_i D_i \in \phi^* \text{Pic}(C)$ (lemme 6). On a donc $n_{i,j} = n_{i,k} = n_i$ pour tout triplet (i, j, k) et $D_i = (n_i - 1)(\phi^* p_i)_{red}$. Prenons un point $p_i \in C$ tel que la fibre schématique $\phi^* p_i$ soit non réduite. Soient $V \subset C$ un disque ouvert pour la topologie usuelle contenant le point p_i et $U = \phi^{-1}(V)$. On suppose que p_i est le seul point de V au dessus duquel la fibre est non réduite. En effectuant le changement de base local $z \mapsto z^{n_i}$, puis en normalisant, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{q} & U \\ \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi \\ V_1 & \xrightarrow{z \mapsto z^{n_i}} & V \end{array}$$

où q est un revêtement étale fini et ϕ_1 est un morphisme à fibres réduites et connexes. L'inclusion $L \subset \Omega_X^1$ se relève en l'inclusion naturelle $\phi_1^* \omega_{V_1} \subset \Omega_{U_1}^1$ et le morphisme ϕ_1 est donc lisse, ce qui termine la preuve du lemme. ■

PROPOSITION 3.—*Soient X une variété projective lisse minimale de dimension $n \geq 1$ dont le fibré tangent est totalement décomposé et M un facteur direct de ladite décomposition. Si $c_1(M) = 0$ alors M est de torsion.*

Démonstration.— Soient $\Omega_X^1 = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$ la décomposition du fibré cotangent et H une section hyperplane de X . On suppose que l'un des facteurs L_i ($1 \leq i \leq n$) est de première classe de Chern nulle mais pas de torsion.

Un fibré inversible de torsion est trivialisé par un revêtement étale fini et un fibré inversible qui n'est pas de torsion le reste après ledit revêtement. On peut donc supposer que les fibrés L_1, \dots, L_k sont de première classe de Chern nulles mais pas de torsion ($k \geq 1$) et que les fibrés L_{k+1}, \dots, L_{k+r} sont triviaux. On a enfin $L_i H^{n-1} > 0$ pour $i \geq k+r+1$ (lemme 3). On a donc $h^0(X, T_X) = r$ et pour tout revêtement étale fini $Z \rightarrow X$ on a $h^0(Z, T_Z) = r$.

La théorie de Hodge fournit un isomorphisme antilinéaire

$$H^1(X, L_1) \simeq H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L_1^{-1})$$

([B2] 3.4) puisque $c_1(L_1) = 0$ et on a donc $H^1(X, L_1) \neq 0$. Il existe alors deux 1-formes non nulles $\alpha \in H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L_1^{-1})$ et $\omega \in H^0(X, \Omega_X^1)$ telles que

$$\alpha \wedge \omega = 0$$

([B2] théorème 2.2 et [S]) et un fibré inversible $L \subset \Omega_X^1$ tel que $\omega \in H^0(X, L)$ (lemme 5). La 1-forme α détermine une application injective $L_1 \rightarrow \Omega_X^1$ dont l'image sera notée M . La condition $\alpha \wedge \omega = 0$ signifie que les deux sous-faisceaux L et M de Ω_X^1 coïncident sur un ouvert non vide de X . Or il existe un entier $m \in \{1, \dots, n\}$ tel que la projection $M \rightarrow L_m$ soit non nulle. La composante α_m de α sur le facteur direct $H^0(X, L_m \otimes L_1^{-1})$ de $H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L_1^{-1})$ est donc non nulle. La projection $L \rightarrow L_m$ est également non nulle puisque les sous-faisceaux L et M de Ω_X^1 coïncident génériquement. Notons ω_m la composante non nulle de ω sur le facteur direct $H^0(X, L_m)$ de $H^0(X, \Omega_X^1)$. Par choix des formes α_m et ω_m on a $\alpha_m \wedge \omega_m = 0$. On en déduit qu'il existe un morphisme surjectif à fibres connexes $X \xrightarrow{\phi} C$ vers une courbe C de genre $g(C) \geq 1$ tel que la forme ω_m provienne par image réciproque de $H^0(C, \Omega_C^1)$ (lemme 5). Les sous-faisceaux $\phi^* \omega_C$ et L_m de Ω_X^1 coïncident sur un ouvert non vide puisque $\omega_m \in H^0(X, L_m)$. On en déduit l'égalité $L_m = \phi^* \omega_C(D(\phi))$ où $D(\phi)$ est le diviseur de ramification de ϕ ([D] lemmes 4.1, 4.2 et 4.4). Or $L_m^2 = 0$ (lemme

1) et les fibres de ϕ sont donc lisses ou multiples de variétés lisses (lemme 7). La courbe C étant de genre au moins 1, il existe un morphisme fini $C_1 \xrightarrow{\pi} C$ tel que l'indice de ramification de π en $q \in C_1$ soit égal à la multiplicité de la fibre $\phi^{-1}(\pi(q))$ ([KO] lemme 6.1). Soit X_1 la normalisation du produit fibré $X \times_C C_1$ et soient $X_1 \xrightarrow{\phi_1} C_1$ et $X_1 \xrightarrow{\pi_1} X$ les morphismes naturels. Le morphisme ϕ_1 est lisse et π_1 est un revêtement étale. Les sous-fibrés $\phi_1^* \omega_{C_1}$ et $\pi_1^* L_m$ de $\Omega_{X_1}^1$ coïncident et le fibré $\bigoplus_{i \neq m} \pi_1^* L_i$ détermine donc une connexion sur ϕ_1 qui est automatiquement intégrable puisque C_1 est une courbe. Le morphisme ϕ_1 est donc analytiquement localement trivial de fibre F . De plus il existe un morphisme non nul $\pi_1^* L_1 \rightarrow \pi_1^* L_m$. On a donc $\pi_1^* L_m = \pi_1^* L_1(D)$ où D est un diviseur effectif. On en déduit que D est vertical puisque $c_1(\pi_1^* L_1) = 0$ et $\pi_1^* L_m = \phi_1^* \omega_{C_1}$ puis qu'il existe un fibré M_1 sur C_1 tel que $\pi_1^* L_1 = \phi_1^* M_1$. Remarquons enfin que $g(C_1) \geq 2$. Sinon C_1 serait une courbe elliptique et puisqu'on a une application non triviale $\pi_1^* L_1 \rightarrow \pi_1^* L_m = \phi_1^* \omega_{C_1}$ le fibré L_1^{-1} serait donc trivial ce qui est contraire aux hypothèses. On a donc $m \neq 1$ et $c_1(\pi_1^* L_m) \neq 0$.

Le fibré tangent T_F est totalement décomposé et F est minimale puisque $K_F = K_{X_1|F}$. La composante neutre G du groupe des automorphismes de F est donc une variété abélienne (lemme 4). On a enfin

$$h^0(X_1, T_{X_1}) + 1 \leq h^0(F, T_F)$$

puisque la restriction du facteur $\pi_1^* L_1$ à F est triviale. Considérons le schéma en groupes $\text{Aut}^0(X_1/C_1)$ au dessus de C_1 dont la fibre au dessus d'un point $p \in C_1$ est la composante neutre du groupe des automorphismes de $\phi_1^{-1}(p)$. Ladite fibre est une variété abélienne isomorphe à G puisque les fibres de ϕ_1 sont toutes isomorphes à F . Il existe donc un revêtement étale fini $C_2 \rightarrow C_1$ trivialisant ledit schéma en groupes. Cette assertion résulte de l'existence d'un espace de modules fin pour les variétés abéliennes munies d'une polarisation de degré donné et d'une structure de niveau $n \geq 3$. On en déduit que le groupe G agit sur le produit fibré $X_2 = X_1 \times_{C_1} C_2$ puis que

$$\dim G = h^0(F, T_F) \leq h^0(X_2, T_{X_2}).$$

Or

$$\begin{aligned} h^0(X_2, T_{X_2}) &= h^0(X_1, T_{X_1}) \\ &\leq h^0(F, T_F) - 1 \end{aligned}$$

puisque la projection $X_2 \rightarrow X_1$ est un revêtement étale, ce qui donne la contradiction cherchée. ■

LEMME 8.—*Soit X une variété projective lisse de dimension $n \geq 1$. On suppose que la composante neutre G du groupe des automorphismes de X est une variété abélienne de dimension $k \geq 1$ et que l'application canonique $H^0(X, T_X) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1)^*$ est injective. Il existe alors un revêtement étale fini G -équivariant $G \times F \rightarrow X$, G agissant diagonalement*

sur $G \times F$ par translations sur G et trivialement sur F .

Démonstration.— Soient $A = H^0(X, \Omega_X^1)^* / \text{Im}(H_1(X, \mathbb{Z}))$ la variété d'Albanese de X et $x \in X$ un point de X . Considérons le morphisme d'Albanese :

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{a} A \\ y &\longrightarrow [\omega \mapsto \int_x^y \omega] \end{aligned}$$

Le groupe G étant connexe, la représentation canonique $G \rightarrow GL(H^0(X, \Omega_X^1))$ est triviale et toute 1-forme holomorphe sur X est donc G -invariante. On en déduit que pour tout couple $(y, z) \in X \times X$ et tout $g \in G$ on a $[\omega \mapsto \int_y^{g(y)} \omega] = [\omega \mapsto \int_z^{g(z)} \omega]$ dans A . Notons $\mathcal{O}(x)$ l'orbite de x sous G . L'application :

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow A \\ g &\longrightarrow [\omega \mapsto \int_x^{g(x)} \omega] \end{aligned}$$

obtenue par composition de l'inclusion naturelle $\mathcal{O}(x) \subset X$ et du morphisme d'Albanese est donc un morphisme de groupes algébriques indépendant du point $x \in X$ considéré et le morphisme d'Albanese est G -équivariant, G agissant par translations sur A via le morphisme $G \rightarrow A$. Notons que l'image de $G \rightarrow A$ est une variété abélienne de dimension k . En effet, l'application tangente dudit morphisme est l'application canonique

$$H^0(X, T_X) \otimes \mathcal{O}_G \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1)^* \otimes \mathcal{O}_G,$$

qui est injective par hypothèse. On en déduit qu'il existe une sous-variété abélienne $B \subset A$ de dimension $\dim(A) - k$ telle que le morphisme canonique $G \times B \rightarrow A$ soit étale fini ([Mu] théorème de Poincaré). Soient X_1 le produit fibré $X \times_A (G \times B)$ et q la projection sur G . Le groupe G agit diagonalement sur le produit $G \times B$ en agissant par translations sur lui-même et trivialement sur B ; le morphisme $G \times B \rightarrow A$ est alors G -équivariant. On en déduit que G agit librement sur X_1 et que le morphisme q est G -équivariant. Il en résulte que X_1 est isomorphe, au dessus de G , au produit $G \times F$, F étant une fibre de q , ce qui termine la preuve du lemme. ■

LEMME 9.— Soient G une variété abélienne de dimension $n \geq 1$ et F une variété projective lisse de dimension $m \geq 1$. Alors toute connexion sur la projection $G \times F \rightarrow F$ est intégrable.

