

THÈSES D'ORSAY

LAURE QUIVY

Modélisation, analyse mathématique et simulations numériques de systèmes dynamiques complexes intervenant en ferrorésonance

Thèses d'Orsay, 1991

http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1991__0297__P0_0

L'accès aux archives de la série « Thèses d'Orsay » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



NUMDAM

*Thèse numérisée par la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016
et diffusée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

UNIVERSITÉ de PARIS-SUD

Centre d'ORSAY

THÈSE

Présentée

Pour obtenir

le Grade de Docteur en Sciences

Spécialité : **Mathématiques**

par

LAURE QUIVY



Sujet : **Modélisation, analyse mathématique et simulations numériques
de systèmes dynamiques complexes intervenant en
ferrorésonance**

soutenue le **26 Septembre 1991** devant la Commission d'examen

MM.

Roger TEMAM,
Jean-Michel GHIDAGLIA
Jean-Pierre KERNEVEZ
Christophe KIENY
Michel POLOUJADOFF
Robert ROUSSARIE
Jean ROUX

Président

Je tiens avant tout, à remercier monsieur Jean-Michel GHIDAGLIA pour la confiance qu'il m'a témoignée en acceptant de diriger cette thèse. C'est grâce à son aide et ses encouragements, accompagnés d'une gentillesse et d'une générosité permanentes, que ce travail a pu être mené à termes. Je suis heureuse de pouvoir lui témoigner ici, ma gratitude et mon amitié.

C'est un honneur pour moi d'adresser mes vifs remerciements à monsieur Roger TEMAM qui m'a fait l'honneur de présider le jury et d'être rapporteur. Je n'oublie pas qu'il m'a acceptée dans son laboratoire guidant ainsi mes premiers pas dans la recherche.

Ma reconnaissance va également à monsieur Christophe KIENY qui, à l'origine de l'étude demandée, l'a constamment guidée de ses précieux conseils, ne ménageant pas son temps; il a d'autre part manifesté une grande patience à mon égard lors notamment de nos nombreuses discussions relevant parfois de connaissances physiques qui m'étaient inconnues.

Je remercie Monsieur Robert ROUSSARIE qui a eu la gentillesse de bien vouloir se pencher sur mes travaux et d'accepter d'en être le rapporteur; j'ai toujours trouvé auprès de lui le meilleur accueil tout en bénéficiant de ses conseils éclairés.

Messieurs Michel POLOUJADOFF, Jean-Pierre KERNEVEZ et Jean ROUX ont accepté de faire partie de mon jury; qu'ils veuillent bien trouver ici l'expression de ma respectueuse gratitude pour la bienveillance qu'ils m'ont témoignée au cours de ce travail. Les discussions que j'ai eu avec chacun d'eux se sont toujours révélées très utiles.

La Division des Etudes et Recherches d'EdF m'a chaleureusement accueillie et je l'en remercie vivement; j'ai ainsi pu bénéficier des meilleures conditions de travail, dans une ambiance à la fois enrichissante et sympathique. Un grand merci enfin à tous les membres du laboratoire d'Analyse Numérique d'Orsay et du CMLA pour leurs aide, soutien, bienveillance et leur bonne humeur.

This thesis, divided in four parts, describes and analyses problems of ferroresonance encountered by engineers on non linear networks. This study relies on the mathematical theory of bifurcation. In the first part, the physical system is described and modeled by a system of non linear, parametrized ordinary differential equations with a damped periodic term. The second chapter describes the mathematical principles necessary for the study and for the understanding of these dynamic non linear system. Also described are the works of Floquet and Lyapunov, some different definitions of stability and the different types of bifurcations which can appear. In the third part, we describe and analyse different solutions obtained for certain ferroresonant models. We exhibit a bifurcation of a periodic solution into a quasi-periodic solution, when the damped term increases, and compute Lyapunov exponents for studying the stability. Certain numerical studies are done using "Auto", a program composed of sophisticated mathematical routines developed using the theory of bifurcation, and allowing one to obtain bifurcation diagrams and bifurcation lines for non linear dynamic systems. Finally, the goal of the last chapter is to present a mathematical study of the asymptotic behavior of the telegraph equations. These hyperbolic partial differential equations describe the behavior of a line located between a periodic source and a non linear element. We show that the behavior of the trajectories of the solutions are described by an attractor.

TABLE DES MATIERES

Table des matières	1
Introduction	3
Chapitre I : Le problème physique: Etude électrotechnique du phénomène. Modélisation.	11
Chapitre II : Rappels des différentes notions utiles pour l'étude des systèmes dynamiques; stabilité et bifurcations	65
Chapitre III : Etude numérique des différents cas de systèmes ferrorésonants. Présentation et utilisation du logiciel AUTO.	99
Pseudo-periodic Ferroresonant Solutions Stability in Power Network. Application of Bifurcation Theory and Lyapunov Exponents	145
Chapitre IV : Etude du comportement asymptotique des solutions d'une équation hyperbolique intervenant dans les réseaux ferrorésonants.	157

INTRODUCTION GENERALE

L'étude des systèmes dynamiques non linéaires a connu un essor important durant ces dernières années, dans des domaines variés de la physique, de la biologie, de la chimie...

