

THÈSES D'ORSAY

AURELIAN VOLF

**Sur le comportement, par torsion, des constantes locales
d'équations fonctionnelles de fonctions L**

Thèses d'Orsay, 1995

[<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1995__0436__P0_0>](http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1995__0436__P0_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses d'Orsay » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



NUMDAM

*Thèse numérisée par la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016
et diffusée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

ORSAY

N° D'ORDRE :

**UNIVERSITE DE PARIS-SUD
U.F.R SCIENTIFIQUE D'ORSAY**

THESE
présentée
Pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITE PARIS XI ORSAY

PAR

52603 X

Aurelian Claudiu VOLF



SUJET :

SUR LE COMPORTEMENT, PAR TORSION, DES CONSTANTES
LOCALES D'EQUATIONS FONCTIONNELLES DE FONCTIONS L

Soutenue le 27 octobre 1995 devant la Commission d'examen composée de

M. Jean COUGNARD
M. Boas EREZ
M. Guy HENNIART
M. Bruno KAHN
M. Gérard LAUMON

REMERCIEMENTS

Je suis particulièrement reconnaissant à mon directeur de recherche, M. Prof. Guy HENNIART, à qui je dois pratiquement tout ce que je connais en Théorie des Nombres. Sa contribution à la réalisation de ce travail est essentielle et ses encouragements, ses éclaircissements et ses idées m'ont aidé à franchir des difficultés - de nature extra-mathématique aussi - qui autrement me paraissaient insurmontables.

Les rapporteurs, M. Prof. Jean COUGNARD et M. Prof. Boas EREZ ont eu la gentillesse et la grande patience de lire mon manuscrit et de me signaler une quantité insoupçonnée de fautes; grâce à leur travail, le texte est visiblement amélioré et je leur en remercie beaucoup.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Mme. Prof. Mirela STEFANESCU, qui m'a orienté vers l'Algèbre dans mes premiers années d'étude et à qui je dois une part substantielle de ma formation mathématique.

Enfin, un grand merci à tous mes amis de France ou de Roumanie qui m'ont souvent aidé, quelquefois sans même le savoir, à mener à bien cette thèse. Ils sont trop nombreux pour les écrire ici mais je les assure que je n'ai pas oublié leur contribution.

Title : On the behaviour, under torsion, of the local root numbers of the L -functions functional equation

This thesis is an investigation of a conjecture stated by P. DELIGNE and G. HENNIART, which refers to the virtual representations of the Weil group W of a local field. This conjecture generalises the fact that the root number of the tensor product of two virtual representations, one of which is of dimension 0 and determinant 1, and the other one is "very" ramified with respect to the first one, equals 1.

In the first part we prove some results that simplify the proof of the conjecture; this allows a proof in some simple cases. Afterwards we focus on the case in which all representations are in the first or the second level of the gamma-filtration of the representation ring of W . We prove that the conjecture holds in two non-trivial cases. An annex contains a complete investigation of the case where all representations factor through one group, isomorphic to the Heisenberg group with 27 elements. We show that the proof of the conjecture reduces to a single case, implying a representation belonging to the sixth level.

Keywords: local field; Weil group; virtual representation; local root numbers.

Mathematics Subject Classification: 11S40, 20C15.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1: Le problème et les résultats connus.....	4
1. Notations.....	4
2. Résultats sur les constantes locales.....	8
3. Enoncé du problème	12
CHAPITRE 2: Réductions.....	15
1. Résultats sur la ramification. Normes et traces.	15
2. Réductions.....	17
CHAPITRE 3: Le cas $n_i \leq 2$	25
1. Réduction au cas des extensions cycliques d'ordre p	25
2. Estimation des valuations.....	29
3. Le cas $n_1 = 2, n_2 = \dots = n_N = 1$	31
4. Le cas $N = 2, n_1 = n_2 = 2$	38
ANNEXE 1: Expression de la fonction ψ de Herbrand	53
ANNEXE 2: Le cas du groupe de Heisenberg à 27 éléments.....	56
1. Groupes de Heisenberg.....	56
2. Le groupe de Heisenberg à 27 éléments	58
3. Investigation de la conjecture.....	61
Bibliographie	72

Introduction

Le but de cette thèse est de présenter quelques résultats sur le comportement par torsion des constantes locales ("root numbers", appelées aussi *facteurs ε* dans cette thèse) associées à une représentation virtuelle du groupe de Weil d'un corps local. La "torsion" d'une représentation virtuelle signifie qu'on fait le produit tensoriel de celle-ci avec une autre représentation virtuelle.

Soient K un corps local, ψ un caractère additif non trivial de K , η et χ deux caractères de K , vérifiant $\alpha(\eta) < \alpha(\chi)$ (si χ est un caractère de K^* , on note $\alpha(\chi)$ le plus grand entier tel que $\chi(U_K(\alpha(\chi))) \neq 1$; voir ch. 1, **Notations**). Dans [De-He] on trouve la formule suivante pour la constante locale $\varepsilon((\eta - 1)\chi, \psi)$:

$$\varepsilon((\eta - 1)\chi, \psi) = \eta(\alpha^{-1}) \cdot (\chi\eta)^{-1} (1 + b/a) \cdot \psi(b),$$

où $a, b \in K$ sont tels que $\chi(1 + x) = \psi(ax)$ si $v_K(x) > \alpha(\chi)/2$; $\eta(1 + x) = \psi(bx)$ si $v_K(x) > \alpha(\eta)/2$.

A l'aide de cette formule on trouve une formule explicite pour $\varepsilon(\chi \prod_{i \in I} (1 - \eta_i))$, où $(\eta_i)_{i \in I}$ est une famille de caractères de K^* , vérifiant $\alpha(\eta_i) < \alpha(\chi)$. Cette formule (voir 2.4.) fait intervenir l'élément a (associé à χ , comme plus haut) et les éléments b_i associés aux η_i . Si $\sum(\alpha(\chi) - \alpha(\eta_i)) > \alpha(\chi)$, un calcul de valuations montre que

$$\varepsilon(\chi \prod_{i \in I} (1 - \eta_i)) = 1$$

En tenant compte que $1 - \eta_i$ correspond, via l'application de réciprocité de la théorie locale du corps de classes, à une représentation virtuelle de dimension 0 d'un groupe de Galois G_i d'une extension galoisienne finie de K , on se demande si la formule ci-dessus vaut encore si l'on remplace $1 - \eta_i$ par une représentation virtuelle W_i de dimension 0 du groupe de Galois G_i . C'est ce qu'on fait dans la conjecture 4.10. de [De-He]. On doit bien sûr imposer des conditions sur la ramification des groupes G_i et sur les W_i eux-mêmes (plus précisément, sur le cran de la γ -filtration du λ -anneau des représentations virtuelles de G_i dans lequel se trouve W_i). L'énoncé exact est le suivant :

Soient K un corps local, $\mathbf{W}$ son groupe de Weil absolu et V une représentation de $\mathbf{W}$, sans constituant modéré. Soient $(G_i)_{i \in I}$ une famille finie de quotients de $\mathbf{W}$ par des sous-groupes ouverts du groupe d'inertie et, pour chaque indice i , β_i le dernier saut de la filtration de G_i par les groupes de ramification, en numérotation supérieure. On suppose que, pour chaque i , on a $\beta_i < \alpha(V)$. Soient $(n_i)_{i \in I}$ une famille d'entiers positifs, et pour chaque indice i , une représentation virtuelle W_i de G_i , qui se trouve dans le n_i -ème sous-espace de la γ -filtration de l'anneau des représentations de G_i . Pour $n_i = 1$ (resp. $n_i = 2$) cela signifie que W_i est de dimension 0 (resp. de dimension 0 et de déterminant trivial).

Si on a

$$\sum_{i \in I} n_i (\alpha(V) - \beta_i) > \alpha(V), \quad (*)$$

peut-on conclure que $\varepsilon((\otimes_{i \in I} W_i) \otimes V)$ vaut 1 ? "

Soient G le groupe de Galois d'une extension galoisienne finie de corps locaux, R le λ -anneau des représentations virtuelles de G et R_n le n -ième cran de la γ -filtration de R . La principale difficulté rencontrée dans la tentative de démonstration de cette conjecture est l'absence d'un résultat sur une forme explicite des éléments de R_n , convenable pour les calculs. Par ailleurs, pour une formule explicite de la constante locale d'une représentation virtuelle de dimension 0, on doit faire appel à des théorèmes du type Brauer sur les représentations induites (voir le TH. 2.1. sur l'existence et l'unicité des constantes locales). L'absence d'un théorème de ce type, assurant en outre une certaine "compatibilité" avec la γ -filtration du R , soulève d'autres difficultés.

C'est justement parce que l'on dispose d'un théorème de structure sur le deuxième cran R_2 (qui est formé par les représentations virtuelles V avec $\dim V = 0$ et $\det V = 1$) qu'on a pu démontrer des résultats dans ce cas.

Puisque la conjecture est vraie dans le cas abélien (voir 5.4.), c'est-à-dire quand R est un λ -anneau engendré par des éléments de dimension 1, on serait tenté d'appliquer des résultats du type "principe de scindage" (splitting principle) pour les λ -anneaux ([Fu-La], [At-Ta]). Cela revient à plonger R dans un λ -anneau S engendré par des éléments de dimension 1. Mais ceci soulève d'autres obstacles : l'anneau S n'est plus en général l'anneau des représentations virtuelles d'un groupe de Galois G et on perd toute notion de ramification, de constantes locales etc. Toutefois, aborder le problème sous cet angle semble assez prometteur, si l'on résout le problème de la définition correcte de ces notions pour les éléments de S .

La structure de la thèse est la suivante :

Le chapitre 1 établit les notations et les résultats de base sur les constantes locales, les groupes de ramification et les λ -anneaux. Ces notions et résultats sont indispensables pour pouvoir énoncer la conjecture (3.2.) et démarrer les arguments des chapitres suivants.

Le deuxième chapitre débute avec quelques résultats sur les fonctions φ et ψ de Herbrand.

On continue avec des propositions qui permettent d'enrichir les hypothèses de la conjecture : on peut supposer que $\dim V = 1$ et V est galoisienne (i.e. d'image finie; V correspond donc à un caractère χ de K^*), les groupes G_i sont finis (et même des p -groupes). Si $n_i = 1$, on peut supposer que $W_i = 1 - \eta_i$, avec η_i un caractère de G_i . En outre, on prouve l'hypothèse dans quelques cas : si chaque groupe G_i est abélien; ou bien s'il existe un indice i avec $\beta_i \geq \alpha(V)/2$ et $n_i \geq 2$.

Le chapitre 3 se limite au cas $n_i \leq 2$ pour tout i dans I . On prouve d'abord que l'on peut supposer alors que $W_i = \text{Ind}_{F_i}^K(1 - \eta_i) - (1 - \eta_i|_{K^*})$ si $n_i = 2$, où F_i est une extension de K , cyclique d'ordre p . Ceci permet de trouver des formules explicites, faisant apparaître les éléments a et b_i associés à η_i et χ , comme plus haut.

On prouve la validité de la conjecture dans deux cas :

- si $n_1 = 2$ et $n_i = 1$ pour $i \neq 1$;
- si $|I| = 2$ et $n_1 = n_2 = 2$.

Il est vraisemblable que les méthodes employées pour les deux cas permettent de dégager une démonstration pour le cas $n_i \leq 2$ pour tout i . Il y a toutefois des difficultés techniques qui seront mieux comprises en parcourant les démonstrations du deuxième cas : si $n_1 = n_2 = 2$, ce sont $4 = 2^2$ facteurs ε qui doivent être calculés et l'expression qui en résulte doit être "simplifiée" pour prouver qu'elle vaut 1; si $n_1 = n_2 = \dots = n_N = 2$, il y aura 2^N facteurs ε et les simplifications se compliquent considérablement.

L'annexe 1 contient la preuve d'une formule explicite pour la fonction $\psi_{M/K}$ de Herbrand, si $M = F_1 F_2$, avec F_1 et F_2 extensions cycliques d'ordre p de K .

Dans l'annexe 2 on suppose que tous les groupes G_i sont égaux au groupe de Heisenberg H avec 27 éléments. On trouve une forme explicite des éléments de R_n ; l'investigation de la conjecture montre que la preuve de la conjecture dans cette situation se réduit à un seul cas, impliquant une représentation virtuelle du sixième cran.

CHAPITRE 1

Le problème et les résultats connus

RESUME. La première partie établit les notations générales et donne un ensemble de résultats sur les corps locaux, les groupes de Weil et leurs représentations virtuelles. Ensuite on donne les propriétés des constantes locales associées à ces représentations, avec quelques formules explicites de calcul, qui sont utilisées fréquemment dans le reste de la thèse. On inclut des rappels sur les λ -anneaux et la γ -filtration (avec l'exemple qui nous intéresse, l'anneau des représentations virtuelles d'un groupe topologique). Ces rappels sont indispensables à l'énoncé de la conjecture, qui est donné à la fin de ce chapitre.

ABSTRACT. The first part establishes the general notations and gives a set of results on local fields, the Weil groups and their virtual representations. Thereafter we give some properties of the local constants associated to these representations, together with some explicit formulas, which are often used throughout the thesis. Some basic facts about the λ -rings and the γ -filtration are included (with the example of interest, the λ -ring of the virtual representations of a topological group). All these facts are indispensable for the statement of the conjecture, at the end of this chapter.

1. Notations.

1.1. Soit K un corps local non archimédien (c'est-à-dire un corps valué complet par rapport à la topologie induite par la valuation, à corps résiduel fini), de caractéristique résiduelle p . Le corps K et p sont fixés dans tout ce qui suit. On rappelle qu'il y a deux possibilités :

- car $K = 0$, et alors K est isomorphe à une extension finie du corps des nombres p -adiques $\mathbb{Q}_p$;
- car $K = p > 0$, et alors K est isomorphe au corps $\mathbb{F}_q((X))$ des séries de Laurent formelles en une variable X aux coefficients dans un corps fini avec q éléments $\mathbb{F}_q$, où q est une puissance de p .

On note :

v_K : la valuation normalisée de K ;

π_K : une uniformisante (i.e. un élément de valuation 1) de K ;

A_K : l'anneau des entiers de K , c'est-à-dire $A_K = \{x \in K \mid v_K(x) \geq 0\}$;

$A_K(t) = \{x \in K \mid v_K(x) \geq t\}$, pour tout nombre réel t ; c'est un sous-groupe additif de K ;

P_K : l'idéal maximal de A_K , c'est-à-dire $P_K = \{x \in K \mid v_K(x) \geq 1\} = A_K(1)$;

$\tilde{K} = A_K/P_K$: le corps résiduel de K .

$q =$ le cardinal de $\tilde{K}$ (c'est une puissance de p) ;

$|\cdot|_K$: la valeur absolue normalisée de K (pour laquelle $|\pi_K| = q^{-1}$) ;

U_K : le groupe (multiplicatif) des unités de A_K , c'est-à-dire $U_K = \{x \in K \mid v_K(x) = 0\}$;

$U_K(t) = \{1+x \mid x \in K, v_K(x) \geq t\}$, pour tout $t > 0$; c'est un sous-groupe de U_K .

S'il n'y a pas de risque de confusion sur le corps, on pourra omettre l'indice K .

On note E l'exponentielle tronquée :

$$E(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{x^i}{i!}, \quad (1.1.1.)$$

et L le logarithme tronqué :

$$L(x) = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(-1)^{i+1} (x-1)^i}{i}. \quad (1.1.2.)$$

Pour chaque $t > 0$, E et L définissent des isomorphismes inverses l'un de l'autre :

$$A(t)/A(pt) \xrightarrow{E} U(t)/U(pt) \xrightarrow{L} A(t)/A(pt). \quad (1.1.3.)$$

1.2. Un *caractère additif* de K est un homomorphisme continu $\psi: K \rightarrow \mathbb{C}^*$ (où $\mathbb{C}^*$ est considéré avec la topologie usuelle, induite par celle de $\mathbb{C}$). On fixe un caractère additif non trivial ψ de K . Alors ([Weil], TH. II.5.3., COR.) tout caractère additif de K est de la forme $x \mapsto \psi(ax)$, avec $a \in K$. La continuité de ψ implique l'existence d'un entier $n(\psi)$, appelé l'*ordre* de ψ , tel que ψ est trivial sur $A(-n(\psi))$ et non trivial sur $A(-n(\psi) - 1)$. Si $m \in \mathbb{Z}$, $\psi(ax) = 1$ pour tout x avec $v_K(x) \geq m$ si et seulement si $v_K(a) \geq -n(\psi) - m$. ([Weil], PROP. II.5.12., p. 42). On fixe une mesure de Haar dx sur K .

1.3. Soit $\bar{K}$ une clôture algébrique séparable de K , fixée dans la suite. On sous-entendra que *toutes les extensions de K qui interviendront sont incluses dans $\bar{K}$* . Soit K^{nr} l'extension non ramifiée maximale de K dans $\bar{K}$, L une extension finie de K et E une extension de $K^{nr}L = L^{nr}$.

Le groupe de Weil $\mathbf{W}(E/L)$ est le sous-groupe de $\text{Gal}(E/L)$ formé des L -automorphismes φ de E qui ont la propriété $\varphi|_{L^{nr}} = \text{Frob}^n$, pour un $n \in \mathbb{Z}$, Frob étant l'automorphisme de Frobenius de $\text{Gal}(L^{nr}/L)$. On munit $\mathbf{W}(E/L)$ de la topologie pour laquelle le sous-groupe d'inertie $I = \text{Gal}(E/L^{nr})$ est ouvert. Alors $\mathbf{W}(E/L)$ est un groupe localement compact; I en est le seul

sous-groupe compact maximal, $\mathbf{W}(E/L)/I$ est discret et isomorphe à $\mathbf{Z}$. On note $\mathbf{W}_L$ le groupe $\mathbf{W}(\bar{K}/L)$ et on l'appelle le groupe de Weil absolu de L . Pour plus de détails, voir ([Weil], APP. II).

1.4. Pour L/K une extension galoisienne finie de groupe de Galois G , on définit les *groupes de ramification* G_n , pour n entier, $n \geq -1$: $G_n = \{\sigma \in G \mid v_L(\sigma x - x) \geq n+1, \forall x \in A_L\}$. Les G_n forment une suite décroissante de sous-groupes invariants de G , G_0 est le sous-groupe d'inertie de G et $G_n = \{1\}$ pour n assez grand. On trouvera une liste complète des propriétés des groupes de ramification, des quotients G_n/G_{n+1} , ainsi que les définitions des fonctions de Herbrand $\varphi_{L/K}$ et $\psi_{L/K}$ dans ([Serr], ch. IV). A l'aide de la fonction $\varphi_{L/K}$ on passe à la numérotation supérieure des groupes de ramification : $G^t = G_{\varphi_{L/K}(t)}$, pour tout $t \geq -1$; l'intérêt de celle-ci est qu'elle est compatible avec le passage au quotient : si E/K est une sous-extension galoisienne de L/K , alors $\text{Gal}(E/K)^t$ est l'image de $\text{Gal}(L/K)^t$ par l'homomorphisme surjectif $\text{Gal}(L/K) \rightarrow \text{Gal}(E/K)$. On écrira parfois $G(t)$ au lieu de G^t .

Pour une extension galoisienne infinie L/K , de groupe de Galois G , cette propriété permet de définir les groupes G^t par $G^t = \lim \text{proj } \text{Gal}(E/K)^t$, la limite étant prise suivant les sous-extensions galoisiennes finies E de L/K . La compatibilité avec le passage au quotient est conservée; G^0 est le groupe d'inertie de G et son pro- p -groupe de Sylow P (le groupe d'inertie sauvage) est la fermeture de la réunion des G^t pour $t > 0$. Si L contient K^{nr} , alors $\mathbf{W}(L/K) = \mathbf{W}$ contient $G^0 = \text{Gal}(L/K^{nr})$ et on peut donc poser $\mathbf{W}^t = G^t$ pour $t \geq 0$, $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}$.

1.5. Soit G un groupe topologique. Dans la suite, on appelle *représentation* de G un homomorphisme continu ρ de G dans le groupe des $\mathbf{C}$ -automorphismes d'un espace vectoriel complexe V de dimension finie : $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$. On identifiera parfois la représentation avec l'espace vectoriel sur lequel agit G , en parlant de "la représentation V ". Une représentation de G peut être interprétée aussi comme un module à gauche sur l'algèbre de groupe $\mathbf{C}[G]$, de dimension finie sur $\mathbf{C}$ et tel que l'application $(g, v) \mapsto gv$ soit continue.

Le *groupe de Grothendieck* d'une catégorie abélienne $\mathbb{A}$ se définit ainsi : on construit la classe quotient $\tilde{\mathbb{A}}$ de $\mathbb{A}$ par rapport à l'isomorphisme (qui est une relation d'équivalence sur la classe des objets de $\mathbb{A}$) et on suppose que $\tilde{\mathbb{A}}$ est un ensemble. Soit $\mathbf{Z}^{(\tilde{\mathbb{A}})} = L$ le groupe abélien libre sur l'ensemble $\tilde{\mathbb{A}}$ et $\phi : \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow L$ l'application canonique. On prend le sous-module B de L engendré par les éléments de la forme $\phi(\hat{Y}) - \phi(\hat{X}) - \phi(\hat{Z})$ pour lesquels il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$$

dans $\mathbb{A}$ (on a noté $\hat{X}$ la classe d'équivalence de l'objet X dans $\tilde{\mathbb{A}}$). Le groupe quotient L/B s'appelle le groupe de Grothendieck de la catégorie abélienne $\mathbb{A}$.

Un élément du groupe de Grothendieck $R(G)$ de la catégorie des représentations d'un groupe topologique G s'appelle *représentation virtuelle* de G . Si V est une représentation virtuelle, elle s'écrit de manière unique sous la forme $V = \sum n(U)U$, où U parcourt les

représentations irréductibles de G et $n(U) \in \mathbb{Z}$. Si $n(U)$ n'est pas nul, U est un *constituant* de V . Les constituants de V sont en nombre fini.

Vu la définition du groupe de Grothendieck $R(G)$, pour définir un homomorphisme f de $R(G)$ dans un groupe commutatif X , il faut définir $f(V)$ pour toute représentation V de G et vérifier que, pour toute suite exacte de représentations :

$$0 \rightarrow V' \rightarrow V \rightarrow V'' \rightarrow 0,$$

on a $f(V) = f(V') + f(V'')$. On définit ainsi, pour toute représentation virtuelle V :

- la *dimension* $\dim(V)$, $\dim : R(G) \rightarrow \mathbb{Z}$;
- le *déterminant* $\det(V)$, $\det : R(G) \rightarrow \text{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$;
- l'*induction* $\text{Ind}_H^G : R(H) \rightarrow R(G)$, pour H sous-groupe d'indice fini dans G ;
- la *restriction* $\text{Res}_H^G : R(G) \rightarrow R(H)$, comme restriction des scalaires de $\mathbb{C}[G]$ à $\mathbb{C}[H]$, pour tout homomorphisme $H \rightarrow G$.

1.6. Si L est une extension de K contenant K^{nr} et si V est une représentation du groupe de Weil $\mathbf{W}(L/K) = \mathbf{W}$, un argument élémentaire montre que la continuité implique l'existence d'un sous-groupe normal ouvert J du groupe d'inertie $I = \text{Gal}(L/K^{nr})$ (i.e. l'existence d'une extension galoisienne finie E de K^{nr}) tel que V est triviale sur J . Le groupe d'inertie I agit à travers le quotient fini $I/J = \text{Gal}(E/K^{nr})$. On peut donc parler de la représentation d'Artin ([Serr], CH. VI, §2.) $A_{I/J}$ du groupe I/J . On définit alors le *conducteur d'Artin* de V , $a(V)$, par la formule :

$$a(V) = \dim \text{Hom}_{\mathbb{C}[I/J]}(A_{I/J}, V)$$

Cette définition ne dépend pas du choix du sous-groupe J tel que V soit triviale sur J (voir [Deli], 4.5.). Pour V donnée, $a(V)$ ne dépend que de la restriction de V au groupe d'inertie I de $\mathbf{W}$. Une représentation de $\mathbf{W}$ est dite non ramifiée (resp. modérément ramifiée) si I (resp. P) agit trivialement, et ramifiée dans le cas contraire. Si V est non ramifiée, alors $a(V) = 0$.

Soit maintenant une représentation irréductible $\rho : \mathbf{W} \rightarrow \text{GL}(V)$. Si ρ est non ramifiée, on pose $\alpha(\rho) = 0$. Sinon, $\alpha(\rho)$ est le plus grand nombre réel u tel que $\rho(\mathbf{W}^u)$ soit non trivial. On renvoie à ([Henn], p.161) pour voir que $\alpha(\rho)$ est bien défini. Au même endroit on trouve démontrée la formule :

$$a(\rho) = (\alpha(\rho) + 1) \dim \rho, \quad (1.6.1.)$$

valable pour toute représentation irréductible ramifiée ρ de $\mathbf{W}$.

Pour toute représentation virtuelle V de $\mathbf{W}$, on note $\alpha(V)$ (resp. $\beta(V)$) le plus petit (resp. le plus grand) des $\alpha(U)$, quand U parcourt les constituants de V . Si L/K est une extension finie et M une extension galoisienne de K contenant L , on pose $\alpha(L/K) = \inf \{t \mid \text{Gal}(M/K)^t \subseteq \text{Gal}(M/L)\}$. Ceci ne dépend pas du choix de M .

1.7. On normalise l'isomorphisme $W_K^{ab} \approx K^*$ de la théorie locale du corps de classes comme dans [Deli], 2.3., p.523. Cet isomorphisme identifie $W^{ab}(t)$ à $U(t)$, pour tout t ([Serr], ch. XV, §2). On fait ainsi correspondre à une représentation V de dimension 1 de W un quasi-caractère χ de K^* . On retrouve donc $\alpha(\chi)$ comme le plus grand entier n tel que χ soit non-trivial sur $U_K(n)$. Si χ est non-ramifié ou modérément ramifié, alors $\alpha(\chi) = 0$. On dit que χ est sauvagement ramifié si $\alpha(\chi) > 0$.

Si M/K est une extension galoisienne finie de corps locaux et si L/K est une sous-extension, $G = \text{Gal}(M/K)$, $H = \text{Gal}(M/L)$, et η un quasi-caractère de H (qui correspond par la théorie locale du corps de classes à un quasi-caractère de L^* , noté toujours η), alors $\text{Ind}_L^K \eta$ est une autre notation pour $\text{Ind}_H^G \eta$.

On a la formule suivante ([Deli], PROP. 1.2.)

$$\det(\text{Ind}_H^G \rho)(x) = \varepsilon^{\dim \rho} \det(\rho)(t(x)) , \quad \forall x \in G^{ab} \quad (1.7.1.)$$

où G est un groupe, H est un sous groupe d'indice fini, ρ est une représentation virtuelle de H , ε est le déterminant de la représentation de permutation de G sur G/H et $t : G^{ab} \rightarrow H^{ab}$ est le transfert.

1.8. Si X est un ensemble fini, $|X|$ désigne son cardinal. Si X est un sous-groupe du groupe multiplicatif d'un corps, la notation $\text{mod}^* X$ après une égalité désigne une congruence modulo le sous-groupe X . On note $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1)$ le sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ formé par les racines de l'unité d'ordre une puissance de p .

2. Résultats sur les constantes locales

2.1. On cite sans modification le théorème d'existence des *constantes locales* $\varepsilon(V, \psi, dx)$ (qu'on appellera parfois *facteurs* ε) dans l'article de Deligne ([Deli], TH. 4.1., p. 535) :

THEOREME. *Il existe une et une seule fonction ε , vérifiant les conditions (1) à (4) ci-dessous, qui associe un nombre $\varepsilon(V, \psi, dx) \in \mathbb{C}^*$ à chaque classe d'isomorphisme de sextuples $(K, \bar{K}, \psi, dx, V, \rho)$ formés d'un corps local K , d'une clôture algébrique $\bar{K}$ de K , d'un caractère additif non trivial $\psi : K \rightarrow \mathbb{C}^*$, d'une mesure de Haar dx sur K , d'un espace vectoriel V de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et d'une représentation $\rho : W(\bar{K}/K) \rightarrow GL(V)$.*

(1) *Pour toute suite exacte de représentations de $W(\bar{K}/K)$*

$$0 \rightarrow V' \rightarrow V \rightarrow V'' \rightarrow 0 ,$$

on a

$$\varepsilon(V, \psi, dx) = \varepsilon(V', \psi, x) \varepsilon(V'', \psi, dx).$$

Cette condition montre que $\varepsilon(V, \psi, x)$ ne dépend que de la classe de V dans le groupe de Grothendieck des représentations de $\mathbf{W}(\bar{K}/K)$ et permet de donner un sens à $\varepsilon(V, \psi, dx)$ pour V seulement une représentation virtuelle de $\mathbf{W}(\bar{K}/K)$.

$$(2) \quad \varepsilon(V, \psi, a \, dx) = a^{\dim V} \varepsilon(V, \psi, dx), \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}_+^*.$$

En particulier, pour V virtuel de dimension 0, $\varepsilon(V, \psi, dx)$ est indépendant de dx . On le note $\varepsilon(V, \psi)$.

(3) Si L est une extension séparable finie de K dans $\bar{K}$ et que V_K est la représentation virtuelle de $\mathbf{W}(\bar{K}/K)$ induite par une représentation virtuelle de dimension zéro V_L de $\mathbf{W}(\bar{K}/L)$, on a

$$\varepsilon(V_K, \psi) = \varepsilon(V_L, \psi \circ \text{Tr}_{L/K}).$$

(4) Si $\dim V = 1$, ρ étant défini par un quasi-caractère χ de K^* , on a

$$\varepsilon(V, \psi, dx) = \varepsilon(\chi, \psi, dx)$$

□

Si χ est un quasi-caractère de K^* , alors la constante locale $\varepsilon(\chi, \psi, dx)$ est celle définie par l'équation fonctionnelle locale de Tate (voir [Deli], 3.3., p.526); cette équation permet d'obtenir la formule :

$$\varepsilon(\chi, \psi, dx) = \int_{K^*} \chi^{-1}(x) \psi(x) dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{v(x)=n} \chi^{-1}(x) \psi(x) dx. \quad (2.1.2.)$$

Si $a \in K^*$ et $V \in R(\mathbf{W})$, alors la formule ([Deli], 5.4, p. 548) :

$$\varepsilon(V, \psi(ax), dx) = \det(V)(a) |a|^{-\dim V} \varepsilon(V, \psi, dx) \quad (2.1.3.)$$

montre que, pour V de dimension zéro et de déterminant trivial, $\varepsilon(V, \psi, dx)$ ne dépend pas de ψ , ni de dx . On le note $\varepsilon(V)$.

Nous sommes intéressés par les résultats du type $\varepsilon(V \otimes W) = 1$ si V et W remplissent certaines conditions. Par exemple, la formule suivante ([Deli], 5.5.3., p. 549), valable pour W une représentation virtuelle non ramifiée

$$\varepsilon(V \otimes W) = \det W \left(\pi^{a(V) + n(\psi) \cdot \dim V} \right) \varepsilon(V, \psi, dx)^{\dim W} \quad (2.1.4.)$$

montre que $\varepsilon(V \otimes W) = 1$ si en outre $\dim W = 0$ et $\det W = 1$.

Les formules données par la proposition et les corollaires qui suivent ([De-He], PROP. 1.1. et suivantes) sont fondamentales dans nos calculs.

2.2. PROPOSITION. Soient χ et η deux quasi-caractères de K^* , vérifiant $\alpha(\eta) < \alpha(\chi)$. Soit m le plus petit entier tel que l'on ait $2m > \alpha(\chi)$ et soit a un élément de K tel que l'on ait $\chi(1+y) = \psi(ay)$ dès que l'élément y de K est de valuation au moins m . On a alors

$v_K(a) = -(n(\psi) + 1 + \alpha(\chi))$ et a est unique mod^{*} $U(\alpha(\chi)/2)$. De même, soit b un élément de K vérifiant $\eta(1+y) = \psi(by)$ dès que l'on a $v_K(y) \geq \alpha(\chi)/2$. Si l'on a $\alpha(\eta) \geq \alpha(\chi)/2$, alors $v(b)$ vaut $-(n(\psi) + 1 + \alpha(\eta))$ et b est unique mod^{*} $U(\alpha(\eta) - \alpha(\chi)/2 + 1)$; sinon, b est n'importe quel élément de K de valuation au moins $-(n(\psi) + \alpha(\chi)/2)$. On a

$$\varepsilon((\eta - 1)\chi, \psi) = \eta(a^{-1}) \cdot (\chi\eta)^{-1(1+b/a)} \cdot \psi(b) \quad (2.2.1.)$$

2.3. COROLLAIRE. Avec les notations de la proposition précédente :

(1) On a $\varepsilon((\eta - 1)\chi, \psi) = \eta(a^{-1}) \bmod^* \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1)$.

