THÈSES D'ORSAY

JACQUES CARETTE

Liens entre la géométrie et la dynamique des ensembles de Julia

Thèses d'Orsay, 1997

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1997__0471__P0_0>

L'accès aux archives de la série « Thèses d'Orsay » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

UNIVERSITÉ PARIS SUD

NUMDAM

Thèse numérisée par la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016
et diffusée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

63607

ORSAY
N° d'ordre :

UNIVERSITE PARIS-SUD
Centre d'Orsay

THÈSE

présentée
pour obtenir

Le titre de Docteur en Sciences
Spécialité : **Mathématique**

Par

Jacques CARETTE

Sujet :

Liens entre la géométrie et la dynamique des ensembles de Julia

Soutenue le 11 décembre 1997 devant la Commission d'examen

Adrien DOUADY
John H. HUBBARD
Carsten L. PETERSEN
Duncan SANDS
Michel ZINSMEISTER

Liens entre la géométrie et la dynamique des ensembles de Julia

Jacques Carette

5 décembre 1997

Abstract

The problems attacked in this thesis are questions of equivalence between geometric and dynamic conditions in the iteration of rational functions on the Riemann sphere. Such ideas were recently explorad by Carleson, Jones and Yoccoz in their article "Julia and John", and this thesis expands on these ideas in two directions.

First, generalisations of the semi-hyperbolicity and John conditions are explored. More precisely, Hölder and α-spike conditions are defined, and some of their properties are established. In parallel, first the Collet-Eckmann, and then more generally, conditions of expansion of the derivative along the critical orbit are studied, along with expansion conditions on Fatou domains. Using known properties of conformal maps, exact relations are derived between these properties; some equivalences are conjectured, but only partly proven, along with some additional results which strengten the conjectures. Finally, a precise relation between the Collet-Eckmann condition, an expansion condition on the whole Julia set, and the Hölder condition is proved. This theorem is inspired by a similar one in one-dimensional real dynamics.

Secondly, a remark of Carleson, Jones and Yoccoz is proved: in the semi-hyperbolic case, there exists an admissible metric on the Julia set such that the dynamics are expanding for that metric. In fact, this metric is explicitly constructed in the proof. Also, an admissible metric is defined in a very general setting, and certain interesting properties, both positive and negative, of these metrics are proved.

Remerciements

Je dois tout d'abord remercier Adrien Douady qui a accepté d'être mon directeur de thèse, sans trop savoir qui j'étais. Plus, comme je lui avais demandé, il m'a laissé chercher un sujet qui me convenais, puis m'a laissé explorer à ma guise. De ceci, j'ai accompli le but que je m'étais donné pour cette thèse: découvrir et apprendre le plus de dynamique holomorphe possible. Et, lorsque j'ai eu besoin d'un problème plus concret que celui que je m'étais posé, il m'a proposé celui des métriques expansives; c'est surement sur ce sujet que cette thèse éclaire le mieux. Il m'a aussi laissé envahir son bureau a tout moment, bureau déjà surchargé, son apartement quand j'avais des questions, et même ses promenades au marché rue Mouffetard, et je le remercie de tout cela. Et c'est lui qui m'a vraiment appris le pouvoir pédagogique d'un bon dessin. Il m'a aussi poussé à demander de l'aide à ceux le mieux placés pour le faire, ce qui m'a permis de longues et fructueuses conversations avec deux individus: John Hamal Hubbard et Duncan Sands.

Je dois remercier John Hubbard pour les longues discussions (parfois pénibles pour un mathématicien comme lui, vu mon manque chronique de précision!) sur le théorème de Mañé et les métriques expansives, à Orsay comme lors de ma visite chez lui à Ithaca. Sa générosité (et celle de sa famille) me fait honneur, et je suis fier qu'il a accepté d'être rapporteur pour cette thèse.

Duncan Sands m'a écouté dire des sornettes pendant des heures durant, m'a enseigné presque tout ce que je sais sur la dynamique réelle, et a souvent éclairé ma voie en me montrant en détails des situations similaires en dynamique réelle. Il a aussi apporté des critiques justes sur certaines parties de cette thèse, et a bien voulu faire partie du jury, et pour tout cela je le remercie.

Je remercie Michel Zinsmeister d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie chaleureusement Carsten Petersen qui a non seulement accepté d'être rapporteur, mais a lu cette thèse méticuleusement en m'apportant maints commentaires qui vont apporter une réelle contribution à la forme finale de cette thèse.

Je tiens à remercier spécialement Laurence Stephen, sans laquelle je ne suis pas certain d'avoir pu terminer. L'aide qu'elle m'a donné ignorant les divers obstacles (fuseaux horaires, un océan, et que le courier électronique comme mode de communication) m'a permis de terminer ce que j'avais commencé il y a maintenant si longtemps.

Dan Sørensen m'a aussi aidé: toutes les fois où les événements semblaient conspirer contre moi, il était là à m'encourager, et à m'écouter. Il est en partie responsable pour ma

persévérence malgré tout les obstacles, et il a gagné mes sincères remerciements.

Tout un autre groupe m'a aidé: le projet ALGO à l'INRIA Rocquencourt. Sans l'accueil chaleureux donné à un pauvre canadien perdu en France par Philippe "le grand chef" Flajolet et toute son équipe, cette thèse aurait été beaucoup plus pénible (quoique possiblement plus courte!). Finalement, les coups de fouets symboliques et les constantes (et irritantes) corrections à mon français lamentable, de Bruno Salvy, les délires de Philippe Jacquet, les blagues scatologiques de Pierre Nicodème, les vendredi démentiels de Frédéric Chyzak, les cigarettes de Philippe Flajolet, la pipe de Philippe Dumas ainsi que les voyages de la pauvre Virginie me manqueront tout autant que les conversations sur le design de Maple avec Bruno, la générosité de Philippe J, les dinners chez Pierre, les discussions sur l'holonomie avec Frédéric, les discussions tardives sur toutes les maths avec Philippe F, les bouffes et l'oreille attentive de Philippe D, ainsi que l'efficacité et l'amiabilité de Virginie.

Finalement, je veux remercier mon épouse, Eithne Murray, qui a accepté de déménager dans un pays aux coutumes étranges, où l'on parle une langue qu'elle possédait à peine, sans grandes chances de trouver un emploi qui l'avancera dans une carrière débutante. Jamais elle ne m'a dit d'avoir regretté ce choix, et toujours supportant le mien. Elle a même accepté de mettre nos plans au point neutre lors de nôtre retour au Canada pour que je puisse jouir de tout le temps qu'il me fallait pour terminer cette thèse à temps partiel. Pour tout cela, je la remercie avec amour.

Table des matières

1 Introduction **5**
- 1.1 Contexte 5
- 1.2 Résultats 7
  - 1.2.1 Géométrie générale 8
  - 1.2.2 Condition de Collet-Eckmann 8
  - 1.2.3 Métriques admissibles 9
- 1.3 Structure du reste 9
- 1.4 Notations et conventions 10

2 Domaines de John et de Hölder **12**
- 2.1 Domaines de John 13
- 2.2 Domaines de John simplement connexes 18
- 2.3 Préliminaires géométriques: la métrique quasi-hyperbolique 21
- 2.4 Domaines de Hölder 21
- 2.5 Domaines de Hölder simplement connexes 23
- 2.6 John sous-ensemble propre de Hölder 27
- 2.7 John et dynamique 28
- 2.8 A_∞ hölderien et dynamique 29

3 Au-delà de Hölder **32**
- 3.1 Géométrie et dynamique 33
- 3.2 Domaines plus généraux 36
- 3.3 Exemples 40
  - 3.3.1 Ensembles de Julia paraboliques 40
  - 3.3.2 Disques de Siegel 41

4 Préliminaires sur la distorsion **42**
- 4.1 Fonctions univalentes 42
- 4.2 Près d'un point critique 43
- 4.3 Voisinages décroissants 45
- 4.4 Voisinages décroissants imbriqués 49

4.5 Degré borné 51
4.6 Théorème de Mañé 52

5 Collet-Eckmann implique Hölder **56**
5.1 Constantes 58
5.2 Itérés r-critiques 60
5.3 Itérés r-univalents 61
5.4 Itérés r-semi-critiques 63
5.5 Décomposition d'une Orbite 65
5.5.1 Première Étape 65
5.5.2 Étapes Suivantes 66
5.5.3 Conclusion 67

6 Métrique expansive **70**
6.1 Définitions 70
6.2 Le cas non-récurrent 72
6.3 Une métrique admissible 79
6.4 De retour à Collet-Eckmann 80

7 Corollaires **82**
7.1 Points Périodiques Uniformément Hyperbolique 82
7.2 Deuxième condition de Collet-Eckmann 84
7.3 Diamètre 84
7.4 Hölder implique Collet-Eckmann (topologique) 86

8 Conclusions, remarques et conjectures **87**
8.1 Influence de la dynamique réelle 87
8.2 Le plan des paramètres 88
8.3 Points critiques inutiles 88

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte

Les problèmes qui sont abordés dans cette thèse sont des questions d'équivalences de conditions géométriques et de conditions dynamiques pour l'itération de fonctions rationnelles de la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$. Ces idées se retrouvent implicitement dans les Notes d'Orsay [10] dans les cas hyperboliques et sous-hyperboliques, mais ne furent explicités que très réçemment par Carleson, Jones et Yoccoz dans leur article "Julia et John" [8]. Dans cet article, ils démontrent le théorème remarquable (théorème 1.1):

Théorème 1.1. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *P est semi-hyperbolique*
2. *P n'a pas d'orbites paraboliques et $c \notin \omega(c)$ pour tout point critique $c \in J$*
3. *A_∞ est un domaine de John*
4. *A_∞ est un domaine de John et tout domaine de Fatou borné $\mathcal{F}_j$ a un quasi-cercle pour frontière $\partial\mathcal{F}_j$ (et donc $\mathcal{F}_j$ est aussi un domaine de John)*

Notre but est donc de généraliser ce résultat. Une exploration de la littérature sur les domaines de John et leurs propriétés semble indiquer que la généralisation naturelle des domaines de John est la notion de domaines de Hölder, qui ensuite se généralisent aux domaines de Poincaré. La condition de semi-hyperbolicité n'avait pas elle, dans le contexte de l'itération des fonctions analytiques de $\overline{\mathbb{C}}$, de généralisation évidente. Cependant, il est assez connu qu'il y a une grande similarité entre cette théorie et, par exemple, la théorie de l'itération des fonctions réelles de $f : [0,1] \to [0,1]$ de classe C^3 avec points critiques non-plats. Dans cette théorie, et plus spécifiquement dans le cas des applications unimodales, la généralisation de semi-hyperbolique existe et a été très fructueuse. La condition en question, nommée condition de Collet-Eckmann car elle apparut pour la première fois dans leurs travaux (voir [9]), est que la dérivée le long de l'orbite critique croisse exponentiellement

avec le nombre d'itérations. Et il est assez évident que ceci généralise bien la condition de semi-hyperbolicité dans le cas de $z^2 + c$, et nécessite plus d'étude dans les cas avec plusieurs points critiques.

Il y a aussi d'autres travaux à considérer pour bien comprendre le résultat de Carleson, Jones et Yoccoz, mais ceux-ci sont un peu dans la direction opposée: il s'agit des spécialisations de John et de cas semi-hyperboliques de Volberg et Balogh (voir [1]) qui introduisent les notions de John uniforme et de dynamique semi-hyperbolique séparée, qu'ils démontrent équivalent. Si on étudie bien l'effet nécessaire sur la dynamique de la décroissance progressive de régularité géométrique et vice-versa, ceci permet de bien comprendre les phénomènes importants qui doivent être soigneusement contrôlés pour effectivement généraliser ces résultats.

À bien regarder les démonstrations de [8], on s'aperçoit assez rapidement que tout semble reposer sur un bon contrôle de la distorsion, et que si l'on réussi à bien la contrôler, on pourra en effet obtenir de la régularité géométrique sur les composantes de Fatou à partir de conditions d'expansivité sur l'orbite critique. Un bel exemple de ceci sont les résultats de F. Przytycki [31, 32] sur la dimension de Hausdorff et les mesures conformes pour les applications de Collet-Eckmann. Un saut en avant fut accomplit par Graczyk et Smirnov qui ont démontré que pour le polynôme $z^2 + c$ satisfaisant la condition de Collet-Eckmann, alors le bassin à l'infini A_∞ est un domaine de Hölder. En utilisant la construction inventée par ceux-ci, l'auteur en parallèle avec Graczyk et Smirnov, a démontré le cas général. Depuis, une nouvelle démonstration très élégante de ce théorème a été trouvée par Przytycki et Rohde [34] qui utilisent des techniques assez différentes des précédentes.

La direction opposée est beaucoup plus difficile. A ce jour, on connaît deux résultats dans cette direction: que dans le cas $z^l + c$ avec l un entier pair et c réel, si A_∞ est un domaine de Hölder alors $z^l + c$ est une application de Collet-Eckmann et le cas de $z^2 + c$ général. Le premier résultat utilise de façon fondamentale les résultats récents et élégants de Nowicki et Sands [28] sur l'équivalence de nombreuses conditions (dans le cas réel indiqué ci-haut) à la condition de Collet-Eckmann. Le deuxième cas est un résultat récent de Przytycki [33] qui repose sur des estimations délicates de distorsion.

Toutefois, on conjecture quand même que ceci est vrai:

Conjecture 1.2. *Soit P un polynôme de degré d. Alors A_∞ est un domaine de Hölder si et seulement si f n'a pas de cycles paraboliques et tout les points critiques dans $J(P)$ qui ne rencontrent pas un autre point critique dans son orbite satisfait la condition de Collet-Eckmann pour une métrique adaptée.*

Dans ce contexte, cette conjecture est évidemment une généralisation du théorème de Carleson, Jones et Yoccoz. Plusieurs plans d'attaque possible seront indiqués dans cette thèse, avec des résultats partiaux à l'appuis.

En fait, il existe même des versions plus générales de la conjecture ci-haut, mais qui sont moins élégantes car moins géométriques. Cependant, elle couvrent les cas des applications de Collet-Eckmann où $J = \overline{\mathbb{C}}$, cas qui se produit déjà effectivement pour les applications semi-hyperboliques rationnelles générales, qui ne peut évidemment être vu de façon

géométrique. Dans le cas des conditions géométriques plus générales que Hölder, si peu est connu qu'aucune conjecture générale n'est encore raisonnable.

Il est à noter que les conditions pour avoir des domaines de John ou de Hölder sont généralement données pour des domaines simplement connexes. Cependant, il en existe des versions équivalentes qui ne nécessitent pas cette hypothèse. Ce seront par la suite ces versions que nous utiliseront car les résultats restent vrais dans ce cadre plus général.

Il reste quand même que si les domaines de Fatou sont simplement connexes, on peut faire beaucoup mieux: il existe généralement une relation simple entre le nombre d'itérés requis pour qu'un point z s'échappe d'un voisinage de la frontière du domaine et la distance (quasi-) hyperbolique de z à un point fixé z_0 ("le centre") du domaine. Similairement, il existe une relation directe entre la distance (euclidienne ou sphérique selon les cas) à la frontière du domaine et la croissance de la dérivée le long d'une orbite qui s'échappe d'un voisinage de la frontière. De ces résultats, on obtient des relations explicites entre la géométrie d'un domaine de Fatou et la croissance de la dérivée d'une itérée de points dans ce domaine.

Une autre question qui se pose naturellement est l'existence de métriques admissibles qui rendent de tels systèmes dynamiques expansifs. Cette étude fut commencée par Douady et Hubbard (voir les Notes d'Orsay [10]) dans les cas hyperboliques et sub-hyperboliques, puis Yoccoz a fait le commentaire que cette approche devrait s'étendre au cas semi-hyperbolique. On explicitera tous les détails de la construction d'une telle métrique, ainsi que d'autres métriques admissibles dans des cas plus généraux, mais dont les propriétés d'expansivité sont encore inconnues.

Il existe une relation intrigante entre les applications Collet-Eckmann rationnelles et la dynamique qui n'a toujours pas été exploitée: M. Rees dans son article "Positive measure sets of ergotic rational maps" [36] démontre en fait qu'il existe un ensemble de mesure positive d'applications rationnelles de degré d qui sont des applications de Collet-Eckmann et qui ont $J = \overline{\mathbb{C}}$. Il est clair qu'aucune méthode basée sur la géométrie des composantes de Fatou n'élucidera les diverse propriétés de ces applications, mais certains des résultats intermédiaires sur les applications de Collet-Eckmann seront applicables. On obtient, par exemple, que la dynamique semble être expansive. En fait, on conjecture même l'existence d'une métrique admissible, nécessairement très singulière puisque les orbites critiques sont génériquement denses, pour laquelle l'application serait fortement expansive. On sait déjà que ceci est vrai dans le cas pour les applications sous-hyperbolique, et Yoccoz remarque que ce l'est aussi pour les applications semi-hyperbolique. Ces cas sont plus simples puisque les singularités ne sont pas denses.

1.2 Résultats

Les résultats principaux de cette thèse peuvent être partagés en trois catégories:

1. Géométrie générale.

2. Condition de Collet-Eckmann.

3. Métriques admissibles.

Quelques autres résultats sont obtenus, de moindre envergure, mais nouveaux, et en particulier

1. Soit f une application de Collet-Eckmann, alors les cycles périodiques ont des multiplicateurs uniformément hyperboliques.

2. Soit f telle que A_∞ est un domaine de Hölder, alors les cycles périodiques ont des multiplicateurs uniformément hyperboliques.

3. Une nouvelle méthode de démonstration de la connectivité locale de certains ensembles de Julia, notamment ceux contenant des cycles paraboliques.

1.2.1 Géométrie générale

À partir d'un lemme de distorsion (local) connu, on peut démontrer un lien général entre la géométrie d'un domaine de Fatou simplement connexe et la dynamique près du bord du domaine. En fait, on démontre (voir [14]) une relation exacte entre la distance quasi-hyperbolique d'un point à un autre au "centre" d'un domaine de Fatou et le nombre d'itérations pour que ce point s'échappe du bord et soit au "centre". De même, on relie la distance euclidienne au bord et la dérivée le long de cette dernière orbite. Les relations sont assez explicites pour pouvoir obtenir que, grossièrement, les domaines de Hölder correspondent à une croissance exponentielle de la dérivée, et les domaines de Poincaré (et ceux à α-pointes) correspondent à une croissance polynomiale de la dérivée. Ceci correspond parfaitement à l'idée générale qu'une certaine forme d'expansion correspond à une certaine régularité géométrique et vice-versa. Ce que l'on obtient surtout est une relation entre les domaines à α-pointes (exemples: les domaines A_∞ pour $z^2 + c$ paraboliques), et la croissance de la dérivée le long d'une orbite qui s'éloigne de la frontière du Julia. Le plus intriguant sont des résultats (partiels) reliant les ensembles de Julia avec disque de Siegel de nombre de rotation irrationnel de type borné aux domaines à α-pointes.

1.2.2 Condition de Collet-Eckmann

Théorème 1.3. *Soit f une application rationnelle sans cycles indifférents rationnels dont tout les points critiques qui sont dans le Julia $J(f)$ ont la même multiplicité, ν la multiplicité des points critiques dans $J(f)$ (notés Crit'), et $\Delta(z) = d(z, O^+(\mathrm{Crit}'))$. Alors sont équivalents:*

1. *Il existe $C > 0, \lambda > 1$ tel que pour tout point critique $c \in \mathrm{Crit}'$ alors pour tout $n \geqslant 0$*

$$|(f^n)'(c)| \geqslant C\lambda^n$$

2. *Il existe un voisinage U de $J(f)$, $C > 0, \Lambda > 1$ tels que*

(a) pour tout les points $z \in U \cap J(f)$, $y \in J(f)$ tel que $f^n(y) = z$,

$$|(f^n)'(y)| \geqslant C\Lambda^n \min_{0 \leqslant i < n} |f'(f^i(y))| \tag{1.1}$$

(b) pour tout les points $z \in U \setminus J(f)$, et y tel que $f^n(y) = z$,

$$|(f^n)'(y)| \geqslant C\Lambda^n \Delta(z)^{1-1/\nu} \tag{1.2}$$

La condition sur la plus petite dérivée est nouvelle, ainsi que le fait que, sous cette forme, ceci est équivalent à Collet-Eckmann. Le résultat à l'extérieur du Julia a été obtenu parallèlement par l'auteur et Graczyk et Smirnov [14]. Les méthodes utilisées sont celles d'une version préliminaire de [14] qui ne couvrait que le cas $f(z) = z^2 + c$.

Ce résultat implique assez facilement que les domaines de Fatou sont des domaines de Hölder.

1.2.3 Métriques admissibles

Suivant Douady-Hubbard et Yoccoz, on s'intéresse aux métriques admissibles les plus générales possible pour obtenir que certaines dynamiques sont uniformément expansives pour ces nouvelles métriques. La principale difficulté provient du fait que l'orbite critique est infinie, alors la démonstration que toute métrique candidate définit en fait une métrique comparable à la métrique euclidienne présente des problèmes intéressants. Dans le cas de $z^2 + c$ où 0 est non-récurrent, suivant une suggestion de Yoccoz, on arrive à démontrer qu'en successivement modifiant la métrique $\frac{|dz|}{d(z,\omega(c))^{1/2}}$ on arrive à une métrique admissibles, comparables à la métrique euclidienne et expansive. Malheureusement, cette métrique se prête très mal à des cas plus généraux. Une autre métrique, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|(f^n)'(c)|d(z,f^n(c))^{1/2}}|dz|$ se montre facilement admissible, comparable à la métrique euclidienne sous de faibles hypothèses, mais résiste à toute démonstration d'expansivité, même dans le cas non-récurrent.

1.3 Structure du reste

Le deuxième chapitre est un exposé des concepts géométriques simples utilisés dans cette thèse: les domaines de John et les domaines de Hölder. Introduits tour à tour, les exposés sont toutefois parallèles: premièrement, le cas général est introduit, puis le cas où le domaine est simplement connexe est introduit, et quelques propriétés de base sont démontrés. On commence par les domaines de John, puis après une interlude sur la métrique quasi-hyperbolique, les domaines de Hölder sont introduits. On poursuit par une démonstration que tout domaine de John est un domaine de Hölder, mais que cette inclusion est stricte. On finit par des sections où l'on étudie la dynamique des domaines de Fatou qui sont John ou Hölder.

Le troisième chapitre expose un lien général entre la dynamique dans les domaines de Fatou et la géométrie de ces domaines. Pour des cas géométriquement intéressant, ce lien est explicité, ce qui nous amène à définir les domaines à α-pointes ainsi que les domaines de

Poincaré, ainsi que d'exposer certaines de leur propriétés de base. Des liens, quelques fois conjecturaux, avec les cycles paraboliques et les disques de Siegel sont aussi exposés.

Le quatrième chapitre recueille tous les théorèmes de distorsion dont nous auront besoin dans la suite. Certains sont classiques, d'autres reposent sur des idées nouvelles, tels les voisinages décroissants, qui sont des résultats utiles indépendamment du reste. Certains de ces résultats, tel la compacité des application de degré borné, sont sûrement connues, mais ne figurent pas dans les textes de référence standard. Enfin, une démonstration plus simple du théorème de Mañé est donnée.

Le cinquième chapitre contient la démonstration complète du théorème énoncé ci-haut sur la condition de Collet-Eckmann. À noter est le lien assez clair entre la décomposition dynamique d'une orbite utilisé dans la démonstration et les divers types de pièces de puzzle de Yoccoz.

Le sixième chapitre contient premièrement la définition d'une métrique dans le cas de $z^2 + c$ où 0 est non-récurrent, puis la démonstration que cette métrique est admissible ainsi qu'expansive. On poursuit par la définition d'une métrique plus générale qui est admissible sous de très faibles hypothèses mais dont les propriétés d'expansivité sont encore inconnues.

Le septième chapitre donne quelques propriétés reliés aux applications de Collet-Eckmann et aux domaines de Hölder en dynamique. Ces diverses propositions servent à démontrer non seulement la riche structure de ces conditions, mais aussi à supporter la conjecture principale. Quelques propriétés intéressantes sur la non-récurrence sont aussi exposés.

Le huitième et dernier chapitre est un survol des questions qui restent ouvertes, des nouvelles questions qui se posent et de plusieurs conjectures assez naturelles. Il contient aussi des discussions autour de résultats connus qui ne sont pas autrement exposés ici, mais qui semblent être reliés aux résultats autour des applications de Collet-Eckmann. De nouveaux, plusieurs questions sont posées.

1.4 Notations et conventions

Avant d'aborder tout ceci, on doit fixer quelques notations et quelques conventions qui seront utilisés (sans autre mention) dans le reste de cet ouvrage. Tout d'abord, on suppose que le lecteur est assez familier avec les bases de la théorie de l'itération des fractions rationnelles. Il existe plusieurs bonnes introductions, notamment [2, 6, 44, 24]; on suppose aussi une bonne connaissance des idées dans les Notes d'Orsay [10]. On ne suppose cependant pas de connaissances a priori des domaines du plan du point de vue de la théorie géométrique des fonctions, ce qui nous amènera a introduire les concepts et outils de ce domaine de façon assez détaillé, et à toujours fournir des références voulues exactes lorsque les démonstrations ne sont pas incluses.

Par représentation conforme d'un domaine D du plan, on veux dire une application univalente $\psi : \mathbb{D} \to D$ surjective. Si $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ et D contient le point à l'infini (comme c'est le cas pour tout domaine de Fatou à l'infini pour un polynôme), alors on supposera que $\psi : \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \to D$. Dans ce cas, on supposera aussi ψ normalisé pour que $\psi(\infty) = \infty$ et $\psi'(\infty) = 1$.

Dans ce qui suit, P est toujours un polynôme de degré $\geqslant 2$, et $J(P)$ son ensemble de Julia. On note $\omega(x)$ l'ensemble limite de l'orbite du point x. On notera Crit l'ensemble des points critiques de P, et Crit$'$ les points critiques qui sont dans $J(P)$.

On note A_∞ le bassin attractif associé au point à l'infini d'un polynôme complexe P. Soit $T_l : z \mapsto z^l$ la dynamique conjuguée.

On note $B(x,r)$ le disque de rayon r centré en x. On note $B_n(x,r)$ une composante connexe de $P^{-n}(B(x,r))$. Dans un cadre plus général, on utilisera l'abbréviation c. c. pour dénoter une composante connexe arbitraire d'un ensemble.

Les constantes que l'on ignore seront dénotées C, alors que celles dont l'expression exacte est volumineuse mais cependant utile pour la suite seront nommées C_1, C_2, ..., C_n.

Pour toute fonction f, on notera ν la multiplicité maximale des points critiques de f dans $J(f)$. Par exemple, pour $z^2 + c$, $\nu = 2$, pour $z^l + c$, $\nu = l$ alors que si $a \neq 0$, $\nu = 2$ pour $z^3 - 2a^2 z + b$.

Chapitre 2

Domaines de John et de Hölder

Le but de ce chapitre est de définir les domaines de John et de Hölder, de voir les similarités et les différences, ainsi que de voir que les domaines de Hölder sont une généralisation naturelle des domaines de John. Premièrement, les domaines de John sont définis de façon géométrique, dans $\overline{\mathbb{C}}$, avec un survol rapide de plusieurs définitions équivalentes. Vu l'incroyable diversité et le nombre de telles définitions, ce survol ne peut qu'être incomplet; cependant, les références devraient combler ce vide. De plus, les domaines de John sont généralement définis dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, mais ceci nous amènerais trop loin de notre sujet - le lecteur est à nouveau dirigé vers les références. Ensuite, le cas où les domaines de John en question sont des sous-ensembles simplement connexes de $\overline{\mathbb{C}}$ est détaillé, car ce sont eux que l'on utilisera le plus souvent. De surcroît, leur relation avec les domaines de Hölder du même type est plus immédiate. Dans la troisième section, on commence par définir la métrique quasi-hyperbolique, qui servira premièrement à définir géométriquement les domaines de Hölder et sera fort utilisée, fructueusement d'ailleurs, au prochain chapitre. Quelques propriétés de la métrique quasi-hyperbolique sont exposées. Dans la quatrième section, les domaines de Hölder sont définis, puis comparés à d'autres conditions équivalentes à celle-ci avec références nombreuses et explicites à l'appui. La cinquième section suit la même idée que la deuxième: le cas où les domaines sont des sous-ensembles simplement connexes de $\overline{\mathbb{C}}$ est détaillé, ce qui offre l'avantage de motiver l'emploi du terme *Hölder* pour décrire ces domaines. La sixième section contient une démonstration qu'un domaine de John est un domaine de Hölder dans le cas général, et un exemple explicite d'un domaine de Hölder qui n'est pas un domaine de John. Il est à remarquer que les cas simplement connexes du plan sont aussi inclus puisque, pour cette formulation, le fait que John implique Hölder est évident, et le fait qu'il existe des domaines de Hölder non-John n'est pas surprenant. La septième section est un survol des résultats de Carleson, Jones et Yoccoz sur le lien entre A_∞ John et la dynamique imposée sur J. Ensuite, la prochaine section fait le lien entre A_∞ Hölder et la dynamique dans A_∞ (et non J, car cette question est ouverte dans le cas général). Dans tout ce chapitre, *domaine* sera synonyme avec sous-ensemble ouvert connexe de $\overline{\mathbb{C}}$, non nécessairement simplement connexe. Puisque l'on travaille dans $\overline{\mathbb{C}}$, on est forcé d'utiliser la métrique sphérique qui est quelques fois peu commode, et peux aussi

rendre une démonstration autrement claire assez indigeste. Donc, puisque toute dynamique est invariante par transformation de Möbius et que la métrique sphérique est invariante par rotations de la sphère, si l'on s'intéresse à la frontière d'un domaine D, on peut toujours supposer que soit $\overline{D} \subset \mathbb{C}$ ou alors $\infty \in D$, et dans les deux cas la métrique sphérique et la métrique euclidienne sont comparables sur un voisinage de ∂D. Plusieurs lemmes seront donc énoncés et démontrés de façon précise pour les cas mentionnés ci-haut puis utilisés plus généralement pour tout domaine D de $\overline{\mathbb{C}}$ avec la métrique sphérique.

2.1 Domaines de John

Il existe une variété incroyable de définitions de domaine de John. L'article "John disks" [25] est un survol assez complet des différents points de vue, aussi bien dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}$ que dans $\overline{\mathbb{C}}$, dont la lecture est vivement recommandée. Cette section s'en inspire largement.

Définition 2.1. Un domaine D est dit un *domaine de John* s'il existe un point $x_0 \in D$ (le centre) et un $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x_1 \in D$ il existe un arc $\gamma \in D$ joignant x_0 et x_1 tel que

$$\delta_D(x) \geq \epsilon d(x, x_1) \ , \ x \in \gamma.$$

Lorsque l'on voudra souligner la dépendance sur ϵ, on dira que D est un domaine ϵ-John.