Démonstration.— Notons $E \subset \Omega_{G \times F}^1$ ladite connexion. Le fibré E est trivial et il existe donc des 1-formes $\omega_i \in H^0(G \times F, \Omega_{G \times F}^1)$ ($1 \leq i \leq n$) telles que

$$E = \mathcal{O}_{G \times F} \omega_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{G \times F} \omega_n.$$

Soient f_1, \dots, f_n des fonctions holomorphes définies sur un ouvert de $G \times F$. On a la formule :

$$d\left(\sum_{i=1}^n f_i \omega_i\right) = \sum_{i=1}^n df_i \wedge \omega_i + \sum_{i=1}^n f_i d\omega_i.$$

Or $d\omega_i = 0$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ puisque $G \times F$ est projective. On a donc

$$dE \subset E \wedge \Omega_{G \times F}^1$$

ce qui termine la preuve du lemme. ■

THÉORÈME 2.—*Soit X une variété projective lisse minimale de dimension $n \geq 1$ dont le fibré tangent est totalement décomposé. Le revêtement universel \tilde{X} de X est alors produit de surfaces de Riemann et la décomposition de T_X est induite par la décomposition canonique de $T_{\tilde{X}}$.*

Démonstration.—Soit $\Omega_X^1 = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$ ($n \geq 1$) la décomposition du fibré cotangent et soit H une section hyperplane de X . On a $c_1(L_i)H^{n-1} \geq 0$ (lemme 3) et si $c_1(L_i)H^{n-1} > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la proposition 2 permet de conclure. Quitte à permuter les L_i on peut toujours supposer que les fibrés L_1, \dots, L_k ($k \geq 1$) sont de torsion et que $c_1(L_i) \neq 0$ pour $i \geq k+1$ (proposition 3). Il existe un revêtement étale fini de X trivialisant ces fibrés et il suffit donc de traiter le cas où lesdits fibrés sont triviaux. On a alors $h^0(X, L_i^{-1}) = 0$ pour $i \geq k+1$ (lemme 3) et $h^0(X, T_X) = k$. Soit G la composante neutre du groupe des automorphismes de X ; G est une variété abélienne de dimension k (lemme 4). L'application canonique $H^0(X, T_X) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1)^*$ est injective et il existe donc un revêtement étale fini $G \times F \xrightarrow{p} X$ (lemme 8) où F est une variété projective lisse. Le morphisme p étant étale, on a $\Omega_{G \times F}^1 = p^* \Omega_X^1 = p^* L_1 \oplus \dots \oplus p^* L_n$ et $(p^* L_i)(p^* H^{n-1}) > 0$ pour $i \geq k+1$ (lemme 3). Par hypothèse, les fibrés $p^* L_i$ sont triviaux pour $i \in \{1, \dots, k\}$. On en déduit $h^0(G \times F, p^* L_i^{-1}) = 0$ pour $i \geq k+1$ puis $h^0(G \times F, T_{G \times F}) = k$ et $h^0(G \times F, s^* T_F) = 0$ où s désigne la projection de $G \times F$ sur F . Notons r la projection sur G . L'application

$$s^* \Omega_F^1 \rightarrow p^* L_1 \oplus \dots \oplus p^* L_k$$

est identiquement nulle et les sous-fibrés $s^* \Omega_F^1$ et $p^* L_{k+1} \oplus \dots \oplus p^* L_n$ de $\Omega_{G \times F}^1$ sont donc isomorphes. On en déduit que l'application

$$p^* L_1 \oplus \dots \oplus p^* L_k \rightarrow r^* \Omega_G^1$$

est un isomorphisme. Soit x un point de F . Le fibré $p^* L_i|_{G \times \{x\}}$ ($k+1 \leq i \leq n$) est donc facteur direct du fibré trivial $\mathcal{O}_{G \times \{x\}} \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{G \times \{x\}}$ et donc lui-même trivial. Il existe donc des fibrés $E_i \in \text{Pic}(F)$ ($k+1 \leq i \leq n$) tels que $p^* L_i = s^* E_i$. Soit H_F une

section hyperplane de F . On a donc $E_i H_F^{n-k-1} > 0$ (lemme 3) puisque $c_1(L_i) \neq 0$ pour $i \geq k+1$. On a $\Omega_F^1 = E_{k+1} \oplus \cdots \oplus E_n$ et la proposition 2 permet de conclure puisque le fibré $p^* L_1 \oplus \cdots \oplus p^* L_k$ détermine une connexion intégrable sur la projection s (lemme 9).

■

Références bibliographiques

- [B1] A. Beauville, *Complex manifolds with split tangent bundle* dans *Complex analysis and algebraic geometry*, Vol. en mémoire de M.Schneider, 61-70, de Gruyter (2000).
- [B2] A. Beauville, *Annulation du H^1 pour les fibrés en droites plats*, Lecture Notes in Math., 1507 (1992), 1-15.
- [D] S. Druel, *Structures de Poisson sur les variétés algébriques de dimension trois*, Bulletin de la Société Math. de France, 127 (1999), 229-253.
- [KO] S. Kobayashi, T.Ochiai, *Holomorphic structures modeled after hyperquadrics*, Tôhoku Math. J., 34 (1982), 587-629.
- [K] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties* Springer, Berlin—Heidelberg—New-York—Tokyo, 32 (1996).
- [Mi] Y. Miyaoka, *The Chern classes and Kodaira dimension of minimal variety*, Advanced Study in Pure Math., 10 (1987), 449-476.
- [M1] S. Mori, *Projective manifolds with ample tangent bundles*, Ann. of Math., 110 (1979), 593-606.
- [M2] S. Mori, *Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective*, Ann. of Math., 116 (1982), 133-176.
- [Mu] D. Mumford, *Abelian Varieties*, Oxford University Press (1970).
- [S] C. Simpson, *Subspaces of moduli spaces of rank one local systems*, Ann. Sci. École Norm. Sup., 26 (1993), 361-401.
- [W] J. Wisniewski, *Length of extremal rays and generalized adjunction*, Math. Z., 200 (1989), 409-427.

Espace des modules des faisceaux de rang 2 semi-stables de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ et $c_3 = 0$ sur la cubique de \mathbf{P}^4

1. Introduction

(1.1) Soient $X \subset \mathbf{P}^4$ une hypersurface cubique lisse et $\ell \subset X$ une droite de \mathbf{P}^4 . Soit X_ℓ la variété obtenue en éclatant ℓ dans X . La projection le long de ℓ induit un morphisme $X_\ell \xrightarrow{p} \mathbf{P}^2$ dont les fibres sont les coniques qui sont coplanaires avec ℓ . Lorsque la droite ℓ est générique les fibres de p sont lisses ou réunion de deux droites distinctes. Le lieu de dégénérescence de p est alors une courbe plane lisse et connexe C_0 de degré 5. Soit C la variété des droites contenues dans X et incidentes à ℓ . Le morphisme $C \rightarrow C_0$ est un revêtement étale double connexe. Soit i l'involution échangeant les deux feuillets dudit revêtement et notons encore i l'automorphisme induit sur la jacobienne JC . La variété de Prym associée au revêtement (C, C_0) est alors $P = (Id - i)JC$. C'est une variété abélienne principalement polarisée de dimension 5. Soient $A_1(X)$ le groupe des 1-cycles algébriques modulo l'équivalence rationnelle et $A \subset A_1(X)$ le sous-groupe des cycles algébriquement équivalents à zéro. L'application qui à $t \in C$ associe la classe de la droite correspondante $z_t \subset X_\ell$ dans A induit un isomorphisme de groupes $P \simeq A$. On démontre que pour toute variété lisse T de dimension pure $n \geq 1$ et tout $n + 1$ -cycle z sur $X \times T$ l'application d'Abel-Jacobi qui à $t \in T$ associe la classe du cycle $z_t - z_{t_0}$ dans P , où $t_0 \in T$ est fixé, est algébrique ([Mu]). La jacobienne intermédiaire de X est définie par :

$$J(X) = (H^{2,1}(X))^* / \alpha(H_3(X, \mathbf{Z}))$$

où α est l'application donnée par intégration sur les cycles. C'est une variété abélienne principalement polarisée de dimension 5 isomorphe à la variété de Prym. Via cet isomorphisme, l'image du cycle $z_t - z_{t_0}$ par l'application d'Abel-Jacobi est la forme linéaire donnée par intégration sur le cycle Γ modulo le groupe $\alpha(H_3(X, \mathbf{Z}))$ où $\partial\Gamma = z_t - z_{t_0}$. On démontre

enfin que l'application d'Abel-Jacobi induit un plongement de la surface de Fano de X dans $J(X)$.