(2) Si de plus on a $\alpha(\eta) < \alpha(\chi)/2$, alors

$$\varepsilon((\eta - 1)\chi, \psi) = \eta(a^{-1}) \quad (2.3.1.)$$

2.4. COROLLAIRE. Soient χ un quasi-caractère sauvagement ramifié de K^* , m le plus petit entier tel que l'on ait $2m > \alpha(\chi)$, et a un élément de K^* tel que l'on ait $\chi(1+y) = \psi(ay)$ si $y \in K$ est de valuation au moins m . Soit $(\eta_i)_{i \in I}$ une famille finie, d'au moins deux éléments, de quasi-caractères de K^* , vérifiant $\alpha(\eta_i) < \alpha(\chi)$. On choisit des éléments b_i de K tels que $\eta_i(1+y) = \psi(b_i y)$ quand $v(y) \geq \alpha(\chi)/2$. Pour chaque partie J de I , on pose

$$\eta(J) = \prod_{j \in J} \eta_j, \quad b(J) = \sum_{j \in J} b_j, \quad \varepsilon(J) = (-1)^{|J|}. \quad (2.4.1.)$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \varepsilon\left(\chi \prod_{i \in I} (1 - \eta_i)\right) &= \\ &= (\chi\eta(I))^{-1} \left(\prod_{J \subseteq I} (1 + b(J)/a)^{\varepsilon(J)} \right) \cdot \prod_{i \in I} \eta_i \left(\prod_{J \subseteq I - \{i\}} (1 + b(J)/a)^{\varepsilon(J)} \right) \end{aligned} \quad (2.4.2.)$$

On a omis dx et ψ dans l'écriture du facteur ε parce que $\chi \prod_{i \in I} (1 - \eta_i)$ est une représentation virtuelle de dimension 0 et de déterminant 1 si $|I| \geq 2$.

2.5. Pour simplifier les notations, on pose, pour $I = \{1, \dots, N\}$ et $t(J) = \sum_{j \in J} t_j$ si $J \subseteq I$:

$$P_N(t_1, \dots, t_N) = \prod_{J \subseteq I} (1 + t(J))^{\varepsilon(J)} \quad (2.5.1.)$$

$P_N(t_1, \dots, t_N)$ est une série formelle en les indéterminées t_i à coefficients entiers. On voit tout de suite que $P_N = 1 + Q_N$, où Q_N est une série formelle divisible par $t_1 \dots t_N$. Avec ces notations, la formule (2.4.2.) devient :

$$\varepsilon\left(\chi \prod_{i \in I} (1 - \eta_i)\right) = (\chi\eta(I))^{-1}(C) \cdot \prod_{i \in I} \eta_i(H_i) \quad (2.5.2.)$$

où $C = P_N\left(\frac{b_1}{a}, \dots, \frac{b_N}{a}\right)$, $H_i = P_{N-1}\left(\frac{b_1}{a}, \dots, \frac{\hat{b}_i}{a}, \dots, \frac{b_N}{a}\right)$ (le symbole $\hat{}$ désigne l'omission du terme).

On a $v(b_i/a) \geq \alpha(\chi) - \alpha(\eta_i) > 0$ par 2.2. et donc C est de la forme $1 + D$, avec $v(D) \geq \sum_{i \in I} (\alpha(\chi) - \alpha(\eta_i))$.

Supposons que $\sum_{i \in I} (\alpha(\chi) - \alpha(\eta_i)) > \alpha(\chi)$. Alors $\chi(C) = \eta_i(C) = 1$. De plus, $\eta_i(H_i) = 1$ car en ces conditions $v(H_i - 1) > \alpha(\eta_i)$. On obtient donc $\varepsilon\left(\chi \prod_{i \in I} (1 - \eta_i)\right) = 1$.

Le raisonnement ci-dessus est en substance celui de ([De-He], PROP. 1.7.); une généralisation partielle de ce résultat est l'objet de cette thèse.

A l'aide d'une variante du théorème de Brauer (qui donne des informations sur les conducteurs des caractères et qui est applicable aux groupes de Weil) et en utilisant l'inductivité en dimension 0 des facteurs ε on peut obtenir le résultat suivant ([De-He], TH. 4.9.) :

2.6. THEOREME. *Soit V une représentation virtuelle de $\mathbf{W}$, sans constituant modéré. Soit $(W_i)_{i \in I}$ une famille finie de représentations virtuelles de dimension 0 de $\mathbf{W}$. On suppose que l'on a $\beta(W_i) < \alpha(V)$ pour tout indice i et $\sum_{i \in I} (\alpha(V) - \beta(W_i)) > \alpha(V)$. Alors on a*

$$\varepsilon((\otimes_{i \in I} W_i) \otimes V) = 1 \quad (2.6.1.)$$

On voit que ce théorème généralise le résultat du 2.5., en remplaçant χ par V et les $1 - \eta_i$ par W_i .

Les théorèmes qui suivent ([De-He], TH. 4.2. et 4.6.) donnent une généralisation de la formule (2.1.4.) et nous seront utiles dans les chapitres suivants.

2.7. THEOREME. *Soit V une représentation virtuelle de $\mathbf{W}$, sans constituant modéré.*

(i) *Il existe un élément γ de K^* , défini de façon unique mod $^* U(1)$, tel que pour toute représentation virtuelle W de $\mathbf{W}$, de dimension 0 et vérifiant $\beta(W) < \alpha(V)$, on ait*

$$\varepsilon(W \otimes V, \psi) \equiv \det W(\gamma) \bmod^* \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p(1) \quad (2.7.1.)$$

(ii) *La valuation $v_K(\gamma)$ est donnée par la formule*

$$v_K(\gamma) = a(V) + n(\psi) \cdot \dim V \quad (2.7.2.)$$

(iii) *L'unicité de γ (resp. la formule (2.7.2.)) vaut déjà si l'on suppose seulement que l'égalité (2.7.1.) est vraie quand W est de la forme $\eta - 1$, où η est un quasi-caractère modérément ramifié (resp. non-ramifié) de K^* .*

2.8. THEOREME. *Soit V une représentation virtuelle de $\mathbf{W}$, sans constituant modéré. Il existe un élément γ de K^* , défini de façon unique mod $^* U(\alpha(V)/2)$, tel que pour toute représentation virtuelle W de $\mathbf{W}$, de dimension 0 et vérifiant $\beta(W) < \alpha(V)/2$, on ait*

$$\varepsilon(W \otimes V, \psi) = \det W(\gamma) \quad (2.8.1.)$$

Cet élément est congru à celui de (2.7.1.) mod $^ U(1)$.*

3. Enoncé du problème

3.1. Rappels sur les λ -anneaux et la γ -filtration

Les définitions et les résultats cités dans cette section sont pris de ([At-Ta]), où on peut trouver tous les détails qui manquent ici.

Un λ -anneau est un anneau commutatif unifié R , muni d'une famille dénombrable d'applications $\lambda^n : R \rightarrow R$ telles que pour tous $x, y \in R$

$$(1) \quad \lambda^0(x) = 1$$

$$(2) \quad \lambda^1(x) = x$$

$$(3) \quad \lambda^n(x + y) = \sum_{i=0}^n \lambda^i(x) \lambda^{n-i}(y)$$

Si t est un indéterminée et $x \in R$, on pose

$$(4) \quad \lambda_t(x) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n(x) t^n$$

Alors (1) et (3) signifient que λ_t est un homomorphisme du groupe additif de R dans le groupe multiplicatif $1 + tR[[t]]$ des séries formelles en t de terme constant 1. La relation (2) revient à dire que λ_t est un inverse à droite de l'homomorphisme $1 + \sum_{n \geq 1} x_n t^n \mapsto x_1$; λ_t est donc un monomorphisme. Les notions de λ -idéal, λ -sous-anneau, λ -homomorphisme sont immédiates et on peut prouver les théorèmes usuels les concernant.

Le groupe $R(G)$ des représentations virtuelles d'un groupe topologique G est un λ -anneau : la multiplication correspond au produit tensoriel des représentations, l'opération λ^n correspond à la puissance extérieure Λ^n d'une représentation. C'est même un λ -anneau *spécial* (pour la définition, voir *loc.cit.*). La dimension d'une représentation définit un λ -homomorphisme $\dim : R(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ est un λ -anneau avec la λ -structure donnée par $\lambda_t(m) = (1 + t)^m$, $\forall m \in \mathbb{Z}$), dont le noyau J est un λ -idéal (appelé *idéal d'augmentation*). Jusqu'à la fin de cette section, on considère que $R = R(G)$ (bien que les résultats soient vrais pour tout λ -anneau *augmenté* avec *structure positive*).

On définit, pour tout λ -anneau R , les γ -opérations par

$$\gamma^n(x) = \lambda^n(x + n - 1) \quad (3.1.1.)$$

Si l'on pose $\gamma_t(x) = \sum_{n \geq 0} \gamma^n(x) t^n$, alors

$$\gamma_t(x) = \lambda_{\frac{t}{1-t}}(x), \quad (3.1.2.)$$

donc $\gamma_t(x + y) = \gamma_t(x) \gamma_t(y)$ et

$$\gamma^n(x + y) = \sum_{i=0}^n \gamma^i(x) \gamma^{n-i}(y). \quad (3.1.3.)$$

Ces relations ont comme conséquences immédiates :

$$(5) \quad \gamma^0(x) = 1$$

- (6) $\gamma^1(x) = x$
(7) $\gamma_t^m(m) = (1 - t)^{-m}$ pour tout m entier.
(8) $\lambda_t(x) = 1 + xt$ (i.e. x est une représentation de dimension 1) entraîne
 $\gamma_t(x - 1) = 1 + (x - 1)t$ et $\gamma^n(1 - x) = (1 - x)^n$ pour tout $n \geq 0$.

La γ -filtration $(R_n)_{n \geq 0}$ est définie par

- (9) R_n est le groupe additif engendré par les monômes de la forme $\gamma^{n_1}(x_1) \dots \gamma^{n_r}(x_r)$, où
 $x_i \in J$ et $\sum n_i \geq n$.

PROPOSITION. On a

- (10) $R_m \cdot R_n \subseteq R_{m+n}$, $\forall m, n \geq 1$;
(11) $R_0 = R$, $R_1 = J$;
(12) R_n est un λ -idéal pour tout $n \geq 1$.
(13) R_n est un γ -idéal (i.e. R_n est stable pour les opérations γ), pour tout $n \geq 1$.
(14) $R_2 = \{V \in R \mid \dim V = 0 \text{ et } \det V = 1\}$. Ce résultat est une conséquence de la démonstration de ([Fu-La], TH. III.1.7.)

On voit tout de suite que, si G est commutatif, i.e. $R(G)$ est engendré par les caractères (représentations de dimension 1) de G , alors

- (15) R_1 est le sous-groupe additif engendré par les éléments de la forme $1 - \chi$, avec χ caractère de G . En outre, $R_n = (R_1)^n$, c'est-à-dire que R_n est l'idéal engendré par l'ensemble

$$\left\{ (1 - \chi_1)^{n_1} \dots (1 - \chi_r)^{n_r} \mid \chi_1, \dots, \chi_r \text{ caractères de } G, \sum n_i \geq n \right\}$$

3.2. Enoncé du problème

P. Deligne et G. Henniart énoncent la **conjecture** suivante ([De-He], 4.10. Question):

" Soit V une représentation de $\mathbf{W}$, sans constituant modéré. Soient $(G_i)_{i \in I}$ une famille finie de quotients de $\mathbf{W}$ par des sous-groupes ouverts du groupe d'inertie $\mathbf{W}^0$ et, pour chaque indice i , β_i le dernier saut de la filtration de G_i par les groupes de ramification, en numérotation supérieure. On suppose que, pour chaque i , on a $\beta_i < \alpha(V)$. Soient $(n_i)_{i \in I}$ une famille d'entiers positifs ou nuls, et pour chaque indice i , une représentation virtuelle W_i de G_i , qui se trouve dans le n_i -ème sous-espace de la γ -filtration de l'anneau des représentations de G_i . Pour $n_i = 1$ (resp. $n_i = 2$) cela signifie que W_i est de dimension 0 (resp. de dimension 0 et de déterminant trivial).

Si on a

$$\sum_{i \in I} n_i (\alpha(V) - \beta_i) > \alpha(V), \quad (*)$$

peut-on conclure que $\varepsilon((\otimes_{i \in I} W_i) \otimes V)$ vaut 1 ? "

Remarque. Si tous les n_i valent 1, c'est le THEOREME 2.6.. Si $|I|$ vaut 1 et si n_1 vaut 2, c'est le THEOREME 2.8..

3.3. OBSERVATION. *L'inégalité (*) s'écrit de manière équivalente*

$$\sum_{i \in I} n_i \beta_i < \alpha(V) \left(-1 + \sum_{i \in I} n_i \right) \quad (**)$$

*En outre, si $m_i \geq n_i$ pour tout $i \in I$, alors on obtient comme conséquence de (**)*

$$\sum_{i \in I} m_i \beta_i < \alpha(V) \left(-1 + \sum_{i \in I} m_i \right) \quad (***)$$

puisque $\beta_i < \alpha(V)$ pour chaque i .

CHAPITRE 2

Réductions

RESUME. On rassemble d'abord quelques résultats sur la ramification, utilisés dans les preuves des réductions qui suivent et dans les calculs de valuations au ch. 3. Puis on enrichit les hypothèses de la conjecture. Ainsi on prouve qu'on peut supposer V irréductible, de dimension 1 et galoisienne, et que les G_i peuvent être supposés des p -groupes finis. Si un n_i vaut 1, alors on prouve qu'il suffit de supposer $W_i = 1 - \eta_i$, avec η_i un caractère de K^* .

ABSTRACT. First, we collect some results on ramification that we use in the reductions that follow and in the valuation computations in the third chapter. Afterwards, the hypotheses of the conjecture are enriched. Thus, we prove that we may assume that V is irreducible, 1-dimensional and its image is finite, and that any group G_i is a finite p -group. If an n_i is 1, then we prove we can take $W_i = 1 - \eta_i$, where η_i is a character of G_i .

1. Résultats sur la ramification. Normes et traces.

1.1. Pour toute extension galoisienne finie L de K , on définit la fonction de Herbrand $\varphi_{L/K}$ et son inverse $\psi_{L/K}$ (voir [Serr], ch.IV.). La propriété de transitivité $\varphi_{M/K} = \varphi_{L/K} \circ \varphi_{M/L}$ (pour M une extension galoisienne finie de L) permet d'étendre la définition de $\varphi_{L/K}$ et de $\psi_{L/K}$ à toute extension séparable finie (non nécessairement galoisienne) L/K en posant $\varphi_{L/K} = \varphi_{M/K} \circ \varphi_{M/L}^{-1}$, où M est une extension galoisienne finie de K contenant L ; ceci ne dépend pas du choix de M .

1.2. Si E/K est une extension galoisienne finie et L/K une sous extension de E/K , alors on voit facilement que pour tout $t > 0$,

$$G(E/L)(\psi_{L/K}(t)) = G(E/K)(t) \cap G(E/L). \quad (1.2.1.)$$

En passant à la limite projective, on obtient

$$\mathbf{W}_L(\psi_{L/K}(t)) = \mathbf{W}_K(t) \cap \mathbf{W}_L. \quad (1.2.2.)$$

Si maintenant V est une représentation irréductible de $\mathbf{W}_K$, alors la formule ci-dessus montre que

$$\alpha(V|_{\mathbf{W}_L}) \leq \psi_{L/K}(\alpha(V)). \quad (1.2.3.)$$

Si $\alpha(V) > \alpha(L/K)$, alors

$$\alpha(V|_{\mathbf{W}_L}) = \psi_{L/K}(\alpha(V)) \quad (1.2.4.)$$

car en cette situation, $\mathbf{W}_K(\alpha(V)) \subseteq \mathbf{W}_L$.

La formule (1.2.1.) a comme conséquence la

PROPOSITION. *Soit L une extension finie séparable de K et E une extension finie séparable de L . Alors*

$$\alpha(E/L) \leq \psi_{L/K}(\alpha(E/K)) \quad (1.2.5.)$$

1.3. PROPOSITION. ([De-He], PROP. 3.2.) *Soient L une extension finie séparable de K , M une extension finie séparable de L .*

- (i) *La fonction $\psi_{M/L}$ est convexe.*
- (ii) *Si l'extension M/L est modérée (i.e. si $\alpha(M/L)$ est nul), $\psi_{M/L}$ est linéaire. Sinon, le dernier saut de la dérivée de $\psi_{M/L}$ se produit en $\alpha(M/L)$.*
- (iii) *Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Si $t > \alpha(M/L)$, la pente de $\psi_{M/L}$ en t est l'indice de ramification e de M/L . Si $t < \alpha(M/L)$, c'est un entier de la forme e/p^k , $k \geq 1$. En conséquence, on a*

$$\psi_{M/L}(\alpha(M/L)) \leq \frac{e}{p} \alpha(M/L) \quad \square$$

1.4. Soit L une extension finie séparable de K . L'application $\mathbf{W}_L^{ab} \rightarrow \mathbf{W}_K^{ab}$ déduite de l'inclusion $\mathbf{W}_L \rightarrow \mathbf{W}_K$ correspond, par l'intermédiaire de l'application de réciprocité, à la norme $N_{L/K}: L^* \rightarrow K^*$. Si χ est un quasi caractère de $\mathbf{W}_K$ (correspondant à un quasi caractère de K^* , toujours noté χ), la restriction de χ à $\mathbf{W}_L$ correspond donc à $\chi \circ N_{L/K}$. Les formules (1.2.3.) et (1.2.4.) deviennent alors

$$\alpha(\chi \circ N_{L/K}) \leq \psi_{L/K}(\alpha(\chi)) \quad (1.4.1.)$$

et, si $\alpha(\chi) > \alpha(L/K)$,

$$\alpha(\chi \circ N_{L/K}) = \psi_{L/K}(\alpha(\chi)) \quad (1.4.2.)$$

Soit $d_{L/K}$ la valuation de l'idéal différent de L sur K et $\psi_{L/K}^\infty$ la fonction affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de pente $e = e_{L/K}$, et prenant la valeur $-d_{L/K} - 1$ en -1 . D'après [De-He], 3.3., on a

$$\mathrm{Tr}_{L/K} \left(A_L \left(\psi_{L/K}^\infty(t) \right) \right) = A_K(t) \quad (1.4.3.)$$

pour tout nombre réel t .

On en déduit que $\psi_{L/K}^\infty$ est la fonction linéaire qui coïncide avec $\psi_{L/K}$ pour t valant au moins $\alpha(L/K)$. On a donc, pour tout $t > \alpha(L/K)$,

$$\psi_{L/K}(t) + d_{L/K} + 1 = e(\alpha(L/K) + 1) \quad (1.4.4.)$$

1.5. PROPOSITION. ([De-He], PROP. 3.5., p. 104) *Soit L une extension finie séparable de K , d'indice de ramification e , et y un élément de l'idéal maximal de A_L . On a*

$$N_{L/K}(Ey) \equiv E(\mathrm{Tr}_{L/K} y) \bmod^* U_K \left(\frac{p}{e} v_L(y) \right) \quad (1.5.5.)$$

2. Réductions

On garde les notations et les hypothèses de la conjecture 3.2, ch. 1. Pour simplifier les notations, on pose $\alpha = \alpha(V)$, et on note R l'anneau des représentations virtuelles de $\mathbf{W}_K$. Soit E_i l'extension finie de K_{nr} telle que $G_i = \mathbf{W}(E_i/K)$. Si L/K est une extension galoisienne, on note $G(L/K)$ le groupe $\mathrm{Gal}(L/K)$.

2.1. REMARQUE. *Dans les conditions énoncées, $(\otimes_{i \in I} W_i) \otimes V$ est de dimension 0 et de déterminant 1, ce qui justifie l'omission de ψ et de dx dans l'écriture de ε .*

Démonstration. La formule $\det(U \otimes V) = (\det U)^{\dim V} \cdot (\det V)^{\dim U}$ (valable pour $U, V \in R$) et $\dim U = 0$, $\det U = 1$ impliquent $\dim(U \otimes V) = 0$, $\det(U \otimes V) = 1$ pour tout $V \in R$. Il suffit donc de voir que $\otimes_{i \in I} W_i$ est de dimension 0 et de déterminant 1.

Si $|I| = 1$, alors n_1 vaut au moins 2, par (*), donc $\dim W_1 = 0$, $\det W_1 = 1$.

Si $|I| \geq 2$ et il existe un indice i avec $n_i \geq 2$, on a fini. Sinon, $n_i \leq 1$, $\forall i \in I$. Alors $((\sum n_i) - 1)\alpha > \sum n_i \beta_i \geq 0 \Rightarrow \sum n_i \geq 2$, donc il y a au moins deux indices i et j avec $n_i = n_j = 1$. Alors $W_i \otimes W_j$ est de dimension 0 et de déterminant 1.

□

2.2. On peut supposer que V est irréductible.

Démonstration. V s'écrit comme combinaison linéaire de représentations irréductibles $\sum n(U)U$, avec U parcourant les représentations irréductibles tels que $n(U) \neq 0$. En outre, $\alpha(V) = \min_U \alpha(U)$. On a $\varepsilon((\otimes_I W_i) \otimes (\sum n(U)U)) = \prod \varepsilon((\otimes_I W_i) \otimes U)^{n(U)}$ et il suffit de prouver que $\varepsilon((\otimes_I W_i) \otimes U) = 1$ pour chaque U (les hypothèses de la conjecture sont vérifiées si l'on remplace V par U , avec $n(U) \neq 0$).

□

Les deux variantes suivantes du Théorème d'induction de Brauer, appliquées aux représentations des groupes de Weil, apportent des informations sur les conducteurs des caractères dont elles assurent l'existence.

2.3. PROPOSITION. ([De-He], PROP. 2.2.)

(1) Soient G un groupe fini, A un sous-groupe abélien distingué de G , et V une représentation de G . Il existe des sous-groupes H_i de G , contenant A , des caractères χ_i des H_i et des entiers n_i tels que, dans $R(G)$, on ait

$$V = \sum n_i \text{Ind}_{H_i}^G(\chi_i) . \quad (2.3.1.)$$

(2) Si l'espace V^A des points de V fixés par A est trivial, on peut choisir la décomposition de sorte que chaque χ_i soit non trivial sur A . □

2.4. COROLLAIRE. ([De-He], VARIANTE 2.3.)

Soit G un groupe, extension de $\mathbb{Z}$ par un groupe fini $G(0)$. Soient A un sous-groupe abélien distingué de G , contenu dans $G(0)$, et V une représentation de G . Il existe des sous-groupes d'indice fini H_i de G (en nombre fini), contenant A , des caractères χ_i des H_i et des entiers n_i tels que, dans $R(G)$, on ait

$$V = \sum n_i \text{Ind}_{H_i}^G(\chi_i) . \quad (2.4.1.)$$

Si V^A est nul, on peut choisir la décomposition de façon que chaque χ_i soit non-trivial sur A . □

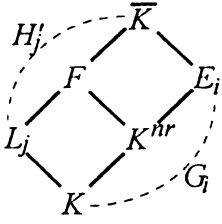
2.5. On peut supposer que $\dim V = 1$ (i.e. V est défini par un caractère χ de K^*).

Démonstration. Soit $H = I \cap \text{Ker } V$. Le sous-corps F de $\bar{K}$ fixé par H est une extension galoisienne finie de K^n . Alors V se factorise par $G = \mathbb{W}/H$, qui est une extension de $\mathbb{Z}$ par $\text{Gal}(F/K^n)$; $G(\alpha)$ est un sous-groupe abélien distingué de G . De plus, l'espace des points de V fixés par $G(\alpha)$ est l'espace nul, car le contraire impliquerait que $G(\alpha)$ agit trivialement sur V (on utilise le théorème de Clifford : [Cu-Re], TH. 49.2., p. 342) On est en mesure d'appliquer le Corollaire 2.4., qui donne

$$V = \sum m_j \text{Ind}_{H_j}^G \chi_j ,$$

où $m_j \in \mathbb{Z}$, H_j sont des sous-groupes d'indice fini de G , $G(\alpha) \subseteq H_j$ et χ_j sont des caractères de H_j tels que $\chi_j(G(\alpha)) \neq \{1\}$. Donc

$$\begin{aligned} \varepsilon((\otimes_{i \in I} W_i) \otimes V) &= \varepsilon((\otimes_{i \in I} W_i) \otimes (\sum m_j \text{Ind}_{H_j}^G \chi_j)) = \prod_j \varepsilon((\otimes_{i \in I} W_i) \otimes \text{Ind}_{H_j}^G \chi_j)^{m_j} = \\ &= \prod_j \varepsilon((\otimes_{i \in I} \text{Res}_{H_j}^G W_i) \otimes \chi_j)^{m_j} \end{aligned}$$



On a utilisé l'inductivité en dimension 0 des facteurs ε et la formule $W \otimes \text{Ind}_H^G U \equiv \text{Ind}_H^G ((\text{Res}_H^G W) \otimes U)$ (pour H sous-groupe de G , $W \in \mathbf{R}(G)$, $U \in \mathbf{R}(H)$). Il suffit de voir maintenant que $(\text{Res}_{H_j}^G W_i)_{i \in I}$ et χ_j remplissent la condition 3.2.(*), ch. 1 de la conjecture, pour chaque j fixé. Ici on considère W_i comme représentation de $\mathbf{W}$ et $\text{Res}_{H_j}^G W_i$, noté W_i' , est en fait la

restriction de W_i à $H_j' = \mathbf{W}(\bar{K}/L_j)$, où L_j est le corps fixé par H_j . On a affaire maintenant à des représentations de $\mathbf{W}(\bar{K}/L_j)$. On remarque que $\alpha(\chi_j) \geq \psi_{L_j/K}(\alpha)$ puisque χ_j est non trivial sur $\mathbf{W}_K(\alpha)$, $\mathbf{W}_K(\alpha) \subseteq H_j'$ et $\mathbf{W}_L(\psi_{L/K}(t)) = \mathbf{W}_K(t) \cap \mathbf{W}_L$ pour toute extension finie L/K . De même, $\beta(\text{Res}_{H_j}^G W_i) = \psi_{L_j/K}(\beta_i)$.

Les n_i restent les mêmes; en effet, si $H \rightarrow G$ est un homomorphisme de groupes, alors $V \in \mathbf{R}(G)_n$ implique $\text{Res}_H^G V \in \mathbf{R}(H)_n$. Il s'agit de démontrer l'inégalité (**), en remplaçant α par $\psi_{L_j/K}(\alpha)$ et β_i par $\psi_{L_j/K}(\beta_i)$. On pose $\psi = \psi_{L_j/K}$. C'est une fonction convexe, croissante, et $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$. On applique maintenant le

LEMME. Soit $\psi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, croissante, dérivable par morceaux, avec $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$. Soient N un entier positif, $\beta_i \in \mathbb{R}$, $\beta_i \geq 0$ et $n_i \geq 1$ entiers pour chaque $1 \leq i \leq N$, et $\alpha > 0$, tels que $\beta_i < \alpha$ pour tout i et $\sum n_i \beta_i < (-1 + \sum n_i) \alpha$. Alors on a $\psi(\beta_i) < \psi(\alpha)$ et $\sum n_i \psi(\beta_i) < (-1 + \sum n_i) \psi(\alpha)$.

Preuve du lemme. Puisque ψ est croissante, $\psi(\beta_i) < \psi(\alpha)$. En renumérotant éventuellement les β_i , on peut considérer que $n_i = 1$ et que $\beta_i > 0$ pour tout i . Les inégalités de l'hypothèse deviennent maintenant $\beta_i < \alpha$, $\sum \beta_i < (N - 1) \alpha$. La fonction $x \mapsto \psi(x)/x$ est croissante sur $]0, \infty[$ et on a

$$\sum_{i \in I} \psi(\beta_i) = \sum_{i \in I} \frac{\psi(\beta_i)}{\beta_i} \beta_i \leq \sum_{i \in I} \frac{\psi(\alpha)}{\alpha} \beta_i = \frac{\psi(\alpha)}{\alpha} \sum_{i \in I} \beta_i < \psi(\alpha)(N - 1)$$

où $N = |I|$. □

□

OBSERVATION. La dernière partie de la démonstration ci-dessus montre

Soient W_i , n_i et χ comme dans 2.5. Si $i \in I$ et $W_i = \text{Ind}_H^{G_i} U$, avec $H = \mathbf{W}(E_i/L)$ un sous groupe d'indice fini de G_i et $U \in \mathbf{R}(H)_1$, alors

$$\varepsilon(\text{Ind}_H^{G_i} U \otimes (\otimes_{j \neq i} W_j) \otimes \chi) = \varepsilon(U \otimes (\otimes_{j \neq i} W_j') \otimes \chi \circ N_{L/K})$$

avec W_j' représentation de $G_j' = \mathbf{W}(E_j L/L)$. On a $\alpha(\chi \circ N_{L/K}) = \psi_{L/K}(\alpha(\chi))$ et $\alpha(G_j') \leq \psi_{L/K}(\beta_j)$. On a les inégalités

$$\psi_{L/K}(\beta_j) < \psi_{L/K}(\alpha) \text{ et } \sum_{i \in I} n_i (\psi_{L/K}(\alpha) - \psi_{L/K}(\beta_i)) > \psi_{L/K}(\alpha).$$

2.6. PROPOSITION. $\varepsilon((\otimes_I W_i) \otimes V)$ est une racine de l'unité d'ordre une puissance de p .

Démonstration. Par le théorème 2.7. du ch. 1, appliqué à $\otimes_I W_i$ (noté W) et V , on a $\varepsilon(W \otimes V, \psi) \equiv \det W(\gamma) \bmod^* \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p(1)$, avec $\gamma \in K^*$. Mais on a vu que $\det W = 1$. (On a pu appliquer le théorème car $\beta(\otimes_I W_i) \leq \sup_I \beta(W_i) < \alpha$).

□

2.7. On peut supposer que chacune des représentations W_i est galoisienne (i.e. se factorise à travers un quotient fini de $\mathbf{W}$, i.e. chaque G_i est fini). De même pour V .

Démonstration. On utilise le résultat suivant ([Henn], COR. 3., p. 158) :

Toute représentation linéaire irréductible R de $\mathbf{W}$ s'écrit sous la forme $R = S \otimes \chi$, où S est galoisienne et χ est un caractère non ramifié.

Ce résultat montre qu'on peut choisir un caractère non ramifié χ de K^* , de sorte que $V \otimes \chi$ soit galoisienne. On applique le TH. 2.8. du ch. 1. aux représentations virtuelles $(\otimes_I W_i) \otimes V$ et $1 - \chi$ et on obtient

$$\varepsilon((\otimes_I W_i) \otimes V \otimes \chi) = \chi(\gamma) \varepsilon((\otimes_I W_i) \otimes V),$$

où γ est un élément de K , de valuation $a((\otimes_I W_i) \otimes V) = 0$. Par conséquent, $\chi(\gamma) = 1$ et remplacer V par $V \otimes \chi$ ne change pas la valeur du facteur ε . On a aussi $\alpha(V) = \alpha(V \otimes \chi)$; les autres hypothèses de la conjecture sont donc conservées. Ceci prouve l'assertion pour V .

On regarde maintenant W_i . On voit facilement (en regardant la définition de la γ -filtration) que chaque W_i peut être considéré de la forme $\gamma^{m_1}(x_1) \dots \gamma^{m_r}(x_r)$, avec $\sum m_j \geq n_i$ et $\dim x_i = 0$. L'idée est d'écrire chaque x_i comme une somme du type $\sum q_j y_j$, avec $q_j \in \mathbb{Z}$ et y_j irréductible; de prouver qu'on peut remplacer, si besoin est, y_j par $y_j' = y_j \otimes \chi_j$, χ_j caractère non ramifié (de sorte que y_j' soit galoisienne), sans changer la valeur du facteur ε à calculer. Dans les lemmes suivants, G est $\mathbf{W}$ ou un quotient de $\mathbf{W}$ par un sous-groupe ouvert.

LEMME 1. Si $y \in R(G)$ et χ est un caractère de G , alors $\lambda^n(y\chi) = \lambda^n(y)\chi^n$.

Pour la démonstration, voir par exemple ([Fu-La], formule I.1.3.)

□

LEMME 2. Soient $U, V \in R(G)$, avec $\dim U = 0$, V irréductible, $\dim V = 1$ et $\beta(U) < \alpha(V)$. Alors $a(U \otimes V) = 0$.

Preuve du lemme 2. On a $U = \sum n_i U_i$, avec U_i irréductible et n_i entier. Alors $a(U \otimes V) = \sum n_i a(U_i \otimes V)$. On rappelle que $a(U_i) = (\alpha(U_i) + 1) \dim U_i$. Mais on a le résultat suivant ([Henn], COR. 3.6.1., p.362, énoncé légèrement modifié) :

Soient R et S deux représentations linéaires de $\mathbf{W}$. Supposons que R, S et $R \otimes S$ sont irréductibles. Alors on a $a(R \otimes S) \leq \sup(a(S) \dim R, a(R) \dim S)$, avec égalité si $a(S) \dim R \neq a(R) \dim S$.