Ici, $d(x, x_1)$ dénote la distance sphérique de x à x_1 et $\delta_D(x)$ est la distance de x à ∂D (pour la distance sphérique). Dans le cas où D est un sous-ensemble non-borné de $\overline{\mathbb{C}}$, et de plus $\infty \notin \partial D$ (le cas qui nous occupera le plus souvent), on pourra supposer que x_0 est à l'infini et remplacer la métrique sphérique par la métrique euclidienne dans la définition de domaine de John. Cependant, pour garder l'exposé uniforme et, espérons-le, plus clair, toute distance sera mesurée en utilisant la métrique sphérique dans le reste de ce chapitre, à moins de mention explicite du contraire.

La condition ci-haut dit essentiellement que pour tout point $x \in D$, on peut trouver un arc du centre x_0 à x tel que l'on peut toujours "élargir" cet arc en un "coin" avec un angle d'ouverture borné inférieurement. On peut bien voir ceci sur la figure 2.1, où l'on pourrait prendre le "coin" défini par l'ensemble $\{y \in D, x \in \gamma \mid d(y, x) \leq 0,25 \cdot d(x, x_1)\}$ plus large, c'est à dire en augmentant $\epsilon = 0,25$. Quelques calculs sur cet exemple précis montrent que $\epsilon = \pi/4$ est la plus grande valeur possible, tout ϵ plus grand sera tel que $\delta_D(x) < \epsilon d(x, x_1)$.

On définit ensuite deux conditions, dites respectivement conditions sur les carottes et conditions sur les cigares, où chacune admet trois variantes, d'où l'on obtient un total de six conditions qui s'avéront toutes équivalentes entre elles et équivalentes à la condition de John. On les introduit ici pour deux raisons: ce sont des variantes de la définition de domaine de John utilisées couramment dans la littérature, et dans le soucis de bien faire comprendre ce qu'est un domaine de John au lecteur.

Définition 2.2. Soit a et b des points distincts de $\overline{\mathbb{C}}$ et E un continuum (c'est-à-dire un compact connexe non-trivial) contenant a et b. Pour tout $0 < c \leqslant 1$, soit

$$\mathrm{car}(E, c) := \bigcup_{x \in E \setminus \{a,b\}} B(x, cd(x, a)). \tag{2.1}$$

Figure 2.1: Un domaine de John simple, illustration d'un arc γ de la définition pour le point $x_1 = 0,9$ tel que $\delta_D(x) \geq 0,25 \cdot d(x, x_1)$, $x \in \gamma$, où la frontière de l'ensemble $\{y \in D, x \in \gamma \mid d(y,x) < 0,25 \cdot d(x, x_1)\}$ est aussi indiqué

car(E, c) est appelé une c-carotte de cœur E, qui relie b à a. C'est un voisinage ouvert connexe de $E \setminus \{a, b\}$.

On remarquera l'asymétrie de la définition ci-haut, ainsi que le fait que $a \notin$ car(E, c) mais que $b \in$ car(E, c). On appellera a le point d'arrivée de la carotte. Un exemple de carotte à déjà été vu: si on prend $E = \gamma$ pour γ défini par la figure 2.1 (où $a = 0,9$, $b = 0$), et $c = 0,25$ alors l'ensemble qui ressemble à une carotte dans cette figure est exactement car(E, c). On se convainc assez facilement que chaque point de D peut être joint à l'origine par un segment γ tel que car$(\gamma, 0,25) \subset D$.

On dit qu'un domaine D satisfait la condition de la *c-carotte*, ou plus brièvement *c-car*, s'il existe un point $x_0 \in D$ (le centre) tel que tout point $x \in D \setminus \{x_0\}$ peut être joint à x_0 par une c-carotte car$(E, c) \subset D$. On écrit alors $D \in$ c-car, ou encore $D \in$ car en sous-entendant qu'il existe un $0 < c \leqslant 1$ tel que $D \in$ c-car.

On observera immédiatement que le choix du point x_0 n'est pas unique, mais que l'on ne peut tout de même pas choisir ce point trop près de la frontière du domaine sans avoir à diminuer c.

Remarque 2.3. On peut aussi démontrer que pour un domaine $D \in$ c-car, le cœur E d'une c-carotte joignant tout point x au centre x_0 peut toujours être choisit comme étant un arc rectifiable de x à x_0 (voir la section 2.6 de [45]).

Un argument simple de passage à la limite permet aussi de joindre tout point frontière d'un domaine dans c-car par une c-carotte au centre x_0 de ce domaine. Plus précisément, on dira qu'un continuum $E \subset \overline{D}$ relie un point $x \in D$ à un point $y \in \partial D$ si $x, y \in E$ et $E \cap \partial D = \{y\}$.

Lemme 2.4. *Soit $D \in$ c-car et $x \in \partial D$. Alors il existe un continuum E tel que* $\mathrm{car}(E, c) \subset D$ *et E relie x_0 à x.*

Démonstration. Soit $x_j \in D$ une suite de points qui convergent vers x, et soit E_j les continua qui relient x_0 à x_j dans D par une c-carotte $\mathrm{car}(E, c)$. Alors, par compacité (de l'espace métrique de sous-ensembles compacts de $\overline{\mathbb{C}}$ pour la distance de Hausdorff), on peut supposer que les E_j convergent (pour la métrique de Hausdorff) vers un E compact. On voit aisément que E relie x et x_0. Par la définition de $\mathrm{car}(E_j, c)$, $E \setminus \{x\} \subset D$ et $\mathrm{car}(E, c) \subset D$. □

Les carottes définies ci-haut sont des carottes dites de *distance*, puisque la mesure fondamentale qui contrôle les carotte est la distance au point a, le point d'arrivée de la carotte. Il existe deux autres types de carottes: celui basé sur le diamètre, et celui basé sur la longueur.

Définition 2.5. Soit E un arc entre deux points distincts a et b de $\overline{\mathbb{C}}$ et $0 < c \leqslant 1$. On défini respectivement les c-carottes de diamètre et les c-carottes de longueur comme:

$$\mathrm{car}_d(E, c) := \bigcup_{x \in E \setminus \{a,b\}} B(x, c\,\mathrm{Diam}(E[a, x]))$$

$$\mathrm{car}_\ell(E, c) := \bigcup_{x \in E \setminus \{a,b\}} B(x, c\ell(E[a, x]))$$

où $E[a, x]$ est le sous-arc de E allant de a à x.

Dans la définition de $\mathrm{car}_l(E, c)$, on suppose que E est rectifiable. Comme pour car, on définit de la même façon les domaines D satisfaisant une condition c-car_d ou c-car_ℓ, c'est à dire qu'il existe un point $x_0 \in D$ (le centre) tel que tout point $x \in D \setminus \{x_0\}$ peut être lié à x_0 par respectivement une c-carotte de diamètre $\mathrm{car}_d(E, c)$ ou un c-carotte de longueur $\mathrm{car}_\ell(E, c)$ dans D. On écrira alors $D \in$ c-car_d, $D \in$ c-car_ℓ ou, plus simplement, $D \in \mathrm{car}_d$, $D \in \mathrm{car}_\ell$.

Il est évident que si E est un arc rectifiable qui va de a à b alors

$$\mathrm{car}(E, c) \subset \mathrm{car}_d(E, c) \subset \mathrm{car}_\ell(E, c).$$

Exemple 2.6. Un exemple intéressant et plus substantiel de domaine de John que celui de la figure 2.1 est celui de la figure 2.2. Ce domaine contient une spirale logarithmique, et donc a une frontière qui s'enroule autour d'un point, ici l'origine. Un calcul rapide, ou encore un coup d'oeil sur la figure où un arc et quelques boules de la définition de car_ℓ sont indiqués, permettra au lecteur de se persuader que c'est en effet un domaine de John. Cet exemple est encore plus intéressant lorsque l'on se souvient que tout voisinage assez petit d'un point

Figure 2.2: Un domaine de John autour d'une spirale logarithmique et quelques unes des boules de la définition de $\mathrm{car}_\ell(E, 0, 05)$ où E est l'arc indiqué

d'une orbite répulsive périodique de dérivée non-réelle doit effectivement contenir une telle spirale logarithmique. Pour plus de détails (mais exprimé différemment) voir le chapitre 7 de l'excellent [6].

Il existe aussi une autre approche, déjà mentionnée, celle des cigares.

Définition 2.7. Soit a et b deux points distincts de $\overline{\mathbb{C}}$, $0 < c \leqslant 1$, et soit E un continuum contenant a et b. Pour tout $x \in E \setminus \{a, b\}$, soit

$$\rho(x) = \min(d(x, a), d(x, b))$$

alors le c-cigare de cœur E est

$$\mathrm{cig}(E, c) := \bigcup_{x \in E \setminus \{a,b\}} B(x, c\rho(x)).$$

On voit que les cigares sont essentiellement des versions symétriques des carottes. On dit que $D \in$ c-cig si pour chaque paire de points distincts a et b de D, il existe un c-cigare $\mathrm{cig}(E, c) \subset D$. Si cela n'engendre pas d'ambiguïté, on écrira $D \in$ cig.

Il est important de remarquer que dans la définition de cig, il n'y a pas de point distingué comme le centre dans la définition de car. Avec essentiellement la même démonstration que pour car, il est possible d'étendre les cigares à la frontière d'un tel domaine:

Lemme 2.8. *Soit $D \in$ c-cig, a et b deux points distincts de ∂D, alors il existe un c-cigare* $\mathrm{cig}(E, c) \subset D$ *qui relie les points a et b.*

Il est évident que l'on peut aussi définir des cigares de diamètre et de longueur en modifiant légèrement les définitions dans le cas des carottes.

Définition 2.9. Soit E un arc de a à b (distincts), et pour tout $x \in E \setminus \{a, b\}$ on définit

$$\rho_d(x) = \min(\mathrm{Diam}(E[a, x]), \mathrm{Diam}(E[x, b])), \text{ et } \rho_\ell(x) = \min(\ell(E[a, x]), \ell(E[x, b]))$$

et pour $0 < c \leqslant 1$,

$$\mathrm{cig}_d(E, c) := \bigcup_{x \in E \setminus \{a,b\}} B(x, c\rho_d(x))$$
$$\mathrm{cig}_\ell(E, c) := \bigcup_{x \in E \setminus \{a,b\}} B(x, c\rho_\ell(x)).$$

Puisque les définitions sont si similaires à celles utilisant des carottes, on laisse au lecteur le soin de tracer des cigares dans les domaines de John illustrés ci-haut. En fait, avec un peu de travail, on peut obtenir que toutes ces définitions sont équivalentes.

Proposition 2.10. *Soit D un domaine de $\overline{\mathbb{C}}$ alors sont équivalents*

1. *D est un domaine de John*
2. $D \in \mathrm{cig}_l$
3. $D \in \mathrm{cig}_d$
4. $D \in \mathrm{cig}$
5. $D \in \mathrm{car}$
6. $D \in \mathrm{car}_d$
7. $D \in \mathrm{car}_l$

Démonstration. Une démonstration presque complète de ce théorème se trouve dans [25] - en suivant les références indiquées dans cet article, la démonstration de l'équivalence des six dernières conditions peux être reconstruite.

Il est aussi évident que la définition que l'on donne d'un domaine de John est équivalente à $D \in \mathrm{car}$, en utilisant la remarque 2.3. □

Normalement, la métrique euclidienne est utilisée dans la définition de domaine de John dans $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$; dans ce cas, il faut aussi supposer que $\infty \notin \partial D$ et la proposition reste vraie. En fait, dans ce cas, elle est vraie même dans $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ (voir [25] théorème 2.16).

Une dernière propriété générale des domaines de John retiendra notre attention (théorème 2.18 de [25]):

Proposition 2.11. *Soit D un domaine de John (disons $D \in$ c-car), alors D est finiement connexe (c'est-à-dire que pour chaque $x \in \partial D$ il existe un système fondamental de voisinages U_n tels que le nombre de composantes connexes de $D \cap U_n$ est borné indépendamment de x et n) en chaque point de ∂D, avec une borne supérieure sur le nombre de composantes ne dépendent que de c.*

Démonstration. Soit $b \in \partial D$ et x_0 le centre de D tel que $D \in c$-car. Choisissons une boule $U = B(b, 2r)$ ne contenant pas x_0; il suffit alors de démontrer que seulement un nombre fini, ne dépendent que de c, de composantes de $U \cap D$ rencontrent $B(b, r)$. Soit $U_1, U_2, \ldots$ les composantes de $U \cap D$ qui rencontrent $B(b, r)$, et choisissons un point $x_j \in U_j \cap B(b, r)$ dans chacunes. Ensuite, on peut joindre chaque x_j à x_0 par une c-carotte $\mathrm{car}(E_j, c) \subset D$. Forcément, $E_j \cap \partial U_j \neq \emptyset$. En choisissant $y_j \in E_j \cap \partial U_j$, alors $d(x_j, y_j) > r$, d'où $B_j := B(y_j, cr) \subset D$. Toutes les boules B_j sont disjointes puisque $B_j \cap U \subset U_j$. Mais on ne peut disposer qu'un nombre fini de boules disjointes de rayon cr sur un cercle de rayon $2r$, et en fait on obtient une borne supérieure ne dépendent que de c. □

2.2 Domaines de John simplement connexes

Le but ici est de donner une définition équivalente des domaines de John où la relation avec les domaines de Hölder (aussi simplement connexes) sera évidente. Cette caractérisation des domaines de John est tirée du merveilleux livre de Pommerenke [30], sûrement destiné à devenir une référence incontournable.

On doit préalablement définir quelques ensembles, voir la figure 2.3, pour pouvoir citer cette caractérisation analytique des domaines de John.

Définition 2.12.

$$\begin{aligned} B(re^{it}) &:= \{\rho e^{i\vartheta} : r \leqslant \rho \leqslant 1, |\vartheta - t| \leqslant \pi(1-r)\} \quad (0 \leqslant r < 1), \\ I(re^{it}) &:= \mathbb{T} \cap \partial B(re^{it}) = \{e^{i}\vartheta : |\vartheta - t| \leqslant \pi(1-r)\} \end{aligned}$$

Théorème 2.13. *Soit D un domaine simplement connexe du plan, et $f : \mathbb{D} \to D$ sa représentation conforme. Alors sont équivalents*

1. *D est un domaine ϵ-John,*
2. *il existe $M_1 > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $\mathrm{Diam}\, f(B(z)) \leqslant M_1 d(f(z), \partial D)$,*
3. *il existe un $0 < \alpha \leqslant 1$ et $M_2 > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{D}$ et tout $\zeta \in \mathbb{D} \cap B(z)$,*
$$|f'(\zeta)| \leqslant M_2 |f'(z)| \left(\frac{1-|z|}{1-|\zeta|}\right)^{1-\alpha},$$
4. *il existe un $\beta > 0$ tel que pour tout arcs $A \subset I \subset \mathbb{T}$, alors*
$$\Lambda(A) \leqslant \beta \Lambda(I) \Rightarrow \mathrm{Diam}\, f(A) \leqslant \frac{1}{2} \mathrm{Diam}\, f(I)$$

Figure 2.3: Définition de $B(re^{it})$

Les constantes du théorème ne dépendent que des autres constantes et de ϵ. On a écrit ici $\Lambda(A)$ pour la longueur de A. La démonstration est assez technique, mais pas très difficile. Le lecteur intéressé pourra la trouver avec tous les détails pages 97 à 100 du livre de Pommerenke [30].

La troisième équivalence du théorème ci-haut est celle qui retiendra notre attention. On voit immédiatement que $B(0) = \mathbb{D}$ et que, dans ce cas, le théorème dit:

Corollaire 2.14. *Il existe un* $0 < \alpha \leqslant 1$ *et* $M_2 > 0$ *tel que*

$$|f'(\zeta)| \leqslant M_2 |f'(0)|(1 - |\zeta|)^{\alpha - 1}$$

pour $\zeta \in \mathbb{D}$.

On peut assez facilement en déduire une condition Hölderienne en utilisant un résultat dû à Hardy et Littlewood, qui sera démontré à la section 2.5 sur les domaines de Hölder simplement connexes.

Les figures 2.4 et 2.5 montrent des exemples de domaines de John (simplement connexes) tirés de la dynamique. La figure 2.4 est intéressante en ce qu'il y a en fait deux domaines de John avec pour frontière commune $J(f)$. Un théorème (voir section 9.1 de [25]) nous dit alors que $J(f)$ est en fait un quasi-cercle, et ce résultat est général: toute courbe de Jordan qui délimite deux domaines de John est un quasi-cercle. C'est ce résultat qui donne aux domaines de John leur surnom de "one-sided quasidisk", que l'on pourrait traduire quasi-disque unilatère.

Figure 2.4: $f = z^2 - 0,02 + 0,5i$. A_∞ et $A_{-.1473+.3861i}$ sont des domaines de John

Figure 2.5: $f = z^2 + 0,4351346611 + 0,3178102315i$. A_∞ est un domaine de John

2.3 Préliminaires géométriques: la métrique quasi-hyperbolique

Quoique la métrique hyperbolique d'un domaine soit très pratique dans bien des cas, son comportement n'est pas toujours facile à étudier, quoique possible, comme par exemple lorsque la frontière est un Cantor dans $\overline{\mathbb{C}}$, ou plus difficile encore lorsque la frontière contient une pointe vers l'extérieur. Il existe cependant une autre métrique, comparable à la métrique hyperbolique pour les domaines simplement connexes, qui semble mieux s'adapter à de telles situations. De plus, cette métrique est comparable à la métrique hyperbolique pour tout domaine où la frontière est un ensemble uniformément parfait (voir [6, 20]) et donc sera toujours applicable au cas des domaines de Fatou.

Soit D un ouvert connexe de $\overline{\mathbb{C}}$ dont la frontière consiste en au moins 3 points. On définit dans D une métrique géométrique, la métrique *quasi-hyperbolique.*

Définition 2.15. La métrique *quasi-hyperbolique* k_D dans un domaine D est définie par

$$k_D(x_1, x_2) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \frac{ds}{\delta_D(x)}$$

où l'infimum est sur toutes les courbes rectifiables γ dans D qui joignent x_1 et x_2. Ici, ds désigne l'élément de longueur d'arc.

En utilisant les lemmes de Koebe et Schwartz (voir le chapitre sur la distorsion), on obtient facilement que k_D est comparable à la métrique hyperbolique de D lorsque celui-ci est simplement connexe. Cette métrique est plus facile à manipuler car elle est géométrique, alors que la métrique hyperbolique provient essentiellement de la représentation conforme de D.

Cette métrique a été utilisée fructueusement par divers auteurs [25, 30, 38, 40] pour étudier les domaines de John et de Hölder dans $\mathbb{R}^n$. Nous utiliserons implicitement le résultat suivant:

Proposition 2.16. *Pour tout domaine $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ où la métrique k_D est définie, il existe des géodésiques (pour k_D) reliant deux points quelconques $z, w \in D$.*

Pour une démonstration, voir [13].

2.4 Domaines de Hölder

En contraste avec la définition des domaines de John, la définition générale des domaines de Hölder n'a pas d'interprétation intuitive immédiate, sauf peut-être pour quelques intimes de la métrique quasi-hyperbolique.

Définition 2.17. Un domaine D est dit un *domaine de Hölder* s'il existe un point $x_0 \in D$ (le centre) et deux constantes $0 < \epsilon \leqslant 1$, et $C > 0$ tel que

$$k_D(x_0, x) \leqslant \frac{1}{\epsilon} \log \frac{1}{\delta_D(x)} + C, x \in D. \tag{2.2}$$

Si l'on veut souligner la dépendance sur ϵ (la plus importante), on dira que D est un domaine ϵ-Hölder.

Figure 2.6: Un domaine[1]qui n'est pas un domaine de Hölder

Un autre caractérisation des domaines de Hölder, toujours en utilisant la métrique quasi-hyperbolique, est due à Smith et Stegenga (voir [41]).

Théorème 2.18. *Soit D un domaine de $\overline{\mathbb{C}}$, et $x_0 \in D$. Alors sont équivalent*

1. *D est un domaine de Hölder de centre x_0*
2. *Il existe un $\beta > 0$ tel que* $\mathrm{meas}(\{x \in D \mid k_D(x_0, x) > j\}) = O(\exp(-\beta j))$ *lorsque* $j \to \infty$.
3. *Il existe un $\tau > 0$ tel que $\int_D \exp(\tau k_D(x_0, x))dx < \infty$*

où τ ne dépend que de la constante ϵ dans la définition de domaine de Hölder, et vice-versa; de plus τ et β sont comparables. Par meas *on comprendra la mesure de Lebesgue sur $\overline{\mathbb{C}}$ telle que* $\mathrm{meas}(\overline{\mathbb{C}}) = 1$.

La démonstration utilise la décomposition d'un domaine en cubes de Whitney (voir Stein [43] pour la définition), ce qui nous forcera à renvoyer le lecteur à l'article cité ci-haut car cette démonstration serait une parenthèse trop grande pour l'inclure ici.

[1]la frontière du domaine est paramétrée par $x = \cos(\theta)(1 - \sqrt{|\sin(\theta)|})$, $y = \sin(\theta)$ pour $-\pi < \theta < \pi$.

Cependant, la deuxième condition est assez facile a comprendre: le domaine est Hölderien si et seulement si la mesure de la frontière du domaine définie par la métrique quasi-hyperbolique tend exponentiellement vers zéro en s'approchant linéairement de cette frontière. Déjà il est possible de voir qu'un tel domaine ne peut avoir de "cusp" vers l'extérieur car (directement de la définition de la métrique quasi-hyperbolique) un tel "cusp" ferait croître la métrique quasi-hyperbolique trop rapidement sur tout arc s'approchant de ce "cusp" (voir la figure 2.7 où, vu la symétrie de la situation, il est clair que l'axe réel est l'arc qui minimise la métrique quasi-hyperbolique entre $x_0 = 0$ et tout autre point $x \in \mathbb{R}^+ \cap D$, mais que cet arc ne pourra satisfaire à la condition (2.2)).

Figure 2.7: Un détail, le cusp, d'un domaine non-Hölderien

2.5 Domaines de Hölder simplement connexes

Le but de cette section est de démontrer que dans le cas simplement connexe, D est un domaine de Hölder si et seulement si la représentation conforme $\psi : \mathbb{D} \to D$ s'étend à une fonction Hölder continue sur $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$. On démontre ceci en plusieurs étapes: premièrement, que ψ est Hölder continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ si et seulement si ψ' l'est sur $\mathbb{D}$, puis que ψ' est Hölder continue sur $\mathbb{D}$ si et seulement si D est un domaine de Hölder. De plus, la première équivalence sera démontrée en plusieurs lemmes.

Lemme 2.19. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe borné et $\phi : D \to \overline{\mathbb{C}}$ une fonction analytique. Si de plus ϕ est Hölderienne d'exposant ϵ (et constante m_1) alors $|\phi'(z)| \leq m_1 \delta_D(z)^{\epsilon - 1}$ pour tout $z \in D$.*

Il est important de remarquer que D est ici un domaine borné du plan, et donc que l'on peut utiliser la métrique euclidienne pour δ_D, ce qui sera fait dans la démonstration. Cependant, il faut remarquer qu'à peu près la même démonstration s'applique à $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, ou encore à tout domaine D tel que D^c contient un ouvert.

Démonstration. La démonstration est une application simple du théorème de Cauchy. Soit $z \in D$ et $0 < r < \delta_D(z)$, et C_r le cercle de rayon r centré en z, alors par Cauchy

$$\phi'(z) = \oint_{C_r} \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Par le théorème des résidus, on peut ajouter $\phi(z)$ au numérateur sans changer l'intégrale. En prenant des valeurs absolues et en paramétrisant, on obtient

$$\begin{aligned}
|\phi'(z)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{\phi(z+re^{it})-\phi(z)}{(re^{it})^2} rie^{it}dt\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} |\phi(z+re^{it})-\phi(z)|\, dt \\
&\leq \frac{m_1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} r^{\epsilon}\, dt \\
&= m_1 r^{\epsilon-1}
\end{aligned}$$

où la deuxième inégalité vient de la condition Hölderienne. On obtient le résultat voulu en prenant la limite pour $r \to \delta_D(z)$. □

Ce lemme sera le plus souvent appliqué à $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ et ψ la représentation conforme d'un domaine à l'infini d'un polynôme.

Dans ce cas, l'implication inverse est aussi vraie. C'est en fait vrai plus généralement, voir [12], par une extension d'un théorème classique de Hardy et Littlewood. Le lemme suivant précise cette affirmation; la présentation utilise $\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{\mathbb{D}}$ comme modèle pour la représentation conforme, mais il est clair que tout ceci reste exact pour $\mathbb{D}$ où $\delta_{\mathbb{D}}(z) = 1 - |z|$. À nouveau, la métrique euclidienne est utilisée pour ce lemme.

Lemme 2.20. *Soit $\psi : \overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{\mathbb{D}} \to D$ la représentation conforme d'un domaine $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ tel que*

$$|\psi'(z)| \leq m_1 \delta_{\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{\mathbb{D}}}(z)^{\alpha-1} = m_1(|z|-1)^{\alpha-1}$$

et $0 < \alpha \leq 1$, alors ψ s'étend à une fonction Hölderienne d'exposant α (et de constante $m_2 = 4\frac{m_1}{\alpha}$) de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$.

Démonstration. Pour $a \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$ et $b \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, c'est évident, en intégrant le long d'une géodésique de a à b dans $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$. Pour a et b dans S^1, on peut toujours supposer que la distance la plus courte de a à b sur S^1 va de a à b en angle croissant, et alors on considère $\gamma_\epsilon = \{ra | 1 \leq r \leq 1+\epsilon\} \cup \{(1+\epsilon)e^{it} | \arg a \leq t \leq \arg b\} \cup \{rb | 1 \leq r \leq 1+\epsilon\}$. Soit $\Delta = d(a,b)$ (mesuré sur $\mathbb{S}^1$). On a que

$$\begin{aligned}
|\psi(a)-\psi(b)| &\leq \left|\int_{\gamma_\Delta} \psi'(z)dz\right| \\
&= \left|\int_1^{1+\Delta} \psi'(ar)adr + \int_{\arg a}^{\arg b} \psi'(a(1+\Delta)e^{it})ai(1+\Delta)e^{it}dt\right. \\
&\quad \left. - \int_1^{1+\Delta} \psi'(br)bdr\right| \\
&\leq \int_1^{1+\Delta} |\psi'(ar)|dr + (1+\Delta)\int_{\arg a}^{\arg b} |\psi'(a(1+\Delta)e^{it})|dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& + \int_1^{1+\Delta} |\psi'(br)| dr \\
\leq\ & m_1 \int_1^{1+\Delta} (|r|-1)^{\alpha-1} dr + m_1(1+\Delta) \int_{\arg a}^{\arg b} |\Delta|^{\alpha-1} dt \\
& + m_1 \int_1^{1+\Delta} (|r|-1)^{\alpha-1} dr \\
=\ & m_1 \int_0^{\Delta} |s|^{\alpha-1} ds + m_1(1+\Delta) \int_{\arg a}^{\arg b} |\Delta|^{\alpha-1} dt \\
& + m_1 \int_0^{\Delta} |s|^{\alpha-1} ds \\
=\ & \frac{m_1}{\alpha}\Delta^\alpha + m_1(1+\Delta)\Delta^{\alpha-1}\Delta + \frac{m_1}{\alpha}\Delta^\alpha \\
\leqslant\ & (2\frac{m_1}{\alpha} + 2m_1)\Delta^\alpha \leqslant 4\frac{m_1}{\alpha}\Delta^\alpha
\end{aligned}
$$

où l'on utilise le fait que $\Delta < 1$ et que $\frac{1}{\alpha} + 1 < \frac{2}{\alpha}$ pour $0 < \alpha \leqslant 1$. □

En rassemblant les deux lemmes précédent,

Corollaire 2.21. *Soit $\psi : \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \to D$ la représentation conforme d'un domaine D, et $0 < \alpha \leqslant 1$. Alors ψ s'étend à une fonction Hölder continue d'exposant α de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$ si et seulement si ψ' est Hölderienne d'exposant $\alpha - 1$ sur $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. En d'autres mots, il existe $C > 0$ tel que pour tout $w_1, w_2 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}, z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$,*

1.

$$|\psi(w_1) - psi(w_2)| \leqslant C(|w_1| - |w_2|)^\alpha \Rightarrow |\psi'(z)| \leqslant C(|z|-1)^{\alpha-1} \tag{2.3}$$

2.

$$|\psi'(z)| \leqslant C(|z|-1)^\alpha \Rightarrow |\psi(w_1) - \psi(w_2)| \leqslant \frac{4C}{\alpha}(|w_1| - |w_2|)^\alpha \tag{2.4}$$

Il reste donc à démontrer que pour un domaine D simplement connexe, D est un domaine de Hölder si et seulement si ψ' vérifie une condition hölderienne. Ceci sera démontré encore cette fois-ci pour un domaine D borné mais, comme toujours, la démonstration n'a besoin que de modifications mineures pour le cas où $\infty \in D$, ce qui, aux constantes près, permet d'en conclure la version générale en métrique sphérique.

Lemme 2.22. *Soit $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ un domaine simplement connexe, $x_0 \in D$, $\psi : \mathbb{D} \to D$ la représentation conforme de D avec $\psi(0) = x_0$ et $0 < \alpha \leqslant 1$, alors sont équivalent:*

1. D est un domaine α-Hölder de centre x_0,

2. *Il existe une constante $C_1 > 0$ tel que*

$$|\psi'(\zeta)| \leqslant C_1(1-|\zeta|)^{\alpha-1}, \ \zeta \in \mathbb{D}. \tag{2.5}$$

Cette démonstration est essentiellement celle esquissée par Pommerenke dans [30] page 92.

Démonstration. Soit $\zeta \in \mathbb{D}$, $w = \psi(\zeta)$ et $w_0 = \psi(0)$. En multipliant (2.5) par $(1-|\zeta|^2)$ puis en prenant le logarithme de chaque côté, alors on voit que cette condition est équivalente à

$$\alpha \log \frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|} \leqslant C_2 + \log \frac{1}{(1-|\zeta|^2)|\psi'(\zeta)|} \tag{2.6}$$

où $C_2 = \log(C_1) + (1-\alpha)\log(2)$ puisque $\zeta \in \mathbb{D}$. Par Koebe (voir le lemme 4.1, quatrième équation) et la définition de la métrique hyperbolique ρ de D, ceci est équivalent à l'existence de $C_3 > 0$ tel que

$$2\alpha d_\rho(w_0, w) \leqslant C_3 + \log \frac{1}{\delta_D(\zeta)} \tag{2.7}$$

En fait, on peut prendre $C_3 = C_2$ ou $C_3 = C_2/4$ pour l'implication directe et inverse respectivement. Mais, toujours par Koebe, la métrique hyperbolique ρ dans un domaine D simplement connexe est telle que la distance induite $d_\rho(w_0, w)$ satisfait à l'équation

$$\frac{1}{2} d_\rho(w_0, w) \leqslant k_D(w_0, w) \leqslant 2 d_\rho(w_0, w)$$

(en d'autres mots, la métrique hyperbolique et quasi-hyperbolique sont équivalentes à un facteur de 2 près) et on en déduit le lemme. □

En rassemblant les derniers trois lemmes, on obtient

Corollaire 2.23. *Soit $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ un domaine simplement connexe, $x_0 \in D$, $\psi : \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \to D$ la représentation conforme de D avec $\psi(\infty) = x_0$ et $0 < \alpha \leqslant 1$, alors sont équivalent:*

1. *D est un domaine α-Hölder de centre x_0,*

2. *Il existe une constante $C_1 > 0$ tel que*

$$|\psi'(\zeta)| \leqslant C_1(|\zeta|-1)^{\alpha-1}, \ \zeta \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \tag{2.8}$$

3. *Il existe une constante $C_2 > 0$ tel que ψ s'étende à une fonction Hölder continue de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ d'exposant α et de constante C_2.*

Si D n'est pas un domaine borné, il faudra remplacer la métrique euclidienne par la métrique sphérique dans cet énoncé.