(1.2) Soient $(X, \mathcal{O}_X(1))$ une variété polarisée de dimension $n \geq 1$ et E un faisceau cohérent sur X de rang r . La pente $\mu(E)$ de E est définie par la formule :

$$\mu(E) = \frac{c_1(E)c_1(\mathcal{O}_X(1))^{n-1}}{r}$$

Le faisceau E est dit μ -semi-stable (resp. semi-stable) s'il est sans torsion et si pour tout sous-faisceau $L \subset E$ de rang $0 < r' < r$ on a $\mu(L) \leq \mu(E)$ (resp. $\frac{\chi(L(n))}{r'} \leq \frac{\chi(E(n))}{r}$ pour $n \gg 0$). Il est dit μ -stable (resp. stable) s'il est sans torsion et si pour tout sous-faisceau $L \subset E$ de rang $0 < r' < r$ on a $\mu(L) < \mu(E)$ (resp. $\frac{\chi(L(n))}{r'} < \frac{\chi(E(n))}{r}$ pour $n \gg 0$). On a les implications suivantes :

$$\mu\text{-stable} \implies \text{stable} \implies \text{semi-stable} \implies \mu\text{-semi-stable}$$

Supposons enfin $\text{Pic}(X) \simeq \mathbf{Z}$ et soit F un faisceau réflexif de rang 2 sur X , de première classe de Chern $c_1(F) = 0$ ou $c_1(F) = -1$. Alors F est stable si et seulement si $h^0(F) = 0$ et si $c_1(F) = 0$ alors F est semi-stable si et seulement si $h^0(F(-1)) = 0$ ([H2] lemme 3.1).

(1.3) Soient $X \subset \mathbf{P}^4$ une hypersurface cubique lisse et $\mathcal{O}_X(1)$ le générateur très ample de $\text{Pic}(X)$. Les \mathbf{Z} -modules $H^2(X, \mathbf{Z})$, $H^4(X, \mathbf{Z})$ et $H^6(X, \mathbf{Z})$ sont libres de rang 1. On identifie ainsi les classes de Chern d'un faisceau cohérent sur X à des entiers relatifs. Nous étudions ici l'espace des modules des faisceaux semi-stables de rang 2 sur X . Nous démontrons le :

THÉORÈME 1.4.—*Soient $X \subset \mathbf{P}^4$ une hypersurface cubique lisse et B la surface de Fano de X . Alors l'espace des modules M_X des faisceaux semi-stables de rang 2 sur X de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ et $c_3 = 0$ est isomorphe à l'éclatement d'un translaté de la surface $-B$ dans la jacobienne intermédiaire $J(X)$.*

(1.5) Soit X une variété projective lisse de dimension au moins 2 et E un fibré vectoriel de rang 2 sur X . S'il existe une section globale dont le lieu des zéros Y est de codimension pure 2 alors on a une suite exacte ([H1]) :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow E \longrightarrow I_Y \otimes \det(E) \longrightarrow 0$$

(1.6) *Fibrés de rang 2 et construction de Serre.*— Supposons X de dimension au moins 3. Soit L un fibré inversible sur X tel que $h^1(L^{-1}) = 0$ et $h^2(L^{-1}) = 0$ et soit $Y \subset X$ un sous-schéma fermé de codimension pure 2. Le sous-schéma Y est le lieu des zéros d'une

section d'un fibré E de rang 2 sur X de déterminant L si et seulement si Y est localement intersection complète et $\omega_Y = (\omega_X \otimes L)|_Y$.

(1.7) Soit $X \subset \mathbf{P}^4$ une hypersurface cubique lisse. Nous montrons que les fibrés vectoriels stables sont associés aux quintiques elliptiques normales tracées sur X par la construction de Serre (2.4), au moyen du :

(1.8) *Critère de Mumford-Castelnuovo.*—Soit F un faisceau cohérent sur une variété projective X tel que $h^i(F(-i)) = 0$ pour $i \geq 1$. Alors $h^i(F(k)) = 0$ pour $i \geq 1$ et $k \geq -i$ et F est engendré par ses sections globales ([Mum] lect. 14).

(1.9) Soit $X \subset \mathbf{P}^4$ une hypersurface cubique lisse. Nous montrons que les faisceaux stables non localement libres sont paramétrés par les coniques lisses tracées sur X et que les faisceaux strictement semi-stables sont paramétrés par les couples de droites de X (3.5). Nous montrons enfin que la seconde classe de Chern définit un morphisme vers la jacobienne intermédiaire $J(X)$. Ce morphisme est birationnel ([IM]) et identifie M_X à l'éclatement d'une surface lisse dans $J(X)$ (4.8).

(1.10) Soient F un faisceau cohérent sur un schéma X et $Y \subset X$ un sous-schéma fermé. La restriction de F à Y sera notée F_Y .

2. Fibrés de rang 2 stables sur la cubique de \mathbf{P}^4

LEMME 2.1.—*Soient $X \subset \mathbf{P}^N$ une variété de dimension $n \geq 2$ et E un fibré de rang 2 μ -semi-stable de première classe de Chern $c_1(E) = 0$. Si $h^0(E) \neq 0$ alors le lieu des zéros d'une section globale non nulle est de codimension pure 2 ou bien ladite section ne s'annule pas et $c_2(E) = 0$.*

Démonstration.—Le fibré E est de rang 2 et toute section non triviale s'annule donc en codimension au plus 2 ou bien ne s'annule pas. S'il existe une section partout non nulle alors E est extension de \mathcal{O}_X par L avec $c_1(L) = 0$ et $c_2(E) = 0$. Supposons qu'une section de E s'annule en codimension 1 et soit D la partie de codimension 1 du lieu des zéros de ladite section. On a ainsi $h^0(E(-D)) \neq 0$ et $\mu(\mathcal{O}_X(D)) \leq 0$ puisque E est semi-stable. Or D est effectif et on a donc $D = 0$. ■

LEMME 2.2.—*Soient $S \subset \mathbf{P}^3$ une surface cubique lisse et E un fibré de rang 2 μ -semi-stable de classes de Chern $c_1(E) = 0$ et $c_2(E) = 2$. Si $h^0(E) = 0$ alors $h^1(E(n)) = 0$ pour*

$n \in \mathbf{Z}$ et $h^2(E(n)) = 0$ pour $n \geq -1$. Si $h^0(E) \neq 0$ alors $h^0(E) = 1$, $h^1(E(n)) = 0$ pour $n \leq -2$ et $n \geq 1$, $h^1(E(-1)) = h^1(E) = 1$ et $h^2(E(n)) = 0$ pour $n \geq 0$.

Démonstration.—Supposons $h^0(E) = 0$.—On a $h^1(E) = h^0(E) = 0$ puisque $h^2(E) = h^0(E(-1)) = 0$ et $\chi(E) = 0$. On a enfin $h^2(E(-1)) = h^0(E) = 0$. Finalement $h^i(E(1-i)) = 0$ pour $i \geq 1$ et le lemme est une conséquence de (1.8).

Supposons $h^0(E) \neq 0$.—Le fibré E est semi-stable et le lieu des zéros d'une section globale non nulle est donc de codimension pure 2 (2.1). On a donc une suite exacte (1.5):

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow E \longrightarrow I_Z \longrightarrow 0$$

où Z est un sous-schéma fermé de dimension 0 et de longueur 2. On en déduit en particulier $h^0(E) = 1$ et $h^1(E) = 1$ puisque $h^2(E) = h^0(E(-1)) = 0$ et $\chi(E) = 0$. L'application naturelle $H^0(\mathcal{O}_S(1)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_Z(1))$ est surjective puisque $\ell(Z) = 2$ et on a donc $h^1(I_Z(1)) = 0$. On en déduit $h^1(E(1)) = 0$. Finalement $h^i(E(2-i)) = 0$ pour $i \geq 1$ et le lemme est une conséquence de (1.8). ■

LEMME 2.3.—Soient $S \subset \mathbf{P}^3$ une surface cubique lisse et E un fibré de rang 2 μ -semi-stable de classes de Chern $c_1(E) = 0$ et $c_2(E) = 1$. Si $h^0(E) \neq 0$ alors $h^0(E) = 1$, $h^1(E(n)) = 0$ pour $n \in \mathbf{Z}$ et $h^2(E(n)) = 0$ pour $n \geq 0$.

Démonstration.—Le fibré E est semi-stable et le lieu des zéros d'une section globale non nulle est donc de codimension pure 2 (2.1). On a une suite exacte (1.5):

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow E \longrightarrow I_Z \longrightarrow 0$$

où Z est un point de S . On en déduit $h^0(E) = 1$. La suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(n) \longrightarrow E(n) \longrightarrow I_Z(n) \longrightarrow 0$$

donne $h^1(E(n)) = 0$ pour $n \geq 0$ puisque $h^1(\mathcal{O}_S(n)) = 0$ et $h^1(I_Z(n)) = 0$ pour $n \geq 0$. On en déduit $h^1(E(n)) = h^1(E(-n-1)) = 0$ pour $n < 0$. On a enfin $h^2(E(n)) = h^0(E(-1-n)) = 0$ pour $n \geq 0$. ■

THÉORÈME 2.4.—Soient $X \subset \mathbf{P}^4$ une cubique lisse et E un fibré de rang 2 stable de classes de Chern $c_1(E) = 0$ et $c_2(E) = 2$. Alors $E(1)$ est engendré par ses sections globales.

Démonstration.—Soit $S \in |\mathcal{O}_X(1)|$ une section hyperplane générique de X tel que le fibré E_S soit μ -semi-stable relativement à la polarisation $\mathcal{O}_S(1)$ ([M] thm. 3.1).

Supposons $h^0(E_S) = 0$.—Il suffit de prouver $h^i(E(1-i)) = 0$ pour $i \geq 1$ (1.8). Considérons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow E(n-1) \longrightarrow E(n) \longrightarrow E_S(n) \longrightarrow 0$$

On a $h^1(E(n)) \leq h^1(E(n-1))$ puisque $h^1(E_S(n)) = 0$ pour $n \in \mathbf{Z}$ (2.2). On en déduit $h^1(E(n)) = 0$ pour $n \in \mathbf{Z}$ puisque $h^1(E(n)) = 0$ pour $n \ll 0$ puis $h^2(E(n)) = 0$ pour $n \in \mathbf{Z}$. On a enfin $h^3(E(-2)) = h^0(E) = 0$.