Il est clair que U_i, V et $U_i \otimes V$ sont irréductibles. On a donc $a(U_i \otimes V) = \sup((\alpha(U_i) + 1) \dim U_i,$

$(\alpha(V) + 1)\dim U_i = (\alpha(V) + 1)\dim U_i$ car $\alpha(U_i) \leq \beta(U) < \alpha(V)$. Puisque $0 = \dim U = \sum n_i \dim U_i$, on a $a(U \otimes V) = \sum n_i (\alpha(V) + 1)\dim U_i = 0$.

□

LEMME 3. Si $U, y \in R(G)$ et $n \in \mathbb{N}^*$ sont tels que $a(\lambda^n(y)U) = 0$ et $\dim(\lambda^n(y)U) = 0$, alors $\varepsilon(\lambda^n(y\chi)U, \psi) = \varepsilon(\lambda^n(y)U, \psi)$ et $\varepsilon(\gamma^n(y\chi)U) = \varepsilon(\gamma^n(y)U)$ pour tout caractère non-ramifié χ de G .

Preuve du lemme 3. On a $\varepsilon(\lambda^n(y\chi)U, \psi) = \varepsilon(\lambda^n(y)\chi^n U, \psi) = \chi^n(\gamma) \varepsilon(\lambda^n(y)U, \psi)$, où γ est de valuation $a(\lambda^n(y)U) + n(\psi)\dim(\lambda^n(y)U)$, qui est nul par hypothèse; donc $\chi(\gamma) = 1$.

On a $\varepsilon(\gamma^n(y\chi)U) = \varepsilon(\gamma^n(y)U)$. En effet

$$\begin{aligned} \gamma^n(y\chi) &= \lambda^n(y\chi + n - 1) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j(n-1)\lambda^{n-j}(y\chi) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \lambda^{n-j}(y\chi). \text{ Donc} \\ \varepsilon(\gamma^n(y\chi)U) &= \varepsilon\left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \lambda^{n-j}(y\chi)U, \psi\right) = \prod_{j=0}^{n-1} \varepsilon(\lambda^{n-j}(y\chi)U, \psi)^{\binom{n-1}{j}} \stackrel{(\text{par L.3})}{=} \prod_{j=0}^{n-1} \varepsilon(\lambda^{n-j}(y)U, \psi)^{\binom{n-1}{j}} \\ &= \varepsilon(\gamma^n(y)U). \end{aligned}$$

□

Fixons maintenant $s \in I$. On peut toujours supposer que $W_s = \gamma^m(y) \otimes W'$, avec $\dim y = 0$, $1 \leq m \leq n_s$ et $W' \in R(G_s)^{n_s - m}$. Soit $U = W' \otimes \left(\bigotimes_{I - \{s\}} W_i\right) \otimes V$. On peut écrire $y = \sum_{j=1}^t m_j x_j$, avec x_j irréductibles, $\dim x_j = d_j$; $\dim y = 0$ signifie que $\sum m_j d_j = 0$, donc $y = \sum_{j=1}^t m_j (x_j - d_j)$. Pour chaque j il existe un caractère non ramifié χ_j tel que $x_j \chi_j$ soit galoisienne. On a

$$\begin{aligned} \varepsilon(\bigotimes_I W_i) \otimes V &= \varepsilon(\gamma^m(y) \otimes U) = \varepsilon\left(U \otimes \sum_{i_1 + \dots + i_t = m} \gamma^{i_1}(m_1(x_1 - d_1)) \dots \gamma^{i_t}(m_t(x_t - d_t)), \psi\right) = \\ &= \varepsilon\left(U \otimes \sum_{i_1 + \dots + i_t = m} \gamma^{i_1}(m_1(x_1 - d_1)\chi_1) \dots \gamma^{i_t}(m_t(x_t - d_t)\chi_t), \psi\right) \quad (2.7.1.) \\ &= \prod_{i_1 + \dots + i_t = m} \varepsilon(\gamma^{i_1}(m_1(x_1\chi_1 - d_1 - d_1\chi_1 + d_1)) \dots \gamma^{i_t}(m_t(x_t\chi_t - d_t - d_t\chi_t + d_t))U, \psi) \end{aligned}$$

Dans ces égalités, on a appliqué le LEMME 3. Ceci est légitime, car, pour chaque j , $\dim m_j(x_j - d_j) = 0$, donc $\dim(\lambda^{i_j}(m_j(x_j - d_j))) = 0$; par le Lemme 2, on déduit que

$$a\left(U \otimes \lambda^{i_j}(m_j(x_j - d_j)) \prod_{h \neq j} \gamma^{i_h}(m_h x_h \chi_h - d_h - d_h \chi_h + d_h)\right) \text{ est nul.}$$

Fixons j entre 1 et m et soit $x = x_j$, $d = d_j$, $\chi = \chi_j$, $i = i_j$, $r = m_j$ et $U' = U \otimes \prod_{h \neq j} \gamma^{i_h}(m_h x_h \chi_h - d_h - d_h \chi_h + d_h)$. Alors

$$\varepsilon\left(\gamma^i(r(x\chi - d + d(1-\chi))) \otimes U', \psi\right) = \prod_{k=0}^i \varepsilon\left(\gamma^k(r(x\chi - d)) \gamma^{i-k}(rd(1-\chi)) \otimes U', \psi\right).$$

Dans le produit, tous les facteurs ε sont 1, à l'exception de celui qui correspond à $k = i$. C'est une conséquence du TH. 2.8. du ch. 1., qui donne la formule

$$\varepsilon(W \otimes V, \psi) = \det W(\gamma),$$

qui est applicable [avec $W = \gamma^{i-k}(rd(1-\chi))$] car $\gamma^{i-k}(rd(1-\chi))$ est de dimension 0 et non ramifiée et $\gamma^k(r(x\chi - d)) \otimes U'$ est sans constituant modéré. Si $i - k > 1$, alors $\gamma^{i-k}(rd(1-\chi))$ est de déterminant trivial, donc le facteur ε correspondant est 1. Si $i - k = 1$, alors $\det rd(1-\chi) = \chi^{-rd}$ est non-ramifié et la valuation de l'élément γ correspondant est nulle, par le Lemme 2. Il reste alors

$$\varepsilon\left(\gamma^i(r(x\chi - d + d(1-\chi))) \otimes U', \psi\right) = \varepsilon\left(\gamma^i(r(x\chi - d)) \otimes U', \psi\right)$$

La formule (2.7.1.) devient maintenant

$$\begin{aligned} \varepsilon((\otimes_I W_i) \otimes V) &= \varepsilon(\gamma^m(y) \otimes U) = \\ \prod_{i_1 + \dots + i_t = m} \varepsilon(\gamma^{i_1}(m_1(x_1\chi_1 - d_1)) \dots \gamma^{i_t}(m_t(x_t\chi_t - d_t)) U, \psi) &= \varepsilon(\gamma^m(y') \otimes U) \end{aligned}$$

avec $y' = \sum_{j=1}^t m_j x_j \chi_j$, galoisienne.

Soit maintenant $W_i = \gamma^{m_1}(x_1) \dots \gamma^{m_r}(x_r)$, avec $\sum m_j \geq n_i$ et $\dim x_i = 0$. On vient de démontrer qu'on peut remplacer (pour tout $j \leq r$) x_j par x'_j , où x'_j est galoisienne et cela ne change pas la valeur du facteur ε . Evidemment, $W'_i = \gamma^{m_1}(x'_1) \dots \gamma^{m_r}(x'_r)$ est toujours dans le n_i -ème cran de la γ -filtration de $R(G_i)$ et elle est galoisienne. Ceci achève la démonstration. $\square$

Désormais on suppose que *tous les groupes G_i sont finis.*

2.8. *Supposons que les groupes G_i sont tous abéliens. Alors $\varepsilon((\otimes_I W_i) \otimes V) = 1$.*

Démonstration. Pour un groupe abélien G , $R(G)_n$ est engendré par les produits de la forme $(1 - \chi_1)^{n_1} \dots (1 - \chi_r)^{n_r}$, avec $n_1 + \dots + n_r \geq n$ et $\chi_1, \dots, \chi_r$ caractères de G . (cf. 3.1.(15) du ch. 1.). Il faut donc prouver que

$$\varepsilon((1 - \chi_1)^{n_1} \dots (1 - \chi_r)^{n_r} \chi) = 1,$$

sous les hypothèses $\alpha(\chi) > 0$, $\alpha(\chi_i) < \alpha(\chi)$, $\sum n_i(\alpha(\chi) - \alpha(\chi_i)) > \alpha(\chi)$. Mais ceci est exactement le TH. 2.6. du ch. 1. $\square$

2.9. On peut supposer que tous les groupes G_i sont des p -groupes finis.

Démonstration. Par 2.7., il existe une extension galoisienne finie L/K telle que W_i et V se factorisent à travers $G(L/K) = G$. On note L_1 le sous-corps fixé par $G(L/K)_1$, noté G_1 . Soit P un p -sous-groupe de Sylow de G , contenant le p -groupe G_1 . On a

$$\begin{aligned} \varepsilon(\text{Res}_P^G((\otimes_I W_i) \otimes V)) &= \varepsilon(\text{Ind}_P^G \text{Res}_P^G((\otimes_I W_i) \otimes V)) = \varepsilon((\otimes_I W_i) \otimes V \otimes \text{Ind}_P^G 1_P) \\ &= \varepsilon((\otimes_I W_i) \otimes V)^m \varepsilon((\otimes_I W_i) \otimes V \otimes (\text{Ind}_P^G 1_P - m 1_G)) \end{aligned} \quad (2.9.1.)$$

où $m = [G : P]$ (on a $(m, p) = 1$). Supposons que $\varepsilon(\text{Res}_P^G((\otimes_I W_i) \otimes V)) = 1$. Alors il s'ensuit que $\varepsilon((\otimes_I W_i) \otimes V) = 1$. En effet, $\alpha((\otimes_I W_i) \otimes V) > 0$, $\beta(\text{Ind}_P^G 1_P - m 1_G) = \alpha(\text{Ind}_P^G 1_P) = 0$ car $\text{Ind}_P^G 1_P$ est la représentation de permutation de G sur G/P , dont le noyau contient G_1 ; on peut donc appliquer le TH. 2.8., qui donne

$$\varepsilon((\otimes_I W_i) \otimes V \otimes (\text{Ind}_P^G 1_P - m 1_G)) = \det(\text{Ind}_P^G 1_P)(\gamma) = \pm 1 \quad (2.9.2.)$$

avec $v(\gamma) = 0$ par la formule 2.7. Si $p > 2$, alors $\varepsilon((\otimes_I W_i) \otimes V)^m = \pm 1$, avec $(m, p) = 1$, donc $\varepsilon((\otimes_I W_i) \otimes V)^{2m} = 1$ et $(2m, p) = 1$, ce qui entraîne $\varepsilon((\otimes_I W_i) \otimes V) = 1$ car c'est une racine de l'unité d'ordre une puissance de p .

Si $p = 2$, on applique le raisonnement suivant : $\det(\text{Ind}_P^G 1_P)$ est un caractère de K^* , modérément ramifié. Mais on voit facilement que tout caractère modérément ramifié, d'ordre 2, d'un corps local de caractéristique résiduelle 2 est nécessairement non ramifié. Puisque $\gamma \in U_K$, $\det(\text{Ind}_P^G 1_P)(\gamma) = 1$; par conséquent $\varepsilon((\otimes_I W_i) \otimes V)^m = 1$ avec $(m, 2) = 1$, donc $\varepsilon((\otimes_I W_i) \otimes V) = 1$ car c'est une racine de l'unité d'ordre une puissance de 2.

□

2.10. On est en mesure d'énoncer la conjecture (3.2.) de la manière (équivalente) suivante :

" Soit χ un caractère de K , avec $\alpha(\chi) > 0$. Soient I un ensemble fini et, pour chaque indice $i \in I$, une extension E_i/K telle que $G_i = \text{Gal}(E_i/K)$ est un p -groupe fini. On note β_i le dernier saut de la filtration de G_i par les groupes de ramification, en numérotation supérieure. On suppose que, pour chaque i , on a $\beta_i < \alpha(\chi)$. Soient $(n_i)_{i \in I}$ une famille d'entiers positifs ou nuls, et pour chaque indice i , une représentation virtuelle W_i de G_i , qui se trouve dans le n_i -ième sous-espace de la γ -filtration de l'anneau des représentations de G_i .

Si on a

$$\sum_{i \in I} n_i (\alpha(\chi) - \beta_i) > \alpha(\chi),$$

peut-on conclure que $\varepsilon((\otimes_{i \in I} W_i) \otimes V)$ vaut 1 ? "



2.11. Si $n_i \geq 2$ pour un indice i , alors on peut supposer que $\beta_i \geq \alpha(V)/2$.

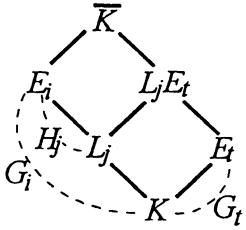
Démonstration. Si $\beta_i < \alpha(V)/2$, alors on peut appliquer le TH. 2.8., ch.1., aux représentations virtuelles W_i et $(\otimes_{I-\{i\}} W_j) \otimes V$ et on obtient que $\varepsilon((\otimes_I W_i) \otimes V) = \det W_i(\gamma) = 1$ puisque W_i est de déterminant trivial.

□

2.12. Si $n_i = 1$ pour un indice i , alors on peut supposer que $W_i = 1 - \eta_i$, avec η_i un caractère de K^* .

Démonstration. Soit E_i/K l'extension telle que $G_i = \text{Gal}(E_i/K)$. Par le théorème de Brauer, $W_i = \sum m_j \text{Ind}_{H_j}^{G_i}(1 - \eta_j)$, avec $m_j \in \mathbb{Z}$, H_j sous groupes de G_i et η_j caractère de H_j . Soit L_j le corps fixé par H_j . On a

$$\begin{aligned} \varepsilon((\otimes_I W_i) \otimes V) &= \varepsilon\left(W_i \otimes \left(\otimes_{t \neq i} W_t\right) \otimes V\right) = \prod \varepsilon^{m_j} \left(\text{Ind}_{H_j}^{G_i}(1 - \eta_j) \otimes \left(\otimes_{t \neq i} W_t\right) \otimes V \right) = \\ &= \prod \varepsilon^{m_j} \left((1 - \eta_j) \otimes \left(\otimes_{t \neq i} W_t|_{\mathbf{w}_j}\right) \otimes V|_{\mathbf{w}_j} \right) \end{aligned} \quad (2.11.1.)$$



On a désigné par $\mathbf{W}_j$ le groupe de Weil $\mathbf{W}(\overline{K}/L_j)$. Dans les hypothèses de la conjecture, on est amené à remplacer K par L_j , W_i par $1 - \eta_j$ (et G_i par H_j), W_t par $W_t|_{\mathbf{w}_j}$ (et G_t par $\text{Gal}(L_j E_t/L_j)$), V par $V|_{\mathbf{w}_j}$. L'inégalité (*) de l'hypothèse est vérifiée, avec α et β_i remplacés par $\psi_{L_j/K}(\alpha)$ et $\psi_{L_j/K}(\beta_i)$ (voir l'OBSERVATION qui suit 2.5. du ch. 1.). On remarque que, si un W_t

avec $n_t = 1$ est déjà de la forme $1 - \eta_t$, alors il est remplacé par $1 - \eta_t \circ N_{L_j/K}$. On peut donc appliquer le procédé décrit ci-dessus pour tout indice i avec $n_i = 1$ et on obtient la conclusion.

□

CHAPITRE 3

Le cas $n_i \leq 2$

RESUME. Dans les hypothèses $n_i \leq 2$ pour tout i , on prouve que les représentations virtuelles qui se trouvent dans le deuxième cran peuvent être supposées de la forme $\text{Ind}_{F_i}^K(1 - \eta_i) - (1 - \eta_i|_{K^*})$, avec F_i/K sous-extension cyclique de degré p de E_i/K et η_i un caractère de $\text{Gal}(E_i/F_i)$. Ceci permet d'appliquer des formules explicites pour le calcul des facteurs ε ; les valuations des éléments qui interviennent sont estimés au §2. On applique ces formules dans les deux cas traités par la suite et on prouve la conjecture dans ces deux cas ($n_1 = 2, n_2 = \dots = n_N = 1$ au §3 et $n_1 = n_2 = 2$ au §4).

ABSTRACT. Under the hypotheses $n_i \leq 2$ for any i , we prove that we may suppose the virtual representations W_i that belong to $R(G_i)_2$ of the form $\text{Ind}_{F_i}^K(1 - \eta_i) - (1 - \eta_i|_{K^*})$, where F_i/K is a cyclic sub-extension of E_i/K of degree p and η_i is a character of $\text{Gal}(E_i/F_i)$. This allows us to apply the explicit formulas for computing the root numbers; the valuations of the elements that arise are estimated in §2. Applying this formulas enables us to prove the conjecture in two cases: $n_1 = 2, n_2 = \dots = n_N = 1$ in §3 and $n_1 = n_2 = 2$ in §4.

1. Réduction au cas des extensions cycliques de degré p

1.1. Dorénavant on suppose que $n_i \leq 2$ pour tout i . Dans ce cas, en tenant compte des réductions démontrées, la conjecture peut s'énoncer de la façon suivante :

" Soit χ un caractère de K^* , avec $\alpha(\chi) > 0$ et N un entier positif. Posons $I = \{1, \dots, N\}$ et soit, pour chaque indice $i \in I$, une p -extension finie galoisienne E_i de K de groupe de Galois G_i . On note β_i le dernier saut de la filtration de G_i par les groupes de ramification, en numérotation supérieure. On suppose que, pour chaque i , on a $\beta_i < \alpha(\chi)$. Soit n un entier positif, $n < N$. Pour chaque indice $i \in \{1, \dots, n\}$, soit W_i une représentation virtuelle de G_i qui

se trouve dans le deuxième sous-espace de la γ -filtration de l'anneau des représentations de G_i ; pour $i \in \{n+1, \dots, N\}$, soit η_i un caractère de G_i et $W_i = 1 - \eta_i$.

Si on a

$$\sum_{i=1}^n 2(\alpha(\chi) - \beta_i) + \sum_{i=n+1}^N (\alpha(\chi) - \beta_i) > \alpha(\chi),$$

peut-on conclure que $\varepsilon((\otimes_{i \in I} W_i) \otimes \chi)$ vaut 1 ? "

Notre approche est de tenter de démontrer la conjecture ci-dessus par *récurrence sur n , le nombre de représentations dans le deuxième cran*. Pour $n = 0$, c'est la PROP. 2.6., ch. 1.

Les réductions ci-dessous apportent des hypothèses supplémentaires, utiles dans la démonstration de la conjecture. Elles doivent être interprétées de la manière suivante : si l'on démontre la conjecture dans le cas "particulier" donné par la réduction, alors la conjecture est vraie en général. Le schéma des démonstrations est : "on suppose que la conjecture est vraie dans le cas particulier de l'énoncé; on prouve que cela entraîne la validité de la conjecture en général".

1.2. Il suffit de démontrer la conjecture en supposant que pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ (i. e. $n_i = 2$), W_i est de la forme $\text{Ind}_{F_i}^K(1 - \eta_i) - (1 - \eta_i|_{K^*})$, avec F_i/K sous-extension de E_i/K et η_i un caractère de $\text{Gal}(E_i/F_i)$.

Démonstration. On remarque d'abord que, si W_i est de la forme $(1 - \sigma)(1 - \sigma')$, avec σ et σ' des caractères de K^* , alors on peut remplacer W_i par le produit des représentations virtuelles $1 - \sigma$ et $1 - \sigma'$, qui se trouvent dans le *premier* cran de la γ -filtration de G_i ; on peut alors appliquer la récurrence, n se trouvant diminué par 1.

Par le théorème de Brauer, on peut écrire

$$W_i = \sum_{j=1}^s m_j (\text{Ind}_{F_j}^K(1 - \eta_j) - (1 - \eta_j|_{K^*})) + \sum_{j=1}^s m_j (1 - \eta_j|_{K^*}), \quad (1.2.1.)$$

où $m_j \in \mathbb{Z}$, F_j/K sont des sous-extensions de E_i/K et η_j sont des caractères de $\text{Gal}(E_i/F_j)$ (qui correspondent à des caractères η_j de F_j). La condition $\det W_i = 1$ s'écrit

$$\prod_{j=1}^s \det^{m_j} (\text{Ind}_{F_j}^K(1 - \eta_j)) = 1 \quad (1.2.2.)$$

Mais la formule (1.7.1.) du **ch. 1.**, appliquée à la représentation virtuelle (de dimension 0) $1 - \eta_j$ du sous-groupe $\text{Gal}(E_i/F_j)$ de G_i , s'écrit

$$\det(\text{Ind}_{F_j}^K(1 - \eta_j))(x) = \det(1 - \eta_j|_{K^*})(x) = \eta_j^{-1}(x), \text{ pour tout } x \in K,$$

si l'on tient aussi compte du fait que l'inclusion correspond (par l'application de réciprocité) au transfert. Ainsi, (1.2.2.) devient

$$\det\left(\sum_{j=1}^s m_j (1 - \eta_j|_{K^*})\right) = \prod_{j=1}^s (\eta_j|_{K^*})^{-m_j} = 1 \quad (1.2.3.)$$

LEMME. Soient $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ des caractères de K^* et $m_1, \dots, m_s$ des entiers tels que

$$\det\left(\sum_{j=1}^s m_j(1 - \sigma_j)\right) = \prod_{j=1}^s (\sigma_j)^{-m_j} = 1$$

Alors $\sum_{j=1}^s m_j(1 - \sigma_j)$ s'écrit comme une somme de produits de la forme $\pm(1 - \sigma)(1 - \sigma')$, où σ et σ' sont des caractères de K^* .

Preuve du lemme. On peut supposer que $m_j = 1$ pour $1 \leq j \leq r$ et $m_j = -1$ pour $r+1 \leq j \leq s$. Soit $\tau_{j-r} = \sigma_j$ pour $r+1 \leq j \leq s$. Alors l'hypothèse devient $\sigma_1 \dots \sigma_r = \tau_1 \dots \tau_t$ (avec $t = s-r$) et

$$\sum_{j=1}^s m_j(1 - \sigma_j) = \sum_{j=1}^r (1 - \sigma_j) - \sum_{j=1}^t (1 - \tau_j)$$

Par la formule $(1 - \sigma) + (1 - \sigma') = (1 - \sigma\sigma') + (1 - \sigma)(1 - \sigma')$, appliquée de manière répétée, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^r (1 - \sigma_j) &= (1 - \sigma_1 \dots \sigma_r) + \\ &+ [(1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2) + (1 - \sigma_1 \sigma_2)(1 - \sigma_3) + \dots + (1 - \sigma_1 \dots \sigma_{r-1})(1 - \sigma_r)] \end{aligned}$$

et de même pour les τ_j . Donc $\sum_{j=1}^s m_j(1 - \sigma_j)$ s'écrit sous la forme

$$\sum_{j=1}^s m_j(1 - \sigma_j) = \sum \pm(1 - \sigma)(1 - \sigma'), \quad (1.2.4.)$$

avec σ et σ' caractères de K^* , car on a vu que $\sigma_1 \dots \sigma_r = \tau_1 \dots \tau_t$. □

On applique ce lemme à la somme $\sum_{j=1}^s m_j(1 - \eta_j|_{K^*})$, qui satisfait aux hypothèses du lemme. Dans ce cas, si σ est un caractère qui apparaît dans la somme (1.2.4.), $\alpha(\sigma) \leq \beta_i$ puisque σ correspond à un caractère de G_i . Donc $\varepsilon((\otimes_{j \in I} W_j) \otimes \chi)$ s'écrit, utilisant (1.2.1.), comme un produit de facteurs ε dans lesquels W_i est remplacé soit par une représentation virtuelle de la forme annoncée, soit par $\pm(1 - \sigma)(1 - \sigma')$, avec σ et σ' caractères de K^* . Mais ces derniers facteurs sont égaux à 1 par l'hypothèse de récurrence. □

1.3. Si $W_i \in R(G_i)_2$, alors on peut supposer que W_i est de la forme $\text{Ind}_{F_i}^K(1 - \eta_i) - (1 - \eta_i|_{K^*})$, avec F_i/K sous-extension cyclique de degré p de E_i/K et η_i un caractère de $\text{Gal}(E_i/F_i)$.

Démonstration. Si dans 1.2., F_i/K est une sous extension de degré p , on a fini. Sinon, puisque G_i est un p -groupe et $\text{Gal}(E_i/F_i)$ un sous groupe de G_i , il existe une sous extension galoisienne L_i de F_i/K , d'ordre p . L'existence d'un tel L_i est assurée par le raisonnement suivant.



Pour un p -groupe G et un sous groupe d'indice fini H de G , $[G : H] = p^s$, il existe pour chaque $0 \leq j \leq s$ un sous groupe H_j tel que $H \leq H_j \leq G$ et $[G : H_j] = p^j$. ([Hupp], III.7.2.e., p.301). Pour le p -groupe G_i , son sous-groupe $H = G(E_i/F_i)$ et $j = 1$, on obtient l'existence d'un sous-groupe S tel que $H \leq S \leq G$ et $[G : S] = p$. Le sous-groupe S est

alors maximal dans le p -groupe G , il est donc normal. Il correspond à une extension galoisienne L_i/K telle que $[L_i : K] = p$ et $K \subset L_i \subset F_i$.

On peut écrire (pour simplifier les notations, on omet l'indice i)

$$W = \text{Ind}_L^K \left(\text{Ind}_F^L (1 - \eta) - (1 - \eta|_{L^*}) \right) + \text{Ind}_L^K \left((1 - \eta|_{L^*}) - (1 - \eta|_{K^*}) \right)$$

Donc

$$\begin{aligned} \varepsilon(W \otimes (\otimes_{j \neq i} W_j) \otimes \chi) &= \varepsilon \left(\text{Ind}_L^K \left(\text{Ind}_F^L (1 - \eta) - (1 - \eta|_{L^*}) \right) \otimes (\otimes_{j \neq i} W_j) \otimes \chi \right) \\ &\quad \varepsilon \left(\text{Ind}_L^K \left((1 - \eta|_{L^*}) - (1 - \eta|_{K^*}) \right) \otimes (\otimes_{j \neq i} W_j) \otimes \chi \right) \end{aligned}$$

Dans le deuxième facteur ε , W_i est remplacée par une représentation de la forme annoncée et on n'a pas modifié les autres représentations. Le premier facteur ε est égal à

$$\varepsilon \left(\left(\text{Ind}_F^L (1 - \eta) - (1 - \eta|_{L^*}) \right) \otimes (\otimes_{j \neq i} W_j|_{\mathbf{w}_L}) \otimes \chi \circ N_{L/K} \right)$$

Ici on a $[F_i : L_i] = [F_i : K]/p$. Si $[F_i : L_i] = p$, on a fini; sinon on reprend le procédé avec le facteur ε ci-dessus, dans lequel l'extension F_i/K est remplacée par F_i/L_i , de degré strictement inférieur. On continue jusqu'à ce que $[F_i : L_i] = p$.

Il faut encore vérifier que $W_j|_{\mathbf{w}_L}$ et $\chi \circ N_{L/K}$ sont des représentations qui satisfont aux inégalités (*) de la conjecture (cela est garanti par l'OBSERVATION du 2.5., ch.2.); d'autre part, il faut voir que, si $W_j = \text{Ind}_{F_j}^K (1 - \eta_j) - (1 - \eta_j|_{K^*})$, avec $[F_j : K] = p$, alors $W_j|_{\mathbf{w}_L}$ est de la forme $\text{Ind}_{L_j}^L (1 - \eta_j') - (1 - \eta_j'|_{L^*})$, avec L_j extension de L , η_j' caractère de L_j^* et $[L_j : L] = p$. Cela signifie que, si W_j était déjà comme dans l'énoncé, elle le reste, c'est à dire que la manipulation décrite ici peut être appliquée successivement pour tous les $j \leq n$.

LEMME. Si L et E sont des extensions finies de K et η est un caractère d'ordre fini de E^* , alors

$$\left(\text{Ind}_E^K \eta \right)|_L = \sum_{\sigma} \text{Ind}_{L \cdot \sigma E}^L \left(\eta \circ \sigma^{-1} \circ N_{L \cdot \sigma E / \sigma E} \right), \quad (1.3.1.)$$

où la somme porte sur un système complet et indépendant de représentants σ des doubles classes de $\mathbf{w}_L \backslash \mathbf{w}_K / \mathbf{w}_E$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Théorème de Mackey à la situation indiquée, en tenant compte de la correspondance donnée par l'application de réciprocité.

□

Fixons j , $1 \leq j \leq n$ et posons $F = F_j$, $L = L_i$, $\eta = \eta_j$. Puisque $\mathbf{W}_L \triangleleft \mathbf{W}$, $\mathbf{W}_L \backslash \mathbf{W}_K / \mathbf{W}_F = \mathbf{W}_K / \mathbf{W}_L \mathbf{W}_F = \mathbf{W}_K / \mathbf{W}_{L \cap F}$. Il n'y a pas d'extension intermédiaire entre L et K , donc il y a deux possibilités: $L \cap F = K$ ou $L \cap F = L$.

i) *Cas où $L \cap F = K$.*

Dans ce cas $\mathbf{W}_K / \mathbf{W}_{L \cap F} = \mathbf{W}_K / \mathbf{W}_K = \{1\}$ et (1.3.1.) donne

$$W_j|_{\mathbf{W}_L} = \text{Ind}_{LF}^L (1 - \eta \circ N_{LF/F}) - (1 - \eta|_{K^*} \circ N_{L/K})$$

Mais $\eta|_{K^*} \circ N_{L/K} = (\eta \circ N_{LF/F})|_{L^*}$, donc la forme de W_i est préservée.

ii) *Cas où $L \subseteq F$.*

Alors $\mathbf{W}_K / \mathbf{W}_{L \cap F} = \mathbf{W}_K / \mathbf{W}_L \cong \text{Gal}(L/K)$ et on a

$$\begin{aligned} W_j|_{\mathbf{W}_L} &= \sum_{\sigma \in \text{Gal}(L/K)} \text{Ind}_{\sigma F}^L (1 - \eta \circ \sigma^{-1}) - (1 - \eta|_{K^*} \circ N_{L/K}) = \\ &= \sum_{\sigma \in \text{Gal}(L/K)} (\text{Ind}_{\sigma F}^L (1 - \eta \circ \sigma^{-1}) - (1 - \eta \circ \sigma^{-1}|_L)) + \sum_{\sigma \in \text{Gal}(L/K)} (1 - \eta \circ \sigma^{-1}|_L) - (1 - \eta|_{K^*} \circ N_{L/K}) \end{aligned} \quad (1.3.2.)$$

La première somme porte sur des représentations de la "bonne" forme et $[\sigma F : L] < [F : K]$; quant au terme

$$C = \sum_{\sigma \in \text{Gal}(L/K)} (1 - \eta \circ \sigma^{-1}|_L) - (1 - \eta|_{K^*} \circ N_{L/K}),$$

c'est une somme du type $\sum \pm (1 - \sigma)$, avec σ caractère de L^* et de déterminant $\det C = (\eta|_{K^*} \circ N_{L/K}) \cdot \prod_{\sigma \in \text{Gal}(L/K)} (\eta \circ \sigma^{-1}|_L)^{-1} = 1$; on peut alors écrire C sous la forme $\sum \pm (1 - \sigma)(1 - \sigma')$,

comme le montre le LEMME dans la démonstration de 1.2.. En remplaçant $W_j|_{\mathbf{W}_L}$ par (1.3.2.), le facteur ε correspondant à C sera alors 1, par l'hypothèse de récurrence.

□

2. Estimation des valuations

On fixe dans ce numéro un caractère additif non trivial ψ de K . La formule (2.3.1., ch. 1, fait intervenir, pour un caractère χ de K^* , un élément $a \in K$ tel que $\chi(1+x) = \psi(ax)$, pour tout $x \in K$ tel que $v(x) > \alpha(\chi)/2$. On s'intéresse à ces éléments.

2.1. PROPOSITION. *Soit χ un caractère de K^* avec $\alpha = \alpha(\chi) > 0$ et $t \in \mathbb{R}$, $\alpha/p \leq t < \alpha$. Alors il existe un élément $a \in K$ tel que*

$$\chi(\text{Ex}) = \psi(ax), \text{ pour tout } x \in K, \quad v_K(x) > t.$$

La valuation de a est $-(1 + n(\psi) + \alpha)$ et a est unique mod^{*} $U(\alpha - t)$. Si $t \leq \alpha/2$, pour a comme ci-dessus on a aussi $\chi(1+x) = \psi(ax)$, si $x \in K$, $v_K(x) > \alpha(\chi)/2$. Par ailleurs, si $y \in K$ est de valuation strictement plus grande que $\alpha(\chi)$, alors $\chi(1+x+y) = \chi(1+x)$, pour tout $x \in P_K$.