De ces études est née la théorie des bifurcations et des catastrophes, source de nouveaux concepts et de méthodes adaptées pour l'analyse des comportements asymptotiques des trajectoires solutions de tels systèmes. ([B.P.V], [G.H], [M], [T2]).

Le phénomène physique traité dans cette thèse a été constaté par les électrotechniciens d'EDF lors d'un essai de réalimentation des auxiliaires d'une centrale nucléaire à partir d'une centrale hydraulique séparés par une ligne longue; il s'est traduit par un accroissement aberrant et inhabituel de la tension du réseau, pouvant devenir dangereux pour le matériel: c'est le premier effet "ferrorésonant" rencontré sur ce type de réseau.

La ferrorésonance est un phénomène pouvant intervenir sur tout réseau électrique à dominante capacitive, en interaction avec un élément non linéaire ferromagnétique([K]); elle se caractérise par la possibilité d'existence de plusieurs régimes stables pour un même jeu de paramètres définissant le circuit, et une grande sensibilité d'apparition de ces régimes aux conditions initiales, aux paramètres du circuit et à la configuration du réseau.

Un tel réseau peut se modéliser par une équation aux dérivées partielles (EDP) comportant des conditions de bords non linéaires; par une discrétisation en espace de cette dernière ou en transposant le réseau en un circuit électrique comme ont l'habitude de le faire les électrotechniciens, la modélisation aboutit à une équation différentielle ordinaire (EDO) non linéaire. Ces deux types d'équations régissent le comportement des grandeurs caractéristiques (flux, tensions, courants) en fonction du temps, et rentrent bien dans le cadre des systèmes dynamiques précédemment cités. Il est maintenant bien connu que de tels systèmes peuvent être l'objet de comportements différents suivant les valeurs des conditions initiales ou des paramètres caractéristiques du réseau.

En particulier, il est possible d'observer des "sauts" de la solution d'un régime à un autre, lors d'une petite variation d'un des paramètres. Pour le cas physique évoqué, c'est à l'occasion d'une montée progressive de la tension d'alimentation qu'une modification brutale de la tension aux bornes du transformateur s'est produite. Il n'est pas exclu, en outre, que ces systèmes dynamiques soient le siège de phénomènes chaotiques qui bien que non aléatoires en théorie, sont impossibles à prédire.

Le but de notre travail est de mettre en évidence ces phénomènes ferrorésonants pour des modèles discrets (EDO) les plus simples possibles; ainsi, une étude du comportement des trajectoires solutions par utilisation de méthodes numériques issues de la théorie des bifurcations, à l'aide du logiciel AUTO, pourra être réalisée. D'autre part, une étude théorique du système continu (EDP) permettra de prouver l'existence

et l'unicité d'une solution ainsi que des résultats de régularité prouvant à leur tour l'existence d'un attracteur maximal attirant toutes les trajectoires, pour le flot périodique associé au problème.

Cette thèse est divisée en quatre parties:

Dans un premier temps, on présentera le système physique sur lequel est apparu un cas sérieux de ferrorésonance. Une modélisation de chaque partie du réseau, par des techniques relevant de l'électrotechnique, permettra de traduire le problème proposé en termes d'un système dynamique, d'équations différentielles non linéaires, non autonomes de la forme

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \lambda, t)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des variables d'état contenant les grandeurs physiques (flux, tensions, courants) apparaissant sur le réseau, $\lambda \in \mathbb{R}^p$ est un vecteur contenant les différents paramètres caractérisant le réseau, $t \in \mathbb{R}$ représente le temps, $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ symbolise le flot définissant l'état du système. F est une fonction continue par rapport à chacune de ses variables.

Une modélisation brutale du réseau nous conduit à travailler avec un système opérant sur un nombre de degrés de liberté important (treize). Une simplification du circuit modèle s'est donc révélée inévitable, d'autant que sur ce nombre conséquent d'équations différentielles, seules trois d'entre elles sont non linéaires et non autonomes; on montrera que ce sont ces trois équations qui sont à l'origine des résultats rencontrés relevant de la théorie du chaos. Pour réaliser ces simplifications, dans un premier temps, nous avons choisi de supprimer les paramètres du circuit construit dont l'effet a été jugé négligeable; ce jugement est basé sur des règles utilisées par les physiciens. Ensuite, en raisonnant par des modèles physiques équivalents (en utilisant le théorème de Thévenin, ou encore par simplification du circuit en imposant à certaines quantités qui nous ont semblées fondamentales pour l'apparition du phénomène ferrorésonant de rester invariantes sous l'effet de cette transformation), on montrera qu'effectivement, toute "l'information" source des phénomènes observés est concentrée dans trois équations différentielles du premier ordre, modélisant le plus simple des circuits parallèles (la capacité est en parallèle avec l'inductance). Plus précisément, il représente une cellule R.L.C placée entre une source de tension périodique en temps et une inductance non linéaire.