Supposons $h^0(E_S) \neq 0$ et montrons que nous aboutissons à une contradiction.—Le fibré $E(2)$ est alors engendré par ses sections globales. Il suffit en effet de prouver $h^i(E(2-i)) = 0$ pour $i \geq 1$ (1.8). Considérons à nouveau la suite exacte :

$$0 \longrightarrow E(n-1) \longrightarrow E(n) \longrightarrow E_S(n) \longrightarrow 0$$

On a $h^1(E(n)) \leq h^1(E(n-1))$ pour $n \leq -2$ puisque $h^1(E_S(n)) = 0$ pour $n \leq -2$ (2.2). On en déduit $h^1(E(-n)) = 0$ pour $n \geq 2$ puisque $h^1(E(n)) = 0$ pour $n \ll 0$. Calculons $h^1(E(1))$. On a $h^2(E) = h^1(E(-2)) = 0$ et $h^3(E) = h^0(E(-2)) = 0$. Puisque $\chi(E) = 0$ on a donc $h^1(E) = 0$ et la suite exacte :

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow E(1) \longrightarrow E_S(1) \longrightarrow 0$$

entraîne $h^1(E(1)) = h^1(E_S(1)) = 0$ (2.2). On a enfin $h^3(E(-1)) = h^0(E(-1)) = 0$. Le fibré $E(2)$ est donc engendré par ses sections globales.

Si l'une des sections du fibré $E(2)$ est partout non nulle alors $E(2)$ est isomorphe au fibré $\mathcal{O}_X(2) \oplus \mathcal{O}_X(-2)$ et $c_2(E) = -12$ ce qui est absurde. On a donc une suite exacte (1.5) :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-4) \longrightarrow E(-2) \longrightarrow I_C \longrightarrow 0$$

où $C \subset X$ est une courbe lisse de degré $c_2(E(2)) = 14$. On a $h^1(I_C) = 0$ et la courbe C est donc connexe. On a $\omega_C = \mathcal{O}_C(2)$ (1.6) et $g(C) = 15$. Enfin, la courbe C est non dégénérée puisque le fibré E est stable. Calculons $h^0(\mathcal{O}_C(1))$. La suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-3) \longrightarrow E(-1) \longrightarrow I_C(1) \longrightarrow 0$$

entraîne l'égalité $h^1(I_C(1)) = h^1(E(-1))$ puisque $h^1(\mathcal{O}_X(-3)) = 0$ et $h^2(\mathcal{O}_X(-3)) = 0$. La suite exacte :

$$0 \longrightarrow E(-2) \longrightarrow E(-1) \longrightarrow E_S(-1) \longrightarrow 0$$

donne $h^1(E(-1)) = h^1(E_S(-1)) = 1$ (2.2) puisque $h^1(E(-2)) = 0$ et $h^2(E(-2)) = h^1(E) = 0$. On a donc $h^1(I_C(1)) = 1$. On déduit de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow I_C(1) \longrightarrow \mathcal{O}_X(1) \longrightarrow \mathcal{O}_C(1) \longrightarrow 0$$

que $h^0(\mathcal{O}_C(1)) = 6$ puisque $h^0(I_C(1)) = 0$ et $h^1(\mathcal{O}_X(1)) = 0$. La courbe C est donc la projection dans \mathbf{P}^4 d'une courbe de Castelnuovo de \mathbf{P}^5 et le lemme 2.5 fournit la contradiction cherchée. ■

LEMME 2.5.—*Soit $C \subset \mathbf{P}^5$ une courbe non dégénérée de genre 15 et de degré 14 (courbe de Castelnuovo). Soit $O \in \mathbf{P}^5$ ($O \notin C$) tel que la projection à partir de O induise un plongement de C dans \mathbf{P}^4 . L'image de C dans \mathbf{P}^4 n'est alors contenue dans aucune cubique lisse.*

Démonstration.—La courbe C est contenue dans une surface irréductible $S \subset \mathbf{P}^5$ de degré 4. Ladite surface S et la courbe C sont ([ACGH]):

ou bien

- la surface de Veronese et C est l'image d'une courbe plane de degré 7 par le plongement de Veronese,

ou bien

- l'image de $S_{2k} = \mathbf{P}_{\mathbf{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-2k))$, $k \in \{0, 1, 2\}$, par le morphisme φ_k associé au système linéaire $|C_0 + (k+2)f|$ et $C \in |4C_0 + (4k+6)f|$, où C_0 est la section associée au fibré naturel $\mathcal{O}_{S_{2k}}(1)$ ($C_0^2 = -2k$) et f est une génératrice de la surface réglée S_{2k} . Pour $k \in \{0, 1\}$ le morphisme φ_k est un plongement fermé, $S = \varphi_2(S_4)$ est un cône au-dessus d'une courbe rationnelle lisse de degré 4 et le morphisme φ_2 s'identifie à l'éclatement de $\varphi_2(S_4)$ en son sommet.

Notons π la projection considérée et $\pi(S)$ l'image de S par l'application rationnelle π . Si $\pi(S)$ est de dimension 1 alors S est un cône au dessus de C isomorphe à $\varphi_2(S_4)$ ce qui absurde puisque $g(C) \geq 1$. La variété $\pi(S)$ est donc de dimension 2. Si S est un cône alors son sommet et le point de projection sont donc distincts.

Supposons la courbe $C \subset \mathbf{P}^4$ contenue dans une cubique lisse X et notons $\overline{X} \subset \mathbf{P}^5$ le cône de sommet O et de base X .

Supposons que la cubique \overline{X} ne contienne pas la surface S . L'hypersurface \overline{X} découpe alors sur S une courbe de degré 12 et ne peut donc pas contenir la courbe C . La cubique \overline{X} contient donc la surface S . On en déduit en particulier que $\pi(S) \subset X$.

Supposons $O \in S$. Si S est l'une des deux surfaces $\varphi_k(S_{2k})$ avec $k \in \{0, 1, 2\}$ alors la génératrice f passant par O est contractée par π . Or $C.f = 4$ et π ne peut donc pas induire un plongement de C dans \mathbf{P}^4 . Si S est la surface de Veronese alors l'application rationnelle $\mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^4$ obtenue est définie par le système linéaire des coniques passant par un point. Ce système linéaire induit un plongement de la surface de Hirzebruch \mathbb{F}_1 dans \mathbf{P}^4 dont l'image est une surface de degré 3. Or $\mathbb{F}_1 \subset X$ et ladite surface est un diviseur de Cartier associé au fibré $\mathcal{O}_X(l)$ où l est un entier convenable. Son degré est donc $3l$. On en déduit que la surface $\pi(S)$ est une section hyperplane de X , ce qui est absurde.

Il nous reste à traiter le cas où $O \notin S$. Notons d le degré de π . La surface $\pi(S)$ est donc de degré $\frac{4}{d}$. C'est un diviseur de Cartier associé au fibré $\mathcal{O}_X(l)$ où l est un entier convenable. Son degré est donc $3l$ ce qui constitue la contradiction cherchée puisque l'égalité $3ld = 4$ est impossible avec l et d entiers. ■

COROLLAIRE 2.6.—*Le fibré E est associé à une quintique elliptique lisse non dégénérée par la construction de Serre.*

Démonstration.—Il est donné par l'extension (1.5) :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-2) \longrightarrow E(-1) \longrightarrow I_C \longrightarrow 0$$

où C est une courbe lisse. On a en particulier $h^1(I_C) = 0$ et la courbe C est donc connexe. On a $\omega_C = \mathcal{O}_C$ (1.6) et la courbe C est donc une courbe elliptique de degré $c_2(E(1)) = 5$. Enfin la courbe C est linéairement normale puisque E est stable. ■

3. Faisceaux de rang 2 semi-stables sur la cubique de \mathbf{P}^4

PROPOSITION 3.1.—*Soient X une cubique lisse de \mathbf{P}^4 et E un faisceau de rang 2 semi-stable de classes de Chern $c_1(E) = 0$, $c_2(E) = 2$ et $c_3(E) = 0$. Soit F le bidual de E . Alors ou bien E est localement libre ou bien F est localement libre de seconde classe de Chern $c_2(F) = 1$ et $h^0(F) = 1$ ou bien $F = H^0(F) \otimes \mathcal{O}_X$.*

Démonstration.—Soit $S \in |\mathcal{O}_X(1)|$ une section hyperplane générique telle que E_S soit μ -semi-stable relativement à la polarisation $\mathcal{O}_S(1)$ ([M] thm 3.1) et telle que F_S soit isomorphe au bidual de E_S . Le faisceau F est μ -semi-stable. Le faisceau F_S est localement libre de rang 2 et μ -semi-stable de première classe de Chern $c_1(F_S) = 0$ ([H2]). Notons R le conoyau de l'inclusion canonique $E \subset F$. Le faisceau E est sans torsion et R est de dimension au plus 1. On a les formules $c_2(F_S) = c_2(E_S) + c_2(R_S) = 2 - \ell(R_S)$ et $\chi(F_S) = \ell(R_S)$. On en déduit la relation

$$h^0(F_S) = h^1(F_S) + \ell(R_S)$$

puisque $h^2(F_S) = h^0(F_S(-1)) = 0$. Supposons $h^0(F_S) \geq 1$. Le lieu des zéros d'une section non nulle est ou bien vide ou bien de codimension pure 2 (2.1). S'il est vide alors le fibré F_S est trivial et s'il est de codimension pure 2 alors $h^0(F_S) = 1$. On a donc $\ell(R_S) \in \{0, 1, 2\}$ et $c_2(F_S) \in \{0, 1, 2\}$.

Considérons la suite exacte de restriction à une section hyperplane :

$$0 \longrightarrow F(n-1) \longrightarrow F(n) \longrightarrow F_S(n) \longrightarrow 0$$

On a $h^1(F_S(n)) = 0$ pour $n \leq -2$ et $n \geq 1$ (2.2 et 2.3). On en déduit $h^1(F(n-1)) \geq h^1(F(n))$ pour $n \leq -2$ et $h^2(F(n-1)) \leq h^2(F(n))$ pour $n \geq 1$. Or $h^1(F(n)) = 0$ pour $n \ll 0$ ([H2] thm. 2.5) et $h^2(F(n)) = 0$ pour $n \gg 0$ et on a donc $h^1(F(n)) = 0$ pour $n \leq -2$ et $h^2(F(n)) = 0$ pour $n \geq 0$. On a enfin $h^3(F) = h^0(F^*(-2)) = h^0(F(-2)) = 0$ ([H2] prop. 1.10) et $h^0(F) \leq h^0(F_S)$.