Démonstration. Soit m le plus petit entier strictement supérieur à t . Par hypothèse, χ est trivial sur $U(pm)$; la restriction de χ à $U(m)$ se factorise alors par $U(m)/U(pm)$. Puisque l'exponentielle E est un isomorphisme de $A(m)/A(pm)$ sur $U(m)/U(pm)$, on peut parler de l'homomorphisme $\chi \circ E$, défini sur $A(m)/A(pm)$. En composant avec la surjection $A(m) \rightarrow A(m)/A(pm)$, on obtient un homomorphisme additif de $A(m)$ dans C^* qui peut s'étendre en un homomorphisme additif $\varphi : K \rightarrow C^*$. Il existe alors $a \in K$ tel que $\varphi(y) = \psi(ay)$, pour tout $y \in K$. En particulier, on a $\chi \circ E(x) = \psi(ax)$, pour tout $x \in K$ vérifiant $v_K(x) > t$.

Puisque $\psi(ax) = 1$ pour tout $x \in A(\alpha+1)$, la PROP. 1.2. du ch. 1 montre que $v_K(a) \geq -(1 + n(\psi) + \alpha)$; mais χ n'est pas trivial sur $U(\alpha)$, donc il existe $x \in A(\alpha)$ tel que $\psi(ax) \neq 1$; ceci signifie que $v_K(a) < -(n(\psi) + \alpha)$ et alors $v_K(a) = -(1 + n(\psi) + \alpha)$.

Si a' satisfait à la propriété $\psi(ax) = \psi(a'x)$, pour tout $x \in K$ avec $v_K(x) > t$, alors $v_K(a - a') \geq -(n(\psi) + 1 + t)$, i.e. $\alpha^{-1}a' = \alpha^{-1}(a' - a) + 1 \in U(\alpha - t)$.

Soit y avec $v_K(y) > \alpha(\chi)$ et x avec $v_K(x) > 0$; alors $\chi\left(\frac{1+x+y}{1+x}\right) = \chi\left(1 + \frac{y}{1+x}\right) = 1$, car $v_K\left(\frac{y}{1+x}\right) = v_K(y) > \alpha(\chi)$.

Si $v_K(x) > \alpha(\chi)/2$, $Ex = 1 + x + y$, avec $v_K(y) > \alpha(\chi)$ et on applique le résultat précédent. $\square$

2.2. PROPOSITION. Soient E et L des extensions galoisiennes finies de K avec $L \supseteq E$, χ un caractère de K^* , avec $\alpha(\chi) > \alpha(L/K)$, η un caractère de $\text{Gal}(L/E)$ (on note toujours η le caractère correspondant de E^*). Soit e l'indice de ramification de l'extension E/K , $\alpha = \alpha(\chi)$, $\beta = \alpha(L/K)$. La PROP. 2.1. garantit l'existence des éléments :

- $a \in K$ tel que $\chi(Ex) = \psi(ax)$, pour tout $x \in K$, $v_K(x) > \alpha/p$;
- $a' \in E$ tel que $\chi \circ N_{E/K}(Ey) = \psi \circ \text{Tr}_{E/K}(a'y)$, pour tout $y \in E$, $v_E(y) > \psi_{E/K}(\alpha)/p$;
- $c \in E$ tel que $\eta(Ey) = \psi \circ \text{Tr}_{E/K}(cy)$, pour tout $y \in E$, $v_E(y) > \psi_{E/K}(\beta)/p$;
- $b \in K$ tel que $\eta|_{K^*}(Ex) = \psi(bx)$, pour tout $x \in K$, $v_K(x) > \beta/p$.

Alors on peut choisir ces éléments de sorte que :

- (i) $b = \text{Tr}_{E/K}(c)$;
- (ii) $v_E(a' - a) \geq -n(\psi \circ \text{Tr}_{E/K}) - \frac{e\alpha(\chi)}{p} - 1$.

Démonstration. Tout d'abord on remarque que $\alpha(\chi \circ N_{E/K}) \leq \psi_{E/K}(\alpha(\chi))$ (voir 1.4., ch. 2.) et que $\alpha(\eta) \leq \alpha(E/K) \leq \psi_{E/K}(\beta)$; le caractère $\eta|_{K^*}$ correspond à un caractère de $\text{Gal}(L/K)$, donc $\alpha(\eta|_{K^*}) \leq \beta$. L'application de la PROP. 2.1. est donc légitime.

(i) Si $x \in K$, $v_K(x) > \beta/p$, alors $v_E(x) > e\beta/p \geq \psi_{E/K}(\beta)/p$, donc

$$\psi(bx) = \eta(Ex) = \psi \circ \text{Tr}_{E/K}(cx) = \psi(\text{Tr}_{E/K}(c)x)$$

On peut choisir donc $b = \text{Tr}_{E/K}(c)$.

(ii) Soit $y \in E$, $v_E(y) > e\alpha/p$. Par la formule (1.5.5.) du ch. 2., on a $N_{E/K}(Ey) \equiv E\text{Tr}_{E/K}(y) \pmod{U_K(\alpha')}$, avec $\alpha' > \alpha$, donc $\chi \circ N_{E/K}(Ey) = \chi \circ E(\text{Tr}_{E/K}(y))$, c'est à dire $\psi \circ \text{Tr}_{E/K}(a'y) = \psi(a\text{Tr}_{E/K}(y)) = \psi(\text{Tr}_{E/K}(ay))$, puisque $v_K(\text{Tr}y) = e^{-1}v_E(\text{Tr}y) \geq e^{-1}v_E(y) > \alpha/p$. Donc $\psi \circ \text{Tr}_{E/K}((a - a')y) = 1$, pour tout $y \in E$, $v_E(y) \geq 1 + e\alpha/p$. Alors $v_E(a' - a)$ est au moins $-(n(\psi \circ \text{Tr}_{E/K}) + e\alpha/p + 1)$.

□

OBSERVATION. Dans la démonstration des divers cas de la conjecture on peut supposer, pour simplifier les calculs, que $n(\psi) = 0$, puisque $\varepsilon((\otimes_{i \in I} W_i) \otimes \chi)$ ne dépend pas du choix du caractère additif ψ . Dans ce cas, $n(\psi \circ \text{Tr}_{E/K})$ est la valuation $d_{E/K}$ de la différentielle de l'extension E/K . Ceci est une conséquence de ([Weil], COR. VIII.2.3., p.142), qui affirme que $n(\psi \circ \text{Tr}_{E/K}) = d_{E/K} + n(\psi) \cdot e_{E/K}$.

3. Le cas $n_1 = 2, n_2 = \dots = n_N = 1$

Dans ce cas, vu les réductions démontrées, le problème peut s'énoncer comme suit :

" Soit χ un caractère de K , avec $\alpha = \alpha(\chi) > 0$ et N un entier positif. Soient $I = \{1, \dots, N\}$ un ensemble fini, E_1 une extension de K telle que $G_1 = \text{Gal}(E_1/K)$ est un p -groupe fini et E/K une sous extension de E_1/K , cyclique d'ordre p . Soit η_1 un caractère de $\text{Gal}(E/E_1)$ et, pour chaque $i \in \{2, \dots, N\}$, soit η_i un caractère de K^* . On pose $\beta_1 = \alpha(E_1/K)$ et $\beta_i = \alpha(\eta_i)$, pour $i \geq 2$. On suppose que $\beta_i < \alpha(\chi)$ pour tout $i \in I$ et que

$$2(\alpha - \beta_1) + \sum_{i=2}^N (\alpha - \beta_i) > \alpha.$$

Alors $\varepsilon\left(\left(\text{Ind}_E^K(1 - \eta_1) - (1 - \eta_1|_{K^*})\right) \otimes \prod_{i \geq 2} (1 - \eta_i) \otimes \chi\right) = 1$. "

OBSERVATION. L'inégalité de l'hypothèse est équivalente à

$$\sum_{i=1}^N (\alpha - \beta_i) > \beta_1$$

On va utiliser fréquemment cette observation.

Démonstration.

3.1. Soit $\varepsilon = \varepsilon\left(\left(\text{Ind}_E^K(1 - \eta_1) - (1 - \eta_1|_{K^\star})\right) \otimes \prod_{i \geq 2} (1 - \eta_i) \otimes \chi\right)$. Alors

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\varepsilon\left(\text{Ind}_E^K(1 - \eta_1) \otimes \prod_{i \geq 2} (1 - \eta_i) \otimes \chi\right)}{\varepsilon\left((1 - \eta_1|_{K^\star}) \otimes \prod_{i \geq 2} (1 - \eta_i) \otimes \chi\right)} = \\ &= \frac{\varepsilon\left((1 - \eta_1) \otimes \prod_{i \geq 2} (1 - \eta_i \circ N_{E/K}) \otimes \chi \circ N_{E/K}\right)}{\varepsilon\left((1 - \eta_1|_{K^\star}) \otimes \prod_{i \geq 2} (1 - \eta_i) \otimes \chi\right)}. \end{aligned} \quad (3.1.1.)$$

Pour abréger, on note ψ_E la fonction de Herbrand $\psi_{E/K}$, e l'indice de ramification $e_{E/K}$ ($e = 1$ ou $e = p$), d la valuation de l'idéal différentielle de l'extension E/K , $N = N_{E/K}$, $\text{Tr} = \text{Tr}_{E/K}$. On a aussi besoin de $\gamma = \alpha(E/K)$ (évidemment, $\gamma \leq \beta_1$).

Si E/K est non ramifiée, alors $\psi_E(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Si E/K est ramifiée, alors

$$\psi_E(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq \gamma \\ pt - (p-1)\gamma & \text{si } \gamma \leq t \end{cases}$$

Notre approche est d'essayer d'appliquer la formule (2.4.2.), ch. 1, à chaque facteur ε dans la relation ci-dessus et on a donc besoin des éléments fournis par la PROP. 2.1.. En ce qui concerne les conducteurs, on a

$$\alpha(\eta_1) \leq \alpha(E_1/E) \leq \psi_E(\beta_1);$$

$$\alpha(\eta_1|_{K^\star}) \leq \alpha(E_1/K) = \beta_1, \text{ puisque } \eta_1|_{K^\star} \text{ correspond à un caractère de } \text{Gal}(E_1/K);$$

$$\alpha(\eta_i \circ N_{E/K}) \leq \psi_E(\beta_i);$$

$$\alpha(\chi \circ N_{E/K}) = \psi_E(\alpha).$$

Soient $a, b_i \in K$ ($i \in I$) et $a', c_i \in E$ ($i \in I$) tels que

$$a \in K \text{ tel que } \chi(\text{Ex}) = \psi(ax), \text{ pour tout } x \in K, v_K(x) > \alpha/p;$$

$$b_1 \in K \text{ tel que } \eta_1|_{K^\star}(\text{Ex}) = \psi(b_1x), \text{ pour tout } x \in K, v_K(x) > \beta_1/p;$$

$$b_i \in K \text{ tel que } \eta_i(\text{Ex}) = \psi(b_ix), \text{ pour tout } x \in K, v_K(x) > \beta_i/p, \text{ pour tout } i \geq 2;$$

$$a' \in E \text{ tel que } \chi \circ N_{E/K}(\text{Ey}) = \psi \circ \text{Tr}_{E/K}(a'y), \text{ pour tout } y \in E, v_E(y) > \psi_E(\alpha)/p;$$

$$c_1 \in E \text{ tel que } \eta_1(\text{Ey}) = \psi \circ \text{Tr}_{E/K}(c_1y), \text{ pour tout } y \in E, v_E(y) > \psi_{E/K}(\beta_1)/p;$$

$$c_i \in E \text{ tel que } \eta_i(\text{Ey}) = \psi \circ \text{Tr}_{E/K}(c_iy), \text{ pour tout } y \in E, v_E(y) > \psi_{E/K}(\beta_i)/p, \text{ pour tout } i \geq 2.$$

On peut prendre $b_1 = \text{Tr}_{E/K}(c_1)$ (cf. PROP. 2.2. i)).

Les valuations de ces éléments vérifient

$$v_E(a) = -e(1 + \alpha); \quad v_E(a') = -(1 + d + \psi_E(\alpha)) = -e(1 + \alpha) \text{ puisque } \alpha > \alpha(E/K);$$

$$v_E(b_1) \geq -e(1 + \beta_1); \quad v_E(c_1) \geq -(1 + d + \psi_E(\beta_1)) = -e(1 + \beta_1);$$

$$v_E(b_i) = -e(1 + \beta_i); \quad v_E(c_i) \geq -(1 + d + \psi_E(\beta_i)).$$

En fait, on a besoin plutôt des rapports $p_i = b_i/a$, $q_i = c_i/a'$ et des différences $s_i = q_i - p_i$. On estime la valuation de ceux-ci :

$$\begin{aligned} v_K(p_1) &\geq \alpha - \beta_1; & v_E(q_1) &\geq \psi_E(\alpha) - \psi_E(\beta_1) = e(\alpha - \beta_1); \\ v_K(p_i) &\geq \alpha - \beta_i; & v_K(q_i) &\geq \psi_E(\alpha) - \psi_E(\beta_i); \end{aligned} \quad (3.1.2.)$$

Soit $i \geq 2$; posons $r_i = c_i - b_i$ et $r = a' - a$. Par la PROP. 2.2., on obtient

$$v_E(r) \geq -d - \frac{e\alpha}{p} - 1 \text{ et } v_E(r_i) \geq -d - \frac{e\beta_i}{p} - 1.$$

Alors $v_E(s_i) = v_E\left(\frac{b_i + r_i}{a + r} - \frac{b_i}{a}\right) = v_E\left(\frac{r_i a - r b_i}{a(a + r)}\right) \geq \min\left(v_E\left(\frac{r_i}{a + r}\right), v_E\left(\frac{r b_i}{a(a + r)}\right)\right)$. En regardant les estimations ci-dessus, on obtient

$$v_E\left(\frac{r_i}{a + r}\right) \geq \psi_E(\alpha) - \frac{e\beta_i}{p}; \quad v_E\left(\frac{r b_i}{a(a + r)}\right) \geq \psi_E(\alpha) - \frac{e\alpha}{p} + e(\alpha - \beta_i).$$

Il est immédiat que la plus petite de ces valeurs est $\psi_E(\alpha) - \frac{e\beta_i}{p}$, donc

$$v_E(s_i) \geq \psi_E(\alpha) - \frac{e\beta_i}{p}, \text{ pour tout } i \geq 2. \quad (3.1.3.)$$

Le Lemme suivant est une conséquence directe du COR. 2.4., ch. 1., obtenue par réarrangement des facteurs.

3.2. Lemme. Avec les notations du COR. 2.4., ch. 1., et en posant $p_i = b_i/a$, on a

$$\varepsilon\left(\chi \prod_{i \in I} (1 - \eta_i)\right) = \chi^{-1} \left(\prod_{J \subseteq I} (1 + p(J))^{\varepsilon(J)} \right) \cdot \prod_{i \in I} \eta_i^{-1} \left(\prod_{i \in J \subseteq I} (1 + p(J))^{\varepsilon(J)} \right), \quad (3.2.1.)$$

où $p(J) = \sum_{j \in J} p_j$.

□

3.3. En appliquant ce lemme, la formule (3.1.1.) devient

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \chi^{-1} \left(\frac{N\left(\prod_{J \subseteq I} (1 + q(J))^{\varepsilon(J)}\right)}{\prod_{J \subseteq I} (1 + p(J))^{\varepsilon(J)}} \right) \cdot \eta_1^{-1} \left(\frac{\prod_{1 \in J \subseteq I} (1 + q(J))^{\varepsilon(J)}}{\prod_{1 \in J \subseteq I} (1 + p(J))^{\varepsilon(J)}} \right) \\ &\quad \cdot \prod_{i \in I - \{1\}} \eta_i^{-1} \left(\frac{N\left(\prod_{i \in J \subseteq I} (1 + q(J))^{\varepsilon(J)}\right)}{\prod_{i \in J \subseteq I} (1 + p(J))^{\varepsilon(J)}} \right) \end{aligned} \quad (3.3.1.)$$

Maintenant on regarde chaque facteur de cette expression.

$$3.4. \text{ On a } H_1 = \eta_1^{-1} \left(\frac{\prod_{1 \in J \subseteq I} (1 + q(J))^{\varepsilon(J)}}{\prod_{1 \in J \subseteq I} (1 + p(J))^{\varepsilon(J)}} \right) = 1.$$

Démonstration. On remarque que $v_K(p_1 \dots p_N) \geq \sum_{i \in I} (\alpha - \beta_i) > \beta_1 \geq \alpha(\eta_1|_{K^*})$ et que

$$v_E(q_1 \dots q_N) \geq \sum_{i \in I} (\psi_E(\alpha) - \psi_E(\beta_i)) > \psi_E(\beta_1) \geq \alpha(\eta_1).$$

Puisque $\prod_{J \subseteq I} (1 + t(J))^{\alpha(J)} \equiv 1 \pmod{\prod_I t_i}$, on obtient $\eta_1 \left(\prod_{J \subseteq I} (1 + p(J))^{\alpha(J)} \right) = 1$ et $\eta_1 \left(\prod_{J \subseteq I} (1 + q(J))^{\alpha(J)} \right) = 1$.

Mais $\prod_{1 \in J \subseteq I} (1 + t(J))^{\alpha(J)} \equiv \prod_{1 \notin J \subseteq I} (1 + t(J))^{-\alpha(J)} \pmod{\prod_I t_i}$, donc

$$H_1 = \eta_1^{-1} \left(\frac{\prod_{1 \notin J \subseteq I} (1 + q(J))^{-\alpha(J)}}{\prod_{1 \notin J \subseteq I} (1 + p(J))^{-\alpha(J)}} \right) = \eta_1 \left(\prod_{1 \notin J \subseteq I} \left(\frac{(1 + p(J) + s(J))}{(1 + p(J))} \right)^{\alpha(J)} \right).$$

LEMME 1. Avec les notations ci-dessus, $v_E \left(\prod_J p_j \prod_T s_t \right) > \psi_E(\beta_1)$, pour toute paire de sous-ensembles de $I - \{1\}$ avec les propriétés $J \cup T = I - \{1\}$, $J \cap T = \emptyset$, $T \neq \emptyset$.

Preuve du lemme. En tenant compte des formules (3.1.2.) et (3.1.3.),

$$v_E \left(\prod_J p_j \prod_T s_t \right) \geq \sum_J e(\alpha - \beta_j) + \sum_T \left(\psi_E(\alpha) - \frac{e\beta_t}{p} \right)$$

Si E/K est non ramifiée, il suffit de prouver que

$$\begin{aligned} & \sum_J (\alpha - \beta_j) + \sum_T \left(\alpha - \frac{\beta_t}{p} \right) > \beta_1 \\ \Leftrightarrow & (N-1)\alpha > \beta_1 + \sum_J \beta_j + \sum_T \frac{\beta_t}{p} \\ \Leftrightarrow & p(N-1)\alpha > p\beta_1 + \sum_J p\beta_j + \sum_T \beta_t \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie, si on tient compte de (***) de l'OBS. 3.3., ch. 1. et de $T \neq \emptyset$.

Si E/K est ramifiée, on doit prouver que

$$\begin{aligned} & \sum_J p(\alpha - \beta_j) + \sum_T (p\alpha - (p-1)\gamma_1 - \beta_t) > p\beta_1 - (p-1)\gamma_1 \\ \Leftrightarrow & p(N-1)\alpha > p\beta_1 - (p-1)\gamma_1 + p\sum_J \beta_j + \sum_T \beta_t + \sum_T (p-1)\gamma_1 \\ \Leftrightarrow & p(N-1)\alpha > p\beta_1 + (p-1)(|T|-1)\beta_1 + \sum_J p\beta_j + \sum_T \beta_t \end{aligned}$$

En appliquant toujours (***) de l'OBS. 3.3., ch. 1., on se rend compte que la dernière inégalité est vraie : on a

$$p + (p-1)(|T|-1) + p|J| + |T| = p(N-1) + 1$$

et $p \geq 2$, ce qui assure les hypothèses de (***) □

Ce lemme permet donc de négliger dans le calcul de H_1 les monômes divisibles par un monôme du type $\prod_J p_j \prod_T s_t$ avec $J \cup T = I - \{1\}$, $J \cap T = \emptyset$, $T \neq \emptyset$.

Changeant légèrement les notations, il faut calculer alors $\prod_{J \subseteq I} \left(\frac{(1 + p(J) + s(J))}{(1 + p(J))} \right)^{\alpha(J)} \pmod{L}$, où L est l'idéal de $\mathbb{Z}[[p_i]_I, (s_i)_I]$ engendré par $\left\{ \prod_J p_j \prod_T s_t \mid J \cup T = I, J \cap T = \emptyset, T \neq \emptyset \right\}$.

LEMME 2. Soit I un ensemble fini, $|I| = N$. Alors, dans $\mathbb{Z}[(p_i)_I, (s_i)_I]$, avec les notations ci-dessus, on a

$$f = \prod_{J \subseteq I} \left(\frac{(1 + p(J) + s(J))}{(1 + p(J))} \right)^{\varepsilon(J)} \equiv 1 \pmod{L}.$$

Preuve du lemme. Pour chaque N -uplet d'entiers positifs ou nuls $\mathbf{n} = (n_i)_I$, on pose $|\mathbf{n}| = \sum_I n_i$, $\mathbf{n}! = \prod_I n_i!$, $J(\mathbf{n}) = \{i \in I \mid n_i \neq 0\}$. Si $\mathbf{p} = (p_i)_I$, soit $\mathbf{p}^{\mathbf{n}} = \prod_I p_i^{n_i}$. Puisqu'il s'agit partout de séries à coefficients entiers, il suffit de démontrer la relation dans $\mathbb{Q}[(p_i)_I, (s_i)_I]$. On a

$$\begin{aligned} \log \prod_{J \subseteq I} (1 + t(J))^{\varepsilon(J)} &= \sum_{J \subseteq I} \varepsilon(J) \log(1 + t(J)) = \sum_{J \subseteq I} \varepsilon(J) \sum_{n > 0} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t(J)^n \\ &= \sum_{n > 0} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{J \subseteq I} \varepsilon(J) t(J)^n \end{aligned}$$

Mais on a

$$\sum_{J \subseteq I} \varepsilon(J) t(J)^n = \sum_{J \subseteq I} \varepsilon(J) \sum_{|\mathbf{n}|=n, J(\mathbf{n}) \subseteq J} \frac{|\mathbf{n}|!}{\mathbf{n}!} \mathbf{t}^{\mathbf{n}} = \sum_{|\mathbf{n}|=n} \frac{|\mathbf{n}|!}{\mathbf{n}!} \mathbf{t}^{\mathbf{n}} \sum_{J(\mathbf{n}) \subseteq J \subseteq I} \varepsilon(J) = \sum_{|\mathbf{n}|=n, J(\mathbf{n})=I} \frac{|\mathbf{n}|!}{\mathbf{n}!} \mathbf{t}^{\mathbf{n}} (-1)^N$$

Donc

$$\log \prod_{J \subseteq I} (1 + t(J))^{\varepsilon(J)} = \sum_{n > 0} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{|\mathbf{n}|=n, J(\mathbf{n})=I} \frac{|\mathbf{n}|!}{\mathbf{n}!} \mathbf{t}^{\mathbf{n}} (-1)^N = \sum_{J(\mathbf{n})=I} (-1)^{N+|\mathbf{n}|-1} \frac{(|\mathbf{n}|-1)!}{\mathbf{n}!} \mathbf{t}^{\mathbf{n}}$$

Revenant à f :

$$\log f = \sum_{J(\mathbf{n})=I} (-1)^{N+|\mathbf{n}|-1} \frac{(|\mathbf{n}|-1)!}{\mathbf{n}!} ((\mathbf{p} + \mathbf{s})^{\mathbf{n}} - \mathbf{p}^{\mathbf{n}})$$

Mais $(\mathbf{p} + \mathbf{s})^{\mathbf{n}} - \mathbf{p}^{\mathbf{n}} = (p_1 + s_1)^{n_1} \cdots (p_N + s_N)^{n_N} - p_1^{n_1} \cdots p_N^{n_N}$ est un élément de L si $n_i \geq 1$ pour chaque i . Alors

$$f = \exp \log f \equiv 1 \pmod{L}$$

Ce LEMME, combiné avec le LEMME 1, permet de conclure.



□

□

$$3.5. \text{ Pour } i \geq 2, \text{ on a } H_i = \eta_i^{-1} \left(\frac{N \left(\prod_{i \in J \subseteq I} (1 + q(J))^{\varepsilon(J)} \right)}{\prod_{i \in J \subseteq I} (1 + p(J))^{\varepsilon(J)}} \right) = 1.$$

Démonstration. On remarque d'abord que $\prod_{i \in J \subseteq I} (1 + t(J))^{\varepsilon(J)} \equiv 1 \pmod{\left(\prod_{i \neq j \in I} t_j \right)}$. Ceci découle

du fait que le produit devient identiquement 1 chaque fois qu'on pose $t_j = 0$ pour $j \neq i$.

On peut donc écrire $\prod_{i \in J \subseteq I} (1 + t(J))^{\varepsilon(J)} = 1 + \sum_{\substack{n_i \geq 0 \\ n_j \geq 1, j \neq i}} d_n t^n$, avec d_n entier pour tout

$n = (n_1, \dots, n_N)$ avec $n_j \geq 1$ si $j \neq i$.

Pour un tel n , on a

$$v_K \left(\prod_{j \neq i} p_j^{n_j} \right) \geq \sum_{j \neq i} n_j (\alpha - \beta_j) \geq \sum_{j \neq i} (\alpha - \beta_j) > \frac{\beta_i}{2} \geq \frac{\alpha(\eta_i)}{2}$$

En effet, $\sum_{j \neq i} (\alpha - \beta_j) > \frac{\beta_i}{2}$ équivaut à $\alpha - \beta_i + \sum_{j \neq i} 2(\alpha - \beta_j) > \alpha$, vraie par hypothèse.

Donc $\prod_{i \in J \subseteq I} (1 + p(J))^{\varepsilon(J)} = 1 + \sum_{\substack{n_i \geq 0 \\ n_j \geq 1, j \neq i}} d_n p^n$, où $\sum_{\substack{n_i \geq 0 \\ n_j \geq 1, j \neq i}} d_n p^n$ est de valuation strictement supérieure à $\alpha(\eta_i)/2$. Ceci nous autorise à écrire

$$\begin{aligned} \eta_i \left(\prod_{i \in J \subseteq I} (1 + p(J))^{\varepsilon(J)} \right) &= \eta_i \left(1 + \sum_{\substack{n_i \geq 0 \\ n_j \geq 1, j \neq i}} d_n p^n \right) = \psi \left(b_i \sum_{\substack{n_i \geq 0 \\ n_j \geq 1, j \neq i}} d_n p^n \right) \\ &\stackrel{1}{=} \psi \left(b_1 \sum_{\substack{n_i \geq 0 \\ n_j \geq 1, j \neq i}} d_n p_i p_1^{n_1-1} p_2^{n_2} \dots p_N^{n_N} \right) \stackrel{2}{=} \psi \circ \text{Tr} \left(c_1 \sum_{\substack{n_i \geq 0 \\ n_j \geq 1, j \neq i}} d'_n p^n \right), \text{ avec } d'_n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Dans l'égalité 1 on a utilisé $p_i = b_i/a$ et le fait que $n_1 \geq 1$. Pour l'égalité 2 on se rappelle que $b_1 = \text{Tr } c_1$. La dernière somme porte sur des monômes divisibles par $p_2 \dots p_N$.

On applique le même procédé à $\eta_i \circ N$:

$$v_K \left(\prod_{j \neq i} q_j^{n_j} \right) \geq \sum_{j \neq i} n_j (\psi_E \alpha - \psi_E \beta_j) > \frac{\psi_E \beta_i}{2} \geq \frac{\alpha(\eta_i \circ N)}{2}, \text{ donc on peut écrire :}$$

$$\begin{aligned} \eta_i \circ N \left(\prod_{i \in J \subseteq I} (1 + q(J))^{\varepsilon(J)} \right) &= \eta_i \circ N \left(1 + \sum_{\substack{n_i \geq 0 \\ n_j \geq 1, j \neq i}} d_n q^n \right) = \psi \circ \text{Tr} \left(c_i \sum_{\substack{n_i \geq 0 \\ n_j \geq 1, j \neq i}} d_n q^n \right) = \\ &= \psi \circ \text{Tr} \left(c_1 \sum_{\substack{n_i \geq 0 \\ n_j \geq 1, j \neq i}} d'_n q^n \right), \text{ avec les mêmes } d'_n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Si on fait le rapport des deux valeurs, on obtient

$$H_i = \psi \circ \text{Tr} \left(-c_1 \sum_{\substack{n_1 \geq 0 \\ n_j \geq 1, j \neq 1}} d'_n (\mathbf{q}^n - \mathbf{p}^n) \right)$$

Chaque terme de la somme est une combinaison linéaire de monômes divisibles par un monôme de la forme $\prod_J p_j \prod_T s_t$, avec $J \cup T = I - \{1\}$, $J \cap T = \emptyset$, $T \neq \emptyset$. Les deux lemmes du paragraphe précédent montrent que ces monômes sont de valuation supérieure à $\psi_E(\beta_1) + 1$. Pour voir que $H_i = 1$, il reste à prouver que

$$1 + v_E(c_1) + \psi_E(\beta_1) \geq -d \Leftrightarrow 1 + \psi_E(\beta_1) - 1 - d - \psi_E(\beta_1) \geq -d, \text{ évident.}$$

□

$$\mathbf{3.6. On a } H = \chi^{-1} \left(\frac{N \left(\prod_{J \subseteq I} (1 + q(J))^{\varepsilon(J)} \right)}{\prod_{J \subseteq I} (1 + p(J))^{\varepsilon(J)}} \right) = 1.$$

Démonstration. On peut écrire

$$\prod_{J \subseteq I} (1 + t(J))^{\varepsilon(J)} = 1 + \sum_{J(\mathbf{n})=I} h_{\mathbf{n}} \mathbf{t}^{\mathbf{n}}, \text{ avec } h_{\mathbf{n}} \in \mathbb{Z}.$$

Par ailleurs

$$v_K \left(\prod_I p_i^{n_i} \right) \geq \sum_I n_i (\alpha - \beta_i) \geq \sum_I (\alpha - \beta_i) > \frac{\alpha}{2},$$

comme on peut immédiatement se rendre compte en multipliant par 2; de façon analogue,

$$v_E \left(\prod_I q_i^{n_i} \right) \geq \sum_I n_i (\psi_E \alpha - \psi_E \beta_i) \geq \sum_I (\psi_E \alpha - \psi_E \beta_i) > \frac{\psi_E \alpha}{2} = \frac{\alpha(\chi \circ N)}{2}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} H &= \psi \left(a \sum_{J(\mathbf{n})=I} h_{\mathbf{n}} \mathbf{p}^{\mathbf{n}} - \text{Tr} \left(a' \sum_{J(\mathbf{n})=I} h_{\mathbf{n}} \mathbf{q}^{\mathbf{n}} \right) \right) \\ &= \psi \left(b_1 \sum_{J(\mathbf{n})=I} h_{\mathbf{n}} p_1^{n_1-1} p_2^{n_2} \cdots p_N^{n_N} - \text{Tr} \left(c_1 \sum_{J(\mathbf{n})=I} h_{\mathbf{n}} q_1^{n_1-1} q_2^{n_2} \cdots q_N^{n_N} \right) \right) \\ &= \psi \left(\text{Tr} \left(c_1 \sum_{J(\mathbf{n})=I} h_{\mathbf{n}} (p_1^{n_1-1} p_2^{n_2} \cdots p_N^{n_N} - q_1^{n_1-1} q_2^{n_2} \cdots q_N^{n_N}) \right) \right) \end{aligned}$$

Mais l'expression ci-dessus est du même type que H_i dans le n° précédent. H vaut donc 1, par le même argument.

□

La démonstration est maintenant complète.

4. Le cas $N = 2$, $n_1 = n_2 = 2$

Dans ce cas, le problème devient :

" Soit χ un caractère de K , avec $\alpha = \alpha(\chi) > 0$. Pour chaque $i \in \{1, 2\}$, on considère : E_i une extension de K telle que $G_i = \text{Gal}(E_i/K)$ est un p -groupe fini, F_i/K une sous extension de E_i/K , cyclique d'ordre p et η_i un caractère de $\text{Gal}(E/F_i)$. On pose $\beta_i = \alpha(E_i/K)$ et

$$W_i = \text{Ind}_{F_i}^K (1 - \eta_i) - (1 - \eta_i|_{K^*})$$

On suppose $\beta_i < \alpha(\chi)$ pour tout $i \in \{1, 2\}$ et

$$2(\alpha - \beta_1) + 2(\alpha - \beta_2) > \alpha.$$

Alors $\varepsilon(W_1 \otimes W_2 \otimes \chi) = 1$."

Démonstration.

On note $\gamma_i = \alpha(F_i/K)$; évidemment, $\gamma_i \leq \beta_i$. On distingue deux cas : $F_1 = F_2$ ou $F_1 \neq F_2$ (on rappelle que toutes les extensions considérées sont des sous extensions de $\bar{K}$).