Nous ferons alors le rapprochement avec le système obtenu par discrétisation de l'équation aux dérivées partielles exposée et étudiée au chapitre IV, et décrivant le comportement des grandeurs physiques présentes sur une ligne électrique longue placée entre un alternateur et un transformateur.

Dans un deuxième chapitre, nous ferons de brefs rappels des notions fondamentales utiles lors de l'analyse des systèmes dynamiques non linéaires, et pour lesquels on souhaite connaître l'évolution des trajectoires

solutions, pour de grands temps, et ce, éventuellement en fonction d'un ou de plusieurs paramètres. Nous ne prétendons pas présenter tous les résultats obtenus dans ce domaine (on pourra, par exemple, consulter [G.H], [H], [W], [P.M], [H.S]...) mais donner les notions utilisées. Après avoir rappelé comment étudier le comportement de solutions lorsque le système est linéaire, nous présenterons la théorie de Floquet ([R]), indispensable dans le cas périodique. Les notions de stabilité seront présentées et nous verrons comment, sur ces deux types de systèmes, la simple connaissance de grandeurs caractéristiques (valeurs propres ou multiplicateurs de Floquet) permet de détecter cette stabilité. Dans le cas non linéaire qui nous intéresse ici, nous utiliserons les notions de bornés absorbants et d'attracteurs, objets attirant exponentiellement les trajectoires d'un système donné. Nous verrons également l'intérêt d'utiliser les sections de Poincaré ainsi que les exposants de Lyapunov. Dans une deuxième section, nous nous intéresserons à la théorie des bifurcations, les équations traitées dépendant de un ou plusieurs paramètres. Elle découle principalement du théorème des fonctions implicites, dont nous rappelons une des formes ici. Suivant les singularités rencontrées, ces bifurcations peuvent être de types différents, mais sont toutes cataloguées et en nombre fini. Il est possible de les détecter numériquement et de suivre les différentes branches de solutions issues de ces points critiques par des méthodes de continuation. Ainsi, des diagrammes représentant les différentes branches de solutions en fonction du paramètre pourront être construits.

C'est l'objet du troisième chapitre, au début duquel nous présenterons un logiciel universitaire, développé au Canada par E. Doedel ([D]): AUTO. Il regroupe une riche bibliothèque de méthodes numériques basées sur la théorie des bifurcations et permet de tracer diagrammes et lignes de bifurcation correspondant à un système donné. Ce logiciel, fonctionnant actuellement sur le CRAY d'EDF, sera utilisé tel quel ou accompagné de développements supplémentaires lors de l'étude sur une coupe de Poincaré notamment.

Nous présenterons ensuite les différents résultats obtenus numériquement sur les modèles présentés au premier chapitre. Nous validerons dans un premier temps les simplifications réalisées après avoir constaté que qualitativement le diagramme de bifurcation est conservé, tout au moins au voisinage des valeurs de paramètres physiquement intéressantes. Ensuite, grâce à l'étude des lignes de bifurcations (poursuite d'un point singulier en fonction de deux paramètres), nous mettrons en évidence des ensembles, fermés ou non, délimitant les zones critiques de celles pour lesquelles le régime est normal. Ainsi, moyennant les approximations inévitables dues à la modélisation, l'exploitant sera en mesure de connaître plusieurs jeux de paramètres pour lesquels il sera assuré d'obtenir un régime classique.

Enfin, dans un quatrième et dernier chapitre, nous nous intéresserons au comportement des solutions de l'équation aux dérivées partielles, modélisant les renvois de tension ferro-résonants:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= ri + l \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial x} &= li + c \frac{\partial v}{\partial t}\end{aligned} \quad x \in [0, L], \quad t \in]0, T[$$

$$i(0, t) = f(\varphi)$$

$$v(0, t) = \frac{d\varphi}{dt} + \sigma i(0, t)$$

$$v(L, t) = E(t)$$

$$v(x, 0) = v_0(x)$$

$$i(x, 0) = i_0(x)$$

où l, r, c, g, σ, L, T sont des constantes positives caractérisant le réseau, les conditions initiales i_0, v_0 étant données.