2.6 John sous-ensemble propre de Hölder

La proposition suivante montre que les domaines de Hölder sont plus généraux que les domaines de John. Cette démonstration est essentiellement celle de [12]. Notons $\ell(\gamma)$ la longueur pour la métrique sphérique de l'arc γ.

Proposition 2.24. *Un domaine de John est un domaine de Hölder. Le contraire est faux.*

Démonstration. Soit D un domaine de John de centre x_0. Soit $x_1 \in D$ et γ l'arc de la définition de John. On considère alors deux cas: celui où x_1 est assez loin de la frontière ∂D par rapport à x_0, et celui où x_1 est près de la frontière. Pour alléger la notation, on supprime l'indice D des distances δ_D puisque D est fixé. On se rappellera aussi que la proposition 2.10 nous dit que l'on peut remplacer la définition de John par la condition des c-carottes de longueur. De plus, en utilisant cette dernière caractérisation, on voit facilement que tout point $x \in D$ peut être joint à x_0 par un arc de John (rectifiable) de longueur au plus $a > 0$ où la constante a ne dépend que de D. Sans perte de généralité, supposons que $a = 1$. Soit $0 < \epsilon \leqslant 1$ tel que $D \in \epsilon\text{-car}_\ell$.

Supposons premièrement que

$$\delta(x_1) \geqslant (1+\epsilon)\ell(\gamma). \tag{2.9}$$

Alors nous avons que

$$\delta(x) \geqslant \delta(x_1) - d(x_1, x) \geqslant \epsilon\ell(\gamma)$$

pour tout $x \in \gamma$ et que donc

$$k_D(x, x_0) \leqslant \int_\gamma \frac{ds}{\delta(x)} \leqslant \frac{1}{\epsilon}.$$

Puisque $\delta(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in D$, alors $\log \dfrac{1}{\delta(x)} \geqslant 0$,

$$k_D(x, x_0) \leqslant \frac{1}{\epsilon} \log \frac{1}{\delta(x)} + \frac{1}{\epsilon}.$$

Dans le deuxième cas, en supposant que (2.9) est faux, on peut choisir un sous-arc γ_1 de γ avec bouts x_0 et x_2 tel que

$$\delta(x_2) = (1+\epsilon)\ell(\gamma_1). \tag{2.10}$$

En d'autre mots, γ_1 est le sous-arc de γ qui reste relativement éloigné de ∂D. Par le même raisonnement qu'avant, on a que $k_D(x, x_2) \leqslant 1/\epsilon$ pour tout $x \in \gamma_1$. Donc si $x \in \gamma \setminus \gamma_1 = \gamma_2$ (c'est à dire le sous-arc qui s'approche de la frontière et qui est éloigné de x_0), l'hypothèse que $D \in \epsilon\text{-car}_\ell$ nous donne

$$\delta(x) \geqslant \epsilon s \tag{2.11}$$

où s est la paramétrisation de γ par longueur d'arc (voir la remarque 2.3). Donc

$$\begin{aligned} k_D(x_2, x_0) &\leqslant \int_{\gamma_2} \frac{ds}{\delta(x)} \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} \int_{\ell(\gamma_1)}^{\ell(\gamma)} \frac{ds}{s} = \frac{1}{\epsilon} \log \frac{\ell(\gamma)}{\ell(\gamma_1)} \\ &= \frac{1}{\epsilon} \log \frac{\ell(\gamma)(1+\epsilon)}{\delta(x_2)} \leq \frac{1}{\epsilon} \log \frac{1}{\delta(x_2)} + 1 \end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient du fait que $\ell(\gamma) \leqslant 1$ et que $1 + \epsilon \leqslant e^{\epsilon}$.

Il en découle que

$$\begin{aligned} k_D(x, x_0) &\leqslant k_D(x, x_2) + k_D(x_2, x_0) \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon} \log \frac{1}{\delta(x_2)} + 1 \end{aligned}$$

et en combinant ces deux cas, on obtient que

$$k_D(x, x_0) \leqslant \frac{1}{\epsilon} \log \frac{1}{\delta(x)} + \left(\frac{1}{\epsilon} + 1\right).$$

Pour un exemple de domaine de Hölder qui n'est pas John, on utilise encore [12]. Soit G_0 le triangle délimité par les droites $x = 0$, $y = 0$, et $x - y = 1$, et pour $j = 1, 2, \ldots$ soit G_j le triangle (ouvert) délimité par les droites

$$x = 2^{-2j}, y = 2^{-2j} - 2^{-4j}, x + y = 2^{-2j} - 2^{-4j}.$$

Il est assez simple de voir que $Q = \cup_{j=0}^{\infty} G_j$ n'est pas un domaine de John. Voir [12] pour les détails de la démonstration que Q est un domaine de Hölder. □

2.7 John et dynamique

Le travail de Carleson, Jones et Yoccoz [8] est très important pour deux raisons: c'est le premier article où une liaison intime entre la géométrie des ensembles de Fatou et la dynamique sur les ensembles de Julia est mise à jour et, dans le cas des polynômes, une caractérisation complète est présentée. Il faut aussi noter les travaux de Volberg et Balogh [1] sur les domaines de John uniformes et la dynamique dites "semi-hyperbolique séparée" où des conditions plus fortes que celles de [8] sont démontrée équivalentes, ce qui porte à penser qu'il existerait une sorte de graduation de conditions géométriques équivalentes à des conditions dynamiques elles aussi qui vont en se généralisant.

Pour être précis, leur théorème principal est:

Théorème 2.25. *Soit P un polynôme de degré d, alors sont équivalent:*

Figure 2.8: Un domaine de Hölder qui n'est pas un domaine de John

1. *P est semi-hyperbolique,*
2. *P n'a pas de cycles paraboliques et $c \notin \omega(c)$ pour tout point critique c de $J(P)$,*
3. *Il existe D_0 tel que si $x \in J$, $r > 0$ et n est le premier entier tel que $P^n(J \cap B(x,r)) = J$, alors P^n est de degré $\leqslant D_0$ sur $B(x,2r)$,*
4. *A_∞ est un domaine de John,*
5. *A_∞ est un domaine de John, et chaque composante de Fatou $\mathcal{F}_j$ bornée est telle que $\partial\mathcal{F}_j$ est un quasi-cercle (d'où $\mathcal{F}_j$ est un domaine de John).*

Il est bien de rappeler la définition de semi-hyperbolique:

Définition 2.26. Une fraction rationnelle f est semi-hyperbolique s'il existe $\epsilon > 0$ et $D < \infty$ tel que pour tout $x \in J(f)$ et tout les choix de branches inverses,

$$\text{degré}(f^n|_{B_n(x,\epsilon)}) \leqslant D$$

où $B_n(x,\epsilon)$ est une composante connexe de $f^{-n}(B(x,\epsilon))$.

En d'autres mots, f est semi-hyperbolique s'il existe une échelle ϵ où toutes les itérées inverses de f agissent comme des applications de degré universellement borné.

2.8 A_∞ hölderien et dynamique

Commençons par le cas où A_∞ est simplement connexe, pour plus de simplicité. On peut traduire directement sur la dynamique d'un polynôme $P(z)$ les conditions sur la représentation conforme du bassin à l'infini du Julia car l'on sait que cette représentation conjugue la dynamique de celui-ci à celle de $z \mapsto z^d$. On obtient donc facilement:

Proposition 2.27. *Soit P un polynôme de degré d avec J connexe, $z \in A_\infty$ tel que $\delta_J(z) = \kappa > 0$, y tel que $P^n(y) = z$. Soit $\psi : \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \to A_\infty$ l'application qui conjugue l'action de P à celle de $T : z \mapsto z^d$, $\zeta = \psi^{-1}(y)$, $\xi = \psi^{-1}(z)$. Alors il existe $\epsilon > 0$, $C > 0$ et $C_\kappa > 0$ tel que*

$$|(P^n)'(y)| \geq C_\kappa d^{\epsilon n} \iff |\psi'(\zeta)| \leqslant C(|\zeta| - 1)^{\epsilon - 1}$$

où C et ϵ ne dépendant que de P.

On voit alors bien que ψ est Hölderienne si et seulement si on a une croissance exponentielle des dérivées de P sous itération. Il est cependant important de noter la dépendance de la constante sur κ - sans cette dépendance on obtiendrait l'hyperbolicité de P.

Démonstration. Puisque $\psi \circ T^n = p^n \circ \psi$, en prenant une dérivée puis en évaluant en ζ, en prenant des valeurs absolues, on obtient l'identité fondamentale suivante:

$$|\psi'(\xi)|\ |(T^N)'(\zeta)| = |(P^n)'(y)|\ |\psi'(\zeta)|.$$

Puisque ξ est dans un compact de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ qui est séparé de $\mathbb{S}^1$, alors $|\psi'(\xi)| \sim C_\kappa$. De même, $(T^n)' = d^n z^{d^n - 1}$, alors $|(T^n)'(\zeta)| = d^n \frac{|\xi|}{|\zeta|} \sim d^n$ où les constantes dépendant seulement de κ (parce que l'on voit facilement que $1 < |\xi| < |\zeta|$ et on sait que $|\zeta| \sim 1$). On arrive donc à

$$|(P^n)'(y)| \sim \frac{d^n}{|\psi'(\zeta)|}$$

d'où on conclut que

$$\begin{aligned} |(P^n)'(y)| \geq C_\kappa d^{\epsilon n} &\iff \frac{d^n}{|\psi'(\zeta)|} \geqslant C d^{\epsilon n} \\ &\iff |\psi'(\zeta)| \leqslant C d^{n(1-\epsilon)} \\ &\iff |\psi'(\zeta)| \leqslant C(|\zeta| - 1)^{\epsilon - 1} \end{aligned}$$

puisque $(|\zeta| - 1)^{-1} \sim d^n$. A chaque étape, la constante C ne dépend que de P. Il est bon de noter que la dépendance sur κ disparaît à la première étape puisque $C_\kappa \sim |\psi'(\xi)|$. □

En rassemblant divers lemmes et propositions de ce chapitre, on peut résumer tout ceci en une série d'équivalences:

Proposition 2.28. *Soit P un polynôme de degré d tel que $J(P)$ soit connexe, A_∞ le bassin à l'infini, $\psi : \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \to A_\infty$ sa représentation conforme. Soit $z \in A_\infty$, $\zeta = \psi^{-1}(z)$ et y tel que $P^n(y) = z$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes (la métrique sphérique est sous-entendue lorsque nécéssaire):*

1. *A_∞ est un domaine ϵ-Hölder,*
2. *$|\psi'(\zeta)| \leqslant C_1(|\zeta| - 1)^{\epsilon - 1}$ sur $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$,*
3. *ψ est hölderienne d'exposant ϵ sur $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$,*

4. $(P^n)'(y) \geqslant C_2 d^{\epsilon n}$

où C_1 *ne dépend que de* P *et* D *et* C_2 *ne dépend que de* P, d *et* κ.

Démonstration. (1) $\leftrightarrow$ (2) $\leftrightarrow$ (3) est le corollaire 2.23
(2) $\leftrightarrow$ (4) est la Proposition 2.27 □

Figure 2.9: $f = z^2 - 0,153335011 - 1.0301192355i$. A_∞ est un domaine de Hölder

Chapitre 3

Au-delà de Hölder

La motivation d'étudier des conditions géométriques sur les domaines à l'infini et leur relation avec la dynamique sur l'ensemble de Julia est une certaine intuition qu'une telle relation devrait exister assez généralement. De plus, non seulement il devrait y avoir des relations entre la dynamique et la géométrie, mais ces relations semblent assez naturelles, c'est à dire qu'en généralisant simultanément la géométrie et la dynamique, chaque étape de généralisation semble vouloir découper la géométrie ainsi que la dynamique à des endroits naturels. Ceci n'est pas du tout une description exacte ni mathématique, mais plutôt esthétique de ce qui est observé: aucunes conditions compliquées ni sur la dynamique ni sur la géométrie ne semble correspondre naturellement à une condition simple (ou naturelle) pour son alter-ego. Il serait évidemment très intéressant de pouvoir pousser ceci encore plus loin pour voir si effectivement la perte de connectivité locale correspond à une étape naturelle dans cette échelle de correspondances géométrico-dynamiques. Mais ceci est un problème très difficile car la connectivité locale semble persister en dépit d'une perte totale de tout ce qui est normalement considéré expansif, et c'est justement une certaine expansivité résiduelle, si faible soit-elle, qui, avec un bon contrôle de la distorsion, sont les ingrédients cruciaux des démonstrations connues [16, 18, 19].

Ce chapitre est une extension naturelle du chapitre précédent, mais puisque certains domaines sont moins standard et que certains liens avec la dynamique ne sont encore que conjectures, on a voulu mettre ceci en avant de façon marquée. De plus, certaines des démonstrations de propositions de ce chapitre sont basées sur des théorèmes démontrés plus tard dans cette thèse, et donc elles ne seront exposées que dans un chapitre ultérieur. Cependant, les résultats sont inclus ici pour motiver l'introduction de plusieurs constructions assez techniques dont l'intérêt a priori n'est pas évident.

Dans ce chapitre, on débute par un lien explicite entre la dynamique et la métrique quasi-hyperbolique, et un lien entre la distance au bord et la dérivée; ces résultats sont généraux, et offrent donc une indication de plus qu'il existe de forts liens entre géométrie et dynamique. On continue par un aperçu de domaines encore plus généraux définis dans la littérature. On modifie légèrement quelques unes de ces définitions pour les mettre sous une forme plus immédiatement applicable à la dynamique. On termine par plusieurs exemples

qui incluent entres autres des cycles paraboliques et des disques de Siegel.

3.1 Géométrie et dynamique

Dans les domaines de Fatou attractifs (ou super-attractifs), il existe un lien direct entre la distance d'un point à la frontière du domaine et la dérivée le long de son orbite jusqu'au temps où cette orbite est "loin" du bord. Il existe aussi un lien direct entre la distance quasi-hyperbolique à un point "central" donné et le nombre d'itérés nécessaires pour être "loin" du bord.

Soyons maintenant beaucoup plus précis. Soit f une fraction rationnelle, et $\mathcal{F}$ une composante de Fatou de f. On peut toujours supposer que $\mathcal{F}$ est fixe. Dans cette section, f^{-n} sera toujours une branche inverse de f^n qui envoie $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}$. Fixons un sous-domaine $\Omega \subset \mathcal{F}$ tel que $\overline{\Omega} \subset \mathcal{F}$; on supposera que ce domaine contient tout les points critiques de f dans $\mathcal{F}$ et aussi que $\overline{f(\Omega)} \subset \Omega$. Ω représentera ce qui est "loin" de $\partial\mathcal{F}$. Toutes les constantes introduites plus tard dépendront de Ω. Cette dépendance n'est pas vraiment essentielle car, pour les domaines à l'infini par exemple, on peut toujours se fixer certaines équipotentielles à des niveaux donnés pour définir Ω, d'où les constantes dépendront beaucoup plus de $\mathcal{F}$ que de Ω. L'idée d'utiliser Ω comme "centre" vient du fait que les coordonnées dans un domaine attractif, surtout si celui-ci contient plusieurs points critiques, ne sont pas vraiment canoniques. En fait, on se servira de tels ensembles assez fréquemment pour les nommer; un ensemble Ω comme ci-haut sera appelé un *domaine central* pour $\mathcal{F}$.

A partir d'Ω, on défini une suite d'autres domaines qui serviront de graduation de $\mathcal{F}$. On définit:

$$\begin{aligned}
\Omega_0 :=& \mathcal{F} \setminus \overline{\Omega}, \\
\Omega_n :=& f^{-n}(\Omega_0), \\
A_n :=& \Omega_n \setminus \Omega_{n+1}, \\
B_n :=& \partial\Omega_n.
\end{aligned}$$

Tout point $z \in \mathcal{F}$ finira toujours par appartenir à Ω en itérant par f. En fait, on a même plus: pour tout $z \in \Omega_0$, il existe un unique $n = n(z) \geqslant 0$ tel que $z \in A_n$.

A partir de ces définitions, on obtient alors le théorème suivant qui explicite le lien entre la géométrie et la dynamique dans les domaines de Fatou considérés ici.

Théorème 3.1. *Soit $z \in \Omega_0$, $n = n(z)$, et fixons $z_0 \in A_0$. Alors*

$$\begin{aligned}
d(z, \partial\mathcal{F}) &\sim |(f^n)'(z)|^{-1} \\
k_{\mathcal{F}}(z, z_0) &\sim n
\end{aligned}$$

où les constantes ne dépendant que de $\mathcal{F}$ et Ω.

Il est bon de noter qu'aucune hypothèse n'est faites sur la topologie de $\mathcal{F}$ ou de Ω.

Pour démontrer ce théorème, on aura besoin d'un lemme général de distorsion, qui dit que pour toute application conforme définie sur un voisinage d'un point frontière d'un domaine, alors il existe une échelle pour laquelle on a un lemme de Koebe.

Lemme 3.2. *Pour tout domaine $\mathcal{D}$, tout $z \in \partial\mathcal{D}$ et toute échelle r, il existe une échelle $r' = r'(\mathcal{D}, z, r) < r$ tel que pour tout application conforme $\phi : B_r(z) \to \mathbb{C}$ et tout point $y \in \mathcal{D} \cap B_{r'}(z)$ alors*

$$d(\phi(y), \partial\phi(\mathcal{D}') \cap \overline{\phi(B_{r/2}(z))}) \sim d(\phi(y), \partial\phi(\mathcal{D}')) \sim |\phi'(y)| d(y, \partial\mathcal{D}),$$

où $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cap B_r(z)$.

Ce lemme semble être assez connu des experts, mais la seule référence explicite est [14] où il y est le lemme 5.3, et est accompagné d'un sketch de démonstration. Il faut aussi remarquer que la démonstration ci-dessous est inspirée de celle du lemme 5.2 de [14].

Démonstration. (du théorème) On remarque qu'il est suffisant de démontrer la première relation pour z très près de $\partial\mathcal{F}$. Soit r petit tel qu'un r-voisinage de la frontière de $\mathcal{F}$ (c'est à dire $\bigcup_{z\in\partial\mathcal{F}} B_r(z) \cap \mathcal{F}$) soit contenu dans Ω_0. Soit V un recouvrement fini de $\partial\mathcal{F}$ par des boules du lemme 3.2. En utilisant la boule $B_{r'}$ appropriée de V, on a que pour tout $y \in V$ et tout entier k,

$$d(f^{-k}(y), \partial\mathcal{F}) |(f^y)'(f^{-k}(y))| \sim d(y, \partial\mathcal{F}).$$

Soit N l'entier minimal tel que $\Omega_N \subset V$. Pour tout $z \in \Omega_N$ tel que $n = n(z) > N$ alors $f^{n-m}(z) \in A_m \subset V$ et donc par le lemme 3.2,

$$d(z, \partial\mathcal{F}) \sim \ |(f^{n-N})'(z)|^{-1} d(f^{n-m}(z), \partial\mathcal{F}) \sim \ |(f^n)'(z)|^{-1},$$

puisque $|(f^N)'(z)|$ et $d(f^{n-N}(z), \partial\mathcal{F})$ sont essentiellement constant sur A_N.

Pour la deuxième relation, démontrons premièrement qu'il existe une constante $C_1 > 0$ tel que $k_{\mathcal{F}}(z, z_0) \geqslant C_1 n$. Par la proposition 2.16, il existe une géodésique quasi-hyperbolique γ joignant z_0 à z. Posons $\gamma_k = \gamma \cap A_k$, alors si on note la longueur quasi-hyperbolique d'une courbe γ par $\ell_{qh}(\gamma)$,

$$\begin{aligned}
\ell_{qh}(\gamma_k) &= \int_{\gamma_k} \frac{|dz|}{d(z, \partial\mathcal{F})} \\
&= \int_{f^k(\gamma_k)} \frac{|dw|}{|(f^k)'(f^{-k}(w))| d(f^{-k}(w), \partial\mathcal{F})} \\
&\sim \int_{f^k(\gamma_k)} |dw| \geqslant d(B_1, B_0) =: b,
\end{aligned}$$

puisque forcément $f^k(\gamma_k)$ doit joindre B_1 à B_0. En prenant C_1 comme défini implicitement ci-haut (c'est-à-dire b fois la constante provenant du lemme précédent), on a donc que

$$\ell_{qh}(\gamma) \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \ell_{qh}(\gamma_k) \geqslant C_1 n.$$

Il faut maintenant démontrer qu'il existe une constante $C_2 > 0$ telle que $C_2 > C_1$ et $\ell_{qh}(\gamma) \leqslant C_2 n$. Pour ceci, il suffit de trouver pour tout $y \in A_k$ un point $y' \in B_k$ tel que $k_{\mathcal{F}}(y, y') \leqslant C_2$. Soit $z = f^k(y) \in A_k$. On peut joindre z à un point $z_0 \in B_0$ par une courbe $\gamma \subset A_0$ de longueur L bornée. On peut alors considérer $\gamma' = f^{-k}(\gamma)$ où l'on choisit la branche de f^{-k} qui envoie z sur y. Pour $y' = f^{-k}(z_0) \in B_k$, on obtient que

$$\begin{aligned} k_{\mathcal{F}}(y, y') &\leqslant \int_{\gamma'} \frac{|dz|}{d(z, \partial\mathcal{F})} \\ &= \int_{\gamma} \frac{|dw|}{|(f^k)'(f^{-k}(w))| d(f^{-k}(w), \partial\mathcal{F})} \\ &\sim \int_{\gamma} |dw| \leqslant L. \end{aligned}$$

De façon tout à fait similaire, il existe un $C_3 > 0$ tel que pour tout point $y \in B_{k+1}$, on peut trouver un point $y' \in B_k$ tel que $k_{\mathcal{F}}(y, y') \leqslant C_3 L$. Donc pour tout $z \in A_n$, on construit une suite de points $z_k \in B_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$ avec $z = z_{n+1}$ tels que $k_D(z_k, z_{k+1}) \leqslant C_3 L$. On obtient donc

$$k_{\mathcal{F}}(z, z_0) \leqslant k_{\mathcal{F}}(z_0, z_1) + \sum_{k=1}^{n} k_{\mathcal{F}}(z_k, z_{k+1}) \leqslant C_4 + C_3 L n \leqslant C_2 n,$$

où $C_4 = \sup_{w \in B_1} k_{\mathcal{F}}(w, z_0) < \infty$. □

Il est maintenant tout à fait évident que toute condition de croissance de la dérivée le long d'une orbite pourra se voir dans la géométrie du bord du domaine et inversement grâce à ce théorème. Plus précisément, on obtient par exemple les relations suivantes:

Corollaire 3.3. *Soit $\mathcal{F}$ un domaine attractif ou super-attractif pour un polynôme P (de degré d). Soit Ω un domaine central pour $\mathcal{F}$, $0 < \epsilon < 1$ et $\alpha > 0$ arbitraires. Alors, pour tout $z \in \Omega_0$ et $n = n(z)$*

- *il existe un $C > 0$ tel que $k_{\mathcal{F}}(z, z_0) \leqslant \frac{1}{\epsilon} \log_d \frac{1}{\delta_J(z)} + C$ si et seulement si il existe un $C > 0$ tel que $|(f^n)'(z)| \geqslant C d^{\epsilon n}$*
- *il existe un $C > 0$ tel que $k_{\mathcal{F}}(z, z_0) \leqslant \frac{C}{\delta_J(z)^\alpha}$ si et seulement si il existe un $C > 0$ tel que $|(f^n)'(z)| \geqslant C n^{1/\alpha}$*
- *il existe un $C > 0$ tel que $\log k_{\mathcal{F}}(z, z_0) \leqslant \frac{C}{\delta_J(z)^\alpha}$ si et seulement si il existe un $C > 0$ tel que $|(f^n)'(z)| \geqslant C (\log n)^{1/\alpha}$*

où l'on maintient les notations de cette section.

La démonstration consistant simplement en quelques calculs simple, elle est laissée au lecteur. On aurait pu inclure plus de conditions de croissance (considérées naturelles, telles

les termes d'une série de Bertrand de type $n \log n^{1/\epsilon}$, $n \log n \log \log n^{1/\epsilon}$, etc) mais ces conditions ne semblent pas naturelles du point de vue de la dynamique. Ceci est peut-être seulement dû à un manque dans la théorie jusqu'à ce jour - la condition quelque peu baroque de Bruno démontrée exacte par Yoccoz et Perez-Marco [29, 46, 47] devrait convaincre ceux qui en doute.

3.2 Domaines plus généraux

En feuilletant les références accessibles sur les divers types de domaines, il semblerait que peu de domaines plus généraux que les domaines de Hölder ont vraiment été étudiés systématiquement. Et même l'étude des domaines de Hölder est assez récente [3, 38, 40, 12, 30, 41, 22], et certainement moins riche que celle des domaines de John ([25, 17, 8, 30, 7] et leurs références). Mais il est tout à fait possible que ceci évolue rapidement puisque maintenant la dynamique fournit foule d'exemples naturels de domaines dont la frontière exhibe peu de régularité. Il existe cependant quelques travaux dans cette direction, notamment ceux de Smith et Stegenga [39, 40] et de Staples [42].

Les domaines qui nous intéresseront le plus ici seront les domaines η-John de Smith et Stegenga car leur définition est très géométrique et s'interprète bien en dynamique. Les domaines de Poincaré sont définis beaucoup plus analytiquement, et donc plus difficiles à interpréter. Commençons donc par les domaines à description géométriques. Quoique Smith et Stegenga utilisent le terme η-John pour ces domaines, non sans raison vu la similarité des définitions, cette appellation n'est pas très évocatrice. On propose de les nommer plutôt des domaines à pointes "cusp domains"), et si le type de pointe est important, alors on propose des les nommer domaines à α-pointes ("α-cusp domains").

Définition 3.4. Soit $\alpha > 1$, alors un domaine $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ est un domaine à α-pointes s'il existe un point $x_0 \in D$ (le centre) et une constante $C > 0$ tel que pour tout $x \in D$ il existe un chemin $\gamma \subset D$ de x_0 à x tel que pour tout $x_1 \in \gamma$,

$$\delta_D(x_1) \geqslant C\ell(\gamma(x_1, x))^\alpha,$$

où $\ell(\gamma(x, x_1))$ est la longueur (sphérique) du sous-arc de γ allant de x_1 à x.

On remarquera que pour $\alpha = 1$, cette condition coïncide avec la définition de domaine de John. Il est aisé de voir que les pointes sont permises dans de tels domaines, et que α contrôle exactement quel type de pointes il peut y avoir dans ∂D. En copiant presque exactement la démonstration qu'un domaine de John est un domaine de Hölder (proposition 2.24), on obtient

Proposition 3.5. *Soit D un domaine à α-pointes de centre x_0. Alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in D$*

$$k_D(x_0, x) \leqslant \frac{C}{\delta_D(x)^{\alpha-1}}$$

Démonstration. Soit γ un chemin dans D de x_0 à x tel que pour tout $x_1 \in \gamma$,

$$\delta_D(x) \geqslant C\ell(\gamma(x_1, x))^\alpha,$$

Supposons premièrement que pour tout x_1,

$$\delta(x_1) \geqslant (1+\epsilon)\ell(\gamma). \tag{3.1}$$

Alors nous avons que

$$\delta(x) \geqslant \delta(x_1) - d(x_1, x) \geqslant \epsilon\ell(\gamma)$$

pour tout $x \in \gamma$ et que donc

$$k_D(x, x_0) \leqslant \int_\gamma \frac{ds}{\delta(x)} \leqslant \frac{1}{\epsilon}.$$

Puisque $\delta(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in D$, alors $\dfrac{1}{\delta(x)^{\alpha-1}} > 0$, alors il existe un $C > 0$ tel que

$$k_D(x, x_0) < \frac{C}{\delta(x)^{\alpha-1}}.$$

Dans le deuxième cas, en supposant que (3.1) est faux, on peut choisir un sous-arc γ_1 de γ avec bouts x_0 et x_2 tel que

$$\delta(x_2) = (1+\epsilon)\ell(\gamma_1).$$

En d'autre mots, γ_1 est le sous-arc de γ qui reste relativement éloigné de ∂D. Par le même raisonnement qu'avant, on a que $k_D(x, x_2) \leqslant 1/\epsilon$ pour tout $x \in \gamma_1$. Donc si $x \in \gamma \setminus \gamma_1 = \gamma_2$ (c'est à dire le sous-arc qui s'approche de la frontière et qui est éloigné de x_0), l'hypothèse que D est à α-pointes nous donne qu'il existe $C' > 0$ tel que

$$\delta(x) \geqslant C' s^\alpha \tag{3.2}$$

où s est la paramétrisation de γ par longueur d'arc. Donc il existe $C'' > 0$ tel que

$$\begin{aligned} k_D(x_2, x_0) &\leqslant \int_{\gamma_2} \frac{ds}{\delta(x)} \\ &\leq \frac{1}{\epsilon}\int_{\ell(\gamma_1)}^{\ell(\gamma)} \frac{ds}{C' s^\alpha} = \frac{1}{C'(\alpha-1)}\left(\ell(\gamma_1)^{1-\alpha} - \ell(\gamma)^{1-\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{C'(\alpha-1)}\left(\left(\frac{\delta(x_2)}{1+\epsilon}\right)^{1-\alpha} - \ell(\gamma)^{1-\alpha}\right) \leq \frac{C''}{\delta(x_2)^{\alpha-1}} \end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient du fait que le terme ignoré est négatif, et de plus il est petit lorsque $\ell(\gamma)$ est grand.