4.1. Cas $F_1 \neq F_2$

Cela entraîne $F_1 \cap F_2 = K$. Soit $M = F_1 F_2$. On a

$$\varepsilon(W_1 \otimes W_2 \otimes \chi) = \frac{\varepsilon(\text{Ind}_{F_1}^K (1 - \eta_1) \otimes \text{Ind}_{F_2}^K (1 - \eta_2) \otimes \chi) \varepsilon((1 - \eta_1|_{K^*}) \otimes (1 - \eta_2|_{K^*}) \otimes \chi)}{\varepsilon(\text{Ind}_{F_1}^K (1 - \eta_1) \otimes (1 - \eta_2|_{K^*}) \otimes \chi) \varepsilon((1 - \eta_1|_{K^*}) \otimes \text{Ind}_{F_2}^K (1 - \eta_2) \otimes \chi)} \quad (4.1.1.)$$

Maintenant on utilise l'inductivité en dimension 0 des constantes locales et la formule

$$(\text{Ind}_H^G U) \otimes W = \text{Ind}_H^G (U \otimes \text{Res}_H^G W),$$

avec $U = 1 - \eta_1$, $W = \text{Ind}_{F_2}^K (1 - \eta_2) \otimes \chi$, pour calculer $\varepsilon(\text{Ind}_{F_1}^K (1 - \eta_1) \otimes \text{Ind}_{F_2}^K (1 - \eta_2) \otimes \chi)$.

$$\begin{aligned} \varepsilon(\text{Ind}_{F_1}^K (1 - \eta_1) \otimes \text{Ind}_{F_2}^K (1 - \eta_2) \otimes \chi) &= \\ \varepsilon((1 - \eta_1) \otimes \text{Ind}_M^{F_1} (1 - \eta_2 \circ N_{M/F_2}) \otimes \chi \circ N_{F_1/K}) & \end{aligned} \quad (4.1.2.)$$

On a fait usage des égalités suivantes (on passe au langage des groupes de Weil) :

$$\text{Res}_{W_{F_1}}^{W_K} \left(\text{Ind}_{W_{F_2}}^{W_K} (1 - \eta_2) \right) = \text{Ind}_{W_{F_2} \cap W_{F_1}}^{W_{F_1}} \left((1 - \eta_2)|_{W_{F_2} \cap W_{F_1}} \right) = \text{Ind}_{W_M}^{W_{F_1}} (1 - \eta_2|_{W_M})$$

Ces égalités sont une conséquence de la formule (1.3.1.). Le dernier terme de l'égalité ci-dessus s'écrit aussi $\text{Ind}_M^{F_1} (1 - \eta_2 \circ N_{M/F_2})$. On continue avec la formule (4.1.2.) :

$$\begin{aligned} \varepsilon((1 - \eta_1) \otimes \text{Ind}_M^{F_1} (1 - \eta_2 \circ N_{M/F_2}) \otimes \chi \circ N_{F_1/K}) &= \\ \varepsilon((1 - \eta_1 \circ N_{M/F_1}) (1 - \eta_2 \circ N_{M/F_2}) \chi \circ N_{M/K}) & \end{aligned}$$

Si l'on emploie la même méthode pour les autres facteurs ε , la formule (4.1.1.) s'écrit

finalement

$$\begin{aligned} \varepsilon(W_1 \otimes W_2 \otimes \chi) &= \\ &= \frac{\varepsilon((1 - \eta_1 \circ N_{M/F_1})(1 - \eta_2 \circ N_{M/F_2})\chi \circ N_{M/K}) \cdot \varepsilon((1 - \eta_1|_{K^*})(1 - \eta_2|_{K^*})\chi)}{\varepsilon((1 - \eta_1)(1 - \eta_2|_{K^* \circ N_{F_1/K}})\chi \circ N_{F_1/K}) \cdot \varepsilon((1 - \eta_1|_{K^* \circ N_{F_2/K}})(1 - \eta_2)\chi \circ N_{F_2/K})} \end{aligned} \quad (4.1.3.)$$

Pour chaque facteur ε intervenant ci-dessus, on applique la formule (2.4.2.), ch. 1. D'abord, fixons les éléments associés aux divers caractères par la PROP. 2.2.. Pour simplifier, on note $N_i = N_{F_i/K}$, $\text{Tr}_i = \text{Tr}_{F_i/K}$, $e_i = e_{F_i/K}$, $\psi_M = \psi_{M/K}$, $\text{Tr}_M = \text{Tr}_{M/K}$ et ainsi de suite.

Soient alors :

K :

$a \in K$ tel que $\chi(Ex) = \psi(ax)$, pour tout $x \in K$, $v_K(x) > \alpha/p$;

$b_i \in K$ tel que $\eta_i|_{K^*}(Ex) = \psi(b_i x)$, pour tout $x \in K$, $v_K(x) > \beta_i/p$;

F_i :

$a_i \in F_i$ tel que $\chi \circ N_i(Ey) = \psi \circ \text{Tr}_i(a_i y)$, pour tout $y \in F_i$, $v_i(y) > \psi_i(\alpha)/p$;

$c_{ii} \in F_i$ tel que $\eta_i(Ey) = \psi \circ \text{Tr}_i(c_{ii} y)$, pour tout $y \in F_i$, $v_i(y) > \psi_i(\beta_i)/p$;

si $j \neq i$, $c_{ij} \in F_i$ tel que $\eta_j|_{K^* \circ N_i}(Ey) = \psi \circ \text{Tr}_i(c_{ij} y)$, pour tout $y \in F_i$, $v_i(y) > \psi_i(\beta_j)/p$;

M :

$a' \in M$ tel que $\chi \circ N_M(Ey) = \psi \circ \text{Tr}_M(a' y)$, pour tout $y \in M$, $v_M(y) > \psi_M(\alpha)/p$;

$c_i \in M$ tel que $\eta_i \circ N_{M/F_i}(Ey) = \psi \circ \text{Tr}_M(c_i y)$, pour tout $y \in M$, $v_M(y) > \psi_M(\beta_i)/p$;

Les valuations de ces éléments vérifient

K :

$\chi : v_K(a) = -(1 + \alpha)$,

$\eta_i|_{K^*} : v_K(b_i) \geq -(1 + \beta_i)$,

F_i :

$\chi \circ N_i : v_i(a_i) = -(1 + d_i + \psi_i(\alpha)) = -e_i(1 + \alpha)$;

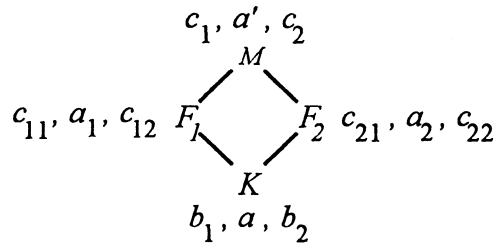
$\eta_i : v_i(c_{ii}) \geq -(1 + d_i + \psi_i(\beta_i)) = -e_i(1 + \beta_i)$;

$\eta_j|_{K^* \circ N_i} : v_i(c_{ij}) \geq -(1 + d_i + \psi_i(\beta_j))$;

M :

$\chi \circ N_M : v_M(a') = -(1 + d_{M/K} + \psi_M(\alpha)) = -e_M(1 + \alpha)$;

$\eta_i \circ N_{M/F_i} : v_M(c_i) \geq -(1 + d_M + \psi_M(\beta_i))$;



REMARQUE 1. $\eta_j \circ N_{M/F_j} = \eta_j|_{K^\bullet} \circ N_{F_i/K}$. Cela implique qu'on peut prendre $\text{Tr}_{M/F_i}(c_j) = c_{ij}$. On fait un tel choix.

REMARQUE 2. De même, on prend $b_i = \text{Tr}_{F_i/K}(c_{ii})$.

REMARQUE 3. Si on pose $r_i = a_i - a$, $r'_i = a' - a_i$, $t_i = c_i - c_{ii}$, $s_j = c_{ji} - b_i$ pour $i \neq j$, on a, d'après la PROP. 2.2.,

$$v_i(r_i) \geq -d_i - \frac{e_i \alpha}{p} - 1; \text{ donc } v_M(r_i) \geq -e_{M/F_i} d_i - \frac{e_M \alpha}{p} - e_{M/F_i} \geq -d_M - \frac{e_M \alpha}{p} - 1$$

$$v_j(s_j) \geq -d_j - \frac{e_j \beta_i}{p} - 1$$

$$v_M(r'_i) \geq -d_{M/K} - \frac{e_{M/F_i}}{p} \psi_i(\alpha) - 1; \text{ aussi } v_M(r'_i) \geq -d_{M/K} - \frac{e_M \alpha}{p} - 1$$

$$v_M(t_i) \geq -d_{M/K} - \frac{e_{M/F_i}}{p} \psi_i(\beta_i) - 1$$

Pour évaluer $v_M(r_i)$, on a utilisé les relations $d_{M/K} = d_{M/F} + e_{M/F} \cdot d_{F/K}$, $e_{M/F} = e_{M/F} \cdot e_{F/K}$ et $d_{M/F} \geq e_{M/F} - 1$, valables pour toute sous-extension F de M/K . (voir par exemple [Weil], VIII.1.1., VIII.1.4.). Pour la deuxième estimation de $v_M(r'_i)$, on regarde (iii) de la PROP. 1.3., ch. 2., qui donne $\psi_i(\alpha) \leq e_i \alpha$, puisque $\alpha > \alpha(F_i/K)$.

Avec la notation (2.5.1.) du ch. 1 et après l'application du COR. 2.4., ch. 1., la relation (4.1.3.) devient maintenant

$$\varepsilon(W_1 \otimes W_2 \otimes \chi) = \eta_1 \left(N_{M/F_1} \left(P_2^{-1} \left(\frac{c_1}{a'}, \frac{c_2}{a'} \right) \right) \cdot P_2^{-1} \left(\frac{b_1}{a}, \frac{b_2}{a} \right) \cdot P_2 \left(\frac{c_{11}}{a_1}, \frac{c_{12}}{a_1} \right) \cdot N_2 \left(P_2 \left(\frac{c_{21}}{a_2}, \frac{c_{22}}{a_2} \right) \right) \right). \quad (H_1)$$

$$\eta_2 \left(N_{M/F_2} \left(P_2^{-1} \left(\frac{c_1}{a'}, \frac{c_2}{a'} \right) \right) \cdot P_2^{-1} \left(\frac{b_1}{a}, \frac{b_2}{a} \right) \cdot N_1 \left(P_2 \left(\frac{c_{11}}{a_1}, \frac{c_{12}}{a_1} \right) \right) \cdot P_2 \left(\frac{c_{21}}{a_2}, \frac{c_{22}}{a_2} \right) \right). \quad (H_2)$$

$$\chi \left(N_{M/K} \left(P_2^{-1} \left(\frac{c_1}{a'}, \frac{c_2}{a'} \right) \right) \cdot P_2^{-1} \left(\frac{b_1}{a}, \frac{b_2}{a} \right) \cdot N_1 \left(P_2 \left(\frac{c_{11}}{a_1}, \frac{c_{12}}{a_1} \right) \right) \cdot N_2 \left(P_2 \left(\frac{c_{21}}{a_2}, \frac{c_{22}}{a_2} \right) \right) \right). \quad (H)$$

$$\eta_1 \left(N_{M/F_1} \left(1 + \frac{c_2}{a'} \right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{b_2}{a} \right) \cdot \left(1 + \frac{c_{12}}{a_1} \right) \cdot N_2 \left(1 + \frac{c_{22}}{a_2} \right) \right). \quad (G_1)$$

$$\eta_2 \left(N_{M/F_2} \left(1 + \frac{c_1}{a'} \right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{b_1}{a} \right) \cdot N_2 \left(1 + \frac{c_{21}}{a_2} \right) \cdot \left(1 + \frac{c_{11}}{a_1} \right) \right). \quad (G_2)$$

1. On a $H_1 = H_2 = 1$.

Preuve. On écrit $P_2 \left(\frac{c_1}{a'}, \frac{c_2}{a'} \right) = 1 + \sum_{n_i \geq 1} p_{n_1, n_2} \left(\frac{c_1}{a'} \right)^{n_1} \left(\frac{c_2}{a'} \right)^{n_2}$ (avec $p_{ij} \in \mathbb{Z}$ pour tous i, j). Les

entiers p_{ij} (au moins pour des petites valeurs de i, j) peuvent être effectivement calculés, mais leur valeur n'est pas essentielle. On s'aperçoit que

$$v_M \left(\left(\frac{c_1}{a'} \right)^{n_1} \left(\frac{c_2}{a'} \right)^{n_2} \right) \geq n_1 (\psi_M(\alpha) - \psi_M(\beta_1)) + n_2 (\psi_M(\alpha) - \psi_M(\beta_2)).$$

Cette quantité est strictement plus grande que $\psi_{\Lambda\Lambda}(\beta_1)$ si $n_2 \geq 2$, et strictement supérieure à $\psi_{\Lambda\Lambda}(\alpha)/2$ en tout cas. Puisque $\psi_{\Lambda\Lambda}(\alpha)/2 > \alpha(\eta_1 \circ N_{M/F_1})/2$, on peut écrire

$$\eta_1\left(N_{M/F_1}\left(P_2^{-1}\left(\frac{c_1}{a'}, \frac{c_2}{a'}\right)\right)\right) = \psi \circ \text{Tr}_M\left(c_1 \sum_{n_1 \geq 1} p_{n_1,1} \left(\frac{c_1}{a'}\right)^{n_1} \frac{c_2}{a'}\right)$$

On a négligé les termes avec $n_2 \geq 2$ puisqu'ils sont de valuation supérieure à $\alpha(\eta_1 \circ N_{M/F_1})$.

La même remarque s'applique aux termes $P_2\left(\frac{b_1}{a}, \frac{b_2}{a}\right)$, $P_2\left(\frac{c_{11}}{a_1}, \frac{c_{12}}{a_1}\right)$ et $N_2\left(P_2\left(\frac{c_{21}}{a_2}, \frac{c_{22}}{a_2}\right)\right)$. En effet,

$$v_M\left(\left(\frac{b_1}{a}\right)^{n_1} \left(\frac{b_2}{a}\right)^{n_2}\right) \geq n_1(\alpha - \beta_1) + n_2(\alpha - \beta_2) > \begin{cases} \alpha/2 & \text{en tout cas} \\ \beta_1 & \text{si } n_2 \geq 2 \end{cases}$$

$$v_M\left(\left(\frac{c_{11}}{a_1}\right)^{n_1} \left(\frac{c_{12}}{a_1}\right)^{n_2}\right) \geq n_1(\psi_1(\alpha) - \psi_1(\beta_1)) + n_2(\psi_1(\alpha) - \psi_1(\beta_2)) > \begin{cases} \psi_1(\alpha)/2 & \text{en tout cas} \\ \psi_1(\beta_1) & \text{si } n_2 \geq 2 \end{cases}$$

$$v_M\left(\left(\frac{c_{21}}{a_2}\right)^{n_1} \left(\frac{c_{22}}{a_2}\right)^{n_2}\right) \geq n_1(\psi_2(\alpha) - \psi_2(\beta_1)) + n_2(\psi_2(\alpha) - \psi_2(\beta_2)) > \begin{cases} \psi_2(\alpha)/2 & \text{en tout cas} \\ \psi_2(\beta_1) & \text{si } n_2 \geq 2 \end{cases}$$

On peut donc exprimer H_1 à l'aide du caractère additif ψ et négliger dans cette expression les termes qui ont $n_2 \geq 2$:

$$\begin{aligned} H_1^{-1} &= \psi \left\{ \text{Tr}_M \left(c_1 \sum_{n_1 \geq 1} p_{n_1,1} \left(\frac{c_1}{a'} \right)^{n_1} \frac{c_2}{a'} \right) - \text{Tr}_1 \left(c_{11} \sum_{n_1 \geq 1} p_{n_1,1} \left(\frac{c_{11}}{a_1} \right)^{n_1} \frac{c_{12}}{a_1} \right) + \right. \\ &\quad \left. b_1 \sum_{n_1 \geq 1} p_{n_1,1} \left(\frac{b_1}{a} \right)^{n_1} \frac{b_2}{a} - \text{Tr}_2 \left(c_{21} \sum_{n_1 \geq 1} p_{n_1,1} \left(\frac{c_{21}}{a_2} \right)^{n_1} \frac{c_{22}}{a_2} \right) \right\} = \\ &= \psi \left\{ \text{Tr}_M \left(c_2 \sum_{n_1 \geq 1} p_{n_1,1} \left(\frac{c_1}{a'} \right)^{n_1} \frac{c_1}{a'} \right) - \text{Tr}_1 \left(c_{12} \sum_{n_1 \geq 1} p_{n_1,1} \left(\frac{c_{11}}{a_1} \right)^{n_1} \frac{c_{11}}{a_1} \right) + \right. \\ &\quad \left. b_2 \sum_{n_1 \geq 1} p_{n_1,1} \left(\frac{b_1}{a} \right)^{n_1} \frac{b_1}{a} - \text{Tr}_2 \left(c_{22} \sum_{n_1 \geq 1} p_{n_1,1} \left(\frac{c_{21}}{a_2} \right)^{n_1} \frac{c_{21}}{a_2} \right) \right\} \end{aligned}$$

En utilisant $c_{12} = \text{Tr}_{M/F_1}(c_2)$, $b_2 = \text{Tr}_2(c_{22})$ et en regroupant les différences on peut écrire

$$\begin{aligned} H_1^{-1} &= \psi \circ \text{Tr}_M \left(c_2 \sum_{n_1 \geq 1} p_{n_1,1} \left(\left(\frac{c_1}{a'} \right)^{n_1+1} - \left(\frac{c_{11}}{a_1} \right)^{n_1+1} \right) \right) \\ &\quad \psi \circ \text{Tr}_2 \left(c_{22} \sum_{n_1 \geq 1} p_{n_1,1} \left(\left(\frac{b_1}{a} \right)^{n_1+1} - \left(\frac{c_{21}}{a_2} \right)^{n_1+1} \right) \right) \end{aligned}$$

Pour le deuxième facteur, on regarde la valuation w de l'élément $\left(\frac{b_1}{a}\right)^n - \left(\frac{c_{21}}{a_2}\right)^n$ pour $n \geq 2$.

Soit $u = \frac{c_{21}}{a_2} - \frac{b_1}{a}$. On a

$$u = \frac{b_1 + s_2}{a + r_2} - \frac{b_1}{a} = \frac{s_2 a - b_1 r_2}{a(a + r_2)} = \frac{s_2}{a_2} - \frac{b_1 r_2}{a a_2}$$

donc

$$\begin{aligned} v_2(u) &= \min\left(v_2\left(\frac{s_2}{a_2}\right), v_2\left(\frac{b_1 r_2}{a a_2}\right)\right) \geq \min\left(\psi_2(\alpha) - \frac{e_2}{p} \beta_1, \psi_2(\alpha) - \frac{e_2}{p} \alpha + e_2(\alpha - \beta_1)\right) = \\ &= \psi_2(\alpha) - \frac{e_2}{p} \beta_1 \end{aligned}$$

En écrivant $\left(\frac{b_1}{a}\right)^n - \left(\frac{c_{21}}{a_2}\right)^n = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{b_1}{a}\right)^k u^{n-k}$, on trouve $w \geq \min_{0 \leq k \leq n-1} \left(v_2\left(\left(\frac{b_1}{a}\right)^k u^{n-k}\right)\right)$.

Pour montrer que le facteur vaut 1, on cherche à prouver que $w \geq -d_2 - v_2(c_{22})$, ce qui équivaut à $w > -d_2 - v_2(c_{22}) - 1$, car c'est une inégalité entre entiers.

Puisque $-d_2 - v_2(c_{22}) - 1 \leq -d_2 + 1 + d_2 + \psi_2(\beta_2) - 1 = \psi_2(\beta_2)$, ceci revient à $w > \psi_2(\beta_2)$.

Si $k = 0$, $w \geq v_2(u^2) \geq 2\left(\psi_2(\alpha) - \frac{e_2}{p} \beta_1\right) > \psi_2(\beta_2)$, puisque :

- si $e_2 = 1$, l'inégalité devient $2\left(\alpha - \frac{1}{p} \beta_1\right) > \beta_2$, vrai car $\beta_1 < \alpha$ et $p \geq 2$;

- si $e_2 = p$, on veut $2(p\alpha - (p-1)\gamma_2 - \beta_1) > p\beta_2 - (p-1)\gamma_2$. Puisque $\gamma_2 \leq \beta_2$, il suffit de prouver que $2p\alpha > 2\beta_1 + (2p-1)\beta_2$, vrai si on se rappelle (***) du 3.3., ch. 1.

Si $k > 0$, $w \geq v_2\left(u \frac{b_1}{a}\right) \geq \psi_2(\alpha) - \frac{e_2}{p} \beta_1 + e_2(\alpha - \beta_1) > \psi_2(\beta_2)$ puisqu'on a

$$\psi_2(\alpha) - \psi_2(\beta_2) = e_2(\alpha - \beta_2)$$

et l'inégalité à démontrer devient

$$e_2(\alpha - \beta_1) + e_2(\alpha - \beta_2) > \frac{e_2}{p} \beta_1, \text{ évident, car } p \geq 2.$$

La même technique, *mutatis mutandis*, est employée pour prouver que

$$\psi \circ \text{Tr}_M \left(c_2 \sum_{n_1 \geq 1} p_{n_1,1} \left(\left(\frac{c_1}{a'} \right)^{n_1+1} - \left(\frac{c_{11}}{a_1} \right)^{n_1+1} \right) \right) = 1.$$

Tout ceci montre que $H_1 = 1$. Par symétrie, $H_2 = 1$. □

2. On a $H = 1$.

Preuve. Pour les mêmes raisons mises en évidence dans le calcul de H_1 , on peut exprimer H à l'aide de ψ et y négliger les termes qui ont $n_1 \geq 2$ et $n_2 \geq 2$; par exemple, le terme

$$\chi^{-1}\left(N_{M/K}\left(P_2^{-1}\left(\frac{c_1}{a'}, \frac{c_2}{a'}\right)\right)\right)$$

s'écrit

$$\begin{aligned} & \psi \circ \text{Tr}_M \left(-a' \sum_{n_i \geq 1} p_{n_1, n_2} \left(\frac{c_1}{a'} \right)^{n_1} \left(\frac{c_2}{a'} \right)^{n_2} \right) = \\ & = \psi \circ \text{Tr}_M \left(-a' \sum_{n_2 \geq 1, n_1=1} p_{1, n_2} \frac{c_1}{a'} \left(\frac{c_2}{a'} \right)^{n_2} \right) \cdot \psi \circ \text{Tr}_M \left(-a' \sum_{n_1 \geq 1, n_2=1} p_{n_1, 1} \left(\frac{c_1}{a'} \right)^{n_1} \frac{c_2}{a'} \right) \end{aligned}$$

Si on fait la même manipulation sur tous les termes, on obtient

$$\begin{aligned} H &= \psi \left(\sum_{n_2 \geq 1, n_1=1} p_{1, n_2} \left(\text{Tr}_2 \left(c_{21} \left(\frac{c_{22}}{a_2} \right)^{n_2} \right) - \text{Tr}_M \left(c_1 \left(\frac{c_2}{a'} \right)^{n_2} \right) + \text{Tr}_1 \left(c_{11} \left(\frac{c_{12}}{a_1} \right)^{n_2} \right) - b_1 \left(\frac{b_2}{a} \right)^{n_2} \right) \right) \\ & \psi \left(\sum_{n_1 \geq 1, n_2=1} p_{n_1, 1} \left(\text{Tr}_1 \left(c_{12} \left(\frac{c_{11}}{a_1} \right)^{n_1} \right) - \text{Tr}_M \left(c_2 \left(\frac{c_1}{a'} \right)^{n_1} \right) + \text{Tr}_2 \left(c_{22} \left(\frac{c_{21}}{a_2} \right)^{n_1} \right) - b_2 \left(\frac{b_1}{a} \right)^{n_1} \right) \right) \stackrel{(1)}{=} \\ & \psi \left(\sum_{n_2 \geq 1, n_1=1} p_{1, n_2} \left(\text{Tr}_M \left(c_1 \left(\left(\frac{c_{22}}{a_2} \right)^{n_2} - \left(\frac{c_2}{a'} \right)^{n_2} \right) \right) + \text{Tr}_1 \left(c_{11} \left(\left(\frac{c_{12}}{a_1} \right)^{n_2} - \left(\frac{b_2}{a} \right)^{n_2} \right) \right) \right) \right) \\ & \psi \left(\sum_{n_1 \geq 1, n_2=1} p_{n_1, 1} \left(\text{Tr}_M \left(c_2 \left(\left(\frac{c_{11}}{a_1} \right)^{n_1} - \left(\frac{c_1}{a'} \right)^{n_1} \right) \right) + \text{Tr}_2 \left(c_{22} \left(\left(\frac{c_{21}}{a_2} \right)^{n_1} - \left(\frac{b_1}{a} \right)^{n_1} \right) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

Pour l'égalité (1) on a utilisé les relations $c_{ij} = \text{Tr}_{M/F_i}(c_j)$ et $b_i = \text{Tr}_{F_i/K}(c_{ii})$.

En regardant les calculs pour H_1 (et, en permutant 1 avec 2, pour H_2), on s'aperçoit que les termes $\text{Tr}_M \left(c_2 \left(\left(\frac{c_{11}}{a_1} \right)^{n_1} - \left(\frac{c_1}{a'} \right)^{n_1} \right) \right)$, $\text{Tr}_2 \left(c_{22} \left(\left(\frac{c_{21}}{a_2} \right)^{n_1} - \left(\frac{b_1}{a} \right)^{n_1} \right) \right)$, avec $n_1 \geq 2$ (et les termes obtenus en permutant 1 et 2, avec $n_2 \geq 2$) sont de valuation positive ou nulle, donc négligeables. Il reste alors le terme correspondant à $n_1 = 1$ et $n_2 = 1$:

$$\begin{aligned} H &= \psi \left(p_{11} \left(\text{Tr}_M \left(\frac{c_1 c_{22}}{a_2} - \frac{c_1 c_2}{a'} \right) + \text{Tr}_1 \left(\frac{c_{11} c_{12}}{a_1} - \frac{c_{11} b_2}{a} \right) \right) \right) = \\ & \psi^{p_{11}} \circ \text{Tr}_M \left(\frac{c_1 c_{22}}{a_2} - \frac{c_1 c_2}{a'} + \frac{c_{11} c_2}{a_1} - \frac{c_{11} c_{22}}{a} \right), \end{aligned} \tag{4.1.4.}$$

$$\text{car } c_{12} = \text{Tr}_{M/F_1}(c_2) \text{ et } \text{Tr}_{F_1/K} \left(\frac{c_{11} b_2}{a} \right) = \text{Tr}_{F_1/K} \left(\frac{c_{11} \text{Tr}_{F_2/K}(c_{22})}{a} \right) = \text{Tr}_{M/K} \left(\frac{c_{11} c_{22}}{a} \right).$$

On introduit maintenant les t_i :

$$\begin{aligned} H &= \psi^{p_{11}} \circ \text{Tr}_M \left(\frac{(c_{11} + t_1) c_{22}}{a_2} - \frac{(c_{11} + t_1)(c_{22} + t_2)}{a'} + \frac{c_{11}(c_{22} + t_2)}{a_1} - \frac{c_{11} c_{22}}{a} \right) = \\ & \psi^{p_{11}} \circ \text{Tr}_M \left(c_{11} c_{22} \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a'} - \frac{1}{a} \right) + t_1 c_{22} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a'} \right) + t_2 c_{11} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a'} \right) - \frac{t_1 t_2}{a'} \right) \end{aligned}$$

On essaie de montrer que chaque terme de la somme sous Tr_M est de valuation $\geq -d_M$ (ce qui

implique $H = 1$). Puisque les valuations et d_M sont des entiers, ceci équivaut à prouver que les valuations sont $> -d_M - 1$.

- On a $c_{11}c_{22}\left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a'} - \frac{1}{a}\right) = \frac{c_{11}c_{22}r'_1}{a_1a'} - \frac{c_{11}c_{22}r_2}{a_2a}$.

D'après la REMARQUE 3, $v_M(r_i) > -d_M - e_M\alpha/p - 1$ et de même pour $v_M(r'_i)$, donc

$$v_M\left(\frac{c_{11}c_{22}r'_1}{a_1a'}\right) \geq e_M(\alpha - \beta_1) + e_M(\alpha - \beta_2) - d_M - \frac{e_M\alpha}{p} - 1 > -d_M - 1,$$

puisque $(\alpha - \beta_1) + (\alpha - \beta_2) > \alpha/p$. On procède de la même façon pour $\frac{c_{11}c_{22}r_2}{a_2a}$.

• Pour les calculs suivants, on a besoin de l'expression de la fonction de Herbrand $\psi_{M/K}$ en fonction de γ_1 et γ_2 . Les résultats sont démontrés dans l'Annexe 1.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\gamma_1 \leq \gamma_2$. Si F_1/K est non ramifiée, alors F_2/K est totalement ramifiée et on a

$$\psi_{M/K}(t) = \psi_{F_2/K}(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq \gamma_2 \\ \gamma_2 + p(t - \gamma_2) & \text{si } \gamma_2 < t \end{cases}$$

Si F_i/K sont ramifiées, alors il existe $\lambda_1 \in \mathbb{Z}$, $\lambda_1 \leq \gamma_1$, tel que

$$\psi_{M/K}(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq \lambda_1 \\ \lambda_1 + p(t - \lambda_1) & \text{si } \lambda_1 \leq t \leq \gamma_2 \\ \lambda_1 + p(\gamma_2 - \lambda_1) + p^2(t - \gamma_2) & \text{si } \gamma_2 < t \end{cases}$$

De plus, on a $\lambda_1 = \gamma_1$ si $\gamma_1 < \gamma_2$.

- $t_1c_{22}\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a'}\right) = \frac{t_1c_{22}r'_2}{a_2a'}$. On veut savoir si la valuation de ceci est $> -d_M - 1$.

$$v_M\left(\frac{t_1}{a'} \frac{c_{22}}{a_2} r'_2\right) \geq \psi_M(\alpha) - \frac{e_{M/F_1}}{p} \psi_1(\beta_1) + e_M(\alpha - \beta_2) - 1 - d_M - \frac{e_{M/F_2}}{p} \psi_2(\alpha);$$

$$v_M\left(\frac{t_1}{a'} \frac{c_{22}}{a_2} r'_2\right) > -d_M - 1 \text{ si } \psi_M(\alpha) - \frac{e_{M/F_1}}{p} \psi_1(\beta_1) + e_M(\alpha - \beta_2) - \frac{e_{M/F_2}}{p} \psi_2(\alpha) > 0 \quad (1)$$

Si F_1/K est non ramifiée, alors (1) s'écrit

$$p\alpha - (p-1)\gamma_2 - \beta_1 + p(\alpha - \beta_2) - \frac{1}{p}(p\alpha - (p-1)\gamma_2) > 0 \Leftrightarrow$$

$$p(2p-1)\alpha > p\beta_1 + p^2\beta_2 + (p-1)^2\gamma_2 \Leftrightarrow p(2p-1)\alpha > p\beta_1 + (2p^2 - 2p + 1)\beta_2,$$

vrai par (***) du 3.3., ch. 1.

Si F_2/K est totalement ramifiée, alors (1) équivaut à

$$\lambda_1 + p(\gamma_2 - \lambda_1) + p^2(\alpha - \gamma_2) - \gamma_1 - p(\beta_1 - \gamma_1) + p^2(\alpha - \beta_2) - \gamma_2 - p(\alpha - \gamma_2) > 0$$

$$\Leftrightarrow p(2p-1)\alpha > p\beta_1 + (p-1)(\lambda_1 - \gamma_1) + p^2\beta_2 + (p-1)^2\gamma_2$$

$\Leftrightarrow p(2p-1)\alpha > p\beta_1 + (2p^2 - 2p + 1)\beta_2$. Cette inégalité est vraie par (***) du 3.3., ch. 1.

• La même technique de calcul montre que $v_M\left(t_2 c_{11}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a'}\right)\right) = v_M\left(\frac{t_2 c_{11} r_1'}{a_1 a'}\right) \geq -d_M$.

• On a $v_M\left(\frac{t_1 t_2}{a'}\right) \geq -1 - d_M - \frac{e_{M/F_1}}{p} \psi_1(\beta_1) - 1 - d_M - \frac{e_{M/F_2}}{p} \psi_2(\beta_2) + 1 + d_M + \psi_M(\alpha)$;

alors $v_M\left(\frac{t_1 t_2}{a'}\right) \geq -d_M$ vaut si $\psi_M(\alpha) > \frac{e_{M/F_1}}{p} \psi_1(\beta_1) + \frac{e_{M/F_2}}{p} \psi_2(\beta_2)$.

Si F_1/K est non ramifiée, ceci revient à prouver que

$$\gamma_2 + p(\alpha - \gamma_2) > \beta_1 + \frac{1}{p}(\gamma_2 + p(\beta_2 - \gamma_2)) \Leftrightarrow p^2\alpha > p\beta_1 + (p-1)^2\gamma_2 + p\beta_2,$$

assurée par le même (***) du 3.3., ch. 1.