Les grandeurs inconnues $i(x, t), v(x, t), \varphi(t)$ représentent respectivement le courant, la tension et le flux sur la ligne, E est une fonction périodique (de période τ) de régularité au moins C^3 à valeurs réelles et représente la tension d'alimentation fournie au réseau et f est la fonction décrivant la caractéristique non linéaire du transformateur; elle est de classe au moins C^3 à valeurs réelles; elle est souvent représentée par une fonction polynômiale de degré impair.

Le but de notre étude est d'obtenir des résultats concernant le comportement asymptotique (pour $t \rightarrow \infty$) des solutions de ce problème. Nous allons montrer que suivant les propriétés satisfaites par les conditions aux bords, le comportement des trajectoires solutions est décrit par un attracteur capturant toutes les trajectoires.

Après avoir obtenu des résultats de régularité sur ces solutions et des estimations sur les termes de bord, nous serons en mesure de définir une fonctionnelle linéaire permettant de passer continuellement des conditions initiales et limites aux quantités sur les bords $\frac{\partial i}{\partial t}(0, t)$ et $\frac{\partial v}{\partial t}(0, t)$. Cette fonctionnelle est continue de $(H^1(0, L))^2 \times (W^{2,2}(0, T))^2$ dans $L^2(0, L)$ et permet de ramener l'étude du problème non linéaire à un problème de détermination d'un point fixe d'une application liant le problème linéaire au problème non linéaire.

Ceci nous amènera à conclure sur l'existence locale puis globale d'une solution au problème non linéaire qui constituera le :

Théorème 1.3 :

$$\begin{aligned}E &\in W^{2,2}(\mathbb{R}^+) \\ (i_0, v_0) &\in (H^1(0, L))^2\end{aligned}$$

le problème ci-dessus possède une solution (i, v) satisfaisant

$$\begin{aligned}(i, v) &\in (C(\mathbb{R}^+, H^1(0, L)))^2 \\ \text{avec } \varphi &\in W^{2,2}(\mathbb{R}^+)\end{aligned}$$

Nous serons alors en mesure de définir une famille d'opérateurs non linéaires et périodiques $S(t, 0)$ qui aux conditions initiales (i_0, v_0) associe le couple $(i(t), v(t))$ solution au temps t . Nous nous intéresserons alors au comportement pour des grands temps de la quantité $S(t, 0)(i_0, v_0)$ et ce, quelles que soient les conditions initiales. L'obtention de bornes uniformes en temps sur ces quantités prouvera l'existence de bornés absorbants B_ε pour ce flot, vérifiant

$$S(t, s)B \subset B_\varepsilon \quad \text{pour } t-s \geq t_0(B)$$

pour tout ensemble borné B vivant dans le même espace métrique que B_ε , $t_0(B)$ étant une constante dépendant de B .

Ces bornés absorbants existent dans les espaces $H^1(0, L)$, $H^2(0, L)$ si les conditions initiales sont dans $H^1(0, L)$; les trajectoires solutions, issues de tout point demeurant dans ces bornés, ne peuvent quitter cet ensemble. Au borné absorbant B_2 dans H^2 est associé un ensemble oméga-limite qui nous permettra de prouver l'existence d'un attracteur maximal faible dans H^2 , attirant toutes les trajectoires de $S(t, s)$. Cela fera l'objet du

Théorème 2.1: L'ensemble

$$\mathcal{Q} = \omega(B_2)$$

satisfait aux propriétés suivantes:

- . $\mathcal{Q}$ est borné et faiblement fermé dans $(H^2(0, L))^2$
- . $S(m\tau, 0)\mathcal{Q} = \mathcal{Q} \quad \forall m \in \mathbb{Z}$
- . $\forall t, s \in \mathbb{R}$, pour tout borné B de $(H^2(0, L))^2$,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \delta(S(t+m\tau, s)B, S(t, 0)\mathcal{Q}) = 0$$

Cette étude est basée sur les travaux de J.M. Ghidaglia et R. Temam [G.T] et [T]; les différentes notions s'y rattachant sont aussi présentées dans le livre de Haraux ([H]).

BIBLIOGRAPHIE

- [B.P.V] P. BERGE, Y. POMEAU, C. VIDAL
L'ordre dans le chaos
Herman
- [G] J.M. GHIDAGLIA
Finite dimensional behavior for weakly damped driven Schrödinger equations
Ann. Inst. Henri Poincaré. Vol 5, n°4, 1988, p365.405.
- [G.T] J.M.GHIDAGLIA, R. TEMAM
Periodic Dynamical System with application to Sine-Gordon equations: Estimate on the fractal dimension of the universal attractor
Contemporary Mathematics. Vol 99, 1989
- [K] C. KIENY
Etat de l'art
Note EDF. HM-18/014 (juin 88)
- [G.H] J. GUCKENHEIMER, P.HOLMES
Non linear oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of vector Fields
Springer Verlag. AMS-42.
- [H] HARAUX
Systèmes dynamiques dissipatifs.
Masson (1990)
- [H.S] M.W. HIRSCH, S. SMALE
Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra.
Academic Press. New York, 1974.
- [M] B. MENDELBROT
Fractals: Form, Chance and dimension
Freeman, San Francisco, 1972.