Il en découle que

$$k_D(x, x_0) \leqslant k_D(x, x_2) + k_D(x_2, x_0)$$

$$\leq \frac{1}{\epsilon} + \frac{C''}{\delta(x_2)^{\alpha-1}}$$

et en combinant ces deux cas, on obtient qu'il existe $C > 0$ tel que

$$k_D(x, x_0) \leqslant \frac{C}{\delta(x)^{\alpha-1}}.$$

□

En combinant ceci avec le corollaire 3.3, on obtient immédiatement

Corollaire 3.6. *Soit $\mathcal{F}$ un domaine de Fatou pour f tel que $\mathcal{F}$ est un domaine à α-pointes, et si Ω est un domaine central pour $\mathcal{F}$, alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $z \in \Omega_0 = \mathcal{F} \setminus \Omega$ et $n = n(z)$*

$$|(f^n)'(z)| \geqslant Cn^{1/(\alpha-1)}$$

On peut se convaincre (exercice sur les cylindres d'Écalle) que si $\mathcal{F}$ est le domaine à l'infini de $f(z) = z^2 + \frac{1}{4}$, alors $\mathcal{F}$ est un domaine à 2-pointes. On obtient donc que pour z dans $B_\epsilon(\frac{1}{2}) \cap \mathcal{F}$, $|(f^n)'(z)| \geqslant Cn$, résultat qui peut de toute façon être obtenu directement (voir le livre de Beardon [2] pour les détails). Il est intéressant de remarquer que pour un domaine à α-pointes D tel que $1 < \alpha < 2$ alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|(f^n)'(z)|} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^{1/(\alpha-1)}} \leqslant M < \infty$$

pour tout $z \in D$, alors que la somme peut diverger pour tout autre choix de α. En fait, si il existe un z tel que $|(f^n)'(z)| \sim n^{1/(\alpha-1)}$ pour $\alpha \geqslant 2$ alors la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|(f^n)'(z)|}$ diverge. Il est intéressant de comparer ceci a quelques résultats de dynamique réelle (voir [26, 28]) où la condition de sommabilité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|(f^n)'(z)|} < \infty \tag{3.3}$$

est souvent utilisée comme condition, pensée très faible, sous laquelle des propriétés intéressantes peuvent être dérivés. On a cependant que

Proposition 3.7. *Soit P un polynôme tel que $A_\infty = D$ est un domaine (simplement connexe) à α-pointes, alors $J(P)$ est localement connexe.*

Démonstration. Puisque D est simplement connexe, les métriques hyperboliques et quasi-hyperboliques sont équivalentes, et donc on peut utiliser les géodésiques hyperboliques qui vont de ∞ à un point donné comme satisfaisant les conditions sur les α-pointes (quitte à utiliser une plus grande constante). Soit $\Omega \subset D$ borné par $\psi(\{|z| = r_0\})$ où $\psi : \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \to D$ est la représentation conforme de D et $r_0 > 1$. Il suffit donc de démontrer que pour tout

$1 < r < r_0$, si z est sur l'équipotentielle $\psi(\{|z| = r\})$ alors γ_z (le rayon qui passe par z allant vers $J(P)$) est de longueur uniformément bornée, et de plus cette longueur tend vers 0 quand $r \to 1$. On remarquera tout de suite que par définition de Ω et z, $n(z)$ (le nombre d'itérations nécessaire pour que z arrive dans Ω) est le même sur toute une équipotentielle.

$$\begin{aligned} \ell(\gamma_z) &\leqslant C\delta_D(z)^{1/\alpha} \\ &\leqslant C|(f^n)'(z)|^{-1/\alpha} \\ &\leqslant \frac{C}{n^{1/(\alpha(\alpha-1))}} \end{aligned}$$

et donc $\ell(\gamma_z) \to 0$ uniformément quand $r \to 1$. Ceci implique que les lacets de Carathéodory convergent uniformément, et donc que $J(P)$ est localement connexe. □

Dans la littérature sur la théorie géométrique des fonctions, les domaines généralisant les domaines de Hölder qui sont rencontrés le plus souvent sont les domaines de Poincaré. Pour définir ceux-ci, on a besoin de quelques autres définitions préliminaires.

Définition 3.8. Soit $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ un domaine de volume fini, alors on dénote $W^{1,p}(D)$ l'espace de Sobolev des fonctions sur D qui sont dans $L^p(D)$ et dont les dérivées partielles (réelles) sont aussi dans $L^p(D)$. La norme sur $W^{1,p}(D)$ est donnée par

$$\|f\|_{W^{1,p}(D)} = \left(\int_D |f|^p dx + \int_D |\nabla f|^p dx\right)^{1/p}.$$

On note aussi f_D la moyenne d'une telle fonction sur D, c'est-à-dire $f_D = \frac{1}{\text{volume}(D)} \int_D f dx$.

Définition 3.9. On dit que D est un domaine de Poincaré, ou plus précisément que D est un domaine p-Poincaré si

$$\sup_{f \in W^{1,p}(D)} \frac{\int_D |f - f_D|^p dx}{\int_D |\nabla f|^p dx} = M_p^p(D) < \infty.$$

En fait, en dimension 2 (la définition ci-haut fonctionne tout aussi bien dans $\mathbb{R}^d$), pour les domaines simplement connexes, un résultat de Hamilton [15] donne une version équivalente de cette définition, nommée l'inégalité analytique de Poincaré. Si $D \subset \mathbb{R}^2$ de volume fini avec une représentation conforme $g : \mathbb{D} \to D$ alors une fonction F analytique sur D qui s'annule en $g(0)$ satisfait l'inégalité analytique de Poincaré si il existe une constante $M > 0$ tel que

$$\int\int_D |F|^2 dxdy \leqslant M \int\int_D |F'|^2 dxdy.$$

Un résultat de Smith et Stegenga [40] se modifie facilement en

Théorème 3.10. *Si $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ est un domaine de Hölder alors D est un domaine p-Poincaré pour tout $p \geqslant 2$.*

Avec l'aide d'une inégalité de Muckenhoupt, ils obtiennent aussi que

Théorème 3.11. *Soit $1 \leqslant p < \infty$. Si D est un domaine à α-pointes avec $\alpha < p+1$ alors D est un domaine p-Poincaré. En particulier si $\alpha < 2$ alors D est p-Poincaré pour tout $1 \leqslant p < \infty$.*

Il n'est pas encore clair si les domaines de Poincaré autres que les domaines à α-pointes interviennent effectivement comme domaines de Fatou. On verra plus tard où il est possible que ce soit le cas.

3.3 Exemples

3.3.1 Ensembles de Julia paraboliques

Le premier exemple de domaine à α-pointes est assez simple: le choux-fleur, et plus précisément le domaine A_∞ pour $z^2 + \frac{1}{4}$. On démontre assez facilement que l'on doit avoir une 2-pointe en $\frac{1}{2}$ où le rayon d'angle 0 aboutit; on démontre ensuite que l'on doit avoir de telles pointes aux images inverses de ce point. On peut ensuite démontrer que les autres points sont accessibles avec aux moins autant d'espace entre le rayon et la frontière du Julia (en fait on conjecture même que tout ces points sont accessibles de telle façon que la conjugaison s'étende en une fonction Hölder continue en ces points). Toutes les idées de la démonstration de ce fait étaient déjà connues de Fatou (voir [11]) qui les utilise implicitement dans ses démonstrations reliées aux tangentes aux points de l'ensemble de Julia.

La proposition suivante est assez facile à démontrer:

Proposition 3.12. *Soit c tel que $f(z) = z^2 + c$ ait un point fixe parabolique x_0, disons de multiplicateur $e^{2\pi i p/q}$, $\Omega = \{z \in A_\infty \mid G(z) > 1000\}$ et $\epsilon > 0$ petit. Alors les points $x \in A_\infty \cap B_\epsilon(x_0)$ sont tels qu'il existe $C > 0$ tel que $|(f^n)'(x)| \geqslant Cn^{1/q}$.*

On peut aussi généraliser ceci aux cycles paraboliques. Empiriquement la conjecture suivante est considérée comme connue, mais aucune démonstration de ce fait n'est connue de l'auteur:

Conjecture 3.13. *Les points $x \in A_\infty$ qui s'échappent le plus lentement dans le cas ci-haut sont les points de $x \in A_\infty \cap B_\epsilon(x_0)$ (c'est-à-dire que la dérivée le long de l'orbite jusqu'à ce que le point tombe dans Ω est la plus petite).*

Cette conjecture ensemble avec les résultats de la section précédente mènent naturellement à:

Conjecture 3.14. *Soit c tel que $f(z) = z^2 + c$ ait un point fixe parabolique x_0, disons de multiplicateur $e^{2\pi i p/q}$, $\Omega = \{z \in A_\infty \mid G(z) > 1000\}$ et $\epsilon > 0$ petit. Alors A_∞ est un domaine à $q+1$-pointes.*

En fait, en utilisant essentiellement la même démonstration que l'on retrouve au chapitre 5 on obtient le résultat suivant:

Proposition 3.15. *Soit P un polynôme de degré 3 avec un point fixe parabolique de multiplicateur p/q et un point critique $c \in J(P)$ tel qu'il existe $C > 0$, $\alpha > 1$ tels que $|(f^n)'(f(c))| \geqslant Cn^{1/\alpha}$ alors A_∞ est tel qu'il existe $C_1 > 0$, $\beta = \max\{q, \alpha\}$ tel que*

$$k_{A_\infty}(z, \infty) \leqslant \frac{C_1}{\delta_{J(P)}(z)^\beta}.$$

On peut évidemment généraliser ceci en degré arbitraire avec des bassins attractifs, plusieurs points critiques dans l'ensemble de Julia d'orbites infinies mais expansives, etc. On remarquera la proposition ci-haut permet quand même de conclure que beaucoup de ces ensembles de Julia sont localement connexes.

Ce qu'il manque pour conclure que l'on a un domaine à $\beta + 1$ pointes est la résolution de:

Conjecture 3.16. *Soit D un domaine de $\overline{\mathbb{C}}$ simplement connexe, avec $x_0 \in D$ et tel qu'il existe $C > 0$ et $\alpha > 1$ tels que pour tout $x \in D$*

$$k_D(x_0, x) \leqslant \frac{C}{\delta_{\partial D}(z)^{\alpha-1}}$$

alors D est un domaine à α-pointes.

Il y a de fortes chances que ceci soit vrai. Il faut tout de même noter que le cas limite $\alpha = 1$ est spécial - les domaines de John ne sont qu'un sous-ensemble des domaines de Hölder.

3.3.2 Disques de Siegel

Le deuxième "exemple" est beaucoup plus intriguant et concerne les disques de Siegel avec nombre de rotation de type borné. En étudiant bien la démonstration du théorème 4.2 (Deep Points) de l'article [23] de McMullen, on en tire le théorème suivant:

Théorème 3.17. *Soit c tel que $f(z) = z^2 + c$ ait un point fixe de multiplicateur $e^{2\pi i\tau}$ avec τ irrationnel de type borné. Soit S le disque de Siegel et $B = \partial S$ sa frontière. Alors il existe $\delta > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout x sur un rayon aboutissant en un point de B,*

$$k_{J(f)}(x, \infty) \leqslant \frac{C}{\delta_B(z)^\delta}.$$

On ne peux toujours pas obtenir que A_∞ est un domaine à α-pointes, mais l'on obtient quand même que la croissance de la dérivée le long d'une orbite qui s'échappe du voisinage du disque de Siegel est $O(n^{1/\delta})$ où δ ne dépend que de τ. En supposant que ces points sont les plus lents à s'échapper et en utilisant d'autres résultats de [40] on conjecture quand même que ces domaines sont des domaines de Poincaré.

Chapitre 4

Préliminaires sur la distorsion

On a tout d'abord besoin de quelques notions sur les applications univalentes et aussi sur le comportement d'une application près d'un point critique. Ceci viens du fait que nous voulons modeler l'action d'une branche inverse d'un itéré sur un disque par une application univalente suivie d'une application qui a un point critique sur le bord du domaine d'intérêt. On fixe d'abord quelques notations, puis on enchaîne avec les lemmes de distorsions dont on aura besoin plus tard. Plus précisément, quelques rappels sur les fonctions univalentes suivit d'une étude sur les propriétés d'une fonction près d'un point critique. On enchaîne par la définition et quelques propriétés d'un outils très pratique, celui des voisinages décroissants, suivit par une études des voisinages décroissants imbriqués. Puis un résultat similaire à la version abstraite du lemme classique de distorsion pour les applications univalentes est obtenu pour les applications de degré borné. On termine par un théorème de Mañé qui n'est pas strictement un théorème sur la distorsion, mais plutôt un outil très pratique qui est souvent utilisé conjointement avec des lemmes de distorsion.

4.1 Fonctions univalentes

Voici d'abord quelques lemmes classiques sur les applications univalentes:

Lemme 4.1. *Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une application univalente tel que $f(0) = 0$, et $f'(0) = 1$, alors*

$$\frac{1}{4} \leqslant d(0, \partial f(\mathbb{D})) \leqslant 1 \tag{4.1}$$

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \tag{4.2}$$

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3} \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{4}(1-|z|^2)|f'(z)| \leqslant d(f(z), \partial f(\mathbb{D})) \leqslant (1-|z|^2)|f'(z)| \tag{4.4}$$

pour $z \in \mathbb{D}$.

On peut trouver les démonstrations dans [6], théorèmes I.1.4 à I.1.6. Le membre gauche de la première équation est classiquement appelée le lemme de Koebe, ou le "$\frac{1}{4}$-Lemma". Il est à noter qu'elle se dérive facilement de la deuxième équation, que nous appellerons aussi par léger abus lemme de Koebe. Le membre droit correspond au lemme de Schwartz. La troisième équation est parfois appelée le lemme de distorsion de Bieberbach, ou plus simplement le lemme de Bieberbach. La quatrième équation s'obtient grâce aux précédentes. On utilisera souvent ce lemme, surtout sous la forme suivante.

Corollaire 4.2. *Soit $f : B(z_0, r) \to \mathbb{C}$ une application univalente, alors*

$$\frac{r}{4}|f'(z_0)| \leqslant d(f(z_0), \partial f(B(z_0, r))) \leqslant r|f'(z_0)| \tag{4.5}$$

$$r^2|f'(z_0)|\frac{d(z, z_0)}{(r + d(z, z_0))^2} \leqslant |f(z) - f(z_0)| \leqslant r^2|f'(z_0)|\frac{d(z, z_0)}{(r - d(z, z_0))^2} \tag{4.6}$$

$$r^2|f'(z_0)|\frac{r - d(z, z_0)}{(r + d(z, z_0))^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant r^2|f'(z_0)|\frac{r + d(z, z_0)}{(r - d(z, z_0))^3} \tag{4.7}$$

$$\frac{r|f'(z)|}{4}(1 - \frac{d(z, z_0)^2}{r^2}) \leqslant d(f(z), \partial f(\mathbb{D})) \leqslant r|f'(z)|(1 - \frac{d(z, z_0)^2}{r^2}) \tag{4.8}$$

pour $z \in B(z_0, r)$.

Démonstration. On applique le lemme 4.1 à la fonction

$$g(z) = \frac{1}{rf'(z_0)}(f(zr + z_0) - f(z_0))$$

□

Puisque ce corollaire est si facile, on utilisera les noms classiques pour les équations correspondantes. Ces résultats permettent un assez bon contrôle de la distorsion d'une application univalente, surtout à une certaine distance du bord.

4.2 Près d'un point critique

Lorsqu'on est près d'une singularité, on retrouve alors un comportement assez différent, mais tout de même analysable.

Lemme 4.3. *Soit $f : B(z_0, r) \to \mathbb{C}$ une fonction analytique définie sur un voisinage U de $B(z_0, r)$ de degré ν avec un seul point critique z_0 de multiplicité $\nu - 1$ et sans autres points critiques dans U. Alors il existe des constantes $M_1(r)$ et $M_2(r)$ qui ne dépendent que de f, ν et r telles que pour $z \in B(z_0, r)$*

$$M_1(r)d(z, z_0)^\nu \leqslant d(f(z), f(z_0)) \leqslant M_2(r)d(z, z_0)^\nu \tag{4.9}$$

$$\nu M_1(r)d(z, z_0)^{\nu-1} \leqslant |f'(z)| \leqslant \nu M_2(r)d(z, z_0)^{\nu-1}. \tag{4.10}$$

Démonstration. Soit $\Omega = \{z \mid d(z, z_0) \leqslant r\}$. Les conditions sur f donnent qu'il existe une fonction analytique $A(z)$ tel que sur U,

$$f'(z) = (z - z_0)^{\nu-1} A(z),$$

et $A(z) \neq 0$ dans U. On définit alors

$$\begin{aligned} M_1(r) &= \inf_{\Omega} |A(z)| \\ M_2(r) &= \sup_{\Omega} |A(z)| \end{aligned}$$

Puisque A est analytique, $\log |A|$ est harmonique et donc les valeurs $M_1(r)$ et $M_2(r)$ sont réalisées sur la frontière de Ω puisque $A(z) \neq 0$ dans Ω. On en conclut que ces constantes ne dépendent que de $A(z)$ sur $\partial\Omega$ et de ν, donc que de f, r et ν.

Du développement de $f'(z)$, on a aussi que

$$M_1(r) d(z, z_0)^{\nu-1} \leqslant |f'(z)| \leqslant M_2(r) d(z, z_0)^{\nu-1}$$

ce qui démontre l'équation (4.10).

Pour un z fixe, on considère les points $w_t = (1-t)z + tz_0$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, et donc en utilisant (4.10) pour ces points, $|f'(w_t)| \leqslant M_2(r) d(w_t, z_0)^{\nu-1}$. En conséquence de quoi

$$d(f(z), f(z_0)) \leqslant \frac{M_2(r)}{\nu} d(z, z_0)^{\nu}$$

par intégration sur t, ce qui donne le membre droit de (4.9).

La dernière inégalité est plus subtile. Il s'agit de trouver une borne inférieure pour $d(f(z), f(z_0))$, ce qui équivaut à trouver une borne inférieure à la longueur de tous les chemins de z à z_0 dans U mais dont la longueur est mesurée dans $f(U)$.

Mathématiquement, on a

$$d(f(z_0), f(z)) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} |f'(w)||dw| \geqslant \inf_{\gamma} \int_{\gamma} |w - z_0|^{\nu-1} M_1 |dw|$$

où γ est une courbe C^1 dans U de z_0 à z. On est donc amené à résoudre un problème du calcul des variations, qui heureusement se résout facilement et la courbe minimale est la droite de z_0 à z d'où, par intégration, on obtient finalement que

$$d(f(z_0), f(z)) \geqslant \frac{M_1(r)}{\nu} d(z, z_0)^{\nu}$$

comme voulut. □

Ce lemme sera souvent utilisé dans le cas où z_0 est un point critique et r est plus petit que la moitié de la distance minimale d'un point critique à un autre. On remarquera que pour le cas $f = z^l + c$, (l entier $\geqslant 2$), $\nu = l$ et que par un calcul direct, on a que

$$|f(z) - c| = |z|^l$$

$$|f'(z)| = l|z|^{l-1}.$$

Il est à noter qu'on peut faire encore mieux et englober plusieurs points critiques d'un seul coup et on obtient essentiellement la même chose. Voir par exemple le lemme page 387 de [36].

Il est aussi possible d'obtenir le même résultat en spécifiant une échelle à la valeur critique au lieu de la spécifier au point critique. Plus précisément,

Lemme 4.4. *Pour toute fonction rationnelle f, il existe r_1, $M_1(r_1)$ et $M_2(r_1)$ tous positifs tels que la distance entre deux points critiques distincts est au moins $2r_1$, et tels que si $\{v_1, \dots, v_p\}$ sont les valeurs critiques alors toute composante connexe de $f^{-1}(B(v_i, r_1))$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$ contient précisément une pré-image de v_i, et si cette pré-image est un point critique c_i de multiplicité $\nu(c_i)$, et que si $d(f(y), v_i) < r_1$ pour un point $y \in \overline{\mathbb{C}}$ alors*

$$M_1(r_1)d(y, c_i)^{\nu(c_i)} \leqslant |f'(y)| \leqslant M_2(r_1)d(y, c_i)^{\nu(c_i)}.$$

Démonstration. Il suffit de prendre r_1 si petit que $f^{-1}(B(v_i, r_1)) \subset B(c_i, r_1/2)$ où f^{-1} est la branche de v_i à c_i. Puisque les valeurs critiques sont isolées (ou multiples), dans les deux cas on voit que c'est toujours possible en utilisant le lemme précédent. □

Ce lemme nous permet donc de choisir une échelle r_1 à laquelle on pourra toujours utiliser les approximations données auparavant sur le comportement près d'un point critique, c'est à dire des relations entre la dérivée, la distance au point critique, ou encore la distance de l'image du point à la valeur critique. Il nous sera donc important de démontrer que l'on peut toujours s'arranger pour que les phénomènes à étudier qui dépendent du comportement au voisinage d'un point critique se manifestent en effet à cette échelle.

Si l'échelle à laquelle on travaille est fixée, on la supprimera dans la notation des constantes si cela ne mène à aucune confusion.

4.3 Voisinages décroissants

On introduit maintenant une construction très pratique qui permet un certain contrôle a priori de la distorsion sur de longues compositions de branches inverses univalentes. La seule méthode que l'on possède pour borner la distorsion est d'utiliser le lemme 4.2. Mais pour obtenir des bornes utiles, il faut pouvoir isoler les points que l'on considère de la frontière du domaine $B(z_0, r)$ sinon les bornes sur $f'(z)$ dégénèrent. Ceci revient à pouvoir affirmer que les points qui nous intéressent sont isolés de la frontière par une couronne ou, encore mieux, par une couronne dont la largeur ne dépend pas de la branche inverse.

Soit $\{\delta_n\}$ une suite de nombres positifs tels que $\frac{1}{2} < \prod_n(1 - \delta_n) < 1$. Soit $\Delta_n = \prod_{j=1}^{n}(1-\delta_j)$. On appellera *voisinages décroissants de z* les boules $B(z, r\Delta_n)$. Soit $\{f^{-n}(z_0)\}$ une suite d'images inverses de z_0, alors on notera $U_n = \text{c.c.}\, f^{-n}(B(z_0, r\Delta_n))$ qui contient $f^{-n}(z_0)$. On appellera les U_n les *images décroissantes* associées aux voisinages décroissants. Il faut quand même se rappeler que ces images sont par des branches inverses de f, et donc que l'action de f^n est sur U_n et non sur les voisinages décroissants. Mais puisque

dans tous les cas que l'on va considérer, les branches inverses on tendance à décroître la taille des domaines sur lesquels elles sont appliquées, ceci pourra servir d'aide-mémoire pour connaître s'il s'agit d'image inverse ou directe dont il est question.

En considérant $V = \text{c. c. } f^{-n}(B(z_0, r\Delta_{n+1})$ qui contient z_n, on s'aperçoit non seulement que $V \subset U_n$ mais que l'on obtient des bornes sur la distorsion de f^n sur V en termes que de δ_n en utilisant le corollaire 4.2. Une application plus substantielle de ces voisinages est lorsqu'après une longue itération univalente (par une branche inverse), la boule que l'on itère passe près d'un point critique. On utilisera la notation du lemme 4.3 pour les constantes de la prochaine proposition.

Proposition 4.5. *Supposons que la suite U_k des images décroissantes pour $B(z_0, r)$ ne contiennent pas de points critiques pour $0 < k < n$ et qu'il y ait un point critique $c \in \partial U_n$ de multiplicité ν. Soit $u \in U_n$ tel que $f^n(u) = z_0$ et $d(f(u), f(c))$ assez petit pour que le lemme 4.3 s'applique, alors*

$$\frac{\nu M_1(r)}{8}\delta_n d(c,u)^{\nu-1}|(f^{n-1})'(f(c))| \leqslant |(f^n)'(u)| \leqslant \frac{2\nu M_2(r)}{\delta_n^3} d(c,u)^{\nu-1}|(f^{n-1})'(f(c))| \tag{4.11}$$

et si $C_1(r) = (\nu M_1(r))^\nu / M_2(r)^{\nu-1} 2^{2\nu-1}$, $C_2(r) = 2(\nu M_2(r))^\nu / M_1(r)^{\nu-1}$ alors

$$C_1 \delta_n d(f^n(c), z_0)^{\nu-1}|(f^{n-1})'(f(c))| \leqslant |(f^n)'(u)|^\nu \leqslant \frac{C_2}{\delta_n^{2\nu+1}} d(f^n(c), z_0)^{\nu-1}|(f^{n-1})'(f(c))|. \tag{4.12}$$

Démonstration. Soit r l'échelle de base à laquelle on travaille, et on supprimera la dépendance des constantes sur r de la notation. Premièrement, on applique le corollaire 4.2 à

$$f^{-(n-1)} : B(z_0, r\Delta_{n-1}) \to U_{n-1}$$

pour $z = f^n(c)$ et on obtient

$$\frac{d(f^n(c), z_0)}{(2-\delta_n)^2|(f^{n-1})'(f(u))|} \leqslant d(f(c), f(u)) \leqslant \frac{d(f^n(c), z_0)}{\delta_n^2|(f^{n-1})'(f(u))|} \tag{4.13}$$

$$\frac{\delta_n|(f^{n-1})'(f(c))|}{(2-\delta_n)^3} \leqslant |(f^{n-1})'(f(u))| \leqslant \frac{(2-\delta_n)|(f^{n-1})'(f(c))|}{\delta_n^3} \tag{4.14}$$

puisque $r = r\Delta_{n-1}$ et de $c \in \partial U_n$, $d(f^n(c), z_0) = r\Delta_n$. On poursuit avec le lemme 4.3, qui s'applique puisque $d(f(u), f(c))$ est assez petit. Dans les notations de ce lemme, $z_0 = c$, $z = u$, ν est la multiplicité de c. En insérant ces nouvelles équations dans les précédentes, on obtient que

$$M_1 d(u,c)^\nu \leqslant d(f(u), f(c)) \leqslant M_2 d(u,c)^\nu \tag{4.15}$$

$$\nu M_1 d(u,c)^{\nu-1} \leqslant |f'(u)| \leqslant \nu M_2 d(u,c)^{\nu-1}. \tag{4.16}$$

Figure 4.1: f^n de U_n à $B_{r\Delta_n}$

Il est clair qu'en utilisant $|(f^n)'(u)| = |f'(u)|\ |(f^{n-1})'(f(u))|$ et les équations (4.14) et (4.16), on obtient directement (4.11).

Commençons par montrer que

$$|(f^n)'(u)|^\nu \leqslant \frac{C_2}{\delta_n^{2\nu+1}} d(f^n(c), z_0)^{\nu-1} |(f^{n-1})'(f(c))|$$

en indiquant les étapes:

$$\begin{aligned}
|(f^n)'(u)|^\nu &= |f'(u)|^\nu |((f^{n-1})'(f(u))|^\nu \\
&\leqslant (\nu M_2)^\nu d(u,c)^{\nu(\nu-1)} |((f^{n-1})'(f(u))|^\nu \\
&\leqslant (\nu M_2)^\nu M_1^{-\nu+1} d(f(u), f(c))^{\nu-1} |((f^{n-1})'(f(u))|^\nu \\
&\leqslant (\nu M_2)^\nu M_1^{-\nu+1} \left(\frac{d(f^n(c), z_0)}{\delta_n^2 |(f^{n-1})'(f(u))|}\right)^{\nu-1} |((f^{n-1})'(f(u))|^\nu \\
&\leqslant (\nu M_2)^\nu \left(\frac{1}{\delta_n^2 M_1}\right)^{\nu-1} d(f^n(c), z_0)^{\nu-1} |(f^{n-1})'(f(u))|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant (\nu M_2)^\nu (\frac{1}{\delta_n^2 M_1})^{\nu-1} d(f^n(c), z_0)^{\nu-1} \frac{(2-\delta_n)}{\delta_n^3} |(f^{n-1})'(f(c))| \\
&\leqslant \frac{C_2}{\delta_n^{2\nu+1}} d(f^n(c), z_0)^{\nu-1} |(f^{n-1})'(f(c))|
\end{aligned}
$$

On montre ensuite

$$
|(f^n)'(u)|^\nu \geqslant C_1 \delta_n d(f^n(c), z_0)^{\nu-1} |(f^{n-1})'(f(c))|
$$

encore de façon détaillée, où l'on utilise essentiellement les mêmes étapes, mais les inégalités complémentaires des précédentes, ce qui modifie totalement la dépendance de la "distorsion" sur δ_n

$$
\begin{aligned}
|(f^n)'(u)|^\nu &= |f'(u)|^\nu |((f^{n-1})'(f(u))|^\nu \\
&\geqslant (\nu M_1)^\nu d(u,c)^{\nu(\nu-1)} |((f^{n-1})'(f(u))|^\nu \\
&\geqslant (\nu M_1)^\nu M_2^{-\nu+1} d(f(u), f(c))^{\nu-1} |((f^{n-1})'(f(u))|^\nu \\
&\geqslant (\nu M_1)^\nu M_2^{-\nu+1} (\frac{d(f^n(c), z_0)}{(2-\delta_n)^2 |(f^{n-1})'(f(u))|})^{\nu-1} |((f^{n-1})'(f(u))|^\nu \\
&\geqslant (\nu M_1)^\nu (\frac{1}{(2-\delta_n)^2 M_2})^{\nu-1} d(f^n(c), z_0)^{\nu-1} |(f^{n-1})'(f(u))| \\
&\geqslant (\nu M_1)^\nu (\frac{1}{(2-\delta_n)^2 M_2})^{\nu-1} d(f^n(c), z_0)^{\nu-1} \frac{\delta_n}{(2-\delta_n)^3} |(f^{n-1})'(f(c))| \\
&\geqslant C_1 \delta_n d(f^n(c), z_0)^{\nu-1} |(f^{n-1})'(f(c))|
\end{aligned}
$$

où l'on a que $C_2 = 2(\nu M_2)^\nu / M_1^{\nu-1}$ et $C_1 = (\nu M_1)^\nu / M_2^{\nu-1} 2^{2\nu+1}$. □

On remarque que si on se restreint au cas $z^l + c$, plus de simplifications sont possibles, et que dans ce cas les constantes de la proposition 4.5 se simplifient à $C_2 = 2l^l$ et $C_1 = l^l / 2^{2l+1}$.

Pour compléter, on a besoin d'un petit lemme qui dit essentiellement que l'on a un bon contrôle de la distance entre $f(u)$ et $f(c)$ sous des hypothèses de croissance sur la dérivée le long de l'orbite critique et un bon choix de la suite δ_n. En utilisant les mêmes notations que pour la proposition ci-haut,

Lemme 4.6.

$$
d(f(u), f(c)) \leqslant \frac{8r}{\delta_n^3} |(f^{n-1})'(f(c))|^{-1} \tag{4.17}
$$

Démonstration. il suffit simplement d'utiliser les équation (4.13) puis (4.14). □

On obtient alors le corollaire suivant:

Corollaire 4.7. *Supposons que* $R := sup_{c \in \mathrm{Crit}'} sup_{n \in \mathbb{N}} |(f^{n-1})'(f(c))|^{-1} \delta_n^{-3} < \infty$ *alors il existe une échelle* r *pour laquelle on peut appliquer la proposition 4.5.*

Démonstration. Il suffit de prendre le r dans la proposition tel que $8rR < r_1$, où r_1 est la constante du lemme 4.4. □

Ce que ce lemme dit est que si on a une légère croissance de la dérivée le long des orbites critiques, tant que l'on peut choisir une suite une suite $\{\delta_n\}$ qui ne détruit pas cette croissance, alors on peut utiliser les estimations précédentes, ce qui permettra souvent d'étendre cette croissance de la dérivée à d'autres points que seulement l'orbite des points critiques. Il est très important de remarquer que les hypothèses du corollaire sont faibles, beaucoup plus que Collet-Eckmann par exemple. Ceci nous amène naturellement à poser

Définition 4.8. Soit $r_0 > 0$ tel que $16r_0R < r_1$. r_0 sera appelé *l'échelle de base* car toutes les boules qui seront dorénavant considérées seront de rayon au plus $2r_0$, et donc le corollaire 4.7 sera toujours applicable.