Supposons $\ell(R_S) = 0$ —Alors $c_2(F) = 2$ et $\chi(F) = \frac{c_3(F)}{2}$. On en déduit la formule $\frac{c_3(F)}{2} = h^0(F) - h^1(F)$. Or $c_3(F) \geq 0$ ([H2] prop. 2.6) et $h^0(F) \leq h^0(F_S) \leq 1$ et on a donc $c_3(F) = 0$ ou 2.

Si $c_3(F) = 0$ alors les faisceaux E et F sont canoniquement isomorphes et localement libres ([H2] prop. 2.6).

Si $c_3(F) = 2$ alors $h^0(F) = 1$ et $h^1(F) = 0$. Le faisceau R est donc de dimension 0 et $\ell(R) = \chi(F) - \chi(E) = 1$. On a donc $R = k(p)$ avec $p \in X$. Puisque $h^0(F) = 1$ on a un morphisme non nul $\mathcal{O}_X \rightarrow F$. De plus, $\chi(E(n)) = n^3 + 3n^2 + 2n$ et $\chi(\mathcal{O}_X(n)) = \frac{n^3}{2} + \frac{3n^2}{2} + 2n + 1$ et on en déduit $h^0(E) = 0$ puisque E est semi-stable. Le morphisme induit $\mathcal{O}_X \rightarrow R$ est donc non nul. Il est surjectif et induit une inclusion $I_p \subset X$. Or $\chi(I_p(n)) = \frac{n^3}{2} + \frac{3n^2}{2} + 2n$ ce qui est en contradiction avec la semi-stabilité de E .

Supposons $\ell(R_S) \geq 1$. On a donc $h^0(F_S) \geq 1$. Le lieu des zéros d'une section globale non nulle est ou bien vide ou bien de codimension pure 2 (2.1).

Supposons qu'il existe une section non nulle de F_S dont le lieu des zéros est de codimension pure 2. Alors $h^0(F_S) = 1$. On en déduit $h^1(F_S) = 0$ puis $\ell(R_S) = 1$ et $c_2(F) = 1$. On en déduit l'inégalité $\chi(F) = h^0(F) - h^1(F) = 1 + \frac{c_3(F)}{2} \leq 1 - h^1(F)$. Puis $c_3(F) = 0$ puisque $c_3(F) \geq 0$ ([H2] prop. 2.6). Le faisceau F est donc localement libre ([H2] prop. 2.6) de seconde classe de Chern $c_2(F) = 1$ et $h^0(F) = 1$.

Supposons enfin qu'il existe une section du fibré F_S ne s'annulant pas auquel cas ledit fibré est isomorphe au fibré $H^0(F_S) \otimes \mathcal{O}_S$ et donc $\ell(R_S) = 2$ et $c_2(F) = 0$. On en déduit l'inégalité $\chi(F) = \frac{c_3(F)}{2} + 2 = h^0(F) - h^1(F) \leq 2 - h^1(F)$ puis $c_3(F) = 0$ puisque $c_3(F) \geq 0$ ([H2] prop. 2.6) et $h^0(F) = 2$. Le faisceau F est donc localement libre ([H2] prop. 2.6). Supposons qu'il existe une section globale non nulle de F dont le lieu des zéros Z est non vide. Le schéma Z est de dimension pure 1 puisque $h^0(F(-1)) = 0$ et F est donc extension de I_Z par \mathcal{O}_X . On en déduit $h^0(F) = 1$ ce qui est absurde. Le faisceau F est donc isomorphe au fibré $H^0(F) \otimes \mathcal{O}_X$. ■

LEMME 3.2.—Soit R un faisceau cohérent sur \mathbf{P}^n ($n \geq 1$) tel que $h^0(R(-1)) = 0$ et

$\chi(R(n)) = n + 1$. Il existe alors une droite $\ell \subset \mathbf{P}^n$ telle que $R = \mathcal{O}_\ell$.

Démonstration.—Le faisceau R est de dimension 1 et on a donc $h^0(R) = h^1(R) + 1 \geq 1$. Soient $s \in H^0(R)$ une section non nulle et I_Z le noyau de l'application induite $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n} \rightarrow R$. On a $h^0(\mathcal{O}_Z(-1)) = 0$ et Z est donc de dimension pure 1. Considérons une section hyperplane générique $S \in |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)|$. On a $\ell(R_S) = 1$ et l'inclusion $\mathcal{O}_{Z \cap S} \subset R_S$ est donc un isomorphisme. On en déduit que Z_{red} est une droite $\ell \subset \mathbf{P}^n$ et que le schéma Z est génériquement réduit le long de ℓ . Le noyau de l'application surjective $\mathcal{O}_Z \rightarrow \mathcal{O}_\ell$ est de dimension zéro et donc trivial puisque $h^0(\mathcal{O}_Z(-1)) = 0$. On a donc $R = \mathcal{O}_\ell$ puisque ces deux faisceaux ont même polynôme caractéristique. ■

LEMME 3.3.—Soit R un faisceau cohérent sur \mathbf{P}^n ($n \geq 1$) tel que $h^0(R(-1)) = 0$ et $\chi(R(n)) = 2n + 2$. Alors il existe deux droites $\ell_1 \subset \mathbf{P}^n$ et $\ell_2 \subset \mathbf{P}^n$ telles que R soit extension de \mathcal{O}_{ℓ_2} par \mathcal{O}_{ℓ_1} ou bien $R(-1)$ est une thêta-caractéristique sur une conique lisse $C \subset \mathbf{P}^n$.

Démonstration.—Le faisceau R est de dimension 1 et on a donc $h^0(R) = h^1(R) + 2 \geq 2$. Soient $s \in H^0(R)$ une section non nulle et I_Z le noyau de l'application induite $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n} \rightarrow R$. On a $h^0(\mathcal{O}_Z(-1)) = 0$ et Z est donc de dimension pure 1. Soit $S \in |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)|$ une section hyperplane générique. On a $0 < \ell(Z \cap S) \leq \ell(R_S) = 2$. Notons Q le conoyau de l'inclusion $\mathcal{O}_Z \subset R$.

Supposons $\ell(Z \cap S) = 1$.—Le support du schéma Z est alors une droite ℓ_1 et ledit schéma est génériquement réduit le long de ℓ_1 . On a donc une application surjective $\mathcal{O}_Z \rightarrow \mathcal{O}_{\ell_1}$ dont le noyau est de dimension zéro. Ledit noyau est en fait trivial puisque $h^0(\mathcal{O}_Z(-1)) = 0$. Enfin, on a $\chi(Q(n)) = n + 1$ et $h^0(Q(-1)) = 0$ et le lemme 3.2 permet de conclure.

Supposons $\ell(Z \cap S) = 2$ et Q non trivial.—On a $h^1(R(-1)) = 0$ et on a donc $h^1(R(k)) = 0$ pour $k \geq -1$ (1.8). On en déduit en particulier $h^0(R) = 2$ et $h^0(R(1)) = 4$. Considérons la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Z(1) \rightarrow R(1) \rightarrow Q(1) \rightarrow 0$$

où Q est de dimension zéro. Le faisceau $R(1)$ est engendré par ses sections globales (1.8) et l'application $H^0(R(1)) \rightarrow H^0(Q(1))$ n'est donc pas identiquement nulle. On en déduit $h^0(\mathcal{O}_Z(1)) \leq 3$ et $h^0(I_Z(1)) \geq n - 2$. Il existe donc un plan $\mathbf{P}^2 \subset \mathbf{P}^n$ contenant le schéma Z . Notons J_Z l'idéal de Z dans ledit plan. On a $c_1(J_Z) = -2$ et on a donc une inclusion $J_Z \subset \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-2)$ qui induit une application surjective $\mathcal{O}_Z \rightarrow \mathcal{O}_C$ où C est une conique. Son noyau est de dimension zéro et donc trivial puisque $h^0(\mathcal{O}_Z(-1)) = 0$. On a donc une suite

exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow R \longrightarrow k(p) \longrightarrow 0$$

Si $p \notin C$ alors l'extension précédente est triviale ce qui est absurde puisque $h^0(R(-1)) = 0$. On a donc $p \in C$. Montrons que R est un \mathcal{O}_C -module. Soit $f \in H^0(I_C(k))$ ($k \geq 0$) l'équation d'une hypersurface de degré k contenant C . Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_C(-k) & \longrightarrow & K(-k) & \longrightarrow & k(p)(-k) \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_C(-k) & \longrightarrow & R(-k) & \longrightarrow & k(p)(-k) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \times f & & \downarrow \times f & & \downarrow \times f \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_C & \longrightarrow & R & \longrightarrow & k(p) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

où les complexes horizontaux sont exacts. Si l'application $K \rightarrow k(p)$ est nulle alors on a une inclusion $R(-k)/K(-k) \subset R$ avec $R(-k)/K(-k)$ de dimension zéro ce qui est impossible puisque $h^0(R(-1)) = 0$. Ladite application est donc surjective et on en déduit que l'application $R(-k) \rightarrow R$ est nulle. Le faisceau R est donc un \mathcal{O}_C -module. On vérifie alors qu'on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow I_p \longrightarrow H^0(R) \otimes \mathcal{O}_C \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

où I_p est l'idéal de p dans C . Si C est une conique lisse alors $R(-1)$ est la thêta-caractéristique sur C . Supposons C non lisse et soit $\ell \subset C$ une droite contenant p . L'inclusion $I_\ell \subset H^0(R) \otimes \mathcal{O}_C$ se factorise à travers l'inclusion $I_\ell \subset \mathcal{O}_C$ et on obtient ainsi une inclusion $\mathcal{O}_\ell \subset R$ dont le conoyau est également isomorphe au faisceau structural d'une droite (3.2).