- [P.M] J. PALIS , W.de MELO
Geometric theory of dynamical systems: an introduction.
Springer Verlag, New York, 1982.
- [R] M. ROSEAU
Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité.
Springer Verlag, Berlin, Heidelberg. New York, 1986.
- [T] R. TEMAM
Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics
Springer Verlag. AMS-68.
- [T2] R. THOM
Paraboles et catastrophes
Champs. Flammarion (1980)
- [W] S. WIGGINS
Global bifurcations and chaos
Springer Verlag. AMS-73.

CHAPITRE I

LE PROBLEME PHYSIQUE:

ETUDE ELECTROTECHNIQUE DU PHENOMENE.

MODELISATION

SOMMAIRE

0. INTRODUCTION. DEFINITION ET ETAT DE L'ART

- 0.1. Définition
- 0.2. Présentation des différents cas réels de ferorésonance
- 0.3. Etat de l'art
- 0.4. Plan d'étude

1. MODELISATION DU RENVOI DE TENSION ENTRE CHASTANG ET CHINON

- 1.1. Description du réseau
- 1.2. Les lignes
- 1.3. L'autotransformateur de Distré
- 1.4. L'autotransformateur de Breuil
- 1.5. L'alternateur de Chastang
- 1.6. Les deux transformateurs de Chinon
 - 1.6.1. Le modèle proposé
 - 1.6.2. La self non linéaire
- 1.7. Modélisation des pertes
- 1.8. La renormalisation
- 1.9. Le schéma final

2. MISE EN EQUATION DU MODELE PROPOSE ET REDUCTION DE LA DIMENSION DU PROBLEME ETUDIE

- 2.1. Le système complet de dimension treize
- 2.2. Réduction de la dimension. Elimination de certains paramètres. Détermination des modèles équivalents.
 - 2.2.1. Calcul des impédances dans les différentes branches
 - 2.2.2. Le modèles 8D, 7D et 5D
 - 2.2.3. Détermination d'un modèle 3D équivalent

2.3. Etude des invariants du système

2.4. Cas de la ligne longue

2.4.1. L'équation des télégraphistes

2.4.2. Discrétisation en espace

2.4.3. Modélisation plus fine des éléments d'extrémités (transformateur et générateur)

0. INTRODUCTION. DEFINITION ET ETAT DE L'ART

0.1. Définition

La ferrorésonance est un phénomène apparaissant étrange aux électrotechniciens - car peu courant et d'un concept particulier - que l'on peut rencontrer sur des réseaux de transport et de distribution de l'électricité, alimentés par une source périodique. Elle est provoquée par une oscillation entre une capacité et une inductance saturable (non linéaire), et peut se manifester par des transitions brutales d'un état stable à un autre, pour lesquelles les comportements des grandeurs physiques en présence peuvent être totalement différents, bien que la configuration du réseau soit la même. En particulier, le fait qu'il soit possible de rencontrer des cas réels pour lesquels l'unicité de la solution n'est plus assurée, est apparu comme surprenant et remettant en cause certains concepts de ce domaine de la physique.

Ainsi, dans les cas classiques, si on libère un système comportant les éléments cités, en fixant les conditions initiales, celui-ci évolue et finit par se stabiliser sur un régime périodique stable, de même période que celle de la source ; ce régime final - régime forcé - est habituellement unique et indépendant des conditions initiales ; mais, dans certains cas, il est possible que cet état "normal" soit délaissé, au profit d'un état ferrorésonant pour lequel de fortes surtensions (pouvant atteindre plusieurs fois l'amplitude nominale), intensités et distorsions de formes d'onde peuvent affecter les tensions et courants sur le réseau; elles endommagent alors les transformateurs du fait de claquage par surtensions ou d'échauffements excessifs. La représentation stroboscopique (donnée des valeurs au bout de nombres entiers de la période de la source d'alimentation) ou dans l'espace des phases (espace dont les coordonnées de base sont les variables d'état) du régime périodique normal se résume à un seul point fixe.

Les régimes stables apparaissant dans les systèmes ferrorésonants peuvent être de différents types; on les classe généralement de la façon suivante:

Le régime est normal lorsque la présence de la non linéarité se traduit seulement par une faible déformation des signaux, par rapport au cas linéaire (ils gardent alors un comportement quasi sinusoïdal), et leur fréquence reste identique à celle de la source. L'étude spectrale montre le fondamental comme prépondérant; l'image stroboscopique se limite à un point.