On utilisera r_0 comme défini ci-haut dans toute la suite. Les autres symboles (R, r_1, etc) seront réutilisés.

4.4 Voisinages décroissants imbriqués

Les voisinages décroissants ont une autre propriété intéressante qui nous sera utile. Dans le cas d'intérêt, on peut toujours s'assurer que l'on peut reconstruire de nouveaux voisinages décroissants autour du point $u = f^{-n}(z)$ de taille comparable à l'échelle locale (à une puissance de δ_k près), c'est à dire que le r que l'on prend est de taille comparable à la distance de u à c_i qui est le point critique sur $\partial U_n = f^{-n}(B(z, r'))$ de l'étape précédente.

Proposition 4.9. *Soit r_1 tel que les images décroissantes U_l pour $B(z, r_1)$ avec $l \leqslant N$ ne rencontrent aucuns points critiques. Soit r_2 le plus petit nombre tel que $r_1 < r_2 < 2r_0$ et qu'il y ait un point critique $c_i \in \partial U_k$ pour U_k une image décroissante de $B(z, r_2)$. Soit $u = f^{-k}(z)$ et supposons f et $\{\delta_k\}$ tel que les hypothèses du corollaire 4.7 soient satisfaites, alors les images décroissantes U_l pour les voisinages décroissants $B(u, \tau_k d(u, c_i))$ pour $l \leqslant N - k$ ne rencontrent pas de points critiques, où $\tau_k = \nu^{-1}\delta_k^{2/\nu}2^{2-2/\nu}$ avec ν la multiplicité de c_i.*

Il est tout à fait évident que la condition sur r_1 ci-haut est inutile, il suffit que f^{-n} soit univalent sur $B(z, r_2\Delta_n)$ pour $1 \leqslant n \leqslant k$. Mais elle y figure car c'est exactement la situation où cette proposition sera utilisée. Il suffit simplement de remarquer que r_1 n'apparaît pas dans la démonstration.

Démonstration. Il suffit de démontrer que $B(u, \tau_k d(u, c_i)) \subset U_k$.

Par hypothèse, f^{-k} est univalent sur $B(z, r_2\Delta_k)$ et donc par Koebe et la proposition 4.5,

$$\begin{aligned} d(u, \partial U_k) &\geqslant d(u, \partial f^{-k}(B(z, r_2\Delta_k))) \\ &\geqslant \frac{1}{4}\frac{r_2\Delta_k}{|(f^k)'(u)|} \end{aligned}$$

Figure 4.2: $B(z,r)$ et image sous f^{-k} avec $B_{u,\tau_k d(u,c_i)}$

$$\begin{aligned} &\geqslant \frac{1}{4(C_1\delta_k)^{\frac{1}{\nu}}} \frac{r_2\Delta_k}{d(f^k(c),z)^{1-\frac{1}{\nu}}|(f^{k-1})'(f(c))|^{\frac{1}{\nu}}} \\ &\geqslant \frac{1}{4(C_1\delta_k)^{\frac{1}{\nu}}} \frac{(r_2\Delta_k)^{\frac{1}{\nu}}}{|(f^{k-1})'(f(c))|^{\frac{1}{\nu}}}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

En utilisant les équations (4.15), puis (4.13) et enfin (4.14), on obtient pour $d(u,c_i)$

$$\begin{aligned} d(u,c_i) &\leqslant \left(\frac{d(f(u),f(c))}{M_1}\right)^{\frac{1}{\nu}} \\ &\leqslant \left(\frac{d(f^k(c),z)}{M_1(r)\delta_k^2|(f^{k-1})'(f(u))|}\right)^{\frac{1}{\nu}} \\ &\leqslant \left(\frac{r_2\Delta_k(2-\delta_k)^3}{M_1(r)\delta_k^3|(f^{k-1})'(f(c))|}\right)^{\frac{1}{\nu}} \qquad (4.19) \\ &\leqslant \left(\frac{8r_2\Delta_k}{M_1(r)\delta_k^3|(f^{k-1})'(f(c))|}\right)^{\frac{1}{\nu}} \qquad (4.20) \end{aligned}$$

Il reste donc à montrer que le rapport de ces deux quantités est une quantité que l'on

contrôle bien:

$$\begin{aligned}\frac{d(u,\partial U_k)}{d(u,c_i)} &\geqslant \frac{1}{4}\left(\frac{M_1(r)\delta_k^2}{8C_1}\right)^{\frac{1}{\nu}} \\ &\geqslant \frac{1}{\nu}\left(\frac{M_2(r)}{M_1(r)}\right)^{1-\frac{1}{\nu}}\delta_k^{2/\nu}2^{2-2/\nu} \\ &\geqslant \frac{1}{\nu}\delta_k^{2/\nu}2^{2-2/\nu}\end{aligned}$$

Si l'on définit τ_k comme étant cette constante ci-haut, qui ne dépend que de ν et de δ_k, on obtient la conclusion voulue. □

Il est clair que si l'on sait plus sur $M_2(r)/M_1(r)$ alors il est possible d'améliorer cette inégalité.

4.5 Degré borné

Les sections précédentes fournissent des outils pour suivre, assez précisément, la dérivée d'une fonction rationnelle le long de certaines orbites. Cependant, si l'on ne s'intéresse qu'aux diamètres, la proposition suivante (une variation du Lemme 2.2 de [8]) est très utile et mérite d'être plus connue, surtout pour ses multiples corollaires.

Proposition 4.10. *Soit $p \geqslant 2$ entier, alors la famille de fonctions*

$$\mathcal{F}_p = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{D} \mid f(0) = 0,\ 1 \leqslant \text{degré}(f) \leqslant p, f \textit{ surjective}\}$$

est compacte (pour la topologie de la convergence uniforme).

Démonstration. On peut d'abord remarquer que $\mathcal{F}_p$ est la famille de produits de Blashke de la forme

$$f(z) = \lambda z \prod_{i=1}^{n} \frac{z + a_i}{\overline{a_i} z + 1}$$

où $1 \leqslant n \leqslant p-1$, $|\lambda| = 1$, et $a \in \mathbb{D}$. De cette information, on pourrait démontrer ce résultat essentiellement algébriquement, mais ceci offre une démonstration peu convaincante. Plus simplement, on remarque que la famille $\mathcal{F}_p$ est normale, donc toute sous-suite convergente est surjective ou constante. Puisque $f(0) = 0$, la seule fonction constante qui pourrait survenir est $f(z) = 0$. Mais il n'y a au plus que $p-1$ points autres que 0 qui s'envoient sur 0, et donc entre le cercle de rayon $\frac{1}{4}$ et celui de rayon $\frac{1}{2}$, il existe une couronne de largeur $\frac{1}{4(p-1)}$ qui ne contient aucuns de ces points, et donc il existe $\frac{1}{4} < r < \frac{1}{2}$ tel que la distance entre chaque point qui s'envoient sur 0 et le cercle de rayon r est plus grande que $\frac{1}{8(p-1)}$. En utilisant le lemme de Koebe pour chaque composante du produit de Blashke, on obtient que f envoie le cercle de rayon r à distance bornée inférieurement du point 0, borne qui ne dépend que de p et non de f. Donc 0 n'est pas limite de fonctions de $\mathcal{F}_p$, ce qui implique que $\mathcal{F}_p$ est compacte. □

Corollaire 4.11. *Il existe une fonction croissante $r_p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que si $f \in \mathcal{F}_p$ alors*

$$B_\rho(0, r_p(t)) \subset f(B_\rho(0,t)) \subset B_\rho(0,t)$$

où ρ dénote la métrique de Poincaré et $B_\rho(z,r)$ est la boule de rayon de Poincaré r autour de z.

Démonstration. La première inclusion vient du fait que $\mathcal{F}_p$ est compacte, et la deuxième du lemme de Schwartz-Pick. □

Il est assez évident qu'une démonstration directe de ce corollaire existe - la démonstration de la proposition précédente en contient les idées principales.

Corollaire 4.12. *Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux domaines simplement connexes, avec deux points marqués $z_1 \in \mathcal{D}_1$ et $z_2 \in \mathcal{D}_2$, tels que $f : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$ surjective de degré p et $f(z_1) = z_2$, et si ρ_i est la métrique de Poincaré de $\mathcal{D}_i$, $i = 1, 2$, alors il existe une fonction $r_p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ (dépendant seulement de $\mathcal{D}_i, z_i$ et p) telle que*

$$B_{\rho_2}(z_2, r_p(t)) \subset f(B_{\rho_1}(z_1, t)) \subset B_{\rho_2}(z_2, t).$$

Démonstration. C'est évident en appliquant la proposition à la fonction $g = h_2^{-1} \circ f \circ h_1 : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, où h_i est la représentation conforme de $\mathcal{D}_i$, et le lemme de Koebe sur chaque h_i. Une autre démonstration utilise le corollaire précédent et le fait que les applications biholomorphes entre des domaines hyperboliques sont des isométries. □

On aura aussi besoin du lemme suivant, qui nous permettra de comparer des cercles euclidiens et de Poincaré.

Lemme 4.13. *Il existe un $\epsilon_0 > 0$ tel que si U est simplement connexe, $z_0 \in U$, et γ est le cercle de Poincaré centré en z_0 de rayon 1 dans U, alors*

$$\frac{\inf_{x \in \gamma} d(z_0, x)}{\sup_{x \in \gamma} d(z_0, x)} \geqslant \epsilon_0$$

Ce lemme est une conséquence facile du lemme 4.1 (voir la deuxième équation) en terme de métrique hyperbolique.

4.6 Théorème de Mañé

Cette section, avec la dernière, pourraient facilement former un chapitre à eux seuls, mais puisque leur contenu est de plus en plus "classique", il semble naturel de les traiter comme tel. Le théorème suivant, dû à Mañé, sera utilisé plusieurs fois dans les chapitres suivants pour conclure que certaines images inverses sont petites. Ce théorème est intéressant en lui-même, mais est surtout apprécié pour ses corollaires. Il est donc important de donner une démonstration complète de celui-ci ainsi que de ses corollaires importants.

Théorème 4.14. *Soit f une fraction rationnelle. Si un point $x \in J(f)$ n'est ni parabolique ni contenu dans $\omega(c)$ pour un point critique c récurrent, alors pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, il existe un voisinage U de x tel que*

1. *pour tout $n \geqslant 0$,* $\operatorname{Diam} \text{c. c. } f^{-n}(U) \leqslant \epsilon$,
2. *il existe un $N > 0$ tel que pour tout $n \geqslant 0$ et pour toute composante connexe V de $f^{-n}(U)$, alors* $\text{degré}(f^n)|_V \leqslant N$,
3. *pour tout $0 < \epsilon_1 < \epsilon$ il existe un $n_0 > 0$ tel que pour toute composante connexe V de $f^{-n}(U)$, $n \geqslant n_0$, alors* $\operatorname{Diam} V \leqslant \epsilon_1$.

Pour la démonstration, on aura besoin d'un lemme préliminaire, utile en lui-même, qui dit essentiellement que le diamètre des composantes connexes V des images inverses des sous-ensembles compacts de U ne grossit pas si le degré de l'application de V à U est borné.

Lemme 4.15. *Soit f un fraction rationnelle, alors pour tout $x \in J(f)$ non parabolique, pour tout $\epsilon > 0$, $N < \infty$ il existe $\delta > 0$ tel que si V est une composante connexe de $f^{-n}(B(x,\delta))$ tel que $f : V \to B(x,\delta)$ de degré $\leqslant N$, alors le diamètre de toute composante de $V \cap f^{-n}(B(x,\delta/2))$ est $\leqslant \epsilon$.*

Démonstration. Par l'absurde. Supposons qu'il existe $x \in J(f)$, $\epsilon > 0$, $N < \infty$ tels que pour tout $\delta > 0$ tel que $B(x,\delta)$ ne contient ni point attractifs ou paraboliques, il existe $n > 0$ et V une composante connexe de $f^{-n}(B(x,\delta))$, $f : V \to B(x,\delta)$ de degré $\leqslant N$ tel qu'une composante connexe W_δ de $V \cap f^{-n}(B(x,\delta/2))$ est de diamètre $> \epsilon$.

Choisissons une suite $\delta_i \to 0$ comme ci-haut, avec la suite n_i associé. Notons que forcément $n_i \to \infty$. Alors il existe deux possibilités.

1. Il existe un $\epsilon_0 > 0$ et $x_i \in W_{\delta_i}$ tels que $B(x_i,\epsilon_0) \subset W_{\delta_i}$ pour une infinité de x_i. Alors il existe une sous-suite i_j telle que $x_{i_j} \to y \in J(f)$, et donc un $\epsilon_1 > 0$ tel que $\Delta = B(y,\epsilon_1) \subset W_{\delta_{i_j}}$ pour tout $j > j_0$. Notons cette sous-suite aussi par δ_i. La famille de fonctions $f^{n_i} : \Delta \to B(x,\delta_i)$ est normale, et donc $\Delta \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus J$. Mais toute suite d'itérés de f qui converge sur $\Delta \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus J$ vers une constante (puisque $\delta_i \to 0$) converge soit vers un cycle attractif ou un cycle parabolique. Mais par hypothèse ceci ne se produit pas.
2. Le disque maximal $D_i \subset W_{\delta_i}$ a un diamètre qui tend vers 0. Mais par le lemme 4.13 et le corollaire 4.12, $\operatorname{Diam} W_{\delta_i} \to 0$, ce qui contredit l'existence de ϵ.

□

On notera que l'hypothèse sur le degré n'est utilisée que pour assurer que si $\operatorname{Diam} V_i \to 0$, alors $\operatorname{Diam} W_{\delta_i} \to 0$. Si l'on peut donc trouver d'autres familles de fonctions de distorsion bornée, l'on pourra obtenir la même conclusion.

Pour simplifier la démonstration, introduisons un peu de notation. Soit $S(x,\delta)$ le carré de centre x de rayon δ. On dira que $S(x,\delta)$ est *admissible* si $S(x,3\delta)$ ne contient ni cycles attractifs ni cycles paraboliques. On notera premièrement que le lemme précédent s'applique tout

aussi bien à $S(x,\delta)$ qu'à $B(x,\delta)$. À noter que si f a des points paraboliques, alors δ ne peut être choisi uniformément pour tout $x \in J(f)$, mais peut être choisi uniformément sur tout compact $K \subset J(f)$ qui évite les points paraboliques, ce qui suffira dans la démonstration.

Il n'est pas indispensable d'utiliser des carrés, mais les correspondances sont plus claires car la combinatoire est plus simple, et la géométrie triviale, alors que les voisinages correspondants en utilisant des cercles sont beaucoup plus difficiles à décrire correctement.

Démonstration du Théorème. On démontre la première partie, de laquelle les deux autres propriétés suivront facilement.

Soit

$$\epsilon_0 = \inf\{d(c, f^n(c) \mid c \text{ critique non-récurrent}, c \in J(f), n \geqslant 0\} \tag{4.21}$$

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2}\inf\{d(x, f^n(c) \mid c \text{ critique récurrent}, c \in J(f), n \geqslant 0\}, \tag{4.22}$$

et $\epsilon_2 = \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$. A noter que par hypothèse, $\epsilon_2 > 0$. Soient $N = 2^{2d-2}$ et $0 < \epsilon < \epsilon_2/16N$ donnés, et $\delta = \delta(\epsilon, N)$ donnés par le lemme précédent mais en utilisant des voisinages de la forme $S(x,\delta)$ admissibles.

On raisonne par l'absurde. Soit $\eta \leqslant \delta$. Soit n minimal tel que pour $S(x,\eta)$ admissible, V_n une composante connexe de $f^{-n}(S(x,\eta))$, et V_n' une composante connexe de $V_n \cap f^{-n}(S(x,\eta/2))$, et $\operatorname{Diam} V_n' > \epsilon$. Du lemme, on a que le degré de $f^n : V_n \to S(x,\eta)$ est $> N$. Il existe donc des points distincts $x_1, x_2 \in V_n'$ tels que pour un point critique c, $f^{m_1}(x_1) = f^{m_2}(x_2) = c$ et $0 \leqslant m_2 \leqslant m_1 \leqslant n$. Soit m_1 maximal avec cette propriété. Donc le degré de f^{n-m_1} sur $V_{m_1} = f^{m_1}(V_n) \leqslant N = 2^{2d-2}$. Par hypothèse sur x, puisque $\delta < \epsilon_2$ est nécessaire, alors c est forcément non-récurrent. Donc $\operatorname{Diam} V_{m_1} \geqslant \epsilon_0 \geqslant \epsilon_2$. Si on divise la frontière de $S(x,\eta)$ en 16 parties égales (c'est-à-dire on considère les 20 carrés de rayon $\eta/4$ adjacents à $S(x,\eta)$, alors il existe un de ces carrés, disons $S(y,\eta/4)$ tel que $S(y,\eta/2)$ est admissible et $\operatorname{Diam} V_m \cap f^{-m_1}(S(y,\eta/4)) \geqslant \epsilon_2/16N > \epsilon$ (par l'inégalité du triangle sur $16N$ points sur chaque partie de la frontière), ce qui contredit la minimalité de n (puisque $S(y,\eta/4)$ est strictement inclus dans $S(x,\eta)$).

De l'argument ci-haut, on déduit facilement qui si $N = 2^{2d-2}$, ou encore mieux, $N = 2^{d_1}$ où d_1 est le nombre de points critiques non-récurrents, alors pour $U = S(x,\eta)$ avec $\eta < \epsilon_2/16N$, le degré de f^n reste $\leqslant N$ sur les composantes connexes de $f^{-n}(S(x,\eta))$.

La troisième partie suit facilement du fait la deuxième implique qu'il existe un $n_1 > 0$ tel que si V est une composante connexe de $f^{-n}(U)$ pour $n \geqslant n_1$ alors V n'intersecte pas l'orbite des points critiques. En utilisant un lemme classique de Fatou, on obtient le résultat. □

Pour être complet, notons ici ce lemme de Fatou:

Proposition 4.16. *Si V est un ouvert qui intersecte l'ensemble de Julia $J(f)$ et V n'intersecte pas l'orbite des points critiques, alors étant donné un ouvert V_0 tel que $\overline{V_0} \subset V$ et $\epsilon_0 > 0$ alors il existe un $n_0 \geqslant 0$ tel que chaque composante connexe W de $f^{-n}(V_0)$, $n \geqslant n_0$ satisfait* $\operatorname{Diam}(W) \leqslant \epsilon_0$.

Un deuxième théorème devient un corollaire assez facile du théorème de Mañé. Celui-ci est beaucoup moins technique, et d'une certaine façon plus élégant.

Théorème 4.17. *Soit f une fraction rationnelle, $\Lambda \subset J(f)$ compact invariant ne contenant pas de points critiques ni d'orbites paraboliques. Alors ou Λ est expansif, ou $\Lambda \cap \omega(c) \neq \emptyset$ pour un point critique récurrent c.*

On se souviendra que Λ expansif veut dire qu'il existe $N > 0$ tel que $|(f^N)'(x)| > 1$ pour tout $x \in \Lambda$. Par continuité de $(f^N)'$ et compacité de Λ, ceci est équivalent à dire qu'il existe $\lambda > 1$ tel que $|(f^N)'(x)| > \lambda$ pour tout $x \in \Lambda$. La démonstration de ce théorème est une combinaison d'un argument de familles normales ainsi que du théorème de Mañé (qui est presque verbatim la sienne [21]).

Démonstration. Soit Λ satisfaisant les hypothèses du théorème, et supposons de plus que $\Lambda \cap \omega(c) = \emptyset$ pour tout les points critiques récurrents c. On veut démontrer que Λ est expansif. Supposons le contraire; il existe une suite de points $\{x_n\} \subset \Lambda$ tels que $|(f^n)'(x_n)| \leqslant 1$ pour tout n. Prenons une sous-suite $\{x_{n_i}\}$ telle que $f^{n_i}(x_{n_i})$ converge vers un point $x \in \Lambda$. Soit $\epsilon > 0$ tel que $d(\Lambda, c) > 2\epsilon$ pour tout c critique, et U le voisinage donné par le théorème de Mañé pour le point x et ϵ. Sans perte de généralité, on peut supposer que U est un disque centré en x. Il suit que pour i grand, $f^{n_i}(x_{n_i}) \in U$. Soit V_i une composante connexe de $f^{-n_i}(U)$ telle que $x_{n_i} \in V_i$. Donc $f^j(V_i)$ est une composante connexe de $f^{-n_i+j}(U)$ pour tout $0 \leqslant j \leqslant n_j$. Par le théorème de Mañé, Diam $f^j(V_i) \leqslant \epsilon$, et donc ne contient aucuns points critiques pour $0 \leqslant j \leqslant n_i$, ce qui implique que f^{n_i} n'a pas de points critiques sur V_i. Puisque U est un disque, $f^{n_i} : V_i \to U$ est une bijection; soit $\phi_j : U \to V_j$ sont inverse holomorphe. La famille $\{\phi_j\}$ est normale. On peut donc supposer qu'elle converge vers une fonction holomorphe $\phi : U \to \overline{\mathbb{C}}$. Mais puisque

$$|\phi_i'(f^{n_i}(x_{n_i}))| = |(f^{n_i})'(x_{n_i})|^{-1} \geqslant 1$$

et $f^{n_i}(x_{n_i}) \to x$, alors $|\phi'(x)| \geqslant 1$ et donc ϕ n'est pas constante. De plus,

$$\phi(x) = \lim_{i\to\infty} \phi_i(f^{n_i}(x_i)) = \lim_{i\to\infty} x_{n_i} \in \Lambda.$$

$\phi(U)$ contient donc un voisinage compact W de $\phi(x) \in \Lambda \subset J(f)$. Donc il existe un $N > 0$ tel que $f^n(W) \supset J(f)$ pour tout $n \geqslant N$. Mais puisque ϕ_i converge, $W \subset \phi_i(U)$ pour i grand, et donc $f^{n_i}(W) \subset f^{n_i}(\phi_j(U)) = U$. Mais puisque pour i grand, $n_i > N$, ceci implique que $J(f) \subset U$, ce qui contredit le fait que U peut être pris aussi petit que l'on veut. $\square$

Chapitre 5

Collet-Eckmann implique Hölder

Le but de ce chapitre est de démontrer le théorème suivant:

Théorème 5.1. *Soit f une application rationnelle sans cycles indifférents rationnels dont tout les points critiques qui sont dans le Julia $J(f)$ ont la propriété de Collet-Eckmann et ont la même multiplicité, alors tous les bassins immédiats des cycles attractifs ou super-attractifs sont des domaines de Hölder.*

En fait, la condition que les points critiques aient la même multiplicité est superflue, mais la démonstration selon les lignes que nous allons suivre devient si technique que les points essentiels ne sont plus aussi évidents. De plus, il est possible d'avoir des points critiques dans le Julia tels qu'en temps fini ils s'envoient sur d'autres points critiques qui eux ont la propriété de Collet-Eckmann sans pour autant changer la conclusion. C'est pour cette raison que l'on n'expose ici que la démonstration du cas qui semble le plus intéressant. Pour une démonstration complète du théorème, celle de Przytycki et Rohde est la plus élégante [34]. Une démonstration d'une version plus générale du théorème 5.1 a été obtenue par Graczyk et Smirnov dans [14] en utilisant des techniques similaires (dont plusieurs sont nouvelles et de leur invention). En raffinant certaines de leurs techniques, on obtient ici un résultat beaucoup plus précis, et qui possède un analogue direct en dynamique réelle - voir [28].

La démonstration de ce théorème 5.1 (voir les commentaires à la fin du chapitre) sera en fait très facile car ce résultat est une conséquence assez facile d'un autre théorème, celui-ci fondamental, et nouveau:

Théorème 5.2. *Soit f est une application rationnelle sans cycles indifférents rationnels dont tout les points critiques qui sont dans le Julia $J(f)$ ont tous la même multiplicité et sont tous dans des orbites distinctes. Alors tous les points critiques qui sont dans le Julia ont la propriété de Collet-Eckmann si et seulement s'il existe un voisinage U de $J(f)$, $C > 0, \Lambda > 1$ tel que pour tout les points $z \in U$ et pour tout choix de y tel que $f^n(y) = z$, $n > 0$,*

$$|(f^n)'(y)| \geqslant C\Lambda^n \min_{0 \leqslant i < n} |f'(f^i(y))|. \tag{5.1}$$

Essentiellement, ce théorème dit que Collet-Eckmann sur les orbites critiques est équivalent à Collet-Eckmann plus une seule (petite) dérivée, la plus petite, sur toutes les orbites d'un voisinage du Julia. Il faut évidemment se restreindre à un voisinage du Julia, sinon les cycles attractifs donneraient un contre-exemple, et l'on veut pouvoir considérer les ensembles de Julia hyperboliques comme étant des exemples triviaux de cette condition. La raison pour laquelle on veut les inclure est géométrique: les ensembles de Julia hyperboliques connexes pour des polynômes ont un bassin à l'infini qui est John, donc qui est Hölder.

La démonstration du seulement si est assez évidente. Pour l'autre direction, la méthode sera: on définit trois sortes de pré-images d'un point dont chacune préserve la nature exponentielle de la dérivée de la fonction itérée le long d'une orbite, même si certains des points de l'orbite passent près du point critique. On montre ensuite que l'on peut décomposer chaque orbite en morceaux de ces trois types et une queue où la dérivée est bornée inférieurement. En observant que les constantes en jeux ne dépendent pas du choix des branches ni du choix du point de départ z, seulement sa distance à l'orbite critique, on obtient le résultat.

On découpe la démonstration en plusieurs étapes:

1. définition des constantes
2. définition et propriétés des itérés r-critiques
3. définition et propriétés des itérés r-univalents
4. définition et propriétés des itérés r-semi-critiques
5. construction inductive de la décomposition de l'orbite
6. conclusion du théorème

On pourrait définir les constantes utilisées dans cette démonstration lorsqu'elles apparaissent, mais il serait alors moins clair que leur définition est indépendantes des choix faits jusqu'à ce point. Étant donné que l'indépendance de certaines constantes est cruciale pour la conclusion, on a jugé opportun de bien souligner ce fait.

Les noms de chaque type d'itérés sont choisit non seulement pour leur association mnémonique avec leur définitions respectives, mais aussi pour évoquer les noms similaires des pièces de puzzle de Yoccoz (voir [5, 4, 16, 19]). En effet, le comportement de chacun des types d'itérés est grosso modo une version locale des pièces de puzzle, où les itérés r-critiques, r-univalents et r-semi-critiques correspondants respectivement aux anneaux critiques, non-critiques et semi-critiques. Il serait intéressant de voir jusqu'à quel point cette analogie est correcte.

Il est quand même important de souligner que les itérés que l'on considère ici sont toujours des pré-images, c'est à dire que l'on itère selon une suite (bien déterminée) de branches inverses de f, et non par f elle-même. Il est cependant facile d'inverser les points de départ et d'arrivée pour obtenir une situation plus classique où il est encore plus aisé de voir la similarité entre les pièces de puzzle et la situation présente. De plus, puisque les

pré-images choisies seront toujours bien définie, on s'autorisera un léger abus de langage en utilisant de façon interchangeable itérés et pré-images, tant que ceci ne brouillera la clarté mathématique de l'exposition.

5.1 Constantes

On rassemble ici toutes les définitions des constantes et symboles utilisés dans la démonstration du théorème 5.2. Toutes les définitions de cette section seront utilisées sans autre mention (et sans exceptions) pour tout le reste de ce chapitre.

Fixons f une fonction satisfaisant aux hypothèse du théorème 5.2, c'est à dire que f est une fraction rationnelle sans cycles indifférents rationnels dont tout les points critiques dans le Julia sont de même multiplicité et ont des orbites distinctes.

Soit maintenant $c \in J(f)$ un point critique de f, et $r > 0$. On défini alors:

$$\begin{aligned}
\lambda(c) &:= \lambda > 1 \text{ tel que } |(f^n)'(f(c))| > K_c \lambda_c^n \\
K(c) &:= \text{ la constante ci-haut} \\
\nu(c) &:= \text{multiplicité de } c \\
M_1(c,r) &:= \inf_{z \in D_r} |f'(z)/(z-c)^{\nu(c)-1}| \\
M_2(c,r) &:= \sup_{z \in D_r} |f'(z)/(z-c)^{\nu(c)-1}|
\end{aligned}$$

où $D_r = \{z \mid |z-c| \leqslant r\}$ (voir la démonstration du lemme 4.3). En d'autres mots, $\lambda(c)$ et $K(c)$ décrivent l'expansion de la dérivée le long de chaque orbite critique, $\nu(c)$ est la multiplicité du point critique correspondant, $M_1(c,r)$ et $M_2(c,r)$ donnent des bornes sur la distorsion que l'ont obtient lorsque l'on approxime f par $(z-c)^{\nu(c)}$ sur le disque D_r.

De plus, pour chacune des constantes ci-haut, on en définit une version qui ne dépend que de f, en prenant un infimum ou un supremum comme suit:

$$\begin{aligned}
\lambda(f) &:= \inf_{c \in \mathrm{Crit}'} \lambda(c) \\
K(f) &:= \inf_{c \in \mathrm{Crit}'} K(c) \\
\nu(f) &:= \sup_{c \in \mathrm{Crit}'} \nu(c) \\
M_1(f,r) &:= \inf_{c \in \mathrm{Crit}'} M_1(c,r) \\
M_2(f,r) &:= \sup_{c \in \mathrm{Crit}'} M_2(c,r)
\end{aligned}$$

Puisque f est fixé, la notation sera abrégée à λ pour $\lambda(f)$, K pour $K(f)$, etc, et pour toutes les définitions à suivre. On remarquera que les hypothèses sur f sont telles que $\nu(c)$ ne dépend pas de c.