Supposons $\ell(Z \cap S) = 2$ et $Q = 0$.—Le schéma Z_{red} est de degré au plus 2. S'il est de degré 2 ledit schéma est ou bien réunion de deux droites distinctes ou bien une conique lisse. On a alors une application surjective $\mathcal{O}_Z \rightarrow \mathcal{O}_C$ dont le noyau est trivial si C est réunion de droites disjointes et supporté en un point sinon. Ce dernier cas est impossible puisque $h^0(\mathcal{O}_Z(-1)) = 0$. Si Z_{red} est de degré 1 alors Z_{red} est une droite $\ell \subset \mathbf{P}^n$ et on a une surjection $\mathcal{O}_Z \rightarrow \mathcal{O}_\ell$ dont le noyau K vérifie $\chi(K(n)) = n + 1$ et $h^0(K(-1)) = 0$. Ce noyau est donc isomorphe au faisceau \mathcal{O}_ℓ (3.2). \blacksquare

LEMME 3.4.—*Soient $X \subset \mathbf{P}^4$ une cubique lisse et θ une thêta-caractéristique sur une conique lisse $C \subset X$. On considère le faisceau E noyau de l'application surjective $H^0(\theta(1)) \otimes$*

$\mathcal{O}_X \longrightarrow \theta(1)$. Alors E est stable de classes de Chern $c_1(E) = 0$, $c_2(E) = 2$ et $c_3(E) = 0$.

Démonstration.—Le calcul des classes de Chern de E est immédiat. Soit $F \subset E$ un sous-faisceau de rang 1 de E . Le faisceau F est de la forme $I_Z(a)$ où $Z \subset X$ est un sous-schéma fermé de dimension au plus 1 et $a \in \mathbf{Z}$. On a un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & H^0(\theta(1)) \otimes I_C & \xlongequal{\quad} & H^0(\theta(1)) \otimes I_C & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & H^0(\theta(1)) \otimes \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \theta(1) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \theta & \longrightarrow & H^0(\theta(1)) \otimes \mathcal{O}_C & \longrightarrow & \theta(1) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Notons F_0 le noyau de l'application induite $F \longrightarrow \theta$. On a une inclusion $F_0 \subset H^0(\theta(1)) \otimes I_C$. Le faisceau $H^0(\theta(1)) \otimes I_C$ est μ -semi-stable de pente nulle et on a donc $c_1(F) = c_1(F_0) \leq c_1(H^0(\theta(1)) \otimes I_C) = 0$ puisque θ est de dimension 1.

Si $c_1(F) < 0$ on a $\chi(F(n)) < \frac{1}{2}\chi(E(n))$ pour $n \gg 0$ par un calcul classique. Si $c_1(F) = 0$ alors $F = I_Z$ avec $\text{codim}(Z) \geq 2$ et on a donc $I_Z^{**} = \mathcal{O}_X$. L'inclusion $I_Z \subset H^0(\theta(1)) \otimes \mathcal{O}_X$ déduite de l'inclusion $E \subset H^0(\theta(1)) \otimes \mathcal{O}_X$ est donc donnée par une section non nulle $s \in H^0(\theta(1))$. L'application induite $I_Z \longrightarrow \theta(1)$ associe donc la section $f|_C s$ à la fonction f . La section s étant génériquement non nulle on en déduit $I_Z \subset I_C$ et donc $\chi(I_Z(n)) \leq \chi(I_C(n)) < \frac{1}{2}\chi(E(n))$ pour $n \gg 0$ puisque $\chi(I_C(n)) = \frac{n^3}{2} + \frac{3n^2}{2}$ et $\frac{\chi(E(n))}{2} = \frac{n^3}{2} + \frac{3n^2}{2} + n$. ■

THÉORÈME 3.5.—*Soient X une cubique lisse de \mathbf{P}^4 et E un faisceau de rang 2 semi-stable de classes de Chern $c_1(E) = 0$, $c_2(E) = 2$ et $c_3(E) = 0$. Si E est stable alors ou bien E est localement libre ou bien E est associé à une conique lisse $C \subset X$ (3.4). Si E est semi-stable non stable alors le gradué de E est somme directe des idéaux de deux droites de X .*

Démonstration.—Soit F le bidual de E et R le conoyau de l'injection canonique $E \subset F$. Le faisceau E est localement libre ou bien F est localement libre de seconde classe de Chern $c_2(F) = 1$ et $h^0(F) = 1$ ou bien $F = H^0(F) \otimes \mathcal{O}_X$ (3.1). On a $\chi(E(n)) = n^3 + 3n^2 + 2n$ et

$\chi(\mathcal{O}_X(n)) = \frac{n^3}{2} + \frac{3n^2}{2} + 2n + 1$ et on en déduit $h^0(E) = 0$ puisque E est semi-stable.

Supposons E localement libre.—On a $h^0(E) = 0$ puisque E est semi-stable et le fibré E est donc stable.

Supposons F localement libre de seconde classe de Chern $c_2(F) = 1$ et $h^0(F) = 1$.—Alors $\chi(R(n)) = n + 1$. Soit $s \in H^0(F)$ une section non nulle. Elle s'annule le long d'une droite $\ell_2 \subset X$ (2.1). On a $h^0(E) = 0$ et la section s de F induit une application non nulle $\mathcal{O}_X \rightarrow R$. Notons I_Z le noyau de l'application précédente. Le schéma Z est de dimension 1. Sinon on aurait une inclusion $I_Z \subset E$ avec $\chi(I_Z(n)) = \frac{n^3}{2} + \frac{3n^2}{2} + 2n + 1 - \ell(Z)$ ce qui est impossible par semi-stabilité de E . Soit $S \in |\mathcal{O}_X(1)|$ une section hyperplane générique. L'inclusion $\mathcal{O}_{Z \cap S} \subset R_S$ est un isomorphisme puisque $\ell(R_S) = 1$. Aussi la composante de dimension 1 du support de Z est une droite ℓ_1 et on a donc une application surjective $\mathcal{O}_Z \rightarrow \mathcal{O}_{\ell_1}$. On en déduit $R = \mathcal{O}_{\ell_1}$ puisque ces deux faisceaux ont même polynôme caractéristique. L'application $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{\ell_1}$ est non nulle et les droites ℓ_1 et ℓ_2 sont donc disjointes. Considérons le diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & I_{\ell_1} & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\ell_1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\ell_1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & I_{\ell_2} & \xlongequal{\quad} & I_{\ell_2} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

On en déduit que le faisceau E est semi-stable non stable et que son gradué est $I_{\ell_1} \oplus I_{\ell_2}$.

Supposons $F = H^0(F) \otimes \mathcal{O}_X$.—On a $\chi(R(n)) = 2n + 2$ et $h^0(E) = 0$ puisque E est semi-stable. On en déduit en particulier $h^0(R) \geq 2$. Considérons une section hyperplane générique $S \in |\mathcal{O}_X(1)|$. On a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow E_S \longrightarrow H^0(X, F) \otimes \mathcal{O}_S \longrightarrow R_S \longrightarrow 0$$

L'application $H^0(H^0(X, F) \otimes \mathcal{O}_S) \rightarrow H^0(R_S)$ n'est pas nulle puisque le morphisme $H^0(F) \otimes \mathcal{O}_S \rightarrow R_S$ est surjectif. On a donc $h^0(E_S) \leq 1$. Si $h^0(E_S) = 0$ alors l'application $H^0(F_S) \rightarrow H^0(R_S)$ est un isomorphisme et l'application $H^0(F_S) \otimes H^0(\mathcal{O}_S(n)) \rightarrow$

$H^0(R_S(n))$ est surjective pour tout $n \geq 0$ puisqu'il existe une section hyperplane de S évitant le support de R_S . Si $h^0(E_S) = 1$ alors le quotient $H^0(F_S)/H^0(E_S)$ est de dimension 1 et on a une application surjective $(H^0(F_S)/H^0(E_S)) \otimes \mathcal{O}_S \rightarrow R_S$. Or $\ell(R_S) = 2$ et $\mathcal{O}_S(1)$ est très ample et l'application $(H^0(F_S)/H^0(E_S)) \otimes H^0(\mathcal{O}_S(n)) \rightarrow H^0(R_S(n))$ est donc surjective pour $n \geq 1$. Il en résulte que l'application $H^0(F_S) \otimes H^0(\mathcal{O}_S(n)) \rightarrow H^0(R_S(n))$ est également surjective. On a donc finalement $h^1(E_S(n)) = 0$ pour $n \geq 1$ puisque $h^1(\mathcal{O}_S(n)) = 0$ pour $n \geq 1$. La suite exacte :

$$0 \rightarrow E(n-1) \rightarrow E(n) \rightarrow E_S(n) \rightarrow 0$$

donne $h^2(E(n-1)) \leq h^2(E(n))$ pour $n \geq 1$. On a donc $h^2(E(n)) = 0$ pour $n \geq 0$ puisque $h^2(E(n)) = 0$ pour $n \gg 0$. En particulier $h^2(E) = 0$. On déduit de la suite exacte :

$$0 \rightarrow E \rightarrow H^0(X, F) \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow R \rightarrow 0$$

l'égalité $h^3(E) = 0$. Mais $\chi(E) = 0$ et on a donc $h^1(E) = 0$. On en déduit $h^0(R) = 2$ et l'inclusion $H^0(F) \subset H^0(R)$ est donc un isomorphisme. Montrons alors que l'application de restriction $H^0(R) \rightarrow H^0(R_S)$ est injective. Supposons le contraire. Il existe donc une section $s \in H^0(R)$ non nulle dont l'image dans $H^0(R_S)$ est nulle. Notons I_Z le noyau de l'application $\mathcal{O}_X \rightarrow R$ définie par le section s et Q le conoyau de l'inclusion $\mathcal{O}_Z \subset R$. Par hypothèse, l'application $\mathcal{O}_{Z \cap S} \rightarrow R_S$ est nulle et on a donc $R_S = Q_S$. Le faisceau Q est donc de dimension 1 et $c_2(Q) = c_2(R)$. Le schéma Z est donc de dimension 0. Or $\chi(I_Z(n)) = \frac{n^3}{2} + \frac{3n^2}{2} + 2n + 1 - \ell(Z)$ ce qui est en contradiction avec la semi-stabilité de E puisqu'on a une inclusion $I_Z \subset E$. L'application de restriction $H^0(R) \rightarrow H^0(R_S)$ est injective et on a donc $h^0(R(-1)) = 0$. Le faisceau $R(-1)$ est donc ou bien une thêta-caractéristique sur une conique lisse $C \subset X$ auquel cas E est stable (3.4) ou bien il existe deux droites $\ell_1 \subset X$ et $\ell_2 \subset X$ telles que R soit extension de \mathcal{O}_{ℓ_1} par \mathcal{O}_{ℓ_2} (3.3) auquel cas on a un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & I_{\ell_1} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & I_{\ell_2} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \longrightarrow & H^0(F) \otimes \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \mathcal{O}_X \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\ell_1} & \longrightarrow & R & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\ell_2} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

On en déduit que le gradué de E est le faisceau $I_{\ell_1} \oplus I_{\ell_2}$. ■

4. Espace des modules des faisceaux semi-stables sur la cubique de \mathbf{P}^4

(4.1) Soit $X \subset \mathbf{P}^4$ une hypersurface cubique lisse et soit $(Def(E), 0)$ l'espace des déformations verselles d'un faisceau cohérent E sur X . L'espace tangent à $Def(E)$ en 0 s'identifie à l'espace vectoriel $Ext_X^1(E, E)$. Le germe analytique $Def(E)$ est lisse en 0 si $Ext_X^2(E, E) = 0$.