Lorsque la distorsion n'est plus négligeable, on parle de *régime ferrorésonant fondamental*. Le spectre est alors formé de raies aux fréquences multiples entiers de la fréquence de la source. L'image stroboscopique est encore un point mais éloigné de celui représentant le régime normal. Ce régime co-existe avec le régime normal.

Le régime ferrorésonant sous-harmonique se rencontre très fréquemment: les réponses observées (stables) ont pour période un multiple n entier de la période de la source. Le spectre est formé d'un fondamental à une fréquence f/n (f étant la fréquence de la source) et des harmoniques. L'étude stroboscopique fait apparaître n points.

Quand le régime n'est plus périodique, mais que deux fréquences incommensurables (dont le rapport n'est pas rationnel) ainsi que leurs harmoniques apparaissent dans le spectre, on parle de *régime ferrorésonant quasi-périodique*. L'image stroboscopique représente alors une courbe fermée.

Enfin, si le spectre observé est quasi-continu (certaines fréquences pouvant être prépondérantes mais toutes considérées), on est en présence d'un *régime chaotique (ou irrégulier)*. Les points de l'image stroboscopique, tous distincts, semblent se répartir de façon désordonnée mais peuvent former une figure géométrique de dimension fractale (non entière) appelée *attracteur étrange*.

D'expérience, il s'est avéré que la ferrorésonance touche principalement les réseaux électriques comportant une ou plusieurs inductances saturables (transformateurs de puissance, réducteur de mesure) et des capacités (lignes longues, transformateurs de tension, postes blindés, chambre de coupure de disjoncteurs, ...).

L'exemple le plus original, et aussi le plus spectaculaire est le suivant (rencontré lors d'un renvoi de tension entre la source hydraulique de Chastang et le transformateur de Chinon): lors d'une reprise de service, la tension produite par des groupes hydrauliques est renvoyée sur des transformateurs (inductances non linéaires) séparés par des lignes longues (capacitives). La capacité shunt constituée par la ligne longue et la saturation du transformateur récepteur, peut provoquer un phénomène ferrorésonant engendrant d'importants dégâts (explosion de parafoudre, avarie de transformateurs, ...) et empêche, de ce fait, la reprise du service.

Définir précisément cette notion de ferrorésonance n'est pas aisée ; retenons simplement que les cas de ferrorésonance se produisent essentiellement sur des réseaux comportant :

- une source de tension (sinusoïdale)
- des capacités
- un transformateur (comportant des matériaux ferromagnétiques saturables)
- peu de pertes.

Après constatation de ces phénomènes étranges, plusieurs interrogations sont alors apparues et des études sur la conception - a priori simple - du réseau lui-même, ont permis de conjecturer que ce phénomène était bien dû à la ferrorésonance, attendu qu'on se trouvait en présence d'une ligne longue raccordée à un transformateur saturable, dont la caractéristique est bien entendu non linéaire.

Parallèlement, les problèmes portant sur les systèmes d'évolution non linéaires, préoccupent actuellement beaucoup les mathématiciens. Aussi, de nouveaux concepts et de nouvelles méthodes - tant théoriques que numériques - sont venues enrichir le domaine des mathématiques. Nous avons donc essayé d'utiliser cette approche, afin de comprendre, d'interpréter le problème rencontré et de prévoir d'éventuels phénomènes analogues.

La mise en équation d'un tel réseau, donne un système dynamique (équations différentielles en temps) non linéaire, possédant un terme de forçage périodique (tension d'alimentation) et comportant une série de paramètres propres au circuit étudié.

D'un point de vue mathématique, on sait qu'un tel système peut se comporter de manière inattendue, du fait de la présence d'un terme non linéaire, et qu'ainsi il paraît normal que les solutions (flux, tensions, courants) puissent présenter de brutales modifications. En faisant varier la valeur de certains paramètres du réseau, la forme de la solution peut changer brusquement ; plusieurs solutions peuvent apparaître ou disparaître, perdre ou gagner de la stabilité, etc.. On parle alors de *bifurcation*. (Voir au chapitre 2, les différentes notions s'y rattachant).

Notons encore que pour de telles équations, une variation légère des conditions initiales peut aussi provoquer un changement important de la forme de la solution. On parle alors de sensibilité aux conditions initiales (SCI).

La théorie des bifurcations permet une analyse du type d'équations étudié et assure du caractère déterministe - et non aléatoire - d'un tel système dynamique ; il est ainsi possible de prédire le comportement que l'on pourra observer, pour des valeurs de paramètres données.

De plus, le nombre de types de bifurcations pouvant exister est connu et fini ; il est donc toujours possible de répertorier chacun des cas rencontrés.