Soit $\epsilon > 0$ très petit arbitraire; cet ϵ sera utilisé pour borner la perte maximale d'expansion que l'on s'autorisera. Soit $0 < q < 1$ tel que $\lambda^\epsilon q^3 > 1$. On défini maintenant

la suite des δ_j comme étant $\delta_j = \frac{(1-q)}{2}q^j$. Soit $N(r)$ le premier temps où une des pré-images $V_{N(r)}$ de $f^{-N(r)}(B(c_i, 4r))$ (c'est-à-dire $V_{N(r)}$ est une de composantes connexes de $f^{-N(r)}(B(c_i, 4r))$) rencontre un c_j dans $\overline{V_{N(r)}}$; ce nombre peut être infini lorsque r est assez petit. Ceci définit une fonction à palier qui croit vers l'infini lorsque $r \to 0$ et qui est continue à droite. Soit aussi

$$C_{\text{crit}} := \frac{K^{1/\nu}}{M_2(r)^{1-1/\nu}2^{2-1/\nu}(\nu 2^{2/\nu-1}+1)^{1-1/\nu}},$$

on défini alors r_0 comme étant le plus grand nombre r tel que

$$\lambda^{N(r)\epsilon}C_{\text{crit}}K^{1/\nu}\left(\frac{(1-q)}{2}\right)^{\frac{3}{\nu}} > 1 \tag{5.2}$$

(ce qui est possible puisque $M_2(f, r)$ est bornée supérieurement lorsque r tend vers 0). A partir de ce moment, on fixe r_0 comme l'échelle à laquelle on travaille, et on supprime l'indication que les constantes dépendent toutes de r_0. Soit $C' := \left(\frac{K(1-q)}{2}\right)^{1/\nu}$. Alors r_0 peut aussi être décrit comme l'échelle à laquelle les temps de retour d'un point critique à un autre par une suite de branches inverses de f est assez long pour que $N(r_0)$ soit toujours plus grand que $\log(C')/\epsilon\ln(\lambda)$. En d'autres mots encore, r_0 est assez petit pour que l'expansion donnée par $\lambda^{\epsilon N(r_0)}$ soit plus grande que $1/C'$. Comme son nom l'indique, C_{crit} est la "constante" de distorsion dans le cas r-critique; il faut tout de même remarque que cette "constante" dépend de f, et ϵ (qui eux déterminent ν, r_0, K, M_2, etc).

De ces constantes, on peut alors en définir plusieurs autres qui seront utiles à divers moments de la démonstration.

$$\begin{aligned}
\tau_n &:= \frac{1}{\nu}\delta_n^{2/\nu}2^{2-2/\nu} \\
C_1 &:= \frac{(\nu M_1(r_0))^\nu}{M_2(r_0)^{\nu-1}2^{2\nu-1}} \\
C_{\text{total}} &:= (C_1K)^{\frac{1}{\nu}} \\
C_{\text{semi}} &:= \frac{\nu M_1(r_0)}{16}\left(\frac{r_0^{\nu-1}K(1-q)}{8\lambda}\right)^{\frac{1}{\nu}}
\end{aligned}$$

τ_n correspond à la distorsion maximale lors d'un premier retour r-critique (voir la proposition 4.9). Les autres constantes apparaîtront dans divers calculs. A noter la dépendance sur l'échelle r_0.

Soit $M > 1$ tel que $C_{\text{semi}}M^{\frac{1}{\nu}} > 1$, $L_2 = N_2(M)$, où la fonction N_2 est définie par le lemme 5.7; il est à noter que cette fonction ne dépend que de f, M et r_0.

On définit maintenant un voisinage V de J comme étant $\{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid d(z, J(f)) < r_0/2\}$. Soit aussi $U \subset V$ tel que $f^{-1}(U) \subseteq U$ (ce qui est possible par analyse des composantes de Fatou possibles). On a donc un voisinage U de $J(f)$ dont les points sont à distance au plus $r_0/2$ et dont les antécédents sont inclus dans U (qui est non-vide puisque $J(f)$ st

complètement invariant). On démontrera que pour ce U, les hypothèses du théorème sont vérifiées. La définition de U est telle que toute boule $B(z, r_0)$ autour d'un point $z \in U$ contient une boule $B(z', r_0/2)$ autour d'un point $z' \in J(f)$, ce qui nous permettra d'utiliser le Lemme de Mañé (voir la section sur les itéreés r-univalents).

Il est bon de remarquer à nouveau l'ordre dans lesquelles sont faites ces définitions et les dépendances qui s'en suivent.

Définition 5.3. On notera $z = z_0, z_{-1}, \dots, z_{-n}$ une suite de points de $\overline{\mathbb{C}}$ telle que $z_{-i+1} = f(z_{-i})$ pour $i = 1 \dots n$. Une telle suite sera appelée une suite de pré-images ou encore une suite d'itérés (inverses).

5.2 Itérés r-critiques

Intuitivement, les pré-images r-critiques sont celles qui passent du voisinage (de taille dépendant de r et du nombre d'itérés) d'un point critique c_2 à celui d'un autre point critique c_1 sans en rencontrer d'autres en chemin. Ils ont la propriété que tout point y dans l'image (inverse) du voisinage de départ aura une orbite (avant) telle que la dérivée le long de cette orbite calquera celle du point critique c_1.

Soyons maintenant beaucoup plus précis.

Définition 5.4. Une suite $z = z_0, z_{-1}, \dots, z_{-n}$ de pré-images est dites r-critique si

1. Les voisinages décroissants U_k pour $B(z, r)$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$ évitent les points critiques,
2. il y a un point critique $c_1 \in \partial U_n$,
3. il y a un point critique $c_2 \in B(z, \min(\tau_n^{-1} r, r_0))$

où c_1 et c_2 ne sont pas nécessairement distincts.

Proposition 5.5. *Pour une suite $z = z_0, z_{-1}, \dots, z_{-n}$ d'itérés r_0-critique alors si $\Lambda_1 = \lambda^{(1-\epsilon)/\nu}$, $y = z_{-n}$,*

$$|(f^n)'(y)| > \Lambda_1^n.$$

A noter que l'on peut obtenir Λ_1 aussi près de $\lambda^{\frac{1}{\nu}}$ qu'on le souhaite (en choisissant ϵ près de zéro), mais alors l'échelle r_0 à prendre sera beaucoup plus petite.

Démonstration. La deuxième condition implique que $f^n(c_1) \in \partial B(z, r\Delta_n)$. On a aussi que

$$d(f^n(c_1), c_2) \leqslant d(f^n(c_1), z) + d(z, c_2) \leqslant d(f^n(c_1), z) + \tau_n^{-1} r \leqslant (2\tau_n^{-1} + 1) d(f^n(c_1), z)$$

du fait du choix des δ_n et donc cette inégalité et la proposition 4.5 donnent

$$\begin{aligned} |(f^n)'(y)| &\geqslant (C_1 \delta_n)^{\frac{1}{\nu}} d(f^n(c_1), z)^{1-\frac{1}{\nu}} |(f^{n-1})'(f(c_1))|^{\frac{1}{\nu}} \\ &\geqslant (C_1 \delta_n)^{\frac{1}{\nu}} (2\tau_n^{-1} + 1)^{\frac{1}{\nu}-1} d(f^n(c_1), c_2)^{1-\frac{1}{\nu}} |(f^{n-1})'(f(c_1))|^{\frac{1}{\nu}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant (C_1\delta_n)^{\frac{1}{\nu}}(2\tau_n^{-1}+1)^{\frac{1}{\nu}-1}(\frac{|f'(f^n(c_1))|}{\nu M_2})^{1/\nu}|(f^{n-1})'(f(c_1))|^{\frac{1}{\nu}} \\
&= (C_1\delta_n)^{\frac{1}{\nu}}(\nu M_2)^{-1/\nu}(\frac{1}{2\tau_n^{-1}+1})^{1-\frac{1}{\nu}}|(f^n)'(f(c_1))|^{1/\nu} \\
&\geqslant (C_1\delta_n)^{\frac{1}{\nu}}(\nu M_2)^{-1/\nu}(\frac{1}{2\tau_n^{-1}+1})^{1-\frac{1}{\nu}}K^{1/\nu}\lambda^{n/\nu}
\end{aligned}
$$

puisque $f^n(c_1)$ est assez près de c_2 pour pouvoir appliquer le lemme 4.3. Quelques calculs montrent que $(\frac{1}{2\tau_n^{-1}+1})^{1-\frac{1}{\nu}} > \delta_n^{2/\nu}/(\nu 2^{2/\nu-1}+1)^{1-1/\nu}$. En rassemblant tout ceci, on obtient l'inégalité suivante:

$$
|(f^n)'(y)| \geqslant C_{\text{crit}}\delta_n^{\frac{3}{\nu}}\lambda^{\frac{n}{\nu}}
$$

Par les choix fait auparavant, on a que $\lambda^\epsilon q^3 > 1$, et donc que

$$
\begin{aligned}
|(f^n)'(y)| &\geqslant C_{\text{crit}}\left(\frac{(1-q)}{2}K\right)^{\frac{3}{\nu}}K^{1/\nu}\left(q^3\lambda\right)^{\frac{n}{\nu}} \\
&> \Lambda_1^n
\end{aligned}
$$

où $\Lambda_1 = \lambda^{\frac{1-\epsilon}{\nu}}$. □

A nouveau, dans le cas $z^l + c$, il y a des constantes qui se simplifient, mais moins que précédemment. Dans ce cas on obtient la même estimation pour l'expression avec τ_n, mais $\left(\frac{C_1}{\nu M_1}\right)^{\frac{1}{\nu}}$ se simplifie en $\frac{\nu^{1-\frac{1}{\nu}}\delta_n^{\frac{1}{\nu}}}{2^{2+\frac{1}{\nu}}}$, ou encore $\frac{\sqrt{\delta_n}}{4}$ pour $\nu = 2$!

5.3 Itérés r-univalents

Le deuxième type correspond aux pré-images qui peuvent être entourés d'un voisinage à une échelle donnée a priori qui lui-même peut être suivi de façon univalente par les branches inverses correspondantes. Les propriétés des itérés r-univalents étant indépendant de la condition de Collet-Eckmann, les résultats de cette section seront donnés pour une fraction rationnelle g arbitraire.

Définition 5.6. Une suite de pré-images $z = z_0, z_{-1}, \ldots, z_{-n}$ est *r-univalente* si chaque branche inverse g^{-k}, $k = 1..n$ définit une fonction univalente de la boule $B(z,r)$ sur la partie de l'image contenant $z_{-k} = g^{-k}(z)$, plus précisément si g^k restreint à $B_k(z,r)$ est une fonction univalente.

La propriété fondamentale de ces suites est qu'il y a toujours une certaine croissance de la dérivée, indépendamment de toute autres hypothèses sur g. En fait, cette propriété provient d'une version simple du Lemme de Mañé (voir [21, 8, 31] ainsi que le théorème 4.14).

Dans le cas r-univalent, on peut déduire encore plus de la démonstration du Lemme de Mañé.

Proposition 5.7. *Soit g une fonction rationnelle sans cycles indifférents rationnels et $r > 0$ tel que tout point critique c de g est soit dans le Julia $J(g)$ ou pour tout $n \geqslant 0$ $B(f^n(c), r) \cap J(g) = \emptyset$. Pour tout $M > 1$ il existe un entier $N_2 = N_2(M) > 0$ tel que quelque soit $z = z_0, z_{-1}, \ldots, z_{-n}$ une suite r-univalente avec $z \in J(g)$, alors*

$$|(f^n)'(f^{-n}(z))| > M$$

si $n \geqslant N_2$.

Démonstration. Le résultat est trivial s'il n'y a pas de points critiques dont l'orbite ne s'approche pas de l'ensemble de Julia - c'est le cas hyperbolique.

Supposons donc qu'il y ait au moins un point critique dans la Julia. Nous allons démontrer cette proposition par l'absurde, alors supposons le contraire de la conclusion. Il existe donc une collection infinie de suites r-univalentes

$$z_0^i, z_{-1}^i, \ldots, z_{-n_i}^i$$

avec $n_i \to \infty$ et $|(f^{n_i})'(z_{-n_i}^i)| \leqslant M$. En utilisant le lemme de Koebe aux pré-images $f^{-n_i}(B(z^i, r/2))$ on obtient que chacune de celles-ci contient un disque rond de rayon au moins $R = \frac{2r}{9M}$. Soit z un point d'accumulation des $z_{-n_i}^i$, en d'autres mots, un point d'accumulation des centres des disques obtenus ci-haut. Évidemment, $z \in J$ puisque J est compact et les $z^i \in J$. Il existe donc une sous-suite croissante $\{m_i\}$ des $\{n_i\}$ telle que les images $f^{m_i}(B(z, R))$ évitent les points critiques, ce qui contredit le fait que pour tout Julia et toute boule $B(y, R)$ avec $y \in J$ il existe $N > 0$ tel que $J \subset f^N(B(y, R))$. □

On note ici que $N_2(M)$ dépend de f et de R, donc de f, r et M.

On peut faire encore mieux. Selon Douady-Hubbard (voir les Notes d'Orsay [10]) pour le cas sous-hyperbolique ou selon Yoccoz (voir [8]) pour le cas semi-hyperbolique, il existe une métrique admissible pour laquelle on obtient cette même expansion. On reviendra sur cet aspect dans un chapitre ultérieur.

Remarque 5.8. Après avoir choisit M et obtenu N_2 par le lemme précédent, on peut poser $\Lambda_2 = M^{1/N_2} > 1$ et alors pour $n = N_2$ le lemme 5.7 se réécrit

$$|(f^n)'(f^{-n}(z))| > \Lambda_2^n.$$

On aurait pu prendre r et non $r/2$ pour définir le disque rond, mais $r/2$ sera utile plus tard dans certaines démonstrations. En fait, on peut se passer de l'hypothèse que z soit dans J s'il existe un $z' \in J$ assez près.

Corollaire 5.9. *Pour tout $M' > 1$ il existe un entier $N_2 = N_2(12M') > 0$ tel que pour toute suite $z = z_0, z_{-1}, \ldots, z_{-n}$ r-univalente telle qu'il existe un point $z' \in J$ avec $d(z, z') < r/2$, alors*

$$|(f^n)'(f^{-n}(z))| > M'$$

si $n \geqslant N_2$.

Démonstration. Par hypothèse, on a une boule $B(z', r/2)$ qui satisfait les hypothèses du lemme de Mañé pour $M = 12M'$. Donc $|(f^n)'(f^{-n}(z'))| > M$ mais puisque f^{-n} est univalent sur $B(z,r)$ alors en utilisant la forme (4.7) du lemme de distorsion de Bieberbach pour $d(z,z') = r/2$, on a la conclusion voulue. □

Il est bon de remarquer que la fonction N_2 est la même qu'auparavant et que la constante 12 provient de la distorsion sur la dérivée qui ne dépend toutefois pas de r.

On a aussi cette conséquence immédiate du lemme de Koebe appliqué aux suites r-univalentes qui sera utile:

Lemme 5.10. *Pour toute suite r-univalente $z = z_0, z_{-1}, \dots, z_{-n}$ alors*

$$|(f^n)'(z_{-n})| > \frac{r}{4} d(f^{-n}(z), \mathrm{Crit}')^{-1}.$$

De plus, si $z \in J(f)$ alors $z_{-n} \in J(f)$ et donc

$$|(f^n)'(z_{-n})| > K$$

où $K = \frac{r}{4}\,\mathrm{Diam}(J(f))^{-1}$.

Démonstration. Par le lemme de Koebe,

$$d(z_{-n}, \partial f^{-n}(B(z,r))) \geqslant \frac{1}{4} r |(f^{-n})'(z)|$$

mais on sait aussi qu'il n'y a pas de points critiques dans l'image, et donc

$$d(z_{-n}, \mathrm{Crit}') \geqslant \frac{1}{4} r |(f^{-n})'(z)|$$

d'où la première inégalité. Mais on a que $d(z_{-n}, \mathrm{Crit}') < \mathrm{Diam}\, J(f)$ pour tout point $z_{-n} \in J(f)$, ce qui donne la deuxième. □

5.4 Itérés r-semi-critiques

Les suites $z = z_0, z_{-1}, \dots, z_{-n}$ r-semi-critiques sont celles qui commencent par une suite r-univalente de longueur au moins L_2; après exactement L_2 itérations, on peut construire des voisinages décroissants dont les images contiendront un point critique sur leur frontière exactement à la dernière itération (c'est-à-dire ressemblant au cas r-critique à l'arrivée).

Définition 5.11. Une suite $z = z_0, z_{-1}, \dots, z_{-(L_2+n)}$ avec $n > 0$ est une suite *r-semi-critique* si

1. elle est r_0-univalente (rappel: r_0 est l'échelle de base)
2. les images décroissantes U_k pour $B(f^{-L_2}(z), r)$ avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$ sont disjointes des points critiques,

3. il existe un point critique c_i tel que $c_i \in \partial U_n$.

On peut encore obtenir une expansion exponentielle dans ce cas-ci, mais qui sera cette fois une sorte de moyenne entre l'expansion donnée par le Λ_2 pour les itérés r_0-univalents et une racine ν-ième de l'expansion λ donnée par Collet-Eckmann, qui sera encore ici préservée sur une partie de l'orbite à un facteur de distorsion près.

Lemme 5.12. *Pour toute suite $z = z_0, z_{-1}, \dots, z_{-(L_2+n)}$ r-semi-critique il existe une constante $\Lambda_3 > 1$ telle que*

$$|(f^{L_2+n})'(z_{-(L_2+n)})| > \Lambda_3^{L_2+n}$$

Démonstration. Soit $u = f^{-(L_2+n)}(z), y = f^{-L_2}(z)$, et $x_i = f^n(c_i)$. Puisque par définition $c_i \notin f^{-L_2}(B(z, r_0))$, alors le lemme 5.10 donne que

$$d(x_i, y) \geqslant \frac{r_0}{4}|(f^{L_2})'(y)|.$$

En utilisant la proposition 4.5 pour u et le lemme 5.7 pour y,

$$\begin{aligned}
|(f^{L_2+n})'(u)| &= |(f^n)'(u)||(f^{L_2})'(y)| \\
&\geqslant C_1^{\frac{1}{\nu}} d(x_i, y)^{1-\frac{1}{\nu}} |(f^{n-1})'(f(c_i))|^{\frac{1}{\nu}} |(f^{L_2})'(y)| \\
&\geqslant C_1^{\frac{1}{\nu}} \left(\frac{r_0}{4}|(f^{L_2})'(y)|^{-1}\right)^{1-\frac{1}{\nu}} |(f^{n-1})'(f(c_i))^{\frac{1}{\nu}} |(f^{L_2})'(y)| \\
&= C_1^{\frac{1}{\nu}} \left(\frac{r_0}{4}\right)^{1-\frac{1}{\nu}} |(f^{n-1})'(f(c_i))|^{\frac{1}{\nu}} ||(f^{L_2})'(y)|^{\frac{1}{\nu}} \\
&\geqslant C_1^{\frac{1}{\nu}} \left(\frac{r_0}{4}\right)^{1-\frac{1}{\nu}} K^{\frac{1}{\nu}} \lambda^{\frac{n-1}{\nu}} \Lambda_2^{\frac{L_2}{\nu}} \\
&\geqslant \frac{\nu M_1}{(2-\delta_n)^2} \left(\frac{\delta_n r_0^{\nu-1} K M (1-q)}{2^{2\nu+2}(2-\delta_n)}\right)^{\frac{1}{\nu}} \\
&\geqslant \frac{\nu M_1}{16} \left(\frac{r_0^{\nu-1} K M (1-q)}{8\lambda}\right)^{\frac{1}{\nu}} (\lambda^{-\epsilon}\lambda)^{\frac{n}{\nu}} \\
&\geqslant \frac{\nu M_1}{16} \left(\frac{r_0^{\nu-1} K M (1-q)}{8\lambda}\right)^{\frac{1}{\nu}} \lambda^{\frac{n(1-\epsilon)}{\nu}} \\
&\geqslant C_{\text{semi}} M^{\frac{1}{\nu}} \lambda^{\frac{n(1-\epsilon)}{\nu}} \\
&> \Lambda_3^{L_2+n}
\end{aligned}$$

où $\Lambda_3 = \min(\left(C_{\text{semi}} M^{\frac{1}{\nu}}\right)^{1/L_2}, \lambda^{(1-\epsilon)/\nu}) > 1$. □

Puisque L_2 est une fonction de M, on ne peut nécessairement toujours prendre M assez grand pour que $\left(C_{\text{semi}} M^{\frac{1}{\nu}}\right)^{1/L_2} \geqslant \lambda^{(1-\epsilon)/\nu}$. Il serait intéressant de comprendre mieux la dépendance de L_2 sur M pour savoir quand ceci est possible. De la définition, on voit assez bien que c'est sûrement lié intimement à la combinatoire spécifique de la fonction f en question.

5.5 Décomposition d'une Orbite

Soit N et une suite de pré-images $z, z_{-1}, \ldots, z_{-N}$ fixée. On suppose que z n'est pas dans l'orbite des points critiques; de toute façon, la conclusion du théorème est immédiate dans ce cas. On va construire, récursivement, une décomposition en morceaux de cette orbite qui nous permettra d'approximer $|(f^N)'(f^{-N}(z))|$. Soit

$$\Delta_N(z) := d(z, \cup_{0<i\leqslant N} f^{-i}(\mathrm{Crit}')).$$

Pour débuter la construction, on pose $z_0 = z$, $r = \Delta_N(z)$.

On veux définir une suite de nombres $\{n_j\}_{j=0}^m$ ainsi que deux suites de points $\{z_j\}_{j=0}^m$ (qui seront tous des antécédents de z) et $\{x_j\}_{j=0}^m$ (qui seront toujours des points critiques) tel que

1. $n_{m-1} > N - L_2$, et $n_m = N$
2. pour tout $1 < j < m$, alors $|(f^{n_j - n_{j-1}})'(z_j)| > \Lambda^{n_j - n_{j-1}}$
3. $|(f^{n_m - n_{m-1}})'(z_m)| > K$
4. $|(f^{n_1})'(z_1)| > C_{\text{total}} \vartheta^{1-\frac{1}{\nu}} \Lambda^{n_1}$ (si $m > 1$)
5. (a) $r = 2r_0$, ou
   (b) $r = \tau_j d_j$,
   et les voisinages décroissants U_l de $B(z_j, r)$ pour $j \geqslant 1$ et $l \leqslant N - n_j$ sont disjoints des points critiques.

où $z_j := f^{-n_j}(z)$, $d_j := d(z_j, x_j)$, et x_j est un point critique de f sur $\partial U_{n_j - n_{j-1}}$ (c'est-à-dire sur la frontière de $f^{-n_j + n_{j-1}}(B(z_{j-1}, r\Delta(n_j - n_{j-1})))$, et K est le nombre du lemme 5.10.

Soit, encore pour démarrer cette construction, $n_0 = 0$ et x_0 le point critique le plus près de z (en choisir un au hasard s'il y a égalité).

5.5.1 Première Étape

Si les voisinages décroissants U_l pour $B(z_0, 2r_0)$ sont disjoints des points critiques pour tout $l \leqslant N$, la condition (1) est satisfaite. Si $N \geqslant L_2$, on pose $n_1 := L_2$, et on voit que $z_0, \ldots, z_1$ est une suite r_0-univalente; le lemme 5.6 donne alors que la condition (4) est vérifiée, et même plus: que $|(f^{n_1})'(f^{-n_1}(x_{n_1}))| > \Lambda_2^{n_1}$. Appelons cette situation le cas *lointain.* Si $L_2 = N$ alors la construction est terminée, sinon on continue avec les étapes décrites à la section *Étapes Suivantes.* Sinon, $N < L_2$, alors on pose $m = 1$ et $n_1 = N$. La condition (3) est alors vérifiée en utilisant le lemme 5.10. Dans ce cas, la construction est à nouveau terminée.

Soit r_1 la distance minimale d'un itéré de Crit' à z_0, c'est à dire

$$r_1 := \min_{\substack{0\leqslant n\leqslant N \\ \{c\in \mathrm{Crit}'\}}} d(f^n(c), z_0) = \Delta_N(z_0)$$

et soit t_1 l'itérée telle que ceci se produit. En posant $r = r_1/\Delta_{t_1}$, alors il est clair que f^{-n} est univalent sur tout $B(z_0, r_1)$ pour $1 \leqslant n \leqslant N$ et que si l'on accroît r_1 continûment, alors précisément lorsque r_1 sera égal à r, on aura pour la première fois un point critique $c_i \in \partial U_n$ avec $n = t_1$. De plus, puisque l'on a supposé que z n'est pas dans une orbite critique, on en conclut que $r_1 > 0$ et aussi $t_1 > 0$. De plus, puisque l'on a déjà traité le cas où $r = 2r_0$ est suffisant, on doit avoir que $r = r_1 < 2r_0$. Soit x_1 le point critique $c_i \in \partial U_{t_1}$.

Si $t_1 \leqslant N$, on pose $n_1 = t_1$. La condition (5b) est satisfaite pour τ_{t_1} puisque (par la proposition 4.9) les voisinages décroissants U_k de $B(z_1, \tau_{n_1} d_1)$ pour $k \leqslant N - n_1$ sont contenus dans les voisinages décroissants U_h pour $B(z_0, r)$ pour $n_1 \leqslant h \leqslant N$ et que ces derniers évitent les points critiques. Il reste à vérifier la condition (4). Le calcul en est assez simple:

$$\begin{aligned}
|(f^{n_1})'(z_1)| &\geqslant C_1^{\frac{1}{\nu}} d(f^{n_1}(c_i), z_0)^{1-\frac{1}{\nu}} |(f^{n_1-1})'(f(c_i))|^{\frac{1}{\nu}} \\
&\geqslant C_1^{\frac{1}{\nu}} r^{1-\frac{1}{\nu}} K^{\frac{1}{\nu}} \lambda^{\frac{n_1-1}{\nu}} \\
&\geqslant C_{\text{total}} r^{1-\frac{1}{\nu}} \Lambda_1^{n_1}.
\end{aligned}$$

En posant $\vartheta = r$, on a bien la condition (4). Si $t_1 < N$, on continue la construction avec les étapes décrites à la section *Étapes Suivantes*. Sinon, $t_1 = N$, donc on pose $m = 1$. De nouveau la condition (3) est vérifiée en utilisant le lemme 5.10, qui termine la construction dans ce cas.

Il est quand même très important de noter que ϑ dépend de t_1 et évidemment de z. Et puisque t_1 dépend de N, alors ϑ en dépend aussi. Cependant, ϑ ne dépend que des passages les plus proches de z des points critiques. Si l'on peut démontrer que ϑ dépend sous-exponentiellement de t_1, alors on peut toujours modifier les constantes pour conserver l'expansion exponentielle. Si $z \notin J(f)$ alors on peut prendre $\vartheta = d(z, O^+(\text{Crit}'))$, qui ne dépend que de z et non de N.

5.5.2 Étapes Suivantes

La construction se poursuit presque de la même façon que celle de départ. Procédons par induction, on a déjà construit z_j pour $j \geqslant 1$, construisons z_{j+1}.

Il y a deux cas de départ, celui où $r = 2r_0$ (cas (5a)) et celui où $r = \tau_j d_j$ (cas (5b)). Par construction, on verra qu'ils sont exclusifs.

Cas (5a) Si $n_j > N - L_2$ alors on pose $m = j + 1, n_m = N$ et la construction est terminée. Sinon, soit $y = f^{-L_2}(z_j)$. Par définition, $z_j, \ldots, y$ est une suite r_0-univalente. On considère alors une boule $B(y, r)$ dont on fait croître le rayon jusqu'à ce que l'une des deux possibilités suivantes se réalisent:

1. pour $k < N$, il existe un point critique $c \in \text{Crit}'$ tel que $d(f^k(c), y) = r\Delta_k$. Autrement dit, $c \in \partial U_k$.

2. le rayon r peut être accru jusqu'à la taille $2r_0$ sans rencontrer de points critiques comme ci-haut

Si le premier cas se réalise, on pose $n_{j+1} = n_j + k + L_2$. On obtient que la suite $z_j, \dots, z_{j+1}$ est r-semi-critique (où $x_j = c$ est le point critique à l'arrivée), et donc la condition (2) de la construction est vérifiée. De plus, par la proposition 4.9, la condition (5b) est aussi vérifiée.

Si le deuxième cas se réalise, on pose $n_{j+1} = n_j + L_2$. On obtient que $z_j, \dots, z_{j+1}$ est une suite r_0-univalente, et donc les conditions (2) et (5a) sont vérifiées (il faut utiliser les hypothèses sur le voisinage U ici ainsi que le corollaire 5.9 du lemme de Mañé si $z \notin J(f)$).

Cas (5b) Supposons que $r = \tau_j d_j < 2r_0$. De la définition de r, on sait que les images décroissantes U_l pour $B(z_j, r)$, $l \leqslant N - n_j$ ne rencontrent pas de points critiques. En accroissant r' commencant en r continûment, par hypothèse sur z_j, il doit y avoir un $r' < 2r_0$ tel qu'il y ailles un point critique $c \in \partial U_k$ pour $k \leqslant N - n_j$. En posant $n_{j+1} = n_j + k$, alors par construction $z_j, \dots, z_{j+1}$ est une suite r_0-critique (où $x_j = c$), et donc la condition (2) est vérifiée. De plus, par la proposition 4.9, on a que les images décroissantes U_l de $B(z_{j+1}, \tau_{j+1} d_{j+1})$ pour $l \leqslant N - n_{j+1}$ sont contenues dans les images décroissantes $U_{l'}$ de $B(z_j, r)$ pour $k < l' \leqslant N - n_j$; puisque celles-ci ne rencontrent pas de points critiques, les U_l non plus. La condition (5b) est donc vérifiée.

Si $n_{j+1} = N$ alors la construction est terminée, et puisque (2) est vérifiée, (3) l'est aussi aisément.

5.5.3 Conclusion

Il s'agit simplement d'utiliser la décomposition de l'orbite pour obtenir la version "précise" du théorème 5.2:

Théorème 5.13. *f est une application rationnelle sans cycles indifférents rationnels dont tout les points critiques (de même multiplicité) qui sont dans le Julia $J(f)$ ont la propriété de Collet-Eckmann, si et seulement s'il existe un voisinage U de $J(f)$, $C > 0, \Lambda > 1$ tels que pour tout y tel que $f^n(y) = z$,*

1. *pour tout les points $z \in U \cap J(f)$*

$$|(f^n)'(y)| \geqslant C\Lambda^n \min_{0 \leqslant i < n} |f'(f^i(y))| \tag{5.3}$$

2. *pour tout les points $z \in U \setminus J(f)$*

$$|(f^n)'(y)| \geqslant C\Lambda^n \Delta(z)^{1-1/\nu} \tag{5.4}$$

où $\Delta(z) = d(z, O^+(\mathrm{Crit}'))$.

($\Longrightarrow$). Même si la démonstration est assez similaire dans les deux cas, il est bien de la séparer en deux pour permettre une meilleure vue des éléments qui diffèrent.

Définissons $\Lambda := \min(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$, $C := C_{\text{total}} K \Lambda^{-L_2}$, et prenons U comme définit dans la première section de ce chapitre. Il est à remarquer que toutes ces constantes ne dépendent finalement que de f, $J(f)$ et ϵ.