LEMME 4.2.—*Soient $X \subset \mathbf{P}^4$ une cubique lisse et θ une thêta-caratéristique sur une conique lisse $C \subset X$. Soit E le noyau de la surjection $H^0(\theta(1)) \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \theta(1)$. Alors $Ext_X^2(E, E)$ est nul et l'espace vectoriel complexe $Ext_X^1(E, E)$ est de dimension 5.*

Démonstration.—Soit F le noyau de la surjection $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^4} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4} \rightarrow \theta(1)$. On vérifie que le faisceau $F(1)$ est engendré par ses sections globales en utilisant le critère de Mumford-Castelnuovo (1.8). On en déduit que le faisceau $E(1)$ est également engendré par ses sections globales puisqu'on a un morphisme surjectif $F|_X(1) \rightarrow E(1)$. On a donc

$$\mathrm{Hom}_X(E, \theta(-1)) \subset \mathrm{Hom}_X(H^0(E(1)) \otimes \mathcal{O}_X(-1), \theta(-1)) = 0.$$

Considérons la suite exacte :

$$\mathrm{Ext}_X^2(H^0(\theta(1)) \otimes \mathcal{O}_X, E) \rightarrow \mathrm{Ext}_X^2(E, E) \rightarrow \mathrm{Ext}_X^3(\theta(1), E)$$

On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_X^2(H^0(\theta(1)) \otimes \mathcal{O}_X, E) &\simeq H^0(\theta(1)) \otimes H^2(E) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_X^3(\theta(1), E) &\simeq \mathrm{Hom}_X(E, \theta(-1))^* \\ &= 0 \end{aligned}$$

et donc $\mathrm{Ext}_X^2(E, E) = 0$. Enfin, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_X^3(E, E) &\simeq \mathrm{Hom}_X(E, E(-2))^* \\ &= 0 \end{aligned}$$

et $\mathrm{Hom}_X(E, E) \simeq \mathbf{C}$. L'espace vectoriel complexe $\mathrm{Ext}_X^1(E, E)$ est donc de dimension 5 puisque

$$\begin{aligned} \chi(E, E) &= \sum (-1)^i \mathrm{Ext}_X^i(E, E) \\ &= -4. \end{aligned}$$

■

LEMME 4.3.—Soit $X \subset \mathbf{P}^4$ une cubique lisse et soient $\ell_1 \subset X$ et $\ell_2 \subset X$ deux droites. Le groupe $\text{Ext}_X^2(I_{\ell_1}, I_{\ell_2})$ est nul et l'espace vectoriel complexe $\text{Ext}_X^1(I_{\ell_1}, I_{\ell_2})$ est de dimension 1 si $\ell_1 \neq \ell_2$ et de dimension 2 si $\ell_1 = \ell_2$.

Démonstration.—On a un isomorphisme $\text{Ext}_X^3(\mathcal{O}_{\ell_1}, I_{\ell_2}) \simeq \text{Hom}_X(I_{\ell_2}, \mathcal{O}_{\ell_1}(-2))^*$. Or le faisceau $I_{\ell_2}(1)$ est engendré par ses sections globales et on a donc

$$\text{Hom}_X(I_{\ell_2}, \mathcal{O}_{\ell_1}(-2)) \subset \text{Hom}_X(H^0(I_{\ell_2}(1)) \otimes \mathcal{O}_X(-1), \mathcal{O}_{\ell_1}(-2)) = 0.$$

Considérons la suite exacte :

$$\text{Ext}_X^2(\mathcal{O}_X, I_{\ell_2}) \longrightarrow \text{Ext}_X^2(I_{\ell_1}, I_{\ell_2}) \longrightarrow \text{Ext}_X^3(\mathcal{O}_{\ell_1}, I_{\ell_2})$$

On en déduit $\text{Ext}_X^2(I_{\ell_1}, I_{\ell_2}) = 0$ puisque $\text{Ext}_X^2(\mathcal{O}_X, I_{\ell_2}) = 0$. On a

$$\begin{aligned} \text{Ext}_X^3(I_{\ell_1}, I_{\ell_2}) &\simeq \text{Hom}_X(I_{\ell_2}, I_{\ell_1}(-2))^* \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \chi(I_{\ell_1}, I_{\ell_2}) &= \sum (-1)^i \text{Ext}_X^i(I_{\ell_1}, I_{\ell_2}) \\ &= \text{Ext}_X^0(I_{\ell_1}, I_{\ell_2}) - \text{Ext}_X^1(I_{\ell_1}, I_{\ell_2}) \\ &= \chi(I_{\ell_1}, I_{\ell_1}) \\ &= -1. \end{aligned}$$

L'espace vectoriel complexe $\text{Ext}_X^1(I_{\ell_1}, I_{\ell_2})$ est donc de dimension 1 si $\ell_1 \neq \ell_2$ et de dimension 2 si $\ell_1 = \ell_2$ puisque $\text{Hom}_X(I_{\ell_1}, I_{\ell_2}) = 0$ si $\ell_1 \neq \ell_2$ et $\text{Hom}_X(I_{\ell_1}, I_{\ell_2}) \simeq \mathbf{C}$ si $\ell_1 = \ell_2$. ■

(4.4) Soient $N \geq 1$ un entier et V un espace vectoriel complexe. Soient Q le schéma de Hilbert-Grothendieck paramétrant les quotients $V \otimes \mathcal{O}_X(-N) \longrightarrow E$ sur X de rang 2 et de classes de Chern $c_1(E) = 0$, $c_2(E) = 2$, $c_3(E) = 0$ et L la polarisation naturelle ([S]). Le groupe $G = PGL(V)$ agit sur Q et une puissance convenable de L est G -linéarisée. Soit Q_c^{ss} l'ouvert des points $PGL(V)$ -semi-stables correspondants à des quotients sans torsion et Q_c l'adhérence de Q_c^{ss} dans Q . Lorsque l'entier N et l'espace vectoriel V sont convenablement choisis les propriétés suivantes sont satisfaites. L'application $V \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow E(N)$ induit un isomorphisme $V \simeq H^0(E(N))$ et $h^i(E(k)) = 0$ pour $k \geq N$ et $i \geq 1$ et pour tout quotient E de Q_c . Le point $[E] \in Q_c$ est $PGL(V)$ -semi-stable si et seulement si le faisceau E est semi-stable si et seulement si $[E] \in Q_c^{ss}$. Le stabilisateur de $[E]$ dans $GL(V)$ s'identifie au groupe des automorphismes du faisceau E et l'espace des modules M_X des faisceaux semi-stables de rang 2 sur X et de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ et $c_3 = 0$ est alors le quotient de Mumford :

$$Q_c^{ss} // G$$

LEMME 4.5.—*Sous les hypothèses précédentes, le schéma Q_c^{ss} est lisse.*

Démonstration.—L'espace tangent à Q_c^{ss} en un point $[E]$ est isomorphe à $\text{Hom}_X(F, E)$ où F est le noyau de l'application $V \otimes \mathcal{O}_X(-N) \rightarrow E$. Le schéma Q_c^{ss} est lisse en ce point si $\text{Ext}_X^1(F, E) = 0$. Considérons la suite exacte :

$$\text{Ext}_X^1(V \otimes \mathcal{O}_X(-N), E) \rightarrow \text{Ext}_X^1(F, E) \rightarrow \text{Ext}_X^2(E, E)$$

On en déduit une inclusion $\text{Ext}_X^1(F, E) \subset \text{Ext}_X^2(E, E)$ puisque $h^1(E(N)) = 0$. Il suffit donc de prouver $\text{Ext}_X^2(E, E) = 0$. Si E est stable et localement libre alors le résultat est démontré par [MT] (lemme 2.7). Si E est stable non localement libre alors l'annulation cherchée est donnée par le lemme 4.2. Si E est strictement semi-stable alors E est extension de I_{ℓ_2} par I_{ℓ_1} où $\ell_1 \subset X$ et $\ell_2 \subset X$ sont deux droites. L'annulation cherchée résulte alors facilement du lemme 4.3. ■

THÉORÈME 4.6.—*Soit $X \subset \mathbf{P}^4$ une hypersurface cubique lisse. L'espace des modules M_X des faisceaux semi-stables de rang 2 sur X de classes de chern $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ et $c_3 = 0$ est lisse de dimension 5.*

Démonstration.—Soient $x \in Q_c^{ss}$ et E le faisceau correspondant. Soit $Q_c^s \subset Q_c$ l'ouvert des faisceaux stables et M_X^s l'ouvert des classes d'isomorphismes de faisceaux stables. Le schéma Q_c^s est un fibré principal sous G au dessus de M_X^s et M_X^s est donc lisse (4.5). Il nous reste à étudier M_X en $E = I_{\ell_1} \oplus I_{\ell_2}$ où $\ell_1 \subset X$ et $\ell_2 \subset X$ sont deux droites (3.5). L'orbite $O(x)$ du point x sous G est fermée. Son stabilisateur G_x est un groupe réductif et il existe un sous-schéma affine $W \subset Q_c^{ss}$ passant par x localement fermé et stable sous l'action de G_x tel que le morphisme $W//G_x \rightarrow Q_c^{ss}//G$ soit étale ([L]). Soit (W, x) le germe de W en x et soit F la restriction à $X \times (W, x)$ du quotient tautologique sur $X \times Q$. Alors $((W, x), F)$ est un espace de déformation verselles pour le faisceau E ([O] prop. 1.2.3). Le germe W est donc lisse en x (4.3) et puisque le morphisme $W//G_x \rightarrow Q_c^{ss}//G$ est étale il suffit donc prouver que le quotient $W//G_x$ est lisse en $[x]$. Or il existe un morphisme G_x -linéaire $(W, x) \rightarrow (T_x W, 0)$ étale en x tel que le morphisme induit $W//G_x \rightarrow T_x W//G_x$ soit étale en $[x]$ ([L]). Il suffit donc de prouver que le quotient $T_x W//G_x$ est lisse en 0.