Si F_1/K est totalement ramifiée, on obtient

$$\lambda_1 + p(\gamma_2 - \lambda_1) + p^2(\alpha - \gamma_2) > \gamma_1 + p(\beta_1 - \gamma_1) + \gamma_2 + p(\beta_2 - \gamma_2)$$

$$\Leftrightarrow p^2\alpha > (p-1)(\lambda_1 - \gamma_1) + p\beta_1 + (p-1)^2\gamma_2 + p\beta_2$$

$$\Leftrightarrow p^2\alpha > p\beta_1 + (p^2 - p + 1)\beta_2, \text{ conséquence de (***) du 3.3., ch. 1.}$$

3. On a $G_1 = G_2 = 1$.

Preuve. Puisque $F_1 \cap F_2 = K$, l'application $\sigma \mapsto \sigma|_{F_2}$ de $\text{Gal}(M/F_1)$ dans $\text{Gal}(F_2/K)$ est un isomorphisme; on en déduit que, pour $x \in F_2$, $N_{F_2/K}(x) = N_{M/F_1}(x)$. Alors

$$G_1 = \eta_1 \left(N_{M/F_1} \left(\frac{1 + \frac{c_{22}}{a_2}}{1 + \frac{c_2}{a'}} \cdot \frac{1 + \frac{c_{12}}{a_1}}{1 + \frac{b_2}{a}} \right) \right)$$

Mais $c_2 = c_{22} + t_2$, $a' = a_2 + r_2$. Donc $\frac{1 + \frac{c_{22}}{a_2}}{1 + \frac{c_2}{a'}} = 1 + \frac{\frac{c_{22}}{a_2} - \frac{c_{22} + t_2}{a_2 + r_2}}{1 + \frac{c_2}{a'}} = 1 + \frac{\frac{c_{22}r_2}{a_2 a'} - \frac{t_2}{a'}}{1 + \frac{c_2}{a'}}$. De même,

$$c_{12} = b_2 + s_1, a_1 = a + r_1, \text{ donc } \frac{1 + \frac{c_{12}}{a_1}}{1 + \frac{b_2}{a}} = 1 + \frac{\frac{b_2 + s_1}{a + r_1} - \frac{b_2}{a}}{1 + \frac{b_2}{a}} = 1 + \frac{\frac{s_1}{a_1} - \frac{b_2 r_1}{a a_1}}{1 + \frac{b_2}{a}}$$

Pour pouvoir exprimer G_1 à l'aide de ψ , on compare les valuations suivantes avec $\psi_1(\beta_1)/2$ et $\psi_M(\beta_1)/2$, respectivement.

$$v_1 \left(\frac{\frac{s_1}{a_1} - \frac{b_2 r_1}{a_1 a}}{1 + \frac{b_2}{a}} \right) \geq \min \left(v_1 \left(\frac{s_1}{a_1} \right), v_1 \left(\frac{b_2 r_1}{a_1 a} \right) \right)$$

$$v_M \left(\frac{\frac{c_{22} r_2}{a_2 a'} - \frac{t_2}{a'}}{1 + \frac{c_2}{a'}} \right) = v_M \left(\frac{c_{22} r_2}{a_2 a'} - \frac{t_2}{a'} \right) \geq \min \left(v_M \left(\frac{c_{22} r_2}{a_2 a'} \right), v_M \left(\frac{t_2}{a'} \right) \right)$$

• $v_1 \left(\frac{s_1}{a_1} \right) \geq \psi_1(\alpha) - \frac{e_1}{p} \beta_2$; $v_1 \left(\frac{b_2 r_1}{a_1 a} \right) \geq e_1(\alpha - \beta_2) + \psi_1(\alpha) - \frac{e_1}{p} \alpha$, qui est au moins égal à $\psi_1(\alpha) - \frac{e_1}{p} \beta_2$. Mais $\psi_1(\alpha) - \frac{e_1}{p} \beta_2 > \frac{\psi_1(\beta_1)}{2} \Leftrightarrow \frac{e_1}{2}(\alpha - \beta_1) + \frac{\psi_1(\alpha)}{2} > \frac{e_1}{p} \beta_2$.

Si F_1/K est non ramifiée, ceci équivaut à $\alpha > \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{p}$, vrai car $\alpha > \beta_i$.

Si F_1/K est totalement ramifiée, on obtient

$$\frac{p(\alpha - \beta_1)}{2} + \frac{p\alpha - (p-1)\gamma_1}{2} > \beta_2 \Leftrightarrow 2p\alpha > (p-1)\gamma_1 + p\beta_1 + 2\beta_2, \text{ vraie.}$$

• La même technique s'applique au terme $N_{M/F_1} \left(1 + \frac{\frac{c_{22} r_2}{a_2 a'} - \frac{t_2}{a'}}{1 + \frac{c_2}{a'}} \right)$ et on peut alors écrire

$$G_1 = \psi \left(\text{Tr}_1 \left(c_{11} \frac{c_{12}}{a_1} - c_{11} \frac{b_2}{a} \right) + \text{Tr}_M \left(c_1 \frac{c_{22}}{a_2} - c_1 \frac{c_2}{a'} \right) \right)$$

Mais l'expression ci-dessus a été calculée (voir (4.1.4.)) et elle vaut 1. On a donc bien $G_1 = 1$.

Par symétrie, $G_2 = 1$.

La démonstration est maintenant complète. □

4.2. Cas $F_1 = F_2$

On pose $F = F_1 = F_2$ et $N = N_{F/K}$, $\psi_F = \psi_{F/K}$, $e = e_{F/K}$, $G = \text{Gal}(F/K)$ etc. Puisque $\alpha(F/K)$, noté γ , est inférieur à β_1 et β_2 , on a toujours $\psi_F(\alpha) - \psi_F(\beta_i) = e(\alpha - \beta_i)$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $\beta_1 \geq \beta_2$.

La formule (1.3.1.), appliquée à (4.1.1.) de la même manière qu'au 4.1. donne

$$\begin{aligned} \varepsilon(W_1 \otimes W_2 \otimes \chi) &= \frac{\varepsilon(\text{Ind}_F^K(1 - \eta_1) \otimes \text{Ind}_F^K(1 - \eta_2) \otimes \chi) \varepsilon((1 - \eta_1|_{K^*}) \otimes (1 - \eta_2|_{K^*}) \otimes \chi)}{\varepsilon(\text{Ind}_F^K(1 - \eta_1) \otimes (1 - \eta_2|_{K^*}) \otimes \chi) \varepsilon((1 - \eta_1|_{K^*}) \otimes \text{Ind}_F^K(1 - \eta_2) \otimes \chi)} \\ &= \frac{\varepsilon((1 - \eta_1) \left(\sum_{\sigma \in G} (1 - \eta_2 \circ \sigma) \right) \chi \circ N) \cdot \varepsilon((1 - \eta_1|_{K^*}) (1 - \eta_2|_{K^*}) \chi)}{\varepsilon((1 - \eta_1) (1 - \eta_2|_{K^*} \circ N) \chi \circ N) \cdot \varepsilon((1 - \eta_1|_{K^*} \circ N) (1 - \eta_2) \chi \circ N)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\prod_{\sigma \in G} \varepsilon((1 - \eta_1)(1 - \eta_2 \circ \sigma)\chi \circ N) \cdot \varepsilon((1 - \eta_1|_{K^*})(1 - \eta_2|_{K^*})\chi)}{\varepsilon((1 - \eta_1)(1 - \eta_2|_{K^*} \circ N)\chi \circ N) \cdot \varepsilon((1 - \eta_1|_{K^*} \circ N)(1 - \eta_2)\chi \circ N)} \quad (4.2.1.)$$

On fixe les éléments suivants :

K :

$a \in K$ tel que $\chi(Ex) = \psi(ax)$, pour tout $x \in K$, $v_K(x) > \alpha/p$;

$b_i \in K$ tel que $\eta_i|_{K^*}(Ex) = \psi(b_i x)$, pour tout $x \in K$, $v_K(x) > \beta_i/p$;

F :

$a' \in F$ tel que $\chi \circ N(Ey) = \psi \circ \text{Tr}(a'y)$, pour tout $y \in F$, $v_F(y) > \psi_F(\alpha)/p$;

$c_i \in F$ tel que $\eta_i(Ey) = \psi \circ \text{Tr}(c_i y)$, pour tout $y \in F$, $v_F(y) > \psi_F(\beta_i)/p$;

On peut prendre $b_i = \text{Tr}(c_i)$ (cf. PROP. 2.2. i))

Pour tout $\sigma \in G$, on a $\eta_2 \circ \sigma(Ey) = \psi \circ \text{Tr}(\sigma^1 c_2 y)$, pour tout $y \in F$, $v_F(y) > \psi_F(\beta_2)/p$; ceci montre que l'on peut prendre $\sigma^1 c_2$ comme élément associé à $\eta_2 \circ \sigma$;

$d_i \in F$ tel que $\eta_i|_{K^*} \circ N(Ey) = \psi \circ \text{Tr}(d_i y)$, pour tout $y \in F$, $v_i(y) > \psi_F(\beta_j)/p$.

LEMME 1. On peut prendre $d_i = b_i$.

Preuve. Si $y \in F$, $v_F(y) > \psi_F(\beta_i)/p$, alors, par la PROP. 1.5., ch. 2, on a $\text{NE}y \equiv \text{ET}y \pmod{U_K(\psi_F(\beta_i)/e)}$. Donc

$$\eta_i|_{K^*}(\text{NE}y) = \eta_i|_{K^*}(\text{ET}y),$$

car $\alpha(\eta_i|_{K^*}) \leq \beta_i \leq \psi_F(\beta_i)/e$. Mais $v_K(\text{ET}y) \geq v_F(y)/e > \psi_F(\beta_i)/pe \geq \alpha(\eta_i|_{K^*})/p$, donc

$$\eta_i|_{K^*}(\text{NE}y) = \eta_i|_{K^*}(\text{ET}y) = \psi(b_i \text{ET}y) = \psi(\text{Tr}(b_i y)). \quad \square$$

On pose $r = a - a'$. On a $v_F(r) \geq -d - e\alpha/p$ (cf. la PROP. 2.2.).

Les valuations de ces éléments sont

K :

$$\chi : v_K(a) = -(1 + \alpha),$$

$$\eta_i|_{K^*} : v_K(b_i) \geq -(1 + \beta_i),$$

F :

$$\chi \circ N : v_F(a') = -(1 + d + \psi_F(\alpha)) = -e(1 + \alpha);$$

$$\eta_i : v_F(c_i) \geq -(1 + d + \psi_F(\beta_i)) = -e(1 + \beta_i).$$

On peut maintenant écrire

$$\varepsilon(W_1 \otimes W_2 \otimes \chi) = \eta_1 \left(\prod_{\sigma \in G} P_2^{-1} \left(\frac{c_1}{a'}, \frac{\sigma c_2}{a'} \right) \cdot P_2^{-1} \left(\frac{b_1}{a}, \frac{b_2}{a} \right) \cdot P_2 \left(\frac{c_1}{a'}, \frac{b_2}{a'} \right) \cdot N \left(P_2 \left(\frac{b_1}{a'}, \frac{c_2}{a'} \right) \right) \right). \quad (H_1)$$

$$\eta_2 \left(\prod_{\sigma \in G} \sigma P_2^{-1} \left(\frac{c_1}{a'}, \frac{\sigma^{-1} c_2}{a'} \right) \cdot P_2^{-1} \left(\frac{b_1}{a}, \frac{b_2}{a} \right) \cdot N \left(P_2 \left(\frac{c_1}{a'}, \frac{b_2}{a'} \right) \right) \cdot P_2 \left(\frac{b_1}{a'}, \frac{c_2}{a'} \right) \right). \quad (H_2)$$

$$\chi \left(\prod_{\sigma \in G} N \left(P_2^{-1} \left(\frac{c_1}{a'}, \frac{\sigma c_2}{a'} \right) \right) \cdot P_2^{-1} \left(\frac{b_1}{a}, \frac{b_2}{a} \right) \cdot N \left(P_2 \left(\frac{c_1}{a'}, \frac{b_2}{a'} \right) \right) \cdot N \left(P_2 \left(\frac{b_1}{a'}, \frac{c_2}{a'} \right) \right) \right). \quad (H)$$

$$\eta_1 \left(\prod_{\sigma \in G} \left(1 + \frac{\sigma c_2}{a'} \right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{b_2}{a} \right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{b_2}{a'} \right) \cdot N \left(1 + \frac{c_2}{a'} \right) \right). \quad (G_1)$$

$$\eta_2 \left(\prod_{\sigma \in G} \sigma \left(1 + \frac{c_1}{a'} \right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{b_1}{a} \right)^{-1} \cdot N \left(1 + \frac{c_1}{a'} \right) \cdot \left(1 + \frac{b_1}{a'} \right) \right). \quad (G_2)$$

1. On a $H_1 = 1$.

Preuve. On fait ici la même observation que dans le calcul de H_1 (au 4.1., cas $F_1 \neq F_2$), concernant la possibilité d'exprimer H_1 à l'aide de ψ et de négliger dans cette expression les termes du type $\frac{b_1}{a} \left(\frac{b_2}{a} \right)^{n_2}$ (et semblables) si $n_2 \geq 2$. Ceci est justifié, parce que $v_F \left(\frac{b_1}{a} \left(\frac{b_2}{a} \right)^{n_2} \right) \geq \alpha - \beta_1 + 2(\alpha - \beta_2) > \beta_1$ (et le même type d'inégalité a lieu pour les autres facteurs), donc le terme correspondant est de valuation supérieure au conducteur de η_1 . Donc

$$\begin{aligned} H_1 &= \psi \left\{ \text{Tr} \left(c_1 \sum_{n_1 \geq 1} p_{n_1,1} \left(\frac{c_1}{a'} \right)^{n_1} \frac{b_2}{a'} \right) - \text{Tr} \left(c_1 \sum_{n_1 \geq 1} \left(p_{n_1,1} \left(\frac{c_1}{a'} \right)^{n_1} \sum_{\sigma \in G} \frac{\sigma c_2}{a'} \right) \right) \right\} + \\ &\quad \text{Tr} \left(b_1 \sum_{n_1 \geq 1} p_{n_1,1} \left(\frac{b_1}{a'} \right)^{n_1} \frac{c_2}{a'} \right) - b_1 \sum_{n_1 \geq 1} p_{n_1,1} \left(\frac{b_1}{a} \right)^{n_1} \frac{b_2}{a} \Big\} = \\ &= \psi \circ \text{Tr} \left(c_1 \sum_{n_1 \geq 1} \left(p_{n_1,1} \left(\frac{c_1}{a'} \right)^{n_1} \left(\frac{b_2}{a'} - \sum_{\sigma \in G} \frac{\sigma c_2}{a'} \right) \right) \right) \Big\} \\ &\quad \psi \circ \text{Tr} \left(b_1 \sum_{n_1 \geq 1} p_{n_1,1} \left(\left(\frac{b_1}{a'} \right)^{n_1} \frac{c_2}{a'} - \left(\frac{b_1}{a} \right)^{n_1} \frac{c_2}{a} \right) \right) \end{aligned}$$

Pour le deuxième facteur, on a utilisé la relation $b_2 = \text{Tr } c_2$, conséquence de 2.2.). Mais, dans l'expression ci-dessus, $\sum_{\sigma \in G} \sigma c_2 = \text{Tr } c_2 = b_2$, donc le premier facteur est 1.

Par conséquent,

$$H_1 = \psi \circ \text{Tr} \left(b_1 \sum_{n_1 \geq 1} p_{n_1,1} b_1^{n_1} c_2 \left(\left(\frac{1}{a'} \right)^{n_1+1} - \left(\frac{1}{a} \right)^{n_1+1} \right) \right)$$

On aimerait que chaque terme de la somme sous la trace soit de valuation au moins $n(\psi \circ \text{Tr}) - v_F(b_1) = -d + e(1 + \beta_1)$. Alors il faut regarder l'expression

$$b_1^n c_2 \left(\left(\frac{1}{a'} \right)^{n+1} - \left(\frac{1}{a} \right)^{n+1} \right) = \left(\frac{b_1}{a} \right)^n \frac{c_2}{a} \frac{(a-a')}{a'} \frac{(a^n + \dots + a'^n)}{a'^n} = \left(\frac{b_1}{a} \right)^n \frac{c_2}{a} \frac{r}{a'} \left(\left(\frac{a}{a'} \right)^n + \dots + 1 \right),$$

pour $n \geq 1$. La valuation de a/a' est nulle, donc le dernier facteur est de valuation positive. Pour les autres,

$$\begin{aligned} v_F \left(\left(\frac{b_1}{a} \right)^n \frac{c_2}{a} \frac{r}{a'} \right) &\geq ne(\alpha - \beta_1) + e(\alpha - \beta_2) - d - \frac{e\alpha}{p} + e(1 + \alpha) > -d + e(1 + \beta_1) \\ &\Leftarrow (n+1)e(\alpha - \beta_1) + e(\alpha - \beta_2) > \frac{e\alpha}{p}, \end{aligned}$$

vraie par hypothèse. Donc $H_1 = 1$. □

2. On a $H_2 = 1$.

Preuve. Comme pour H_1 , on peut exprimer H_2 à l'aide de ψ et omettre dans cette expression les termes avec $n_1 \geq 2$. Puisque l'on suppose que $\beta_1 \geq \beta_2$, on peut y négliger aussi les termes avec $n_2 \geq 2$. Il reste alors

$$\begin{aligned} H_2 &= \psi^{p_{11}} \left(\sum_{\sigma \in G} \text{Tr} \left(-c_2 \frac{\sigma c_1}{\sigma a'} \frac{c_2}{\sigma a'} \right) - b_2 \frac{b_1}{a} \frac{b_2}{a} + \text{Tr} \left(b_2 \frac{c_1}{a'} \frac{b_2}{a'} \right) + \text{Tr} \left(c_2 \frac{b_1}{a'} \frac{c_2}{a'} \right) \right) \\ &= \psi^{p_{11}} \left(\text{Tr} \left(-\sum_{\sigma \in G} \frac{c_1}{a'} \frac{(\sigma c_2)^2}{a'} \right) + \text{Tr} \left(\frac{b_1}{a'} \frac{c_2^2}{a'} \right) - \text{Tr} \left(\frac{c_1}{a} \frac{b_2^2}{a} \right) + \text{Tr} \left(\frac{c_1}{a'} \frac{b_2^2}{a'} \right) \right) \\ &= \psi^{p_{11}} \left(\text{Tr} \left(c_2 \frac{b_1}{a'} \frac{c_2}{a'} - \sum_{\sigma \in G} \frac{c_1}{a'} \frac{(\sigma c_2)^2}{a'} \right) + \text{Tr} \left(b_2^2 c_1 \left(\frac{1}{a'^2} - \frac{1}{a^2} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

• On s'occupe de $b_2^2 c_1 \left(\frac{1}{a'^2} - \frac{1}{a^2} \right) = \frac{c_1}{a'} \left(\frac{b_2}{a^2} \right) (a - a') \left(1 + \frac{a}{a'} \right)$. On a

$$v_F \left(\frac{c_1}{a'} \left(\frac{b_2}{a} \right)^2 (a - a') \left(1 + \frac{a}{a'} \right) \right) \geq e(\alpha - \beta_1) + 2e(\alpha - \beta_2) - d - \frac{e\alpha}{p} \geq -d \text{ parce que ceci équivaut à } e(\alpha - \beta_1) + 2e(\alpha - \beta_2) \geq \frac{e\alpha}{p}, \text{ vrai car } p \geq 2. \text{ Ce terme peut donc être omis.}$$

• On regarde $\text{Tr} \left(c_2 \frac{b_1}{a'} \frac{c_2}{a'} - \sum_{\sigma \in G} \frac{c_1}{a'} \frac{(\sigma c_2)^2}{a'} \right)$, noté u . Puisque $b_1 = \text{Tr} c_1$, u vaut

$$\begin{aligned} \sum_{\tau \in G} \tau \left(\sum_{\sigma \in G} \left(c_2 \frac{\sigma c_1}{a'} \frac{c_2}{a'} - \frac{c_1}{a'} \frac{(\sigma c_2)^2}{a'} \right) \right) &= \sum_{\sigma, \tau \in G} \frac{\tau \sigma c_1 \cdot \tau c_2^2 - \tau c_1 \cdot \tau \sigma c_2^2}{(\tau a')^2} = \\ &= \frac{1}{a^2} \sum_{\sigma, \tau \in G} \frac{1}{(1 + \tau/a)^2} (\tau \sigma c_1 \cdot \tau c_2^2 - \tau c_1 \cdot \tau \sigma c_2^2) \\ &= \frac{1}{a^2} \sum_{\sigma, \tau \in G} (\tau \sigma c_1 \cdot \tau c_2^2 - \tau c_1 \cdot \tau \sigma c_2^2) \left(1 - 2 \frac{\tau}{a} + 3 \left(\frac{\tau}{a} \right)^2 - \dots \right) \end{aligned}$$

(Mais $\sum_{\sigma, \tau \in G} \tau \sigma c_1 \cdot \pi_2^2 = \sum_{\sigma, \tau \in G} \pi_1 \cdot \tau \sigma c_2^2$. On continue :)

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{a^2} \sum_{\sigma, \tau \in G} (\tau \sigma c_1 \cdot \pi_2^2 - \pi_1 \cdot \tau \sigma c_2^2) \left(-2 \frac{\pi}{a} + 3 \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 - \dots \right) \\ &= \text{Tr} \left(\frac{1}{a^2} \sum_{\sigma \in G} (\sigma c_1 \cdot c_2^2 - c_1 \cdot \sigma c_2^2) \left(-2 \frac{\pi}{a} + 3 \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 - \dots \right) \right) \end{aligned}$$

La valuation de l'élément sous la trace est au moins

$$v_F \left(\frac{c_1 c_2^2}{a^3} r \right) \geq 2e(\alpha - \beta_2) + e(\alpha - \beta_1) - d - e \frac{\alpha}{p} - 1 \geq -d$$

parce que $2(\alpha - \beta_2) + (\alpha - \beta_1) > \frac{\alpha}{p}$. Ce terme vaut ainsi 1, ce qui achève de prouver que $H_2 = 1$. □

$$3. \text{ On a } G_1 = \eta_1 \left(\prod_{\sigma \in G} \left(1 + \frac{\sigma c_2}{a'} \right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{b_2}{a} \right) \cdot \left(1 + \frac{b_2}{a'} \right)^{-1} \cdot N \left(1 + \frac{c_2}{a'} \right) \right) = 1.$$

Preuve. On a

$$\prod_{\sigma \in G} \left(1 + \frac{\sigma c_2}{a'} \right)^{-1} N \left(1 + \frac{c_2}{a'} \right) = \prod_{\sigma \in G} \left(\frac{1 + \sigma c_2 / \sigma a'}{1 + \sigma c_2 / a'} \right) = \prod_{\sigma \in G} \left(1 + \frac{\sigma c_2 (a' - \sigma a') / a' \sigma a'}{1 + \sigma c_2 / a'} \right) \quad (4.2.2.)$$

LEMME. On a $v_F(\sigma a' - a') \geq -d - \psi(\alpha)/p - 1$, pour tout $\sigma \in \text{Gal}(F/K)$.

Preuve du lemme. Pour tout $x \in F$, avec $v_F(x) > \psi(\alpha)/p$, on a

$$\psi(\text{Tra}'x) = \chi(\text{NE}x) = \chi(\text{NE}\sigma^{-1}x) = \psi(\text{Tra}'\sigma^{-1}x) = \psi(\text{Tr}\sigma(a')x)$$

ce qui entraîne $\psi(\text{Tr}(a' - \sigma a')x) = 1$, donc $v_F(\sigma a' - a') \geq -d - \psi(\alpha)/p - 1$. □

Avec l'estimation du lemme, on prouve que chaque facteur du produit (4.2.2.) est dans $U_F(\alpha(\eta_1) + 1)$. Puisque $1 + \sigma c_2/a'$ est de valuation nulle, on a

$$\begin{aligned} v_F \left(\frac{\sigma c_2 (a' - \sigma a')}{a' \sigma a' (1 + \sigma c_2 / a')} \right) &= v_F \left(\frac{\sigma c_2 (a' - \sigma a')}{a' \sigma a'} \right) \geq \\ &\geq \psi(\alpha) - \psi(\beta_2) + 1 + d + \psi(\alpha) - 1 - d - \frac{\psi(\alpha)}{p} > \psi(\beta_1) \end{aligned}$$

puisque cela équivaut à $\psi(\alpha) - \psi(\beta_2) + \psi(\alpha) - \psi(\beta_1) > \frac{\psi(\alpha)}{p}$.

Il reste $\left(1 + \frac{b_2}{a} \right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{b_2}{a'} \right) = 1 + \frac{b_2(a - a')/aa'}{1 + b_2/a}$; on a

$$v_F \left(\frac{b_2(a - a')}{aa'} \right) \geq e(\alpha - \beta_2) + 1 + d + \psi(\alpha) - d - \frac{e\alpha}{p} > \psi(\beta_1)$$

parce que cela est équivalent à $e(\alpha - \beta_2) + e(\alpha - \beta_1) > \frac{e\alpha}{p}$, vraie. Donc $G_1 = 1$.

□

$$4. \text{ On a } G_2 = \eta_2 \left(\prod_{\sigma \in G} \sigma \left(1 + \frac{c_1}{a'} \right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{b_1}{a} \right)^{-1} \cdot N \left(1 + \frac{c_1}{a'} \right) \cdot \left(1 + \frac{b_1}{a} \right) \right) = 1.$$

Preuve. Après la simplification de G_2 , à l'aide de la formule $N(x) = \prod_{\sigma \in G} \sigma(x)$, on a

$$G_2 = \eta_2 \left(\left(1 + \frac{b_1}{a} \right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{b_1}{a'} \right) \right) = \eta_2 \left(1 + \frac{b_1(a - a')}{1 + b_1/a} \right), \text{ où}$$

$$v_F \left(\frac{b_1(a - a')}{\alpha a'} \right) > \psi(\beta_2),$$

comme avant. Ainsi $G_2 = 1$.

□

5. On a $H = 1$.

Preuve. Pour simplifier, on examine par exemple sur le facteur $\chi \left(N \left(P_2 \left(\frac{c_1}{a'}, \frac{b_2}{a'} \right) \right) \right)$ quels termes peuvent être omis en développant à l'aide de ψ . On a

$$\chi \left(N \left(P_2 \left(\frac{c_1}{a'}, \frac{b_2}{a'} \right) \right) \right) = \psi \circ \text{Tr} \left(a' \sum_{n_1, n_2 \geq 1} p_{n_1, n_2} \left(\frac{c_1}{a'} \right)^{n_1} \left(\frac{b_2}{a'} \right)^{n_2} \right)$$

Puisque $v_F \left(\left(\frac{c_1}{a'} \right)^{n_1} \left(\frac{b_2}{a'} \right)^{n_2} \right) \geq n_1(\psi(\alpha) - \psi(\beta_1)) + n_2(\psi(\alpha) - \psi(\beta_2)) > \psi(\alpha)$ si $n_1 \geq 2$ et $n_2 \geq 2$,

on peut négliger ces termes-ci. Mais on a supposé que $\beta_1 \geq \beta_2$, donc $\psi_F(\alpha) - \psi_F(\beta_2) \geq \psi_F(\alpha) - \psi_F(\beta_1)$, et cela élimine les termes avec $n_1 = 1$ et $n_2 \geq 3$. Il reste alors à regarder les termes avec $n_1 \geq 1$ et $n_2 = 1$ et le terme avec $n_1 = 1$ et $n_2 = 2$.

Cette discussion vaut pour tous les autres facteurs de H , ce qui nous autorise à écrire

$$H = \psi \left(\sum_{n_1 \geq 1} p_{n_1, 1} \left(-\text{Tr} \left(\sum_{\sigma \in G} a' \left(\frac{c_1}{a'} \right)^{n_1} \frac{\sigma c_2}{a'} \right) - a \left(\frac{b_1}{a} \right)^{n_1} \frac{b_2}{a} + \right. \right. \\ \left. \left. + \text{Tr} \left(a' \left(\frac{c_1}{a'} \right)^{n_1} \frac{b_2}{a'} \right) + \text{Tr} \left(a' \left(\frac{b_1}{a'} \right)^{n_1} \frac{c_2}{a'} \right) \right) \right) \\ \psi^{p_{1,2}} \left(-\text{Tr} \left(\sum_{\sigma \in G} a' \frac{c_1}{a'} \left(\frac{\sigma c_2}{a'} \right)^2 \right) - a \frac{b_1}{a} \left(\frac{b_2}{a} \right)^2 + \text{Tr} \left(a' \frac{c_1}{a'} \left(\frac{b_2}{a'} \right)^2 \right) + \text{Tr} \left(a' \frac{b_1}{a'} \left(\frac{c_2}{a'} \right)^2 \right) \right) = \\ = \psi \left(\sum_{n_1 \geq 1} p_{n_1, 1} \text{Tr} \left(c_2 b_1^{n_1} \left(\left(\frac{1}{a'} \right)^{n_1} - \left(\frac{1}{a} \right)^{n_1} \right) \right) + \text{Tr} \left(\left(\frac{c_1}{a'} \right)^{n_1} \left(b_2 - \sum_{\sigma \in G} \sigma c_2 \right) \right) \right). \quad (A)$$

$$\psi^{p_{1,2}} \left(\text{Tr} \left(b_1 \left(\frac{c_2}{a'} \right)^2 - \sum_{\sigma \in G} c_1 \left(\frac{\sigma c_2}{a'} \right)^2 \right) + \text{Tr} \left(c_1 b_2^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a'^2} \right) \right) \right). \quad (B)$$

Le premier terme de (A), pour $n_1 \geq 2$, vaut 1 (voir le calcul de H_1) et le deuxième est 1 car $\text{Tr} c_2 = b_2$. Quant à (B), on le retrouve dans les calculs de H_2 , et il est également 1. Cela signifie que

$$H = \psi^{p_1} \circ \text{Tr} \left(c_2 b_1 \left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} \right) \right)$$

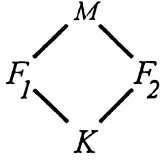
Mais $v_F \left(c_2 b_1 \left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} \right) \right) = v_F \left(\frac{c_2 b_1 r}{aa'} \right) \geq e(\alpha - \beta_1) + e(\alpha - \beta_2) - d - \frac{e\alpha}{p} - 1 > -d - 1$. On a enfin $H = 1$.

□

ANNEXE 1

Expression de la fonction ψ de Herbrand

Soit K un corps local et F_1 et F_2 deux extensions cycliques de degré p (la caractéristique résiduelle de K) telles que $F_1 \neq F_2$; cela entraîne $F_1 \cap F_2 = K$. On pose $M = F_1 F_2$, $G = \text{Gal}(M/K)$, $G_i = \text{Gal}(F_i/K)$, $\gamma_i = \alpha(F_i/K)$ pour $i = 1, 2$ et on suppose que $\gamma_1 \leq \gamma_2$. Le but de cette annexe est de trouver les fonctions de Herbrand $\psi_{M/K}$, ψ_{M/F_i} .



1. PROPOSITION. On a $\alpha(M/K) = \gamma_2$.

Démonstration. Si $t > \gamma_2$, alors $G(t)\text{Gal}(M/F_i)/\text{Gal}(M/F_i) = G_i(t) = 1$, pour $i = 1, 2$, donc $G(t) \subseteq \text{Gal}(M/F_1) \cap \text{Gal}(M/F_2) = 1$; cela montre que $\alpha(M/K) \leq \gamma_2$.

Si $t < \gamma_2$, alors $G(t)\text{Gal}(M/F_2)/\text{Gal}(M/F_2) = G_2(t) = G_2$, donc $G(t) \not\subseteq \text{Gal}(M/F_2)$, en particulier $\alpha(M/K) \geq \gamma_2$.

□

2. La filtration de G par ses groupes de ramification est de la forme

$$G = G_{-1} = \dots = G_{\lambda_1} \supset G_{\lambda_1+1} = \dots = G_{\lambda_2} \supset G_{\lambda_2+1} = 1, \text{ avec } -1 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \quad (2.1.)$$

Il ne peut pas y avoir plus de deux sauts car $|G| = p^2$ et $[G_t : G_{t+1}] \geq p$ si t est un saut. En outre, par le Théorème de Hasse-Arf, les sauts de la filtration en numérotation supérieure $(G(t))_t$ sont des entiers (car le groupe G est isomorphe à $G_1 \times G_2$, donc il est abélien). On a donc $\varphi_{M/K}(\lambda_i) \in \mathbb{Z}$. La PROP. 1 dit que $\varphi_{M/K}(\lambda_2) = \gamma_2$.