(Cas $z \in J$) Par la construction des sections précédentes,

$$\begin{aligned}
|(f^n)'(y)| &= \prod_{i=1}^{m} |(f^{n_i - n_{i-1}})'(f^{n_i}(z_i))| \\
&\geqslant C_{\text{total}} \Delta_{n_0}(z)^{\beta} \Lambda^{n_0} \prod_{i=2}^{m-1} \Lambda^{n_i - n_{i-1}} K \\
&\geqslant C \Lambda^n d(f^{n_0}(c), z)^{\beta} \\
&\geqslant C' \Lambda^n |f'(z_1)| \\
&\geqslant C' \Lambda^n \min_{0 \leqslant i < n} |f'(f^i(y))|
\end{aligned}$$

puisque par la proposition 4.5, $d(f^{n_0}(c), z)^{\beta}$ est essentiellement $f'(f^{-n_0}(z)))$, qui est lui-même exactement le passage le plus près (voir les détails de la construction), d'où la conclusion.

(Cas $z \in U \setminus J$) Par la construction des sections précédentes, on est réduit à un calcul assez simple:

$$\begin{aligned}
|(f^n)'(y)| &= \prod_{i=1}^{m} |(f^{n_i - n_{i-1}})'(f^{n_i}(z_i))| \\
&\geqslant C_{\text{total}} \Delta(z)^{\beta} \Lambda^{n_0} \prod_{i=2}^{m-1} \Lambda^{n_i - n_{i-1}} K \\
&\geqslant C \Lambda^n \Delta(z)^{\beta}.
\end{aligned}$$

□

($\Longleftarrow$). La condition (5.3) donne déjà qu'il ne peut y avoir de cycles neutres dans le Julia, car cette condition serait violée sur ce cycle. Pour un disque de Siegel, alors c'est la condition (5.4) qui est violée: sur une orbite prise sur une des foliations du disque de Siegel, puisque dans le Siegel la linéarisation est holomorphe, le théorème de Cauchy et un passage à la limite donneraient que le multiplicateur du cycle de Siegel serait strictement plus grand que 1.

Pour les anneaux de Hermann, il faut utiliser la construction de Shishikura [37] qui remplace un anneau par deux disques de Siegel. Cette construction peut toujours se faire assez près du bord du disque pour ne pas avoir à changer la structure complexe sur toute une courbe $\gamma \in U$ et donc on ne change pas réellement l'inégalité (5.4) dans le nouveau système, qui par le raisonnement fait auparavant mène à une contradiction. Donc la propriété de Collet-Eckmann sur tous les points critiques dans le Julia exclut aussi les anneaux de Hermann.

Soit n donné. Puisque l'orbite des points critiques de Crit$'$ ne sont pas périodiques, si on prend z qui converge vers $f^n(c)$ pour $c \in$ Crit$'$, alors éventuellement $\min_{0 \leqslant i < n} |f'(f^i(y))| =$

$|f'(y)|$, et donc

$$|(f^{n-1})'(f(c))| = \lim_{z \to f^n(c)} \frac{|(f^n)'(y)|}{|f'(y)|} \geqslant \frac{C\Lambda^n}{|f'(y)|} \min_{0 \leqslant i < n} |f'(f^i(y))| = C\Lambda^n,$$

qui est exactement la condition de Collet-Eckmann. □

Remarque 5.14. Puisque l'on démontre que la condition (5.3) pour les points $z \in J$ qui convergent vers l'orbite des points critiques implique la condition de Collet-Eckmann qui elle même implique celle-ci ainsi que la condition (5.4), cette deuxième peut être vue comme redondante. Cependant, un examen attentif de la démonstration permet de découvrir que ces deux conditions (une sur les points de J, l'autre sur un voisinage extérieur à J) sont équivalentes. Pour voir ceci, il faut cependant changer $\Delta(z)$ en une expression un peu plus précise de cette quantité, ce qui obscure quelque peu les résultats, ce qui explique la version donnée ci-haut du théorème.

Remarque 5.15. Pour démontrer Hölder du théorème 5.13, il faut utiliser la proposition 2.28 sur les points z dans un voisinage du Julia, et remarquer que l'on peut englober $\Delta(z)^{1-1/\nu}$ dans la constante C_κ de la proposition 2.27 (constante C_2 dans la proposition 2.28).

Chapitre 6

Métrique expansive

On voudrait avoir le résultat suivant:

Conjecture 6.1. *Une fonction rationnelle f est une application de Collet-Eckmann si et seulement s'il existe une métrique admissible μ pour laquelle f est fortement expansive sur un voisinage de $J(f)$.*

Il semblerait que Collet-Eckmann soit réellement nécessaire. L'autre condition naturelle où l'on pourrait s'attendre à ce que ce soit possible est une condition de sommabilité comme

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f^k)'(f(c))|^{-1} < \infty,$$

mais le résultat sur les points périodiques (lemme 6.5) ne va pas du tout dans cette direction plus générale et semble renforcer l'idée que la conjecture ci-haut est la bonne. Il reste quelques doutes qu'il existe une telle métrique même dans le cas Collet-Eckmann car son existence semble impliquer une expansion plus uniforme que l'on ai pu jusqu'ici déterminer.

Quoique les métriques admissibles font partie des outils standard, dans ce contexte c'est Douady qui m'a relancé sur cette idée, et Hubbard qui a insisté que cette question est centrale et donc que la résoudre est impératif.

6.1 Définitions

Définition 6.2. Une fonction $u : U \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ est dites une *métrique admissible* sur U si $d_u(x,y) := \inf_\gamma \int_\gamma u(z)|dz| < \infty$, où l'infimum est sur toutes les courbes rectifiables $\gamma \subset U$ qui joignent x et $yinU$, avec U un voisinage de $J(f)$, et il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ et $0 < \beta < 1$ telles que

$$C_1 d(z,w) \leqslant d_\mu(z,w) \leqslant C_2 d(z,w)^{1-\beta} \tag{6.1}$$

pour tout $z, w \in U$ ($d(\cdot,\cdot)$ est la distance sphérique). Si U est borné, on a de façon équivalente qu'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ et $0 < \beta < 1$ telles que

$$C_1|z-w| \leqslant d_\mu(z,w) \leqslant C_2|z-w|^{1-\beta} \tag{6.2}$$

pour tout $z, w \in U$.

Cette définition est très similaire à celle du cas sub-hyperbolique, sauf qu'ici on supprime la condition de finitude du nombre de pôles de $u(z)$. La condition (6.1) est cruciale car elle nous permet de conclure que la topologie définie par d_u est équivalente à la topologie usuelle. Sans cette condition, très peu d'information utile peux être tiré de l'existence d'une telle fonction $u(z)$.

Définition 6.3. Pour toute fonction f et toute métrique $u(z)|dz|$,

$$\|f'(z)\|_u := \frac{u(f(z))}{u(z)}|f'(z)|.$$

Il est facile de démontrer que toutes les propriétés usuelles (lois d'addition, produit, composition) des dérivées restent vraies pour $\|f'(z)\|_u$.

Définition 6.4. Un ensemble de Julia $J(f)$ est dit *fortement expansif* s'il existe une métrique admissible u pour laquelle $\|f'\|_u \geqslant \lambda > 1$ sur un voisinage U de $J(f)$. On dira aussi que f est fortement expansive (sur U).

Les métriques définies dans les cas où f est hyperbolique ou sub-hyperbolique sont des exemples de métriques admissibles (pour la définition ci-haut). Selon Yoccoz, c'est encore le cas quand f est semi-hyperbolique, ce qui sera explicité dans la prochaine section. En fait, ces définitions sont des généralisations évidentes de celles des métriques dites admissibles dans les cas précédents.

Une autre remarque s'impose, déjà faite par Carleson et Gamelin (voir [6] p.92), que si f est fortement expansive pour toute métrique $u(z)$ équivalente à la métrique euclidienne (c'est à dire sans nécessairement tel que $u(z)$ soit admissible), alors $J(f)$ ne peut contenir de cycles indifférents. En effet, si z est un point périodique (disons de période n), alors il existe un voisinage de z qui est envoyé compactement (en utilisant l'expansion de f) dans lui-même par une branche inverse appropriée de f^n, et donc automatiquement $|(f^n)'(z)| > 1$.

On peut en fait obtenir plus:

Lemme 6.5. *Soit f une fonction rationnelle et $u(z)|dz|$ une métrique qui définit la même topologie que la métrique sphérique sur un voisinage U de $J(f)$ pour laquelle f est fortement expansive, c'est à dire qu'il existe $\lambda > 1$ tel que*

$$\|f'(z)\|_u \geqslant \lambda > 1$$

pour tout $z \in U$, alors les points périodiques de f sont uniformément hyperboliques. Plus précisément, pour tout point $z \in J(f)$ périodique (de période n) alors $|(f^n)'(z)| > \lambda^n$.

Démonstration. Soit $z \in J(f)$ périodique, disons de période n. Puisque $z \in J$, l'orbite ne peux pas contenir de points critiques, alors ou u est finie le long de l'orbite, ou u possède une singularité du même ordre à chaque point de l'orbite, d'où $0 < |u(f^{i-1}(z))/u(f^i(z))| <$

∞ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ (sinon on ne pourrait avoir $\frac{u(f(z))}{u(z)}|f'(z)| > 1$). On a donc que le multiplicateur de l'orbite est

$$|(f^n)'(z) = u(z)/u(f^n(z))\|(f^n)'(z)\|_u =$$
$$\prod_{i=1}^{n} \|(f^i)'(f^{i-1}(z))\|_u \geqslant \prod_{i=1}^{n} \lambda\, u(f^{i-1}(z))/u(f^i(z)) = u(z)/u(f^n(z))\lambda^n = \lambda^n,$$

et les points périodiques de f sont uniformément hyperboliques. □

Il est possible de demander plus à une métrique. On pourrais demander qu'à chaque point $z \in U \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(\text{Crit})$, $0 < u(z) < \infty$, ce qui semble toujours possible. Appelons une métrique admissible qui satisfait à cette condition supplémentaire une métrique admissible *exacte* (puisque la métrique est finie sauf aux singularités explicitement nécessaires sur les orbites critiques).

6.2 Le cas non-récurrent

Mais tout d'abord, un exercice pour se familiariser avec ces métriques admissibles. Yoccoz (voir [8]) a fait la remarque que pour le cas de $f(z) = z^2 + c$ où le point critique est non-récurrent, alors la métrique

$$\mu(z)|dz| = \frac{|dz|}{d(z, \omega(0))^{\frac{1}{2}}} \tag{6.3}$$

est admissible et il existe un $N > 0$ tel que f^N est fortement expansive pour cette métrique, et donc en la modifiant légèrement, on en obtient une pour laquelle f est fortement expansive. Cependant, la métrique $\mu(z)|dz|$ n'est pas exacte. Yoccoz indique aussi qu'une telle métrique explicite peut être écrite dans le cas général. Nous expliciterons ceci que dans le cas de $z^2 + c$ dans cette section. Dans la prochaine, nous utiliserons ensuite une définition assez différente pour $u(z)$ qui donnera une métrique admissible *exacte* dans tous les cas.

Commençons par démontrer tout ceci pour $f(z) = z^2 + c$ avec $0 \in J_c$ non-récurrent puisque plusieurs des idées essentielles sont déjà présentes dans ce cas. Soit $C = \overline{O^+(0)}$ (la fermeture de l'orbite post-critique). Voici un aperçu des étapes de la démonstration qu'il existe une métrique admissible dans le cas où 0 (le point critique) est non-récurrent, pour laquelle $f(z) = z^2 + c$ est fortement expansive sur U un voisinage de J_c. Notons que chaque étape n'utilise pas nécessairement le même voisinage U de C, mais utilisent généralement des sous-voisinages; les énoncés des divers lemmes seront précis sur ce point. Il faut noter qu'une démonstration complète de la remarque de Yoccoz est non-triviale, et que les étapes doivent être faites dans un ordre précis (plusieurs sketches de démonstrations inexacts ont été produit par manque d'attention aux détails).

1. Il existe un N tel que f^N est fortement expansive sur C. On en déduit que f^N est fortement expansive sur un voisinage U de C.

2. La métrique de Poincaré ϖ sur $D_R \setminus C$ donne une métrique pour laquelle f est expansive. Pour tout U voisinage de C, $A := D_R \setminus U$ est équivalente à la métrique $|dz|$ et f y est fortement expansive pour ϖ.

3. On définit une fonction $h : U \to \mathbb{R}^+$ tel que f est expansive pour $h(z)|dz|$ sur U, et $h(z)|dz|$ définit une métrique équivalente à $|dz|$. On prend un U tel que $f^N(U) \subset U$.

4. On démontre que $\mu_h(z) = \frac{\sqrt{h(z)}|dz|}{\sqrt{d(z,C)}}$ définit aussi une métrique expansive pour f sur U, et est encore équivalente à $|dz|$.

5. Il existe un $M > 0$ tel que f^M est fortement expansive pour les points où la métrique de départ est ϖ et μ_h à l'arrivée.

6. La métrique définie par $\tilde{\mu}(z)|dz| = \inf\{\mu_h(z), \varpi(z)|dz|\}$ est admissible, et f^M est fortement expansive sur U pour $\tilde{\mu}(z)|dz|$

7. Il existe une métrique admissible $u(z)|dz|$ pour laquelle f est fortement expansive

Démontrons ceci en plusieurs lemmes. Dans toute cette section, les notations et définitions seront cumulatives, et donc les diverses hypothèses ne seront pas répétées pour chaque énoncé.

Lemme 6.6. *Pour tout $\lambda > 1$, il existe N tel que pour tout $x \in C$, $|(f^N)'(x)| > \lambda$.*

Démonstration. Le fait que f soit expansif sur C est le théorème I de l'article de Mañé [21], que l'on retrouve comme notre théorème 4.17. Donc il existe $N_0 > 0$ tel que $|(f^{N_0}(x)| > 1$ pour tout $x \in C$. Puisque C est compact et $(f^{N_0})'$ continue, alors il existe un $\lambda' > 1$ tel que $|(f^{N_0})'(x)| > \lambda'$ pour tout $x \in C$. On obtient le lemme pour $N = \lceil \log \lambda / \log \lambda' \rceil N_0$. □

On remarquera que ce lemme est beaucoup plus général et qu'il tire toute sa force de ce théorème remarquable de Mañé. Il serait plus prudent d'utiliser $N(f, \lambda)$ car N dépend fortement de λ et f, mais on utilisera N pour alléger la notation.

Définition 6.7.
- $N_0(f) := \inf_{n>0}\{n \mid \inf_{x\in C} |(f^n)'(x)| > 1\}$
- $\lambda(f) := \inf_{x\in C} |(f^{N_0(f)})'(x)|$
- $N = N(\lambda, f) := \lceil \log \lambda / \log \lambda(f) \rceil N_0(f)$

Corollaire 6.8. *Pour tout $\lambda > 1$, il existe un voisinage $U_1(\lambda)$ de C tel que $|dz|$ est une métrique expansive pour f^N sur $U_1(\lambda)$. Plus précisément, $|(f^N)'(z)| > \lambda > 1$ sur $U_1(\lambda)$.*

Démonstration. La fonction $(f^N)'(z)$ est continue et C est compact, alors on peut définir $U_1(\lambda)$ comme étant les composantes connexes de $\{z \mid |(f^N)'(z)| > \lambda\}$ qui contiennent des points de C. □

Nous allons maintenant travailler un peu sur la métrique "loin" de C.

Définition 6.9. Soit $\varpi(z)$ la métrique de Poincaré de $D_R \setminus C$, où D_R est un disque de rayon R grand tel que $\overline{f^{-1}(D_R)} \subset D_R$.

Donc on a immédiatement que f de $f^{-1}(D_R)\setminus\{C\cup f^{-1}(C)\}$ sur $D_R\setminus C$ est uniformément expansive sur tout compact. Si on peut définir une métrique sur un voisinage U de C pour laquelle f est expansive, alors puisque $\varpi(z)$ sur $D_R \setminus U$ est comparable à la métrique sphérique sur $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$, en prenant

$$\tilde{\mu}(z)|dz| = \inf\{\mu(z)|dz|, \varpi(z)|dz|\}$$

il restera à démontrer que f (ou un itéré de f) est expansif pour les points qui passent (sous l'action de f) d'un domaine de définition à l'autre. Pour être plus précis, rassemblons ceci en un lemme.

Lemme 6.10. *$f : D_R \setminus \{C \cup f^{-1}(C)\} \to D_R \setminus C$ est expansive pour $\varpi(z)|dz|$. Soit U un voisinage de C et $V = U \cup f^{-1}(U)$, alors f est fortement expansive pour $\varpi(z)|dz|$ sur V.*

Revenons au voisinage de C.

Lemme 6.11. *Pour tout $\lambda > 1$, il existe un voisinage $U_2(\lambda) \subset U_1(\lambda)$ et une fonction $h : U_2(\lambda) \to \mathbb{R}^+$ tels que $\|f'(z)\|_h > \lambda^{1/N} > 1$ sur $U_2(\lambda)$. De plus, sur $U_2(\lambda)$, $h(z)|dz|$ et $|dz|$ sont équivalents.*

La fonction h sera donnée très explicitement par la démonstration. Pour alléger la notation, on abrégera $U_1(\lambda)$ à U_1 et de même pour U_2.

Démonstration. Fixons $\lambda > 1$ arbitraire. Soit $U_2 = f^{-N}(U_1) \cap U_1$. Si on défini

$$h(z) = |f'(f^{N-2}(z))|^{1/N}|f'(f^{N-3}(z))|^{2/N} \cdots |f'(z)|^{1-1/N} \tag{6.4}$$

(une "somme" de Birkhoff adaptée a notre situation), alors f est expansive pour la métrique $h(z)|dz|$ sur U_2, et pour être plus précis

$$\begin{aligned} \|f'(z)\|_h &= \frac{h(f(z))}{h(z)}|f'(z)| \\ &= |(f^N)'(z)|^{1/N} \geqslant \lambda^{1/N} > 1. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Sur U_2, $h(z)$ est bornée supérieurement et inférieurement, donc $h(z)|dz|$ définit une métrique équivalente à la métrique usuelle $|dz|$. Notons qu'il est nécessaire de restreindre z à U_2 pour pouvoir effectivement borner $h(z)$ inférieurement. □

On remarquera que si λ est une puissance entière de $\lambda(f)$ alors $\lambda^{1/N} = \lambda(f)$, et que pour tout $\lambda > 1$, $1 < \lambda^{1/N} \leqslant \lambda(f)$, (où l'on se souviendra que $N = \lceil \log\lambda / \log\lambda(f) \rceil N_0(f)$).

Définition 6.12. Soit x, y, z des points de $U_2(\lambda)$. Alors

- $d_h(x,y) := \inf_\gamma \int_\gamma h(z)|dz|$, où l'infimum est sur toutes les courbes rectifiables $\gamma \subset U_2(\lambda)$ qui joignent les points x et y,

- Pour tout compact $K \subset U_2(\lambda)$, $d_h(z, K) = \inf_{x \in K} d_h(z, x)$,
- $\mu_h(z) := \frac{1}{d_h(z,C)^{1/2}}$,
- $D_h(f)(z) := \frac{\mu_h(f(z))}{\mu_h(z)} |f'(z)| (= \|f'(z)\|_{\mu_h})$.

Lemme 6.13. *Pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, il existe un voisinage de C, $U_3(\lambda, \epsilon) \subset U_2(\lambda)$, sur lequel $\mu_h(z)$ définit une métrique pour laquelle f est fortement expansive; plus précisément,*

$$D_h(f)(z) \geqslant \lambda^{1/2-\epsilon/2}$$

Démonstration. Par définition de U_1, f ne contient pas de points critiques dans U_1, et donc (par le théorème des accroissements finis) il existe $C_1 > 1$ tel que pour tout point $x \in U_1$,

$$C_1^{-1} |f'(x)| \leqslant \frac{d(f(x), C)}{d(x, C)} \leqslant C_1 |f'(x)|. \tag{6.6}$$

On note que l'on peut remplacer $d(\cdot, \cdot)$ par $d_h(\cdot, \cdot)$ ci-haut (en modifiant la constante C_1). En fait, en utilisant une version un peu plus précise du théorème des accroissements finis, on obtient que pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, il existe un voisinage $U_3 = U_3(\lambda, \epsilon) \subset U_2(\lambda)$ de C tel que pour tout point $x \in U_3$,

$$\lambda^{-\epsilon} \|f'(x)\|_h \leqslant \frac{d_h(f(x), C)}{d_h(x, C)} \leqslant \lambda^{\epsilon} \|f'(x)\|_h. \tag{6.7}$$

On remarque que pour tout $x \in U_1$, $d(f(x), C) = \inf_{m \geqslant 2} d(f(x), f^m(0))$ puisque x ne peut être près du point critique. On peut donc tout transporter ceci en x par une branche de f^{-1} qui sera univalente. Par 6.7, $d_h(x, C) \|f'(x)\|_h \geqslant \lambda^{-\epsilon} d_h(f(x), C)$.

En rassemblant ceci, on obtient que si $z \in U$

$$\begin{aligned} D_h(f)(z) &= \frac{d_h(z, C)^{1/2}}{d_h(f(z), C)^{1/2}} \|f'(z)\|_h \\ &\geqslant \frac{1}{\lambda^{\epsilon/2}} \|f'(z)\|_h^{1/2} \geqslant \lambda^{1/2-\epsilon/2}, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Il est important de noter un corollaire de la démonstration, qui est en fait un lemme de distorsion pour d_h sur U_3.

Corollaire 6.14. *Pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, il existe un voisinage $U_3 = U_3(\lambda, \epsilon)$ de C, tel que pour tout $x \in U_3$ alors*

$$\lambda^{-\epsilon} d_h(f(x), C) \leqslant d_h(x, C) \|f'(x)\|_h \leqslant \lambda^{\epsilon} d_h(f(x), C). \tag{6.8}$$

Définition 6.15. $\tilde{\mu}(z) := \inf_{z \in D_R} \{\mu_h(z), \varpi(z)\}$

Puisque $\varpi(z) \sim d(z,C)^{-1}$ près de C et que $\mu_h(z) \sim d(z,C)^{-1/2}$ sur U_3, quitte à multiplier $\varpi(z)$ par une constante, $\tilde{\mu}(z)$ devient une fonction continue de D_R dans $(0,+\infty]$. On supposera dorénavant que $\varpi(z)$ est telle que $\tilde{\mu}(z)$ est continue. Ceci ne change aucunement le fait que f est expansive pour $\varpi(z)$ ni le fait que $\varpi(z)|dz| \sim |dz|$ si $z \in D_R \setminus U_3$.

Définition 6.16. $U_4 := \{z \in U_3(\lambda,\epsilon) \mid \tilde{\mu}(z) < \varpi(z)\}$

Il est évident que U_4 est ouvert et que $C \subset U_4$. Soit aussi $\lambda_P := \inf \dfrac{\varpi(f(z))}{\varpi(z)}|f'(z)|$ pour $z \in D_R \setminus \{U_4 \cap f^{-1}(U_4)\}$.

Lemme 6.17. *Il existe un $M > 0$ et $\lambda_2 > 1$ tels que pour tout $z \in V_m = f^{-M+1}(U_4)$ alors*

$$\|(f^M)'(z)\|_{\tilde{\mu}} \geqslant \lambda_2.$$

Démonstration. Soit $\lambda_1 = \min\{\lambda_P, \lambda^{1/2-\epsilon/2}\}$. Si $z \in U_4$ ou $z \in D_R \setminus \{U_4 \cap f^{-1}(U_4)\}$ alors

$$\|f'(z)\|_{\tilde{\mu}} > \lambda_1.$$

Soit $z \in V_4 = f^{-1}(U_4) \cap f^{-1}(U_4)$, alors par définition

$$\|f'(z)\|_{\tilde{\mu}} = \frac{\mu_h(f(z))}{\varpi(z)}|f'(z)|.$$

Posons $m = \inf_{z \in V_4}\{\|f'(z)\|_{\tilde{\mu}}\}$. Mais sur V_4, il existe $C_1 > 0$ tel que $\varpi(z) < C_1$. De même, puisque U_4 est un voisinage de C, il existe $C_2 > 0$ tel que $d_h(f(z),C)h(f(z)) \leqslant C_2$ et donc $\mu_h(f(z)) > C_2^{-1/2}$. Cependant, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage W de 0 tel que $|f'(z)| < \epsilon$ pour tout $z \in W$. Mais $\mu_h(z)$ est définit de façon a exactement compenser pour ceci. Soyons plus précis: par le lemme 4.3, sur W, $d_h(f(z),c)h(f(z)) \sim d(z,0)^2$ et aussi $|f'(z)| \sim d(z,0)$, ce qui donne que $\|f'(z)\|_{\tilde{\mu}} = \dfrac{\mu_h(f(z))}{\varpi(z)}|f'(z)| \sim 1$ sur W. En rassemblant tout ceci, on obtient que $m > 0$.

Soit M tel que $\lambda_1^M m = \lambda_2 > 1$. Un calcul simple montre que pour $z \in V_4$,

$$\|(f^M)'(z)\|_{\tilde{\mu}} \geqslant \lambda_2 > 1,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Il reste donc à démontrer que cette métrique définit bien la même topologie que la métrique euclidienne. Il semblerait qu'il y ait plusieurs relations entre les rayons externes vus dans la métrique μ_h et la fonction de Green $G(z)$ de A_∞ (voir par exemple [7] section 8); il existe même sûrement des résultats assez similaires aux prochains lemmes qui se démontreraient de ces relations.

Commençons par un lemme qui nous sera utile plus tard.

Lemme 6.18. *La valeur critique c est un point isolé de C*

Démonstration. Supposons le contraire. Pour tout $\epsilon > 0$ petit, soit $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que si $|x - c| < \delta$ alors $|f^{-1}(x)| < \epsilon$. Puisque localement f^{-1} de c à 0 ressemble à une racine carrée et qu'il n'y a qu'une seule branche (double) de c à 0, δ existe et est bien défini. De plus, $\delta \to 0$ lorsque $\epsilon \to 0$. Soit $\epsilon = d(0, C)/2$. Puisque c n'est pas isolé, il existe $n > 0$ tel que $|f^n(c) - c| < \delta$, et donc $|f^{-1}(f^n(c))| < \epsilon$. Mais ici f^{-1} est la seule branche qui va de c à 0, donc $f^{-1}(f^n(c)) = f^{n-1}(c)$, contradiction. □

Il faut remarquer ici que ce lemme se généralise pour démontrer que toute valeur critique est isolée de l'ensemble limite de sa propre orbite, mais il est tout à fait possible que cette valeur critique soit un point d'accumulation pour l'orbite d'un autre point critique. Voir la remarque 1 en page 9 de [8] où un tel exemple est décrit.

On notera $d_\mu(z_0, z_1)$ la distance de z_0 à z_1 pour la métrique μ_h et $\ell_\mu(\gamma)$ la longueur d'une courbe rectifiable γ pour cette même métrique.

Lemme 6.19. *Il existe un voisinage U de C et une constante $C_1 > 0$ tel que pour toute paire de points $x, y \in U$, alors $d_\mu(x, y) \leqslant C_1 d(x, y)^{1/2}$.*

Démonstration. Pour tout $\epsilon > 0$, soit $U_1 = U_1(\epsilon) = \cup_{i=0}^{\infty} B(f^i(c), \epsilon)$. Puisque C est la clôture de $\{f^i(c)\}_{i=0}^{\infty}$, il est clair que U_1 recouvre C. Il existe donc un sous-recouvrement fini, et donc une collection $U_2 = \{B(f^{i_j}(c), \epsilon)\}_{j=0}^{M}$ tel que $C \subset U_2$. Soit $U = f^{-i_M}(U_1) \cap U_1$. Soit x, y deux points de U. Sans perte de généralité, on peut toujours supposer qu'il existe un $0 \leqslant j \leqslant M$ tel que $x, y \in B(f^{i_j}(c), \epsilon)$ (sinon on découpe chaque courbe γ qui rejoint ces deux points en un nombre fini de morceaux et on applique le reste de l'argument à chaque morceau).

Quitte à restreindre encore plus U, le théorème de Taylor nous dit qu'il existe une constante $C_2 > 0$ tel que $\mu_h(f^n(z))\|(f^n)'(z)\|_h \leqslant C_2 \mu_h(z)$ pour $z \in U$ et $n \in \{i_j\}_{j=0}^{M}$. Ici γ dénotera une courbe rectifiable dans U qui joint x et y, et γ' une courbe rectifiable dans U qui joint $f^{-i_j}(x)$ à $f^{-i_j}(y)$ où les branches sont définie plus haut et on pour image un voisinage de la valeur critique c (et domaine $B(f^{i_j}(c))$). Puisque f^{-i_j} est univalente sur son image, il est immédiat qu'il y a correspondance entre les courbes rectifiables correspondantes. On a donc que

$$\begin{aligned}
d_\mu(x, y) &= \inf_\gamma \ell_\mu(\gamma) \\
&= \inf_\gamma \int_\gamma \mu_h(z)|dz| \\
&= \inf_{\gamma'} \int_{\gamma'} \mu_h(f^{i_j}(w))\|(f^{i_j})'(w)\|_h |dw| \\
&\leqslant \inf_{\gamma'} \int_{\gamma'} C_2 \mu_h(w)|dw| \\
&\leqslant C_3 \inf_{\gamma'} \ell_\mu(\gamma')
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $|(f^n)'(z)| \sim |(f^n)'(w)|$ pour tout $z \in \gamma'$ et $w \in \gamma'$ fixé, et donc que la même équivalence est vraie pour $\|(f^n)'(z)\|_h$. Mais puisque par construction γ' est

dans un voisinage de c et que ce point et isolé, alors $d(z, C) = d(z, c)$ et $h(z) \sim 1$ sur γ'. En rassemblant ceci, on obtient que

$$\inf_{\gamma'} \ell_\mu(\gamma') \leqslant C_4 \inf_{\gamma'} \int_{\gamma'} |z - c|^{-1/2} |dz| \leqslant C_5 d(f^{-i_j}(x), f^{-i_j}(y))^{1/2},$$

où $C_4 > 0$ est la constante implicite dans $h(z) \sim 1$ sur γ'. En fait, cette inégalité est assez pessimiste, car la racine ne sera vraiment nécessaire que si γ' passe arbitrairement près de c (incluant le passage par c), et puisque l'on minimise sur toutes les courbes, ceci ne se produira que lorsque l'un des deux points est c. De plus, puisque f^{i_j} est univalente sur le domaine en question, Koebe donne que $d(f^{-i_j}(x), f^{-i_j}(y)) \sim d(x, y)/|(f^{i_j})'(c)|$. En rassemblent tout ceci, puisque $|(f^{i_j})'(c)|$ est borné inférieurement, on obtient qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$d_\mu(x, y) \leqslant C_1 d(x, y)^{1/2}$$

□

Évidemment il existe une constante $C_5 > 0$ tel que $\mu_h(z)|dz| > C_5|dz|$, et donc avec le lemme précédent, on obtient

Proposition 6.20. *Il existe un voisinage U de C où $\mu_h(z)|dz|$ défini une métrique qui engendre la même topologie que la métrique euclidienne sur U.*

Si on rassemble tout ces lemmes et propositions, on obtient globalement

Proposition 6.21. *Soit $f(z) = z^2 + c$ semi-hyperbolique, alors il existe une métrique admissible $\tilde{\mu}(z)|dz|$ et un $M > 0$ pour laquelle f^M est expansive.*

Un argument avec des sommes de Birkhoff (voir la démonstration du lemme 6.11) permet de définir une nouvelle métrique admissible $u(z)$ pour laquelle f est expansive.