Supposons les droites ℓ_1 et ℓ_2 distinctes. L'espace tangent $T_x W = \text{Ext}_X^1(E, E) = \bigoplus_{i,j} \text{Ext}_X^1(I_{\ell_i}, I_{\ell_j})$ est de dimension 6 (4.3) et $G_x = G_m \times G_m$ agit sur ledit espace par la formule ([O] lemme 1.4.16):

$$(t, t').(\sum_{i,j} e_{i,j}) = e_{1,1} + \frac{t}{t'} e_{1,2} + \frac{t'}{t} e_{2,1} + e_{2,2}$$

On vérifie facilement que le quotient $T_x W // G_x$ est isomorphe à l'espace affine \mathbb{A}^5 et en particulier lisse en 0.

Supposons les droites ℓ_1 et ℓ_2 confondues et notons ℓ cette droite. L'espace tangent $T_x W = \text{Ext}_X^1(E, E)$ est de dimension 8 (4.3) et $G_x = PGL(2)$. Posons $T = \text{Ext}_X^1(I_\ell, I_\ell)$ et soit U un espace vectoriel de dimension 2. Le groupe G_x agit sur $T_x W = T \otimes \text{End}(U)$ par conjugaison sur $\text{End}(U)$ ([O] lemme 1.4.16). Le quotient $T_x // G_x$ est isomorphe à l'espace affine \mathbb{A}^5 ([La] III cas 2) et en particulier lisse en 0. ■

LEMME 4.7.—*Soient $X \subset \mathbf{P}^4$ une cubique lisse et M_X l'espace des modules des faisceaux de rang 2 semi-stables de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ et $c_3 = 0$. Le sous-schéma localement fermé de M_X des faisceaux stables non localement libres est irréductible de dimension 4 et le sous-schéma fermé de M_X des faisceaux strictement semi-stables est également irréductible de dimension 4.*

Démonstration.—Soient B la surface de Fano de X et $Z \subset X \times B$ la variété d'incidence. La variété Z est lisse et irréductible de dimension 3 et le morphisme $Z \rightarrow B$ induit par la seconde projection fait de Z un fibré en droites projectives localement trivial pour la topologie de Zariski ([T]). Notons X_Z la variété obtenue en éclatant Z dans le produit $X \times B$ et notons p et q les morphismes induits sur X et B respectivement. La fibre du morphisme q au-dessus d'un point $[\ell] \in B$ s'identifie à X_ℓ (1.1). Soit Q le fibré de rang 3 sur B dont la fibre au-dessus d'un point $[\ell] \in B$ est l'ensemble des équations des hyperplans de \mathbf{P}^4 contenant la droite ℓ . Le morphisme surjectif naturel $q^* Q \rightarrow p^* \mathcal{O}_X(1)$ induit un morphisme propre et dominant $X_Z \xrightarrow{c} \mathbf{P}_B(Q)$. Le morphisme $p \times c$ induit un plongement de X_Z dans $X \times \mathbf{P}_B(Q)$ au-dessus de $\mathbf{P}_B(Q)$. L'ensemble des points de $\mathbf{P}_B(Q)$ est en bijection ensembliste avec l'ensemble des coniques tracées sur X . Soit $U \subset \mathbf{P}_B(Q)$ l'ouvert des coniques lisses et soit π la projection de $\mathbf{P}_B(Q)$ sur B . Soit $x \in U$ et $C_x = c^{-1}(x) \subset X$ la conique correspondante. La conique C_x engendre un plan de \mathbf{P}^4 dont l'intersection résiduelle avec X est la droite $\pi(x) = [\ell_x]$. Soit $Y = (c^{-1}(U) \cap Z_U)_{\text{red}} \subset c^{-1}(U) \subset U \times \mathbf{P}^4$ où $Z_U = Z \times_B U$. Le morphisme induit $Y \rightarrow U$ est alors fini de degré 2. La fibre du morphisme précédent au-dessus d'un point $x \in U$ est ensemblistement l'intersection $C_x \cap \ell_x$. Supposons Y irréductible. Le schéma $c^{-1}(U) \times_U Y$ possède une section au-dessus de Y . Ladite section détermine un morphisme quasi-fini $Y \rightarrow M_X$ dont l'image est précisément le sous-schéma localement fermé des faisceaux stables non localement libres (3.4). Le lemme est donc démontré dans ce cas. Si Y n'est pas irréductible alors le morphisme c possède une section au-dessus de l'ouvert U et l'argument précédent s'applique directement.

Les faisceaux strictement semi-stables sont paramétrés par les couples de droites de X (3.5). Or on a un morphisme quasi-fini $B \times B \rightarrow M_X$ dont l'image est le fermé des faisceaux

strictement semi-stables. La surface B est irréductible et ledit fermé l'est donc également. ■

THÉORÈME 4.8.—*Soient $X \subset \mathbf{P}^4$ une cubique lisse et M_X l'espace des modules des faisceaux de rang 2 semi-stables de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ et $c_3 = 0$. Soit B la surface de Fano de X . Alors M_X est isomorphe à l'éclatement d'un translaté de la surface $-B$ dans la jacobienne intermédiaire de X .*

Démonstration.—Soit $U \subset M_X$ l'ouvert des fibrés vectoriels stables; $M_X \setminus U$ est de dimension 4 (3.5 et 4.7). L'espace des modules M_X est lisse de dimension 5 (4.6) et l'ouvert U est donc dense. La variété M_X est donc irréductible (2.6 et [IM] cor. 5.1).

L'espace des modules M_X est le quotient de Mumford Q_c^{ss}/G et Q_c^{ss} est lisse (4.5). Soit \mathcal{E} une famille universelle sur $Q_c^{ss} \times X$. Fixons $t_0 \in Q_c^{ss}$. L'application

$$\begin{aligned} Q_c^{ss} &\rightarrow J(X) \\ t &\mapsto c_2(\mathcal{E}_t) - c_2(\mathcal{E}_{t_0}) \end{aligned}$$

est algébrique (1.1) et équivariante sous l'action du groupe G . On en déduit un morphisme que nous noterons encore c_2 de M_X vers $J(X)$. Ce morphisme est birationnel ([IM] thm. 3.2) et induit un isomorphisme par restriction à l'ouvert des fibrés stables (2.6 et [MT]).

Les variétés M_X et $J(X)$ sont lisses et le lieu exceptionnel D de c_2 est donc de codimension pure 1. Le diviseur D a au plus deux composantes irréductibles. La restriction de c_2 au diviseur des faisceaux strictement semi-stables est génériquement finie et le morphisme c_2 est donc un isomorphisme au point générique du diviseur considéré.

La grassmannienne des plans de \mathbf{P}^4 est rationnelle et les cubiques planes tracées sur X sont donc toutes rationnellement équivalentes. Soient C_0 et C_1 deux coniques tracées sur X et ℓ_0 et ℓ_1 les intersections résiduelles respectives des plans des coniques avec X . On a donc $C_1 = C_0 + \ell_0 - \ell_1$ dans $J(X)$. Si E est un faisceau associé à une conique $C \subset X$ (3.4) alors $c_2(E) = C$. On en déduit que le diviseur adhérence des faisceaux stables non localement libres est contracté sur un translaté de $-B$ dans $J(X)$. Ce diviseur est irréductible (4.7) et M_X est donc isomorphe à l'éclatement d'un translaté de $-B$ dans $J(X)$ ([Lu] thm. 2). ■

Références bibliographiques

- [ACGH] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, J. Harris, *Geometry of Algebraic curves I*, Grundlehren der math. Wissenschaften, vol. 267, Springer Verlag (1985).
- [H1] R. Hartshorne, *Stable vector bundles of rank 2 on \mathbf{P}^3* , Math. Ann. 238 (1978), 229-280.
- [H2] R. Hartshorne, *Stable reflexives sheaves*, Math. Ann. 254 (1980), 121-176.
- [IM] A. Iliev, D. Markushevich, *The Abel-Jacobi map for a cubic threefold and periods of Fano threefolds of degree 14*, Documenta Math. 5 (2000), 23-47.
- [La] Y. Laszlo, *Local structure of the moduli space of vector bundles over curves*, Comment. Math. Helvetici 71 (1996), 373-401.
- [L] D. Luna, *Slices étales*, Mém. Soc. Math. France 33 (1973), 81-105.
- [Lu] Z. Luo, *Factorization of birational morphisms of regular schemes*, Math. Z. 212 (1993), 505-509.
- [MT] D. Markushevich, A.S. Tikhomirov, *The Abel-Jacobi map of a moduli component of vectors bundles on the cubic threefold*, math. AG/9809140, à paraître dans J. Alg. Geom.
- [M] M. Maruyama, *Boundedness of semi-stable sheaves of small ranks*, Nagoya Math. J. 78 (1980), 65-94.
- [Mum] D. Mumford, *Lectures on curves on an algebraic surface*, Annals of Math. Studies 59, Princeton university Press (1966).
- [Mu] J.P. Murre, *Some results on cubic threefolds* dans *Classification of algebraic varieties and compact complex manifolds*, Springer-Verlag Lecture Notes 412 (1974), 140-164.
- [O] K. O'Grady, *Desingularized moduli spaces of sheaves on a $K3$* , J. Reine Angew Math. 512 (1999), 49-117.
- [S] C. Simpson, *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth variety*, Publ. Math. IHES 79 (1994), 47-129.
- [T] A.N. Tyurin, *The Fano surface of a nonsingular cubic in \mathbf{P}^4* , Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. 34 (1970), 1200-1208.