Par exemple, dans le cas de ferorésonance décrit précédemment, la présence du terme de forçage périodique laisse supposer que la solution obtenue au cours du temps sera périodique. Cette conjecture est vraie pour un ensemble de valeurs des différents paramètres, mais au delà de certaines valeurs critiques de ces derniers, la solution peut devenir quasi-périodique, c'est à dire que deux fréquences incommensurables apparaissent dans son spectre comme nous le verrons par la suite. On pourrait même en théorie, obtenir un comportement chaotique du système, mais nous ne l'avons encore jamais observé. Le but recherché est donc de connaître l'évolution des solutions et de leur forme, en faisant varier un ou plusieurs paramètres, et de déterminer toutes les valeurs critiques de ces paramètres pour lesquelles la solution que l'on obtiendrait ne conviendrait pas à l'exploitant du réseau. Les méthodes utilisées, liées à la théorie des bifurcations, sont basées sur des notions d'analyse numérique développées récemment pour la plupart, et faisant l'objet de nombreuses études actuellement.

0.2. Présentation de différents cas réels ferrorésonants

Les différentes configurations du réseau où peuvent apparaître des cas ferrorésonants sont présentées de façon détaillée dans [K,S2].

Retenons toutefois qu'on les distingue principalement selon les catégories: série ou parallèle d'une part, et monophasé, trimonophasé ou triphasé d'autre part. Le circuit est dit série (resp. parallèle) lorsque la capacité principale est en série (resp. en parallèle) avec l'élément non linéaire. Il est dit trimonophasé lorsqu'il est constitué soit de trois transformateurs monophasés sans couplage magnétique entre phases, soit d'un transformateur triphasé avec couplage linéaire. Lorsque ce couplage est non linéaire, le circuit est dit triphasé.

Les cas de ferrorésonance ayant été observés sur le réseau sont les suivants:

Ferrorésonance série monophasée dans un transformateur de tension.

Ce type de ferrorésonance apparaît sur un réseau composé d'un ou plusieurs transformateurs de tension raccordés à un tronçon de barre par l'intermédiaire d'un disjoncteur ouvert. La capacité de répartition de tension entre les chambres de disjoncteur est à l'origine de l'apparition du phénomène.

Ferrorésonance dans un transformateur condensateur de tension.

Ce type de transformateur est en fait un diviseur de tension capacitif et permet de passer de la haute à la basse tension.

Ferrorésonance dans un poste en piquage sur une ligne double terne.

Ce poste en piquage est constitué de transformateurs (de puissance ou de tension) montés sur une ligne ouverte longeant une deuxième ligne sous tension.

Ferrorésonance dans un système déséquilibré à neutre isolé.

Ce type de système se rencontre en cas de fusion de fusible, ou simplement au moment de travaux sous tension. La capacité de câble d'une des phases est en série avec les branches magnétisantes de transformateur et les sources de tension des deux autres phases. Le couplage électrique est soit en étoile, soit en triangle; l'alimentation peut-être établie sur l'une des phases.

Ferrorésonance lors d'un renvoi de tension sur une ligne longue.

C'est cette configuration particulière que nous avons choisi de traiter principalement dans ce document. Un tel réseau est à faible puissance de court-circuit et l'impédance de la ligne est importante. L'élément non linéaire provient d'un transformateur de puissance; la capacité de la ligne (élément responsable de la ferrorésonance) est en parallèle avec l'élément non linéaire. Nous détaillerons plus précisément ce modèle.

0.3. Etat de l'art

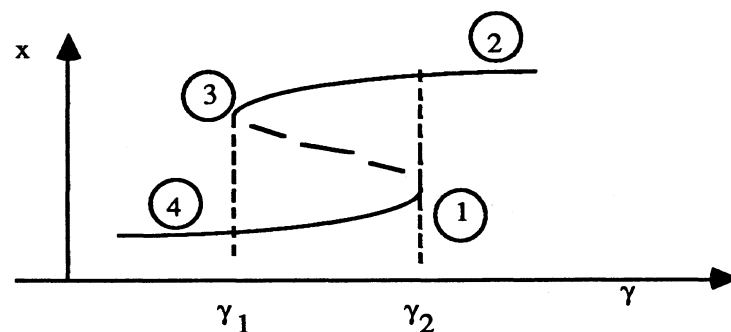
Nous avons distingué principalement deux sortes de ferorésonance :

- la ferorésonance série (la capacité est en série avec l'élément non linéaire),
- la ferorésonance parallèle (la capacité est en parallèle).