Par définition, on a

$$\varphi_{M/K}(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq \lambda_1 \\ \lambda_1 + \frac{t - \lambda_1}{p} & \text{si } \lambda_1 < t \leq \lambda_2 \\ \lambda_1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{p} + \frac{t - \lambda_2}{p^2} & \text{si } \lambda_2 < t \end{cases} \quad (2.2.)$$

Ceci entraîne

$$\psi_{M/K}(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq \lambda_1 \\ \lambda_1 + p(t - \lambda_1) & \text{si } \lambda_1 < t \leq \lambda_1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{p} \\ v_1 - p(\lambda_2 - \lambda_1) + p^2(t - \lambda_2) & \text{si } \lambda_1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{p} < t \end{cases} \quad (2.3.)$$

3. Cas F_1/K non ramifiée.

Dans ce cas, F_2/K est totalement ramifiée, car $F_1 \cap F_2 = K$. Alors $e_{M/K} = p$, M/F_2 est non ramifiée, M/F_1 est totalement ramifiée. Donc

$$\psi_{M/F_2} = 1_M \Rightarrow \psi_{M/K}(t) = \psi_{M/F_1}(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq \gamma_2 \\ \gamma_2 + p(t - \gamma_2) & \text{si } t > \gamma_2 \end{cases}$$

On a $\alpha(M/F_1) = \gamma_2$. En effet, dans (1.1.), on a $\lambda_1 = -1$ ($G(0)\text{Gal}(M/F_1)/\text{Gal}(M/F_1) = G_1(0) = 1$, donc $1 \neq G(0) \subseteq \text{Gal}(M/F_1)$, i.e. $G(0) = \text{Gal}(M/F_1)$) et $\lambda_2 = \gamma_2$ car $\psi_{M/K}(\lambda_2) = \alpha(M/K) = \gamma_2$.

4. Cas F_1/K totalement ramifiée, $\gamma_1 < \gamma_2$.

Alors on a $e_{M/K} = p^2$ et les extensions M/F_i sont totalement ramifiées.

Si $t \leq \gamma_1$, alors $G(t) \supseteq \text{Gal}(M/F_i)$, $i = 1, 2$ et ceci implique $G(t) = G$.

Si $\gamma_1 < t \leq \gamma_2$, alors $G(t)\text{Gal}(M/F_1)/\text{Gal}(M/F_1) = G_1(t) = 1$, donc $G(t) \subseteq \text{Gal}(M/F_1) \Rightarrow G(t) = 1$ ou $G(t) = \text{Gal}(M/F_1)$. Puisque $G(t) \neq 1$ (car $G(t)\text{Gal}(M/F_2)/\text{Gal}(M/F_2) = G_2(t) = G_2$), on a $G(t) = \text{Gal}(M/F_1)$.

Si $\gamma_2 < t$, alors $G(t) = 1$.

Cette discussion montre que les sauts de la filtration de G en numérotation supérieure sont γ_1 et γ_2 . Avec les notations de (2.1.), on a $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2$ et (2.2.) montre que $\varphi_{M/K}(\lambda_1) = \gamma_1$, donc $\lambda_1 = \gamma_1$. De même, $\varphi_{M/K}(\lambda_2) = \gamma_2$ signifie que $\lambda_2 = p(\gamma_2 - \gamma_1) + \gamma_1$ et on a

$$\psi_{M/K}(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq \gamma_1 \\ \gamma_1 + p(t - \gamma_1) & \text{si } \gamma_1 < t \leq \gamma_2 \\ \gamma_1 + p(\gamma_2 - \gamma_1) + p^2(t - \gamma_2) & \text{si } t > \gamma_2 \end{cases}$$

En outre, $\alpha(M/F_i) = \lambda_j$, avec $j \neq i$.

5. Cas F_i/K totalement ramifiées, $\gamma_1 = \gamma_2$.

On a $\lambda_1 \leq \gamma_1$ car $t > \gamma_1 \Rightarrow G(t) \subseteq \text{Gal}(M/F_i)$, entraînant $G(t) = 1$; donc le premier saut de la filtration (qui est le même pour la numérotation supérieure et inférieure) est $\leq \gamma_1$.

$$\varphi_{M/K}(\lambda_2) = \gamma_2 \text{ implique } \lambda_1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{p} = \gamma_2 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_1 + p(\gamma_2 - \lambda_1).$$

Observation. L'égalité $\lambda_1 = \gamma_1$ (qui a comme conséquence $\lambda_1 = \lambda_2 = \gamma_1$) n'est pas exclue. Par (2.3.), on obtient

$$\psi_{M/K}(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq \lambda_1 \\ \lambda_1 + p(t - \lambda_1) & \text{si } \lambda_1 < t \leq \gamma_2 \\ \lambda_1 + p(\gamma_2 - \lambda_1) + p^2(t - \gamma_2) & \text{si } t > \gamma_2 \end{cases}$$

Ici on a $\alpha(M/F_i) = \lambda_1$; on peut le voir en écrivant $\psi_{M/K} = \psi_{M/F_i} \circ \psi_{F_i/K}$ et en faisant usage de la formule (2.3.), avec $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha(M/F_i)$ pour l'expression de ψ_{M/F_i} .

La situation se trouve mieux décrite par la

PROPOSITION. i) Si $\lambda_1 < \lambda_2$, alors il existe un unique sous-corps F_0 de M , $K \subseteq F_0$, tel que $[F_0 : K] = p$ et $\alpha(F_0/K) < \gamma_2$. On a $\alpha(F_0/K) = \lambda_1$. Si $F_0 = F_1$, alors on est dans la situation décrite au §4. Si $F_0 \neq F_1$, alors $\gamma_1 = \gamma_2$ et la situation est celle du §5. (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).

ii) Si $\lambda_1 = \lambda_2$, alors $\alpha(F/K) = \gamma_2 = \gamma_1$, pour tout sous-corps F de M contenant K et on est dans le cas du §5.

Démonstration. i) Soit F_0 le corps fixé par $G^{\gamma_2} = G_{\lambda_2} = G_{\lambda_1+1}$. C'est clair que $[F_0 : K] = p$; on voit tout de suite que $\alpha(F_0/K) = \varphi_{M/K}(\lambda_1) = \lambda_1$. Puisque $\lambda_1 < \lambda_2$ et $\varphi_{M/K}(\lambda_2) = \gamma_2$, on a $\lambda_1 < \gamma_2$.

Si F'/K est un sous-corps de M , contenant K , avec $\alpha(F'/K) < \gamma_2$, alors $F' = F_0$. En effet, on a $\text{Gal}(F'/K)(t) = G(t)\text{Gal}(M/F')/\text{Gal}(M/F')$ pour tout t . En regardant cette égalité pour $\alpha(F'/K) < t \leq \gamma_2$, on s'aperçoit qu'elle entraîne $G(\gamma_2) \subseteq \text{Gal}(M/F')$, donc $F' \subseteq F_0$. Mais $[F_0 : K] = p$ implique alors $F' = F_0$.

ii) Soit F un corps tel que $K \subseteq F \subseteq M$. Alors $\text{Gal}(F/K)(t) = G(t)\text{Gal}(M/F)/\text{Gal}(M/F)$, qui vaut 1 si $\psi_{M/K}(t) > \lambda_1$, et $\text{Gal}(F/K)$ si $\psi_{M/K}(t) \leq \lambda_1$. Donc $\alpha(F/K) = \varphi_{M/K}(\lambda_1) = \varphi_{M/K}(\lambda_2) = \gamma_2 = \gamma_1$.

□

ANNEXE 2

Le cas du groupe de Heisenberg à 27 éléments

Les notations et les résultats généraux sur les groupes de Heisenberg sont pris de [Géra]. On rappelle ici leur construction et les résultats de base sur ces groupes.

1. Groupes de Heisenberg

Soit k un corps fini et V un espace vectoriel de dimension finie sur k . On note $*V$ l'espace vectoriel dual de V . Pour $x \in V$, $y \in *V$, on écrit $\langle y, x \rangle$ pour la valeur de y en x . On identifie le dual de $*V$ avec V par

$$\langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle = 0, \text{ pour } x \in V, y \in *V.$$

Soit $H(V)$ l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $x \in V$, $y \in *V$, $z \in k$. C'est un groupe par rapport à la multiplication usuelle de matrices, et on a la décomposition suivante

$$0 \rightarrow k \xrightarrow{e} H(V) \xrightarrow{p} V \times *V \rightarrow 0$$

$$\text{où } e(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } p \begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x, y), \text{ pour } x \in V, y \in *V, z \in k.$$

Le groupe $H(V)$ s'appelle le *groupe de Heisenberg* associé à l'espace vectoriel V .

1.1. PROPOSITION. Avec les notations ci-dessus, on a :

i) $H(V)$ est un groupe nilpotent de centre Z égal à l'image de k par e ;

ii) l'image inverse $p^{-1}(V) = V \times Z$ de V est un sous-groupe abélien maximal de $H(V)$.

Pareil pour $p^{-1}(*V) = *V \times Z$;

iii) L'application

$$\begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme entre $H(V)$ et $H(*V)$.

1.2. Si η est une représentation de dimension 1 de $*V \times V$, l'inflation $\eta \circ p$ définit une représentation de dimension 1 de $H(V)$, triviale sur le centre Z . Les autres classes de représentations irréductibles de $H(V)$ sont données par la proposition suivante, qui résume (PROP. 1.2., LEMMA 1.2., [Géra]).

PROPOSITION. Soit $H(V)$ le groupe de Heisenberg associé à l'espace vectoriel V . Alors, pour tout caractère non-trivial ζ de Z , il existe une unique classe d'isomorphisme η_ζ^V de représentations irréductibles de $H(V)$, dont la restriction à Z est ζ . Une telle représentation est $\text{Ind}_{*V \times Z}^{H(V)} 1 \cdot \zeta$, où $1 \cdot \zeta$ est la représentation de dimension 1 du sous-groupe $*V \times Z$, donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \zeta(e(z))$$

Leur dimension est le cardinal de V et leur caractère est nul en dehors de Z .

En outre, si ρ est une représentation de $H(V)$, dont la restriction à Z est ζ , ρ est irréductible si et seulement si $\dim \rho = \sqrt{[H(V):Z]}$; si tel est le cas, ρ est déterminée uniquement (à isomorphisme près) par ζ .

Une réalisation de ρ la suivante : $\rho: H \rightarrow \text{GL}(W)$, où W est l'espace des fonctions complexes sur V ; si $g = \begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H(V)$, $f \in W$ et $v \in V$, alors

$$(\rho(g)f)(v) = \zeta(z - \langle y, x \rangle - \langle y, v \rangle) f(v + x). \quad (1.2.1.)$$

2. Le groupe de Heisenberg à 27 éléments

2.1. Avec les notations ci-dessus, on prend $k = \mathbb{F}_3$, le corps à 3 éléments, V un espace de dimension 1 sur k (que l'on identifie avec k). Alors, si $y \in {}^*V$, $x \in V$, $\langle y, x \rangle = yx$ (la multiplication usuelle dans k). On obtient un 3-groupe $H(V) = H$ avec 27 éléments.

Les représentations irréductibles de H sont :

- les caractères η_i , $i \in \{1, \dots, 9\}$, provenant de l'inflation des 9 caractères du groupe abélien ${}^*V \times V$;
- deux représentations d'ordre 3 : $\rho = \text{Ind}_{{}^*V \times Z}^{H(V)} 1 \cdot \zeta$ et $\rho^\vee = \text{Ind}_{{}^*V \times Z}^{H(V)} 1 \cdot \zeta^\vee$, où ζ et $\zeta^\vee = \zeta^2$ sont les deux caractères non-triviaux de Z .

On essaie de déterminer les crans de la γ -filtration de l'anneau $R(H)$ des représentations virtuelles de H . Les résultats et les notations du 3.1., ch. 1 seront utilisés tacitement.

La table de multiplication dans $R(H)$ est la suivante (on identifie une représentation irréductible de H avec l'élément correspondant de $R(H)$) :

	η_i	ρ	$\rho^\vee$
η_j	$\eta_i \eta_j$	ρ	$\rho^\vee$
ρ	ρ	$3\rho^\vee$	$\sum_{i=1}^9 \eta_i$
$\rho^\vee$	$\rho^\vee$	$\sum_{i=1}^9 \eta_i$	3ρ

Pour démontrer cela, on note χ_R le caractère de la représentation R et, pour $i \in \{1, \dots, 9\}$ fixé, on pose $\eta = \eta_i$. On note $(,)$ le produit hermitien (scalaire) sur $R(H)$, i.e., pour φ et ψ deux représentations virtuelles de H ,

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \chi_\varphi(h) \overline{\chi_\psi(h)}$$

On a $\chi_\rho(z) = 3\zeta(z)$, pour $z \in Z$ et $\chi_\rho(t) = 0$ pour $t \notin Z$; de même pour $\rho^\vee$.

- pour $\rho \otimes \eta$, la formule $\chi_{\rho \otimes \eta} = \chi_\rho \chi_\eta$ montre : si $z \in Z$, $\chi_{\rho \otimes \eta}(z) = \chi_\rho(z)$ et si $z \notin Z$, $\chi_{\rho \otimes \eta}(z) = 0 = \chi_\rho(z)$. Ceci signifie que les représentations ρ et $\rho \otimes \eta$ sont isomorphes. Pareillement on calcule $\rho^\vee \eta_i$.

- pour $\rho \otimes \rho$, on a $\chi_{\rho \otimes \rho} = \chi_\rho^2$, donc $(\chi_{\rho \otimes \rho}, \chi_{\rho^\vee}) = \frac{1}{27} \sum_{z \in Z} 9\zeta^2(z) \overline{3\zeta^\vee(z)} = 9$ ce qui signifie

que $\rho \otimes \rho$ est isomorphe à $3\rho^\vee$.

- pour $\rho \otimes \rho^\vee$, de dimension 9, on voit tout de suite que $\chi_{\rho \otimes \rho^\vee}(z) = 9$ si $z \in Z$ et 0 sinon. Mais ceci est le caractère de l'inflation de la représentation régulière de ${}^*V \times V$, qui est isomorphe à $\sum_{i=1}^9 \eta_i$.

2.2. Puisque nous avons besoin de la γ -filtration de $R(H)$, dont les crans sont composés de

représentations virtuelles de dimension 0, on transcrit la table de multiplication pour $\mu_i = 1 - \eta_i$, $\sigma = 3 - \rho$, $\sigma^\vee = 3 - \rho^\vee$:

	μ_i	σ	$\sigma^\vee$
μ_j	$\mu_i \mu_j$	$3\mu_j$	$3\mu_j$
σ	$3\mu_i$	$3(2\sigma - \sigma^\vee)$	$3(\sigma + \sigma^\vee) - \sum_{i=1}^9 \mu_i$
$\sigma^\vee$	$3\mu_i$	$3(\sigma + \sigma^\vee) - \sum_{i=1}^9 \mu_i$	$3(2\sigma^\vee - \sigma)$

Evidemment, $R(H)_1 = \{x \in R(H) : \dim x = 0\} = \langle \{\sigma, \sigma^\vee, \mu_1, \dots, \mu_9\} \rangle$. Pour les crans supérieurs, on a besoin de $\gamma^n(x)$, pour tout $x \in \{\pm\sigma, \pm\sigma^\vee, \pm\mu_1, \dots, \pm\mu_9\}$ et $n \geq 2$.

On a $\gamma^n(\mu_i) = \mu_i^n$ et $\gamma^n(-\mu_i) = 0$, pour tout $n \geq 2$ et $i \in \{0, \dots, 9\}$.

Pour $\gamma^n(\pm\sigma)$, on calcule la série formelle $\gamma_t(-\sigma) = \lambda_t(-\sigma)$, qui est en fait un polynôme

de degré 3.

On a besoin en fin de compte de $\Lambda^2(\rho)$ et $\Lambda^3(\rho) = \det \rho$. Si $z \in Z$, alors $\Lambda^2(\rho)(z)$ est la multiplication par $\zeta^2(z) = \zeta^\vee(z)$; comme $\dim \Lambda^2(\rho) = 3$, la PROP. 2.1. prouve que $\Lambda^2(\rho)$ est irréductible et isomorphe à $\rho^\vee$.

On se réfère à la réalisation de ρ décrite au 1.2., et on prend comme base dans l'espace 3-dimensionnel W les fonctions $(\varphi_v)_{v \in V}$, données par $\varphi_v(u) = 1$ si $v = u$, et 0 sinon. La formule (1.2.1.), appliquée à $f = \varphi_v$, donne

$$\rho(g)\varphi_v = \zeta(z - \langle y, v \rangle)\varphi_{v-x}, \text{ où } g = \begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H.$$

Un coup d'oeil aux matrices qui en résultent montre que $\det \rho(g) = 1$, pour tout $g \in H$. En remplaçant ζ par $\zeta^\vee$, on obtient que $\Lambda^2(\rho^\vee) \cong \rho$ et que $\det \rho^\vee = 1$.

On peut maintenant écrire

$$\lambda_t(-\sigma) = \lambda_t(\rho - 3) = \frac{\lambda_t(\rho)}{\lambda_t(3)} = \frac{1 + \rho t + \rho^\vee t^2 + t^3}{(1+t)^3}, \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} \gamma_t(-\sigma) &= \lambda_t(-\sigma) = (1-t)^3 + \rho t(1-t)^2 + \rho^\vee t^2(1-t) + t^3 = \\ &= 1 + t(\rho - 3) + t^2(3 - 2\rho + \rho^\vee) + t^3(\rho - \rho^\vee) = 1 - t\sigma + t^2(2\sigma - \sigma^\vee) + t^3(\sigma^\vee - \sigma), \end{aligned}$$

donc

$$\gamma^1(-\sigma) = -\sigma, \quad \gamma^2(-\sigma) = 2\sigma - \sigma^\vee, \quad \gamma^3(-\sigma) = \sigma^\vee - \sigma, \quad \gamma^m(-\sigma) = 0 \text{ si } m > 3. \quad (2.2.1.)$$

La formule $\gamma_t(\sigma) = (\gamma_t(-\sigma))^{-1}$ nous donne la formule de récurrence suivante pour $\gamma^n(\sigma)$:

$$\gamma^n(\sigma) = (\gamma^{n-1}(\sigma) - \gamma^{n-2}(\sigma))\sigma + (\gamma^{n-3}(\sigma) - \gamma^{n-2}(\sigma))(\sigma - \sigma^\vee), \quad (2.2.2.)$$

pour tout $n \geq 3$. On a $\gamma^1(\sigma) = \sigma$, $\gamma^2(\sigma) = 2(2\sigma - \sigma^\vee)$, $\gamma^3(\sigma) = 10(\sigma^\vee - \sigma) + \sum_{i=1}^9 \mu_i$.

Toutes ces formules se transcrivent pour $\sigma^\vee$, en permutant σ avec $\sigma^\vee$.

2.3. LEMME. *Pour tout $n \geq 1$, $\gamma^n(\pm\sigma) \in F_n$, le $\mathbb{Z}$ -sous-module de $R(H)$ engendré par $\{\sigma'(\sigma - \sigma^\vee)^u : 2t + 3u \geq n\}$.*

Démonstration. On applique une induction sur n . Les F_n forment une suite décroissante de sous-groupes additifs de $R(H)$; chaque élément de F_n est une somme de produits $\sigma'(\sigma - \sigma^\vee)^u$, avec $2t + 3u \geq n$.

Si $n \leq 3$, on vérifie l'assertion directement, à l'aide de la table de multiplication. Si $n > 3$, de la formule (2.2.2.) et de l'hypothèse d'induction s'ensuit que $\gamma^n(\sigma) \in \sigma F_{n-2} + (\sigma - \sigma^\vee) F_{n-2}$, donc $\gamma^n(\sigma)$ est une somme de produits de la forme $\sigma \sigma'(\sigma - \sigma^\vee)^u$, $2t + 3u \geq n - 2$ ou de la forme $(\sigma - \sigma^\vee) \sigma'(\sigma - \sigma^\vee)^u$, $2t + 3u \geq n - 2$. Dans chacun des cas, le produit se trouve dans F_n . □

OBSERVATION. Le même résultat est évidemment valable pour $\sigma^\vee$, en permutant σ avec $\sigma^\vee$.

Si R est un anneau et $X \subseteq R$, on note $\langle X \rangle$ le sous-groupe additif engendré par X .

2.4. PROPOSITION. *Pour chaque $n \geq 1$, le n -ième cran de la γ -filtration de $R(H)$, noté R_n , est le $\mathbb{Z}$ -sous-module engendré par*

$$G_n = \{ \sigma'(\sigma - \sigma^\vee)^u \prod_{s \in S} \mu_s : |S| + 2t + 3u \geq n \},$$

où $\prod_{s \in S} \mu_s$ désigne un produit de $|S|$ éléments de $\{\mu_1, \dots, \mu_9\}$, non nécessairement distincts.

Démonstration. Déterminons d'abord le cran R_2 . Par définition, les produits de deux caractères, $\mu_i \mu_j \in R_2$. Les formules (2.2.1.) impliquent $\sigma, \sigma^\vee \in R_2$. Donc $R_2 \supseteq \langle \mu_i \mu_j, \sigma, \sigma^\vee \rangle$. Il y a même égalité, car on sait que $R_2 = \langle x \in R_1 : \det x = 1 \rangle$ et R_1 est engendré par μ_i, σ et $\sigma^\vee$; en outre, si une combinaison linéaire (à coefficients entiers) de caractères est de déterminant 1, c'est une somme de produits d'au moins deux caractères (LEMME du 1.2., ch. 3). Donc $R_2 = \langle \mu_i \mu_j, \sigma, \sigma^\vee \rangle$. On a aussi $\sigma - \sigma^\vee \in R_3$.

Prouvons maintenant la proposition par récurrence sur n . C'est clair que $\langle G_n \rangle \subseteq R_n$, vu les appartenances ci-dessus et la propriété $R_n R_m \subseteq R_{n+m}$. Si $n = 1$ ou 2 , on voit tout de suite que $\langle G_n \rangle = R_n$. Supposons que $n \geq 2$ et que $\langle G_i \rangle = R_i$ si $i < n$ et prouvons que $\langle G_n \rangle \supseteq R_n$. La définition de la γ -filtration montre que

$$R_n \subseteq \left\langle \bigcup_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} R_i R_j \cup \{ \gamma^m(x) : m \geq n, x \in \{\pm\sigma, \pm\sigma^\vee\} \} \right\rangle.$$

Si $i + j = n$, $i, j > 0$, alors $R_i R_j = \langle G_i \rangle \langle G_j \rangle \subseteq \langle G_{i+j} \rangle = \langle G_n \rangle$. Si $m \geq n$ et $y = \gamma^m(\sigma)$, le LEMME précédent assure que $y \in F_m \subseteq G_m \subseteq G_n$. Si $m > 3$, $\gamma^m(-\sigma) = 0$; pour $m = 3$, $\gamma^3(-\sigma) = \sigma^\vee - \sigma \in G_3$. Si $y = \gamma^m(-\sigma^\vee)$, on vérifie que $y \in G_m$. Si $y = \gamma^m(\sigma^\vee)$, l'OBSERVATION précédente permet d'écrire que $y \in \langle \sigma^{\vee t}(\sigma^\vee - \sigma)^u \prod_{s \in S} \mu_s : |S| + 2t + 3u \geq n \rangle$. Mais

$\sigma^\vee = \sigma + (\sigma^\vee - \sigma)$, donc

$$\sigma^{\vee t} = \sum_{i=0}^t \binom{t}{i} \sigma^i (\sigma - \sigma^\vee)^{t-i} \text{ et alors}$$

$$\sigma^{\vee t} (\sigma^\vee - \sigma)^u \prod_{s \in S} \mu_s = \sum_{i=0}^t \binom{t}{i} \sigma^i (\sigma - \sigma^\vee)^{u+t-i} \prod_{s \in S} \mu_s,$$

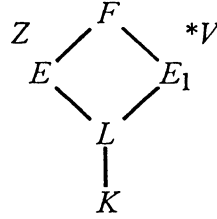
avec $|S| + 2i + 3(u + t - i) = n + t - i \geq n$, i.e. chacun des termes de la somme est dans G_n .

□

3. Investigation de la conjecture

Soit F/K une extension galoisienne dont le groupe de Galois $G(F/K)$ est isomorphe à H , le groupe de Heisenberg à 27 éléments. On garde les notations précédentes pour les sous-groupes et les représentations de H .

On note E le sous-corps de F fixé par Z , E_1 le sous-corps de F fixé par $*V$ et $L = E \cap E_1$, le sous-corps de F fixé par $*V \times Z$. Soit $\xi = 1 \cdot \zeta$, caractère de $*V \times Z$ (cf. PROP. 1.2.); on a $\rho = \text{Ind}_{*V \times Z}^H \xi = \text{Ind}_L^K \xi$, si l'on regarde ξ comme caractère de L^* . On fixe, comme d'habitude, un caractère additif non trivial ψ de K , avec $n(\psi) = 0$. On note $\tau = \sigma - \sigma^\vee$.



3.1. Dans la conjecture 2.10 du ch. 2, on suppose dorénavant que tous les groupes G_i sont égaux à $H = G(F/K)$; alors, en tenant compte de la forme des éléments de R_n , la conjecture s'énonce comme suit (on garde les notations précédentes sur le groupe de Heisenberg) :

"Soit χ un caractère de K^* , avec $\alpha = \alpha(\chi) > 0$, $\{\mu_s\}_{s \in S}$, avec S un ensemble fini, t et u deux entiers positifs. Soit $\beta = \alpha(F/K)$, alors

$$\varepsilon(\sigma^t \tau^u \prod_{s \in S} \mu_s \otimes \chi) = 1,$$

si $(|S| + 2t + 3u)(\alpha - \beta) > \alpha$."

Les cas suivants sont déjà traités, pour n'importe quels groupes G_i :

S quelconque, $t = u = 0$ (c'est le cas $n_1 = n_2 = \dots = n_N = 1$);

S quelconque, $t = 1, u = 0$ (le cas $n_1 = 2, n_2 = \dots = n_N = 1$);

$|S| = 0, t = 2, u = 0$ (le cas $n_1 = n_2 = 2$);

En outre, on peut supposer que $|S| = 0$, ou $u = 0$ (car $\mu_i \tau = 0$).

Donc, il reste à prouver la conjecture pour :

- a) $|S| = 0, t = 0, u \geq 1$;
- b) $|S| \geq 1, t \geq 2, u = 0$;
- c) $|S| = 0, t \geq 3, u = 0$;
- d) $|S| = 0, t \geq 1, u \geq 1$.

3.2. Prouvons que $\varepsilon((\sigma - \sigma^\vee) \otimes \chi) = 1$ si $3(\alpha - \beta) > \alpha$ (le cas $|S| = 0, t = 0, u = 1$).
L'inégalité ci-dessus équivaut à

$$\beta < \frac{2}{3} \alpha. \quad (3.2.1)$$

LEMME. On a $\xi(K^*) = 1$.

Démonstration. Par la formule (1.7.1) du ch. 1, on a, pour tout $u \in H$,

$$1 = \det \sigma(u) = \det(\text{Ind}_{\nu \times \mathbb{Z}}^H \xi)(u) = \varepsilon \cdot \xi(t(u)),$$

où t est le transfert et ε est ± 1 . En tenant compte de la correspondance donnée par l'application de réciprocité, ceci se traduit par $\xi(x) = \pm 1$, pour tout $x \in K^*$. Mais ξ est un caractère d'ordre 3, donc $\xi(x) = 1$, pour tout $x \in K^*$. □

On pose $N = N_{L/K}$, $\text{Tr} = \text{Tr}_{L/K}$, $\psi_L = \psi_{L/K}$. On a

$$\begin{aligned} \varepsilon((\sigma - \sigma^\vee) \otimes \chi) &= \varepsilon(\text{Ind}_L^K (\xi^\vee - \xi) \otimes \chi) = \varepsilon((\xi^\vee - \xi) \cdot \chi \circ N_{L/K}) = \\ &= \frac{\varepsilon((\xi^\vee - 1) \chi \circ N, \psi \circ \text{Tr})}{\varepsilon((\xi - 1) \chi \circ N, \psi \circ \text{Tr})}. \end{aligned}$$

On a

$\alpha(\chi \circ N) = \psi_L(\alpha)$, puisque $\alpha > \beta = \alpha(F/K) \geq \alpha(L/K)$ (voir 1.2.4., ch. 2);

$\alpha(\xi) \leq \frac{2}{3} \psi_L(\alpha)$: en effet, $\alpha(\xi) \leq \alpha(F/L) \leq \psi_L(\beta) < \psi_L\left(\frac{2}{3} \alpha\right) \leq \frac{2}{3} \psi_L(\alpha)$, puisque ψ_L

est convexe, croissante et $\psi_L(0) = 0$.

La PROP. 2.1., ch. 3, assure l'existence des éléments :

$$a \in K, \text{ tel que } \chi(Ey) = \psi(\alpha y), \text{ pour tout } y \in K \text{ avec } v_K(y) > \alpha/3; \quad (3.2.2.)$$

$$a' \in L, \text{ tel que } \chi \circ N(Ey) = \psi \circ \text{Tr}(\alpha' y), \text{ pour tout } y \in L \text{ avec } v_L(y) > \psi_L(\alpha)/3; \quad (3.2.3.)$$

$$b \in L, \text{ tel que } \xi(Ey) = \psi \circ \text{Tr}(by), \text{ pour tout } y \in L \text{ avec } v_L(y) > \psi_L(\beta)/3. \quad (3.2.4.)$$

On se rend compte tout de suite que l'élément associé à $\xi^\vee = \xi^{-1}$ est $-b$.

Les valuations de ces éléments vérifient

$$v_L(a) = -e(1 + \alpha);$$

$$v_L(a') = -(1 + d_{L/K} + \psi_L(\alpha)) = -e(1 + \alpha) \text{ puisque } \alpha > \alpha(E/K);$$

$$v_L(b) \geq -(1 + d_{L/K} + \psi_L(\beta)).$$

Par la PROP. 2.2., ch. 3, on a $v_L(a' - a) \geq -n(\psi \circ \text{Tr}_L) - \frac{e\alpha}{p} - 1 = -d_{L/K} - \frac{e\alpha}{p} - 1$. En tenant compte des valuations des éléments a et a' , cela entraîne $a' \equiv a \pmod{\left(\psi_L(\alpha) - \frac{e\alpha}{p}\right)}$.

Maintenant on peut appliquer le COR. 3.7. [De-He], qui assure que $\xi(a) = \xi(a')$. On énonce ici ce résultat, dans le contexte présent (avec une formulation légèrement différente) :

Soient L/K une extension galoisienne finie de corps locaux de caractéristique résiduelle p , χ un quasi-caractère sauvagement ramifié de K^ et ξ un quasi-caractère de L^* . On suppose que $\alpha(L/K) < (1 - 1/p)\alpha(\chi)$ et $\alpha(\xi) < \psi_{L/K}((1 - 1/p)\alpha(\chi))$. On définit a et a' par les formules (3.2.2.) et (3.2.3.) et on a alors :*

$$\xi(a) = \xi(a').$$

Les hypothèses sont satisfaites, puisque $\alpha(L/K) \leq \beta < 2\alpha/3$ et l'autre inégalité est (3.2.1.) (on a $p = 3$ dans notre cas).

On peut calculer maintenant les facteurs ε . Par la formule (2.2.1.) du ch. 1, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon((\xi - 1)\chi \circ N, \psi \circ \text{Tr}) &= \xi(a'^{-1})(\xi \cdot \chi \circ N)^{-1} \left(1 + \frac{b}{a'}\right) \cdot \psi \circ \text{Tr}(b), \\ \varepsilon((\xi^\vee - 1)\chi \circ N, \psi \circ \text{Tr}) &= \xi^\vee(a'^{-1})(\xi^\vee \cdot \chi \circ N)^{-1} \left(1 - \frac{b}{a'}\right) \cdot \psi \circ \text{Tr}(-b). \end{aligned}$$

Donc

$$\varepsilon((\sigma - \sigma^\vee) \otimes \chi) = \xi^2(a'^{-1})(\chi \circ N) \left(\frac{1 + b/a'}{1 - b/a'}\right) \cdot \xi((1 + b/a')(1 - b/a')) \cdot \psi \circ \text{Tr}(-2b) \quad (3.2.5.)$$

Mais $\xi(a') = \xi(a) = 1$, car $a \in K^*$.

On a $v_L(b/a') \geq \psi_L(\alpha) - \psi_L(\beta) > \psi_L(\alpha)/3 = \alpha(\chi \circ N)/3$. Donc

$$\begin{aligned} \chi \circ N(1 - b/a') &= \psi \circ \text{Tr}(-a'b/a') = \psi \circ \text{Tr}(-b) \\ \chi \circ N(1 + b/a') &= \psi \circ \text{Tr}(a'b/a') = \psi \circ \text{Tr}(b), \end{aligned}$$

et alors

$$\chi \circ N \left(\frac{1 + b/a'}{1 - b/a'}\right) = \psi \circ \text{Tr}(2b),$$

La formule (3.2.5.) devient :

$$\varepsilon((\sigma - \sigma^\vee) \otimes \chi) = \xi(1 - (b/a')^2) = 1,$$

car $v_L((b/a')^2) > 2\psi_L(\alpha)/3 \geq \alpha(\xi)$.