Dans le cas général, on utilise la métrique

$$\tilde{\mu}(z)|dz| = \inf\{\mu'_h(z)|dz|, \varpi(z)|dz|\}$$

où l'on modifie la distance dans

$$\mu'(z) = \prod_{c \in \mathrm{Crit}'} \frac{1}{d(z, O^+(c))^{1-1/\nu(c)}}$$

par une fonction $h(z)$ comme ci-haut. Comme toujours, $\nu(c)$ dénote la multiplicité du point critique c. Les arguments deviennent plus compliqués car il faut travailler avec des fonctions de degré borné au lieu de fonctions univalentes dans quelques endroits, mais les difficultés ne sont que techniques et ne fournissent pas d'obstacle insurmontable.

6.3 Une métrique admissible

On voudrait considérer la fonction

$$u(z) = \sum_{\substack{n>0 \\ \{c\in \mathrm{Crit}'\}}} \frac{1}{|(f^n)'(f(c))|d(z, f^n(c))^{1-1/\nu(c)}} \tag{6.9}$$

où $\nu(c)$ dénote la multiplicité du point critique c. Celle-ci définie une métrique admissible très généralement:

Lemme 6.22. *Supposons f telle qu'il existe un $M < \infty$ tel que pour tout point critique $c \in \mathrm{Crit}'$,*

$$\sum_{n>0} \frac{1}{|(f^n)'(f(c))|} < M.$$

Alors $u(z)$ défini une métrique admissible sur un voisinage de $O^+(Crit')$.

Il est assez facile d'utiliser les méthodes des sections précédentes pour ensuite construire une métrique qui sera valide et admissible sur tout un voisinage de $J(f)$.

Démonstration. Soit U un voisinage de Crit' tel que U n'intersecte l'orbite d'aucun des autres points critiques. Alors pour tout $x, y \in U$, si $d = d(x, y)$ et $\gamma_1 : [0, d] \to U$ est la ligne droite de x à y, et $\nu(f)$ est la multiplicité maximale des points critiques de Crit',

$$\begin{aligned}
d_u(x,y) &= \inf_{\gamma} \int_{\gamma} u(z)|dz| \\
&\leqslant \int_0^d u(yt/d + (d-t)x/d)dt = \int_0^d u(\gamma_1(t))dt \\
&= \int_0^d \sum_{\substack{n>0 \\ \{c\in \mathrm{Crit}'\}}} \frac{1}{|(f^n)'(f(c))|d(\gamma_1(t), f^n(c))^{1-1/\nu(c)}} dt \\
&= \sum_{\substack{n>0 \\ \{c\in \mathrm{Crit}'\}}} \frac{1}{|(f^n)'(f(c))} \int_0^d \frac{1}{d(\gamma_1, f^n(c))^{1-1/\nu(c)}} dt \\
&\leqslant \sum_{\substack{n>0 \\ \{c\in \mathrm{Crit}'\}}} \frac{1}{|(f^n)'(f(c))} d^{1/\nu(c)} \\
&\leqslant (\#\,\mathrm{Crit}')Md(x,y)^{1/\nu(f)}.
\end{aligned}$$

Il est évident que $u(z)$ est borné inférieurement sur U, et l'on conclut que $u(z)$ est admissible. □

Remarque 6.23. Il est très important de voir que si l'on suppose que f est fortement expansive pour $u(z)$, la fonction $u : U \to (0, \infty]$ est assez rarement continue. En effet, si elle est continue, alors les points périodiques dans U sont uniformément hyperboliques, et puisqu'il est assez simple d'inclure $J(f)$ dans U, ceci indiquerait que seulement les applications de Collet-Eckmann sont susceptibles d'avoir u continue (du moins dans le cas réel) et expansive.

La détermination des cas où $u(z)$ est effectivement expansive est un problème ouvert. En fait, même dans le cas où l'on prend $f(z) = z^2 + c$ avec 0 non-récurrent, on ne sait dire (encore) si $u(z)$ est une métrique expansive pour f. C'est en tout cas très probable, et l'espoir est que cette même métrique est expansive dans le cas Collet-Eckmann.

6.4 De retour à Collet-Eckmann

Pour compléter, il faudrait démontrer que l'existence d'une telle métrique entraîne bien que l'application est en effet Collet-Eckmann. Ceci reste en fait une conjecture, mais l'on peut quand même démontrer quelque chose dans cette direction:

Proposition 6.24. *Soit μ une métrique admissible finie pour $f(z) = z^2+c$ sur un voisinage U de $J(f)$ telle que f est fortement expansive pour cette métrique, plus précisément il existe $\lambda > 1$ tel que pour tout $z \in U$, $\|f'(z)\|_\mu \geqslant \lambda$. Si de plus on suppose qu'il existe $C > 0$ et $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ tel que $|\mu(c)/\mu(f^n(c))| \geqslant C\lambda^{-\epsilon n}$, alors f est Collet-Eckmann.*

Démonstration. Soit n donné. Pour que f soit expansive en 0 et le long de son orbite, et que μ est finie, μ n'est pas singulière en 0 et $\mu(f(z))$ doit avoir une singularité en c exactement du même ordre que le zéro de la dérivée de f en 0 (sinon

$$D_\mu(f)(0) = \frac{\mu(c}{\mu(0)}|f'(0)| > 1$$

ne pourrait être vrai). Ceci entraîne qu'il doit y avoir une singularité de type $z^{-1/2}$. Par un raisonnement similaire, on voit que tout le long de l'orbite de 0, il y a une singularité du même type et par conséquent le rapport $\mu(f^{i+1}(0))/\mu(f^i(0))$ est bien défini pour tout $i > 0$, et plus précisément $0 < \mu(f^{i+1}(0))/\mu(f^i(0)) < \infty$. Alors

$$\begin{aligned}
|(f^n)'(c)| &= \prod_{i=0}^{n-1} |f'(f^i(c))| \\
&\geqslant \prod_{i=0}^{n-1} \lambda \frac{\mu(f^i(c))}{\mu(f^{i+1}(c))} \\
&= \lambda^n \frac{\mu(c)}{\mu(f^n(c))} \\
&\geqslant C\lambda^{(1-\epsilon)n},
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Il y a plusieurs remarques a faire. La première est que cette démonstration se généralise facilement aux cas où il y a plusieurs points critiques, possiblement de multiplicité différente, dans $J(f)$. La deuxième est que l'on ne peut supposer $\mu(f^n(c))$ bornée sinon on conclut sans trop de difficulté que le point critique c ne peut être récurrent, cas qui n'est pas très intéressant. Finalement, il est tout à fait possible que les hypothèses de la proposition ci-haut ne soient vraies que pour précisément ce cas moins intéressant. Cependant, les situations analogues en dynamique réelle laissent espérer que ceci n'est pas le cas.

Chapitre 7

Corollaires

Ce chapitre rassemble des résultats divers, tous obtenus pêle-mêle lors de la découverte des théorèmes des chapitres précédents, qui méritent d'être connus mais qui n'avaient pas leur place dans aucuns de ceux-ci.

7.1 Points Périodiques Uniformément Hyperbolique

Voici une notion d'expansion pour les ensembles de Julia:

Définition 7.1. Pour une fraction rationnelle f, on dit que les points périodiques sont uniformément hyperboliques, noté *PPUH*, si il existe un $\lambda > 1$ tel que pour tout $z \in J(P)$ et pour tout $n \geq 1$ tel que z soit un point périodique de période n, alors

$$|(f^n)'(z)| \geq \lambda^n$$

On remarque que l'on impose seulement une condition sur les multiplicateurs des points périodiques, ce qui permet en fait d'avoir des points critiques dans le Julia, et même récurrents ([28]).

On a la relation suivante:

Proposition 7.2. *Soit P un polynôme de degré d tel que A_∞ est un domaine de Hölder, alors les points périodiques sont uniformément hyperboliques.*

Démonstration. Soit *psi* : $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \to A_\infty$ la représentation conforme de A_∞. Du corollaire 2.23, il existe $K > 0$ et $\alpha > 1$ tels que $|\psi(x) - \psi(y)| \leq K|x - y|^\alpha$. Soit $z \in J$ un point périodique de période n, et soit $w \in S^1$ tel que $\psi(w) = z$ et $T^{qn}(w) = w$ (où p/q est le nombre de rotation combinatoire de z). Soit $Q = T^{qn}$ et l le degré du polynôme.

Puisque w est un point périodique répulsif de Q, il existe une suite de nombres $w_i \in S^1$ monotone tel que $w_i \to w$ et $Q(w_{i+1}) = w_i$ (il suffit de prendre un w_0 dans l'image inverse de S^1 dans la coordonné linéarisante suffisamment près de w et puis de suivre l'orbite inverse).

Donc, toujours pour la métrique sphérique $d(\cdot,\cdot)$, puisque $d(w_{i+1},z) = d(w_i,w)/l^{qn}$, par induction puis en utilisant que ψ est hölderienne, on obtient que

$$d(z_i,z) = d(\psi(w_i),\psi(w)) \leqslant Kl^{-qni\alpha}d(w_0,w)^\alpha \tag{7.1}$$

où $z_i = \psi(w_i)$. Puisque ψ conjugue la dynamique, on notera que $P^{qn}(z_{i+1}) = z_i$ et que $z_i \to z$.

Soit $\beta > 1$. Si z_i est assez près de z, puisque la dynamique est localement analytiquement linéarisable, alors $d(z_{i+1},z) \geq d(z_i,z)/\beta|(f^{qn})'(z)|$. Donc si z_0 lui-même est assez près de z,

$$d(z_i,z) \geq \beta^{-i}\frac{d(z_0,z)}{|(f^{qn})'(z)|^i}. \tag{7.2}$$

En combinant avec l'inégalité (7.1), on obtient que

$$\frac{d(z_0,z)}{|(f^{qn})'(z)|^i} \leq K\beta^i l^{-qni\alpha}d(w_0,w)^\alpha. \tag{7.3}$$

Puisque z est en fait un point périodique de période n, on obtient par différentiation que

$$|(f^n)'(z)|^{qi} = |(f^{qn})'(z)|^i \geq \frac{1}{\beta^i K}l^{qni\alpha}\frac{d(z_0,z)}{d(w_0,w)^\alpha}.$$

Soit $K' = \frac{Kd(z_0,z)}{d(w_0,w)^\alpha} \leq 1$. Puisque (7.3) est vraie pour tout $i \geq 1$, alors

$$|(f^n)'(z)|^q \geq \sqrt[i]{K'}\frac{l^{qn\alpha}}{\beta}$$

pour tout i, ce qui implique que

$$|(f^n)'(z)|^q \geq \frac{l^{qn\alpha}}{\beta}.$$

De même, puisque β était arbitraire, on obtient que

$$|(f^n)'(z)| \geq l^{n\alpha}$$

ce qui est le résultat voulu si l'on pose $\lambda = l^\alpha > 1$. □

Cette propriété devient intéressante lorsqu'on constate qu'en dynamique réelle, cette propriété est vraie pour toutes les applications de Collet-Eckmann. De plus, c'est aussi cette propriété qui permet de simplifier beaucoup de démonstration du type Benedicks-Carleson, ce qui nous intéresse évidemment.

Ce qui ne semble pas évident du tout c'est de démontrer des propriétés quelconques sur la dynamique du Julia sous les seules hypothèses de PPUH et non-renormalisibilitée infinie dans le cas complexe, même si dans le cas réel ([28]) des avances considérables ont été faites.

7.2 Deuxième condition de Collet-Eckmann

Nous avons déjà fait la remarque que la première étape de la construction dans la démonstration que Collet-Eckmann implique Hölder est superflue si le point de départ est assez près d'un point critique. En particulier, on obtient comme corollaire que la condition de Collet-Eckmann implique la condition de Collet-Eckmann pour l'orbite inverse des orbites critiques, communément appelée deuxième condition de Collet-Eckmann. Plus précisément:

Définition 7.3. Une fonction f satisfait la deuxième condition de Collet-Eckmann si il existe $C > 0$ et $\lambda > 1$ tel que pour tout $y \in J(f)$ tel que $f^n(y) = c_i$ où c_i est un point critique de f, alors

$$|(f^n)'(y)| \geqslant C\lambda^n \tag{7.4}$$

Corollaire 7.4 (de la démonstration du Théorème 5.2). *Si f satisfait la condition de Collet-Eckmann pour tous les points critiques dans son ensemble de Julia $J(f)$ alors f satisfait la deuxième condition de Collet-Eckmann.*

7.3 Diamètre

On peut aussi caractériser les domaines de Hölder avec des conditions sur le diamètre de certains disques sous l'action de P^{-n}. Plus précisément, on obtient que

Proposition 7.5. *Soit P un polynôme de degré d avec $J(P)$ connexe. Alors ψ est hölderienne d'exposant ϵ sur si et seulement si il existe un $\delta_0 > 0$ tel que*

$$\mathrm{Diam}(f^{-n}(B(z,\delta))) \leq Cd^{-\epsilon n}$$

pour tout $z \in J$ et $\delta < \delta_0$

Démonstration. ($\Rightarrow$) Puisque $f^n \circ \psi = \psi \circ T^n$, alors pour un choix de branches inverses spécifique on a aussi que $f^{-n} = \psi \circ T^{-n} \circ \psi^{-1}$. Soit $w \in B(z,\delta)$, $\psi(\omega) = w$ et $\psi(T^n(\tilde{\omega})) = w$, où l'on a choisi la même branche que pour ξ. On choisi δ_0 tel que f^{-n} est univalent pour tout n sur $B(z,\delta)$ pour tout $\delta < \delta_0$.

$$\begin{aligned}
|f^{-n}(z) - f^{-n}(w)| &= |\psi \circ T^{-n} \circ \psi^{-1}(z) - \psi \circ T^{-n} \circ \psi^{-1}(w)| \\
&= |\psi \circ T^{-n}(\zeta) - \psi \circ T^{-n}(\omega)| \\
&= |\psi(\xi) - \psi(\tilde{\omega})| \\
&\leq c_1|\xi - \tilde{\omega}|^{\epsilon}.
\end{aligned}$$

Puisque δ est choisi assez petit, on a que T^{-n} est univalent sur $B_1 = \psi^{-1}(B(z,\delta))$ et que $\mathrm{Diam}(B_1) \leq c_2\delta$. Maintenant, $(T^{-n})' \sim d^{-n}$ sur B_1 (voir 2.27). On peut donc continuer avec

$$\begin{aligned}
|f^{-n}(z) - f^{-n}(w)| &\leq c_1|\xi - \tilde{\omega}|^{\epsilon} \\
&\leq c_1|c_2\delta \max_{x\in B_1} |(T^{-n})'(x)||^{\epsilon} \\
&\leq c_3 d^{-\epsilon n}
\end{aligned}$$

où l'on rassemble toutes les constantes dans c_3.

($\Leftarrow$) On remarque que, par compacité, il suffit de montrer que ψ est Hölder pour un voisinage du Julia de taille définie. En fait, puisque l'on peut toujours prendre la constante C pour Hölder comme étant au moins $\mathrm{Diam}(\overline{\mathbb{C}})\beta^{\epsilon}$, il suffit de considérer que les points qui sont à distance moindre que β l'un de l'autre dans un voisinage du Julia. De plus, il suffit de le démontrer que pour le cas où un des points est sur le Julia.

Soit $\hat{x}, \hat{y} \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$, dans un voisinage de $\mathbb{S}^1$, $V = \{z : 1 \leq |z| \leq \beta\}$, en choisissant $\beta > 0$ tel que

1. $|\hat{x} - \hat{y}| < \beta \Rightarrow |T(\hat{x}) - T(\hat{y})| \sim d|\hat{x} - \hat{y}|$
2. $|\hat{x} - \hat{y}| < \beta$ et $|T(\hat{x}) - T(\hat{y})| \geq \beta \Rightarrow |\psi(T(\hat{x})) - \psi(T(\hat{y}))| \leq \delta_0$

où la deuxième condition est possible par la continuité de ψ et la compacité de $\mathbb{S}^1$. Soit aussi $\psi(\hat{x}) = x$ et $\psi(\hat{y}) = y$.

Supposons, sans perte de généralité, que $\hat{x} \in \mathbb{T}$ et que $|\hat{x} - \hat{y}| < \beta$. Définissons n comme étant l'entier positif tel que $|T^n(\hat{x}) - T^n(\hat{y})| \geq \beta$ mais que $|T^k(\hat{x}) - T^k(\hat{y})| < \beta$ pour $k = 0, \ldots, n-1$. Alors,

$$\beta \leq |T^n(\hat{x}) - T^n(\hat{y})| \sim d^n|\hat{x} - \hat{y}|$$

et en réécrivant,

$$n \succeq \frac{1}{\log d} \log \frac{|T^n(\hat{x}) - T^n(\hat{y})|}{|\hat{x} - \hat{y}|} \geqslant \frac{1}{\log d} \log \frac{\beta}{|\hat{x} - \hat{y}|} \tag{7.5}$$

Si l'on note $x_1 = \psi(T^n(\hat{x})) = f^n(\psi(\hat{x})) = f^n(x)$ et $y_1 = \psi(T^n(\hat{y})) = f^n(\psi(\hat{y})) = f^n(y)$, alors par la deuxième condition sur β, $|x_1 - y_1| \leq \beta$, donc par hypothèse,

$$\begin{aligned}
|\psi(\hat{x}) - \psi(\hat{y})| = |x - y| &\leq Cd^{-\epsilon n} \leq C_1 d^{-\epsilon \frac{1}{\log d} \log \frac{\beta}{|\hat{x}-\hat{y}|}} \\
&\leq C_2|\hat{x} - \hat{y}|^{\epsilon}
\end{aligned}$$

□

On peut aussi démontrer la première moitié en utilisant le lemme 1.3 de [31], les arguments de la démonstration de 2.19 et un argument de compacité. On remarquera aussi que la deuxième partie de la démonstration suppose que le Julia est localement connexe. Ceci devrait être évident, mais n'est toutefois pas démontré!

7.4 Hölder implique Collet-Eckmann (topologique)

Cette section diffère du chapitre sur les points périodiques car les idées ici sont totalement géométriques, et l'esquisse de démonstration présenté ne considère que la version topologique de Collet-Eckmann.

Le but:

Théorème 7.6. *Soit f un polynôme de degré d avec $J(f)$ connexe et A_∞ un domaine de Hölder. Alors f satisfait la condition de Collet-Eckmann topologique.*

Démonstration. Soit $a > 1$, $r_0 > 0$ et définissons

$$V_{n,j} := \{z \mid 1 \leqslant |z| \leqslant a^{d^{-n}}, 2\pi j/d^n \leqslant \arg(z) \leqslant 2\pi(j+1)/d^n\}$$

pour $n > 0$ entier et $0 \leqslant j < d^n$. Soit $\psi : \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{C}} \setminus J$ la représentation conforme de A_∞. Puisque A_∞ est Hölder et simplement connexe alors, par la proposition 2.28, ψ est hölderienne, et donc si on prend n suffisamment grand, alors tout les $A_j := \psi(V_{n,j})$ sont uniformément petits. Soit $x \in J$, et U un "voisinage" de $f^n(x)$ formé de tout les A_j qui contiennent x. En prenant des composantes C_k des images inverses successives $f^{-k}(A_j)$ tels que $f^{-n}(A_j)$ contiennent x, on obtient qu'une seule image inverse a chaque niveau, sauf si C_{k+1} contient un point critique. Cependant, puisque nous sommes à petite échelle (en d'autres mots lorsque r_0 est pris suffisamment grand) alors ceci se produit rarement, plus précisément que pour tout $a > 0$ il existe $C > 0$ tel que le nombre de composantes de $f^{-n}(A_j)$ est borné par Ce^{an}. On en conclut que la composante de $f^{-n}(U)$ qui contient U est exponentiellement petite. On peut alors compléter par un argument de Przytycki que l'on retrouve dans [27]. □

A noter que cet argument fut développé par l'auteur et F. Przytycki conjointement.

Chapitre 8

Conclusions, remarques et conjectures

Ce chapitre est un peu du même style que le précédent, sauf que celui-ci est composé surtout de remarques, de directions possible de recherche ainsi que de conjectures, alors que celui-là contenait des résultats fermes.

8.1 Influence de la dynamique réelle

Il est certain que beaucoup de résultats, certains très récents, en dynamique réelle on influencé certaines des directions de recherche de ce travail. De ceci, il reste encore beaucoup plus de questions qu'il n'existe de réponses.

Quelle est la relation entre la propriété des points périodiques uniformément hyperboliques et Collet-Eckmann? En dynamique réelle, il y a équivalence, et l'on sait démontrer que Collet-Eckmann implique PPUH, mais l'autre direction n'est connue que pour les systèmes du type $z^l + c$ avec c réel.

Quelle est la relation entre A_∞ Hölder pour un polynôme et le temps de recouvrement d'un ouvert "centré" sur J par itération? En dynamique réelle, on a que le temps de recouvrement de l'intervalle $[0,1]$ par un sous-intervalle I_1 par itération d'une application unimodale f est $O(\ln(|I_1|))$ si et seulement si la conjugaison entre f et une application tente est Hölderienne. On peut facilement démontrer l'équivalent complexe si l'on utilise

$$|A| = \sup_{S \in \text{c.c. } A \cap J} \text{Diam}(S)$$

au lieu de $\text{Diam}(A)$, mais ceci est sûrement vrai avec $\text{Diam}(A)$.

Quelle est la relation entre la décroissance exponentielles des corrélations pour les mesures α-conformes, la condition de Collet-Eckmann et les domaines de Hölder?

8.2 Le plan des paramètres

On sait déjà que les applications de Collet-Eckmann sont de mesure positive parmi les applications unimodales de dérivée Schwartzienne négative. On sait aussi, par une étude des résultats de Rees [35, 36], que les applications de Collet-Eckmann sont de mesures positives dans les applications rationnelles de degré 2. Une conjecture en dynamique réelle est que les applications de Collet-Eckmann union les applications hyperboliques sont de pleine mesure. Il serait donc facile de conjecturer que les applications de Collet-Eckmann, ou encore les applications pour lesquelles PPUH est vraie, sont de pleine mesure dans les applications rationnelles de degré 2.

Si les conjectures ci-haut sont fausses, existe-t-il au moins une relation entre une certaine notion d'expansivité et les applications typiques (au sens de la mesure)?

Réciproquement, parmi les applications qui ne sont pas hyperboliques, quel est le comportement générique d'une application? Le cas Siegel-Cremer laisserait penser qu'une certaine expansivité n'est pas générique - mais peut-on démontrer quelque chose de précis?

8.3 Points critiques inutiles

Que veut-on dire par ceci? Tout point critique qui est "englobé" par une composante dynamique (cycle attractif, cycle parabolique) est nécessaire; cependant, un point fixe attractif ne nécessite qu'un point critique dans son bassin immédiat, tout autre est inutile, dans le sens qu'il ne peut contribuer à créer une autre composante dynamique (cycle attractif ou indifférent, anneau de Hermann). De même, en suivant les travaux de A. Epstein, une orbite critique finie ne peux jamais être utile. On se demande alors si une application avec un point critique dans son Julia tel qu'il existe une certaine expansion de la dérivée le long de l'orbite critique peut être utile, c'est-à-dire que l'ensemble ω-limite contienne le bord d'un disque de Siegel, un point de Cremer ou encore un des bords d'un anneau de Hermann. On a déjà démontrer que ceci est impossible dans le cas Collet-Eckmann, mais dans d'autres cas? Si ce n'est pas possible, alors peut-on trouver définition précise (et dynamique) de ces cas pour pouvoir ensuite incorporer toutes ces données dans une inégalité du type Shishikura [37]?

Une direction de recherche serait de voir s'il existe un lien entre le nombre de composantes ergodiques dans un ensemble de Julia pour une mesure conforme donnée et l'expansion le long des orbites critiques, suivant les travaux de Przytycki [31].

Bibliographie

[1] Z. Balogh and A. Volberg, *Geometric localization, uniform John property and seperated semihyperbolic dynamics*, Preprint, 1994.

[2] Alan F. Beardon, *Iteration of rational functions*, Springer-Verlag, 1992.

[3] J. Becker and C. Pommerenke, *Hölder continuity of conformal mappings and non-quasiconformal Jordan curves*, Comment. Math. Helvetici **57** (1982), 221–225.

[4] B. Branner and J.H. Hubbard, *The iteration of cubic polynomials, Part ii: patterns and parapatterns*, Acta Math., to be published.

[5] ———, *The iteration of cubic polynomials, Part i: the global topology of parameter space*, Acta Math. **160** (1988), 143–206.

[6] L. Carleson and T.W. Gamelin, *Complex dynamics*, Springer-Verlag, 1993.

[7] L. Carleson and P.W. Jones, *On coefficient problems for univalent functions and conformal dimension*, Duke Math. J. **66** (1992), no. 2, 169–206.

[8] L. Carleson, P.W. Jones, and J.-Ch. Yoccoz, *Julia and John*, Bol. Soc. Bras. Mat. **25** (1994), no. 1, 1–30.

[9] P. Collect and J.-P. Eckmann, *Positive Liapunov exponents and absolute continuity for maps of the interval*, Erg. Th. Dyn. Sys. **3** (1983), 13–46.

[10] A. Douady and J.H. Hubbard, *Etude dynamique de polynômes complexes*, Publications Mathematiques d'Orsay #84-02 et #85-04.

[11] P. Fatou, *Sur les équations fonctionelles*, Bull. Soc. Math. France **48** (1920), 208–314.

[12] F.W. Gehring and O. Martio, *Lipschitz classes and quasiconformal mappings*, Ann. Acad. Scien. Fenn. **10** (1985), 203–219.

[13] F.W. Gehring and B.G. Osgood, *Uniform domains and the quasi-hyperbolic metric*, J. Analyse Math. **36** (1979), 50–74.

[14] J. Graczyk and S. Smirnov, *Collet, Eckmann & Hölder*, Preprint, 1996.

[15] D.H Hamilton, *On the Poincaré inequality*, Complex Variables: Theory and Appl. (1986), 265–270.

[16] J.H. Hubbard, *Local Connectivity of Julia set and Bifurcation Loci: Three Theorems of J.-C. Yoccoz*, Topological Methods in Modern Mathematics, Publish or Perish, 1993, pp. 467–512.

[17] P.W. Jones, *On removable sets for Sobolev spaces in the plane*, Conference in honor of E.M. Stein, Princeton University Press, 1993.

[18] G. Levin and S. van Strien, *Local connectivity of Julia sets of real polynomials*, SUNY preprint 1995/5, 1995.

[19] M. Lyubich, *Dynamics of quadratic polynomials. I. combinatorics and geometry of the Yoccoz puzzle*, MSRI preprint, 1995.

[20] R. Mañé and L.F. da Rocha, *Julia sets are uniformly perfect*, Proc. of the A.M.S (1992), 251–257.

[21] R. Mañé, *On a Theorem of Fatou*, Bol. Soc. Bras. Mat. **24** (1993), no. 1, 1–11.

[22] M. Masumoto, *Integrability of superharmonic functions on Hölder domains of the plane*, Proc. of the A.M.S **117** (1993), no. 4, 1083–1088.

[23] C.T. McMullen, *Self-similarity of Siegel disks and Hausdorff dimension of Julia sets*, preprint, 1995.

[24] J. Milnor, *Dynamics in one complex variable: introductory lectures*, SUNY Stony Brook, Institue for Mathematical Sciences, preprint #1990/5.

[25] R. Näkki and J. Väisälä, *John disks*, Expositiones Mathematicae **9** (1991), 3–43.

[26] T. Nowicki, *Some dynamical properties of S-unimodal maps*, Fund. Math. (1993), no. 1, 45–57.

[27] T. Nowicki and F. Przytycki, *Topological invariance of the Collet-Eckmann property for S-unimodal maps*, Preprint, 1996.

[28] T. Nowicki and D. Sands, *Non-uniform hyperbolicity and universal bounds for S-unimodal maps*, Preprint, 1996.

[29] R. Perez-Marco, *Solution complète au problème de Siegel de linéarisation d'une application holomorphe au voisinage d'un point fixe*, Séminaire Bourbaki **753** (1992).

[30] Ch. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps*, Springer-Verlag, 1992.

[31] F. Przytycki, *Iteration of holomorphic Collet-Eckmann maps: conformal and invariant measures*, Preprint, 1995.

[32] ———, *On measure and Hausdorff dimension of Julia sets for holomorphic Collet-Eckmann maps*, Preprint, 1995.

[33] ———, *Hölder implies CE*, Preprint, 1997.

[34] F. Przytycki and S. Rohde, *Porosity of Collet-Eckmann Julia sets*, Preprint, 1996.

[35] M. Rees, *Ergodic rational maps with dense critical point forward orbit*, Erg. Th. & Dy. Sy. **4** (1984), 311–322.

[36] ———, *Positive measure sets of ergodic rational maps*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **19** (1986), 383–407.

[37] M. Shishikura, *On the quasiconformal surgery of rational functions*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **20** (1987), 1–29.

[38] W. Smith and D. Stegenga, *A geometric Characterization of Hölder Domains*, J. London Math. Soc. (2) **35** (1987), 471–480.

[39] ———, *Poincaré domains in the plane*, Proceedings of the R. Nevanlinna Colloq. (1987), 312–326.

[40] ———, *Hölder Domains and Poincaré Domains*, Trans. of the A.M.S. **319** (1990), no. 1, 67–100.

[41] ———, *Exponential integrability of the quasi-hyperbolic metric on Hölder domains*, Ann. Acad. Scien. Fenn. **17** (1991), 345–360.

[42] S.G. Staples, *L^p averaging domains and the Poincaré inequality*, Ann. Acad. Scien. Fenn. (1989), 103–127.

[43] E.M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, 1970.

[44] N. Steinmetz, *Rational iteration: complex analytic dynamical systems*, Studies in Mathematics, vol. 16, Walter de Gruyter, 1993.

[45] J. Väisälä, *Uniform domains*, Tôhuku Math. J. (1988), 101–118.

[46] J.-Ch. Yoccoz, *Linéarisation de germes de difféomorphismes holomorphes de* $(\mathbb{C}, 0)$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **306** (1988), 55–58.

[47] ———, *Petits diviseurs en dimension 1*, Astérisque, vol. 231, Société Mathématiques de France, 1995.