□

3.3. Soit η un caractère de H (on a vu que η est trivial sur Z , donc η se factorise par $\text{Gal}(E/K)$, où E est le sous-corps de F fixé par Z). Puisque $\text{Gal}(E/K)$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$, l'image de η est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; $\text{Ker } \eta$ est donc un sous-groupe d'ordre 3 de $\text{Gal}(E/K)$ et η est en fait l'inflation d'un caractère de $\text{Gal}(E_1/K)$, où E_1 est le sous-corps de E fixé par $\text{Ker } \eta$, on a $[E_1 : K] = 3$. Ainsi, $\alpha(\eta) \leq \alpha(E_1/K) \leq e_1/2$, où e_1 est l'indice de ramification absolu de E_1 . On vient d'utiliser le résultat suivant ([Serr], Exercice 3.c), ch. IV, §2, p. 79, énoncé modifié) :

"Si L/K est une extension finie de corps locaux de caractéristique résiduelle p , et e est l'indice de ramification absolu de L , alors $\text{Gal}(L/K)_i = \{1\}$ si $i > e/(p-1)$."

Dans notre cas, si l'on note $e = v_K(p)$ (l'indice de ramification absolu de K), on a $e_1 \leq 3e$. Donc

$$\alpha(\eta) \leq 3e/2.$$

Ce raisonnement vaut aussi pour ξ , le caractère de L tel que $\rho = \text{Ind}_L^K \xi$. On a

$$\alpha(\xi) \leq 3e_L/2,$$

où $e_L = v_L(p)$ est l'indice de ramification absolu de L .

3.4. On traite le cas $|S| \geq 1$, $t \geq 2$, $u = 0$. Posons $s = |S|$. Puisque $\mu_i \sigma = 3\mu_i$, on a $\sigma^t \prod_{i \in S} \mu_i = 3^t \prod_{i \in S} \mu_i$. Il faut donc prouver que $(s + 2t)(\alpha - \beta) > \alpha$ entraîne

$$\varepsilon^{3'} \left(\chi \prod_{i \in S} (1 - \eta_i) \right) = 1$$

Si on utilise la formule (2.4.2.) du ch. 1 pour exprimer le facteur ε ci-dessus, on peut négliger les η_i dans l'expression qui en résulte, puisque η_i est un caractère d'ordre 3 et $t \geq 2$.

Posons $\beta' = \max\{\alpha(\eta_i) : i \in S\}$. On a $\beta' \leq \min(3e_K/2, \beta)$. Soient a et b_i les éléments de K associés à χ , respectivement à η_i , c'est-à-dire

$$\chi(\text{Ex}) = \psi(ax), \text{ pour tout } x \in K \text{ tel que } v_K(x) > \alpha/3;$$

$$\eta_i(\text{Ex}) = \psi(b_i x), \text{ pour tout } x \in K \text{ tel que } v_K(x) > \beta'/3.$$

Alors

$$\varepsilon^{3'} \left(\chi \prod_{i \in S} (1 - \eta_i) \right) = \chi^{3'} \left(\prod_{J \subseteq S} (1 + b(J)/a)^{\varepsilon(J)} \right).$$

On pose $\prod_{J \subseteq S} (1 + b(J)/a)^{\varepsilon(J)} = 1 + x$, où $v_K(x) \geq s(\alpha - \beta')$ (voir 2.5. du ch 1). Alors on peut écrire

$$\chi \left((1+x)^{3'} \right) = \chi \left(1 + \sum_{k=2}^{3'} \binom{3'}{k} x^k \right).$$

On veut prouver que la valuation de chaque terme de la somme est supérieure à α .

LEMME. Soient t, n, k des entiers positifs. Si $t \geq n$ et $0 \leq k < 3^{t-n+1}$, alors $v_3\left(\binom{3^t}{k}\right) \geq n$, où v_3 désigne la valuation 3-adique.

Preuve. $\binom{3^t}{k} = \frac{3^t}{k} \frac{1}{(k-1)!} \prod_{j=1}^{k-1} (3^t - j)$; puisque le produit de $k-1$ nombres consécutifs est de valuation 3-adique au moins égale à celle de $(k-1)!$, et $v_3(k) \leq t-n$, on a $v_3\left(\binom{3^t}{k}\right) \geq v_3\left(\frac{3^t}{k}\right) \geq t - (t-n) = n$. $\square$

On a $v_K\left(\left(\binom{3^t}{k}x^k\right)\right) \geq v_3\left(\binom{3^t}{k}\right)e_K + ks(\alpha - \beta')$. Si $k < 3^{t-1}$, alors le LEMME précédent assure que cette valuation est supérieure ou égale à $2e_K + ks(\alpha - \beta') > \alpha$ (cela équivaut à $(ks-1)\alpha + 2e_K > ks\beta'$, vrai car $\alpha > \beta'$ et $2e_K > 3e_K/2 \geq \beta'$). Si $k \geq 3^{t-1}$, alors $ks > s + 2t$ et l'inégalité de l'hypothèse, $(s + 2t)(\alpha - \beta) > \alpha$, permet de conclure. $\square$

3.5. Avant de traiter les cas qui restent, on a besoin de l'expression de $\sigma^t \tau^u$ pour $t + u \geq 1$.

On déduit la table de multiplication suivante pour la sous-algèbre T de $R(H)$ engendrée par σ et τ (on pose $\gamma = \sum_{i=1}^9 \mu_i$).

.	σ	τ	γ
σ	$3(\sigma + \tau)$	$6\tau - 3\sigma + \gamma$	3γ
τ	$6\tau - 3\sigma + \gamma$	$3(\tau - 2\sigma) + 2\gamma$	0
γ	3γ	0	9γ

On s'intéresse plutôt aux valuations 3-adiques des coefficients dans l'expression de $\sigma^t \tau^u$ comme combinaison linéaire à coefficients entiers de σ, τ, γ . L'idée est de prouver que, si $\sigma^t \tau^u = y_1 \sigma + y_2 \tau + y_3 \gamma$, alors $\varepsilon(y_1 \sigma \chi, \psi)$, $\varepsilon(y_2 \tau \chi, \psi)$ et $\varepsilon(y_3 \gamma \chi, \psi)$ valent 1 (tout au moins si les valuations 3-adiques des y_i sont assez grands).

Le complexifié $T_{\mathbb{C}}$ de T est une $\mathbb{C}$ -algèbre de dimension 3, de base $\{\sigma, \tau, \gamma\}$. Si $x \in T$, on note φ_x l'endomorphisme de $T_{\mathbb{C}}$ défini par la multiplication avec x . Alors φ_{σ} et φ_{τ} sont des endomorphismes diagonalisables de $T_{\mathbb{C}}$ qui commutent entre eux. Il existe donc une base de $T_{\mathbb{C}}$ dans laquelle φ_{σ} et φ_{τ} sont diagonaux. Une telle base est la suivante :

$$e_1 = \gamma, \quad e_2 = \sigma + \omega\tau - \frac{1}{3}\gamma; \quad e_3 = \sigma + \omega^2\tau - \frac{1}{3}\gamma,$$

$$\text{où } \omega = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \exp\left(\frac{4\pi}{3}i\right).$$

Les matrices de φ_{σ} et φ_{τ} dans cette base sont (on note $\text{diag}(x_1, \dots, x_n)$ la matrice diagonale

avec la diagonale $(x_1, \dots, x_n)$:

$$D_\sigma = 3 \operatorname{diag}\left(1, \frac{3+i\sqrt{3}}{2}, \frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right); \quad D_\tau = 3i\sqrt{3} \operatorname{diag}(0, 1, -1).$$

On pose $\sigma^t \tau^u = y_1 \sigma + y_2 \tau + y_3 \gamma$, avec $y_i \in \mathbb{Z}$.

• Prenons $u = 0$ et $t \geq 3$. On a

$$\sigma^t = (\varphi_\sigma)^{t-1}(\sigma) = \varphi_{\sigma^{-1}}\left(\frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\exp\left(\frac{\pi i}{6}\right)e_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\exp\left(-\frac{\pi i}{6}\right)e_3\right).$$

Après des calculs qu'on omet ici, on obtient que :

- si t est pair, $t = 2g$ (avec $g \geq 2$), alors

$$y_1 = 3^{3g-2} p_1; \quad y_2 = 3^{3g-2} p_2; \quad y_3 = (3^{2g-2} - 3^{3g-3}) p_3,$$

où $p_i \in \{\pm 1, \pm 2\}$.

- si t est impair, $t = 2g + 1$ (avec $g \geq 1$), alors

$$y_1 = 3^{3g} q_1; \quad y_2 = 3^{3g} q_2; \quad y_3 = (3^{2g-1} - 3^{3g-1}) q_3,$$

où $q_i \in \{\pm 1, 0\}$.

• Prenons $u \geq 1$ et $t \geq 0$. Les cas

$$(u = 2, t = 0) \text{ et } (u = 1, t = 1)$$

seront traités ultérieurement. Le cas $u = 1, t = 0$ est déjà prouvé au 3.2.

On a

$$\sigma^t \tau^u = (\varphi_\sigma)^t (\varphi_\tau)^{u-1}(\tau) = (\varphi_\sigma)^t (\varphi_\tau)^{u-1} \left((i\sqrt{3})^{-1} (e_3 - e_2) \right) = y_1 \sigma + y_2 \tau + y_3 \gamma,$$

avec $y_i \in \mathbb{Z}$. Après des calculs, on obtient que :

- si u est pair, $u = 2h$ (avec $h \geq 1$), alors

$$y_1 = \begin{cases} 3^{3g+3h-2} p_1 & \text{si } t = 2g \ (g \geq 1) \\ 3^{3g+3h} q_1 & \text{si } t = 2g+1 \ (g \geq 0) \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 3^{3g+3h-2} p_2 & \text{si } t = 2g \ (g \geq 1) \\ 3^{3g+3h} q_2 & \text{si } t = 2g+1 \ (g \geq 0) \end{cases}; \quad y_3 = -\frac{1}{3} y_1$$

- si u est impair, $u = 2h + 1$ (avec $h \geq 0$), alors

$$y_1 = \begin{cases} 3^{3g+3h} p_1 & \text{si } t = 2g \ (g \geq 0) \\ 3^{3g+3h+1} q_1 & \text{si } t = 2g+1 \ (g \geq 0) \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 3^{3g+3h} p_2 & \text{si } t = 2g \ (g \geq 0) \\ 3^{3g+3h+1} q_2 & \text{si } t = 2g+1 \ (g \geq 0) \end{cases}; \quad y_3 = -\frac{1}{3} y_1$$

avec $p_i \in \{\pm 1, \pm 2\}$, $q_i \in \{\pm 1, 0\}$ (ce ne sont pas nécessairement les mêmes p_i et q_i pour tous les cas).

3.6. On s'occupe maintenant de $\varepsilon(3^r \gamma\chi, \psi)$, où r dépend de t et u , selon les formules du 3.5.

On a $\gamma = \sum_{i=1}^9 \mu_i = \sum_{i=1}^8 (1 - \eta_i)$ (on suppose que $\eta_9 = 1$). Les caractères η_i sont construits de la manière suivante :

On fixe un caractère non-trivial η de V . Alors η s'étend de manière unique à $*V \times V$ en imposant la condition que η soit trivial sur $*V$. On appelle toujours η l'inflation de ce caractère à H . On applique le même procédé à un caractère λ de $*V$ et on obtient un caractère non-trivial λ de H . Alors tout caractère η_i de H est de la forme $\eta^v \lambda^w$, avec $v, w \in \{0, 1, -1\}$.

Soient b et $c \in K$ tels que

$$\eta(Ex) = \psi(bx), \text{ pour tout } x \in K \text{ tel que } v_K(x) > \beta'/3,$$

$$\lambda(Ex) = \psi(cx), \text{ pour tout } x \in K \text{ tel que } v_K(x) > \beta'/3.$$

On rappelle que $\beta' = \max(\alpha(\eta), \alpha(\lambda))$. Alors l'élément b_i associé à $\eta_i = \eta^v \lambda^w$ (qui satisfait $\eta^v \lambda^w(Ex) = \psi(b_i x)$, pour tout $x \in K$ tel que $v_K(x) > \beta'/3$) est $vb + wc$. Si on applique la formule (2.2.1.) du ch. 1 pour $\varepsilon(\gamma\chi, \psi) = \prod_{i=1}^8 \varepsilon((1 - \eta_i)\chi, \psi)$, on obtient

$$\varepsilon(\gamma\chi, \psi) = \prod_{i=1}^8 \eta_i(a^{-1}) (\eta_i\chi)^{-1} \left(1 + \frac{b_i}{a}\right) \psi(b_i)$$

En regroupant chaque caractère avec son inverse, on remarque que $\prod_{i=1}^8 \eta_i(a^{-1}) \psi(b_i) = 1$.

Puisque les η_i sont des caractères d'ordre 3 et on s'intéresse à $\varepsilon^{3^r}(\gamma\chi, \psi)$, on omet les η_i . Il reste :

$$\varepsilon^{3^r}(\gamma\chi, \psi) = \chi^{-3^r} \left(\left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{b+c}{a}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{b-c}{a}\right)^2\right) \right),$$

en tenant compte de la forme des η_i . Posons $x = b/a$, $y = c/a$. On a

$$\begin{aligned} & (1 - x^2)(1 - y^2)(1 - (x+y)^2)(1 - (x-y)^2) = \\ & (1 - x^2 - y^2 + x^2 y^2)(1 - x^2 - y^2 + 2xy)(1 - x^2 - y^2 - 2xy) = \\ & (1 - x^2 - y^2)^3 + x^2 y^2 (1 - x^2 - y^2)^2 - 4x^2 y^2 (1 - x^2 - y^2 + x^2 y^2) = \\ & 1 - 3(x^2 + y^2) + 3(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)^3 + x^2 y^2 u_1 - 4x^2 y^2 u_2 = 1 + z \end{aligned}$$

où $z \in A_K$. On a noté $u_1 = (1 - x^2 - y^2)^2$ et $u_2 = (1 - x^2 - y^2 + x^2 y^2)$; ce sont des unités de A_K .

Les valuations de x et y sont supérieures à $\alpha - \beta'$, donc la formule ci-dessus montre que

$$v_K(z) \geq \min(2(\alpha - \beta') + e_K, 4(\alpha - \beta')),$$

où $e_K = v_K(3)$. On note $v = \min(2(\alpha - \beta') + e_K, 4(\alpha - \beta'))$.

Le but est de prouver que dans la somme $(1 + z)^{3^r} = 1 + \sum_{k=1}^{3^r} \binom{3^r}{k} z^k$, tous les termes sont

de valuation supérieure à α . On regarde donc $w = v_K \left(\left(\binom{3^r}{k} z^k \right) \right)$ pour $r \geq 1, 1 \leq k \leq 3^r$.

On examine maintenant tous les cas pouvant se présenter. On rappelle que $\beta' \leq 3e_K/2$ et que cela entraîne $2e_K + n(\alpha - \beta') > \alpha$, pour tout $n \geq 1$.

- Si $v = 2(\alpha - \beta') + e_K$, alors $w \geq e_K v_3 \left(\left(\binom{3^r}{k} \right) \right) + k(e_K + 2(\alpha - \beta')) > \alpha$. Ceci a toujours lieu, parce que : si $k \geq 2$, $ke_K > \beta'$; si $k = 1$, alors $v_3 \left(\left(\binom{3^r}{k} \right) \right) \geq 1$, d'après le LEMME du 3.4.

- Si $v = 4(\alpha - \beta')$, alors $w \geq e_K v_3 \left(\left(\binom{3^r}{k} \right) \right) + 4(\alpha - \beta') > \alpha$ si $k < 3^{r-1}$, car dans ce cas $v_3 \left(\left(\binom{3^r}{k} \right) \right) \geq 2$. On peut donc supposer que $k \geq 3^{r-1}$.

Si $3^{r-1} \leq k < 3^r$, alors $w \geq 3^{r-1} \cdot 4(\alpha - \beta') + e_K \geq 3^{r-1} \cdot 4(\alpha - \beta') + 2\beta'/3$. Mais $3^{r-1} \cdot 4(\alpha - \beta') + 2\beta'/3 > \alpha$ équivaut à $(3^r \cdot 4 - 2)(\alpha - \beta') > \alpha$.

Si $k = 3^r$, $w \geq 3^r \cdot 4(\alpha - \beta')$. Il suffit de prouver dans ce cas que $3^r \cdot 4(\alpha - \beta') > \alpha$.

Puisque $(2t + 3u)(\alpha - \beta') > \alpha$, il reste finalement à voir que

$$3^r \cdot 4 - 2 \geq 2t + 3u,$$

en remplaçant r par la valuation 3-adique du y_3 , le coefficient de γ donné par formules de 3.5. On distingue les cas suivants :

1. Si $u = 0$, $t = 2g$, ($g \geq 2$), alors $2t + 3u = 4g$ et $r = 2g - 2$. Il faut prouver que $3^{2g-2} \cdot 4 \geq 2 + 4g$, vrai pour $g \geq 2$.

2. Si $u = 0$, $t = 2g + 1$, ($g \geq 1$), alors $2t + 3u = 4g + 2$ et $r = 2g - 1$. Il faut prouver que $3^{2g-1} \cdot 4 \geq 4 + 4g$, vrai pour $g \geq 1$.

(On peut supposer donc que $u \geq 1$ pour les cas qui restent).

3. Si $u = 2h$, ($h \geq 1$), $t = 2g$, ($g + h \geq 2$ car le cas $u = 2$, $t = 0$ sera traité séparément), alors $2t + 3u = 4g + 6h$ et $r = 3g + 3h - 3$. Il faut voir que $3^{3g+3h-3} \cdot 4 \geq 4g + 6h + 2$, vrai pour $g + h \geq 2$.

4. Si $u = 2h$, ($h \geq 1$), $t = 2g + 1$ ($g \geq 0$), alors $2t + 3u = 4g + 6h + 2$ et $r = 3g + 3h - 1$. Il faut prouver que $3^{3g+3h-1} \cdot 4 \geq 4g + 6h + 4$, vrai pour $g \geq 0$, $h \geq 1$.

5. Si $u = 2h + 1$, ($h \geq 0$), $t = 2g$ ($g \geq 0$), alors $2t + 3u = 4g + 6h + 3$ et $r = 3g + 3h - 1$. Il faut prouver que $3^{3g+3h-1} \cdot 4 \geq 4g + 6h + 5$. Le cas $h = 0$, $g = 0$ a été déjà prouvé. Si $h \geq 0$, $g \geq 1$, l'inégalité est vérifiée.

6. Si $u = 2h + 1$, ($h \geq 0$), $t = 2g + 1$ ($g \geq 0$), alors $2t + 3u = 4g + 6h + 5$ et $r = 3g + 3h$. Il faut prouver que $3^{3g+3h} \cdot 4 \geq 4g + 6h + 7$. Le cas $h = 0$, $g = 0$ sera examiné ultérieurement. Si $h \geq 0$, $g \geq 0$, $h + g \geq 1$, l'inégalité est vérifiée.

3.7. On regarde $\varepsilon(3^r \sigma \chi) = \varepsilon^{3^r}((3 - \text{Ind}_L^K \xi) \chi)$ et $\varepsilon(3^r \tau \chi)$. On a

$$3 + \text{Ind}_L^K \xi = 3 - \text{Ind}_L^K 1_L + \text{Ind}_L^K (1 - \xi)$$

Soit $\theta = \text{Ind}_L^K 1_L = \text{Ind}_U^H 1_L$, où $U = {}^*V \times Z$. C'est une représentation de H , donc elle est une combinaison linéaire de ρ , ρ^{-1} et η_i , $1 \leq i \leq 9$. On a

$$(\theta, \rho)_H = (1_U, \rho|_U)_U = \frac{1}{9} \sum_{u \in U} \chi_\rho(u) = \frac{3}{9} \sum_{z \in Z} \zeta(z) = 0 \text{ et de même pour } \rho^{-1}.$$

Si η est un caractère de H , alors

$$(\theta, \eta)_H = (1_U, \eta|_U)_U = \frac{1}{9} \sum_{(y,z) \in U} \eta(y, z) = \begin{cases} 0 & \text{si } \eta|_{{}^*V} \neq 1 \\ 1 & \text{si } \eta|_{{}^*V} = 1 \end{cases}$$

Donc $\theta = 1 + \eta + \eta^{-1}$, où η est un caractère de ${}^*V \times V$, trivial sur *V . On écrit alors

$$\varepsilon(\sigma \chi) = \varepsilon((1 - \eta) \chi, \psi) \varepsilon((1 - \eta^{-1}) \chi, \psi) \varepsilon((1 - \xi) \chi \circ N, \psi \circ \text{Tr}),$$

avec $N = N_{L/K}$, $\text{Tr} = \text{Tr}_{L/K}$, $\psi_L = \psi_{L/K}$.

Maintenant on s'occupe de $\varepsilon^{3^r}((1 - \eta) \chi, \psi) \varepsilon^{3^r}((1 - \eta^{-1}) \chi, \psi)$, où r est fonction de t et u .

En appelant a et b les éléments associés à χ , respectivement à η , ceci vaut

$$\chi^{3^r} \left(\left(1 + \frac{b}{a} \right) \left(1 - \frac{b}{a} \right) \right) \psi(b) \psi(-b) = \chi^{3^r} \left(\left(1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right) \right)$$

Notant $x = -(b/a)^2$, on a $v_K(x) \geq 2(\alpha - \beta')$; $\chi(1+x)^{3^r} = \chi \left(1 + \sum_{k=1}^{3^r} \binom{3^r}{k} x^k \right)$. La valuation w du terme $\binom{3^r}{k} x^k$ (pour $k < 3^{r-1}$) est plus grande que α , car $v_K \left(\binom{3^r}{k} \right) \geq 2e_K > \beta'$. Si $k \geq 3^{r-1}$, il faut faire une discussion selon les cas décrits au 3.5., similaire à celle du 3.6 (r est la valuation 3-adique de y_1 , le coefficient de σ donné par formules de 3.5).

Si $k = 3^r$, $w \geq 3^r \cdot 2(\alpha - \beta')$. Il suffit de prouver dans ce cas que $3^r \cdot 2(\alpha - \beta') > \alpha$.

Si $3^{r-1} \leq k < 3^r$, alors $w \geq 3^{r-1} \cdot 2(\alpha - \beta') + e_K \geq 3^{r-1} \cdot 2(\alpha - \beta') + 2\beta'/3$. Mais $3^{r-1} \cdot 2(\alpha - \beta') + 2\beta'/3 > \alpha$ équivaut à $(3^r \cdot 2 - 2)(\alpha - \beta') > \alpha$.

Puisque $(2t + 3u)(\alpha - \beta') > \alpha$, en fin de compte il suffit de prouver que

$$3^r \cdot 2 \geq 2t + 3u + 2,$$

où $r = v_3(y_1)$. On a même $3^r \geq 2t + 3u + 2$. En effet, avec la même méthode qu'au 3.6, on a :

1. Si $u = 0$, $t = 2g$, ($g \geq 2$), alors $2t + 3u = 4g$ et $r = 3g - 2$. Il faut prouver que $3^{3g-2} \geq 2 + 4g$, vrai pour $g \geq 2$.

2. Si $u = 0$, $t = 2g + 1$, ($g \geq 1$), alors $2t + 3u = 4g + 2$ et $r = 3g$. Il faut prouver que $3^{3g} \geq 4 + 4g$, vrai pour $g \geq 1$.

(On peut supposer donc que $u \geq 1$ pour les cas qui restent).

3. Si $u = 2h$, ($h \geq 1$), $t = 2g$, ($g + h \geq 2$ car le cas $u = 2$, $t = 0$ sera traité séparément), alors

$2t + 3u = 4g + 6h$ et $r = 3g + 3h - 2$. Il faut voir que $3^{3g+3h-2} \geq 4g + 6h + 2$, vrai pour $g + h \geq 2$.

4. Si $u = 2h$, ($h \geq 1$), $t = 2g + 1$ ($g \geq 0$), alors $2t + 3u = 4g + 6h + 2$ et $r = 3g + 3h$. Il faut prouver que $3^{3g+3h} \geq 4g + 6h + 4$, vrai pour $g \geq 0$, $h \geq 1$.

5. Si $u = 2h + 1$, ($h \geq 0$), $t = 2g$ ($g \geq 0$), alors $2t + 3u = 4g + 6h + 3$ et $r = 3g + 3h$. Il faut prouver que $3^{3g+3h} \geq 4g + 6h + 5$. Le cas $h = 0$, $g = 0$ a été déjà prouvé. Si $h \geq 0$, $g \geq 1$, l'inégalité est vérifiée.

6. Si $u = 2h + 1$, ($h \geq 0$), $t = 2g + 1$, ($g \geq 0$), alors $2t + 3u = 4g + 6h + 5$ et $r = 3g + 3h + 1$. Il faut prouver que $3^{3g+3h+1} \geq 4g + 6h + 7$. Le cas $h = 0$, $g = 0$ sera examiné ultérieurement. Si $h \geq 0$, $g \geq 0$, $h + g \geq 1$, l'inégalité est vérifiée.

On vient de prouver que $\varepsilon^{3^r}((1 - \eta)\chi, \psi)\varepsilon^{3^r}((1 - \eta^{-1})\chi, \psi) = 1$.

Prouvons que $\varepsilon^{3^r}((1 - \xi)\chi \circ N, \psi \circ \text{Tr})$ vaut 1. On pose $\delta = \alpha(\xi)$; on a

$$\delta \leq \min(3e_L/2, \psi_L(\beta)) \text{ et } \alpha(\chi \circ N) = \psi_L(\alpha).$$

En outre, l'inégalité $(2t + 3u)(\alpha - \beta) > \alpha$ entraîne $(2t + 3u)(\psi_L(\alpha) - \psi_L(\beta)) > \psi_L(\alpha)$, donc aussi

$$(2t + 3u)(\psi_L(\alpha) - \delta) > \psi_L(\alpha).$$

On fixe les éléments a' et b' de L tels que

$$\xi(\text{Ex}) = \psi \circ \text{Tr}(b'x), \text{ pour tout } x \in L \text{ tel que } v_L(x) > \delta/3,$$

$$\chi \circ N(\text{Ex}) = \psi \circ \text{Tr}(a'x), \text{ pour tout } x \in L \text{ tel que } v_L(x) > \psi_L(\alpha)/3.$$

On a $\varepsilon^{3^r}((1 - \xi)\chi \circ N, \psi \circ \text{Tr}) = \chi^{-3^r} \circ N\left(\left(1 + \frac{b'}{a'}\right)\right) \psi \circ \text{Tr}(3^r b')$, où l'on a omis ξ puisque

c'est un caractère d'ordre 3.

Mais $v_L(3^r b'/a') \geq e_L + \psi_L(\alpha) - \delta > \psi_L(\alpha)/2$, donc on a $\psi \circ \text{Tr}\left(a' 3^r \frac{b'}{a'}\right) = \chi \circ N\left(1 + 3^r \frac{b'}{a'}\right)$.

Posons $y = \frac{b'}{a'}$. En reportant dans la formule du facteur ε , on obtient

$$\varepsilon^{3^r}((1 - \xi)\chi \circ N, \psi \circ \text{Tr}) = \chi^{-1} \circ N\left((1 + y)^{3^r} (1 + 3^r y)^{-1}\right) = \chi \circ N^{-1}\left(1 + \sum_{k=2}^{3^r} \binom{3^r}{k} \frac{y^k}{1 + 3^r y}\right).$$

On a $v_L(y) \geq \psi_L(\alpha) - \delta$, donc $v_L\left(\binom{3^r}{k} \frac{y^k}{1 + 3^r y}\right) = v_3\left(\binom{3^r}{k}\right)e_L + k(\psi_L(\alpha) - \delta)$. On note cette

dernière valeur par w et on aimerait que cela soit supérieur à $\psi_L(\alpha)$, ce qui est vrai si $k < 3^{r-1}$.

Si $k = 3^r$, $w \geq 3^r(\psi_L(\alpha) - \delta)$. Il suffit donc de prouver dans ce cas que $3^r > 2t + 3u$.

Si $3^{r-1} \leq k < 3^r$, alors $w \geq 3^{r-1}(\psi_L(\alpha) - \delta) + e_L \geq 3^{r-1}(\psi_L(\alpha) - \delta) + 2\delta/3$. Mais $3^{r-1}(\psi_L(\alpha) - \delta) + 2\delta/3 > \psi_L(\alpha)$ est impliqué par $3^r - 2 > 2t + 3u$.

En fin de compte il suffit de prouver que

$$3^r \geq 2t + 3u + 2,$$

où $r = v_3(y_1)$, ce qui a déjà été fait.

Ceci achève la démonstration de l'égalité $\varepsilon(y_1 \sigma \chi) = 1$, si $(2t + 3u)(\alpha - \beta) > \alpha$. La même démonstration vaut pour démontrer que $\varepsilon(y_2 \sigma^\vee \chi) = 1$ dans les mêmes conditions. Puisque $v_3(y_2) = v_3(y_1)$ (voir 3.5), et $\tau = \sigma - \sigma^\vee$, on obtient alors que $\varepsilon(y_2 \tau \chi) = 1$ également.

3.8. Il reste à traiter les cas $(u = 2, t = 0)$ et $(u = 1, t = 1)$, c'est-à-dire à démontrer que

$$6(\alpha - \beta) > \alpha \text{ implique } \varepsilon(\tau^2 \chi) = 1 \quad (\text{A})$$

et

$$5(\alpha - \beta) > \alpha \text{ implique } \varepsilon(\sigma \tau \chi) = 1. \quad (\text{B})$$

Supposons que (A) soit vraie. Alors (B) est vraie aussi. En effet, on a

$$\varepsilon(\tau^2 \chi) \varepsilon(\sigma \tau \chi) = \varepsilon((\tau^2 + \sigma \tau) \chi) = \varepsilon((9\tau - 9\sigma + 3\gamma) \chi) = \varepsilon^9(\tau \chi) \varepsilon^{-9}(\sigma \chi) \varepsilon^3(\gamma \chi), \quad (3.8.1.)$$

en utilisant la table de multiplication pour τ^2 et $\sigma \tau$.

Mais $\varepsilon^9(\sigma \chi) = 1$ si $6(\alpha - \beta) > \alpha$ puisque dans ce cas ($r = 2, 2t + 3u = 6$) il faut vérifier que $3^r \geq 2t + 3u + 2$, i.e. $9 \geq 8$, vrai.

On a aussi $\varepsilon^9(\sigma^\vee \chi) = 1$ si $6(\alpha - \beta) > \alpha$, donc $\varepsilon^9(\tau \chi) = 1$.

Pour prouver que $\varepsilon^3(\gamma \chi) = 1$, il faut s'assurer que $3^r \cdot 4 - 2 \geq 2t + 3u$ (voir 3.6), dans les conditions $r = 1, 2t + 3u = 6$, ce qui est évident.

En somme, on a $\varepsilon(\tau^2 \chi) \varepsilon(\sigma \tau \chi) = 1$ si $6(\alpha - \beta) > \alpha$. Donc, si (A) est vraie et $5(\alpha - \beta) > \alpha$, alors à plus forte raison $6(\alpha - \beta) > \alpha$ et donc $\varepsilon(\tau^2 \chi) = 1 = \varepsilon(\sigma \tau \chi)$.

Ainsi, il faudrait prouver l'assertion (A) pour une preuve complète de la conjecture dans le cas particulier de ce groupe de Heisenberg.

BIBLIOGRAPHIE

- [At-Ta] M. ATIYAH and D.O. TALL : Group representations, λ -rings and the J -homomorphism, *Topology* **8** (1969), 253-297.
- [Bolt] R. BOLTJE : A Canonical Brauer Formula, *Astérisque* **181-182** (1990), 31-59.
- [Cu-Re] C.W. CURTIS and I. REINER : *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Wiley & Sons, New York, 1962.
- [Deli] P. DELIGNE : Les constantes locales des équations fonctionnelles des fonctions L , in *Modular Functions of One Variable II*, Lectures of Math. **349**, 501-597, Springer Verlag 1973.
- [De-He] P. DELIGNE et G. HENNIART : Sur la variation, par torsion, des constantes locales d'équations fonctionnelles de fonctions L , *Inv. Math.* **64** (1981), 88-118.
- [Fu-La] W. FULTON, S. LANG : *Riemann-Roch Algebra*, Springer Verlag 1985.
- [Géra] P. GÉRARDIN : Weil Representations Associated to Finite Fields, *Journal of Algebra* **46**(1977), 54-101.
- [Henn] G. HENNIART : Représentations du groupe de Weil d'un corps local, *L'Enseignement mathématique*, T. XXVI, fasc1-2 (1980) 155-172.
- [Hupp] B. HUPPERT : *Endliche Gruppen I*, Springer Verlag 1967.
- [Serr] J.-P. SERRE : *Corps locaux*, 2-ème édition, Publ. Inst. Math. Nancago, Hermann, Paris 1968.
- [Weil] A. WEIL : *Basic Number Theory*, in Grundlehren der Math. Wiss., Springer Verlag 1973.