Le modèle simple de la ferorésonance série peut être représenté par une équation différentielle de deuxième ordre, cas particulier de l'équation de Duffing; cette équation décrivant le comportement d'un oscillateur non linéaire dont le terme de rigidité est cubique, est souvent rencontré dans de nombreuses études mécaniques:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - x + x^3 = \gamma \cos(\omega t)$$

La solution de cette équation peut subir des comportements divers, suivant les valeurs données aux paramètres δ et γ . En particulier, des phénomènes de saut peuvent apparaître lors de l'étude de la solution en fonction d'un des deux paramètres, le second étant fixé convenablement. Par exemple, le diagramme de bifurcation (x, γ) est alors représenté par la courbe en S caractéristique:



la solution en pointillés étant une solution instable (non accrochée physiquement). Ainsi, si on augmente progressivement γ (amplitude de forçage de l'oscillation), la solution augmente elle aussi progressivement jusqu'à atteindre l'état critique (1), où elle subit un "saut" avant d'atteindre l'état (2), entraînant un brutal changement de $|x|$ qui dans notre cas peut représenter une tension). En revanche, si on se trouve sur la branche supérieure ($\gamma < \gamma_2$) et que l'on diminue progressivement γ , la solution va diminuer en conséquence jusqu'à atteindre l'état (4), accompagnée cette fois d'une chute brutale de sa norme. Beaucoup de travaux ont été réalisés sur l'aspect théorique de cette équation; en particulier, on pourra consulter les ouvrages généraux [G.H], [W] ainsi que [R1], [R3], [R5], [K1], [K,S3], [Kaw], [Kaw2] pour l'étude de l'équation de Duffing appliquée à la ferorésonance série.

D'un point de vue plus pratique, en plus des résultats obtenus à partir des cas réels survenus sur le réseau durant ces dernières années, on dispose d'un "banc d'essais de ferorésonance" grâce auquel on peut expérimenter des modèles réduits déduits des modèles réels par application de simples règles de similitude.

Quand on effectue une montée progressive en tension, le phénomène ferorrésonant apparaît non seulement visuellement sur les formes d'ondes et les amplitudes des valeurs mesurées en sortie, mais aussi de manière auditive: on "entend" la (ou les) nouvelle(s) résonance(s) apparaissant pour les valeurs critiques de cette tension d'alimentation, conformément aux résultats que nous présenteront au chapitre III. Ces grandeurs en sortie peuvent être analysées en fréquence par le calcul de leur transformée de Fourier, ou bien visualisées sur un oscilloscope.

En outre, le programme de simulation EMTP -Electro Magnetic Transients Program- ([D.B.B.L.M], [R6]), nous offre un autre moyen d'obtenir le comportement des grandeurs physiques intervenant sur un réseau de configuration donnée.

Les paramètres apparaissant critiques pour l'apparition ou non de la ferorrésonance sont la fréquence propre du réseau et la capacité de la ligne; différents essais et simulations ont été effectués avec les moyens cités ci-dessus, pour différentes valeurs de ces paramètres caractéristiques. Pour certaines de ces valeurs un régime ferorrésonant est apparu, alors que pour d'autres, le régime était normal. Grâce à ces résultats, il est alors possible de déterminer dans le plan de ces deux paramètres, des zones dans lesquelles un risque de ferorrésonance peut apparaître et en dehors desquelles tout danger est évité. Voir [K2].

Les différents essais et simulations sont souvent longs et fastidieux puisqu'il faut traiter un nombre important de cas (pour plusieurs valeurs données au couple formé par les deux paramètres que l'on a choisi de faire varier et pour différentes conditions initiales). D'autre part, une telle étude ne permet pas de déterminer de façon précise les lignes délimitant les zones critiques des zones où le comportement est normal. Enfin, un programme de simulation numérique ne peut être entièrement fiable, d'autant que l'on sait ici combien la sensibilité aux conditions initiales est importante.

Toutes ces raisons nous ont amenés à faire appel à d'autres méthodes, mathématiques, issues de la théorie des bifurcations. Les développements numériques s'y rattachant -méthodes de continuation ou de poursuite- permettent, pour une configuration donnée, un régime étant connu, de faire varier continuellement un paramètre pour lequel on pourra alors déterminer le nouveau régime correspondant. Cela a pour avantage la détection de tous les points singuliers et surtout demande de ne connaître qu'un seul jeu de conditions initiales. Par application de cette méthode, l'étude d'un circuit série modèle a permis de retrouver la courbe en S représentant la solution en fonction du paramètre décrivant l'amplitude de la tension d'alimentation, évoquée précédemment. Voir [K1].

Une autre voie pour l'étude et la compréhension des phénomènes ferorrésonants est celle basée sur la méthode de Galerkin; la décomposition des grandeurs physiques mises en jeu (flux, tensions, courants) sur une base de sinus et de cosinus permet de déterminer numériquement leur comportement en fonction d'un

ou de plusieurs paramètres, à condition toutefois de choisir les bons harmoniques dans la décomposition $([K,L,S])$.

Parallèlement, dans le cadre de l'étude du modèle type de la ferorésonance série, des travaux ont été entrepris à l' université de Dijon par R. Roussarie ([R1], [R2], [R3], [R4]).

Une première technique proposée consiste à utiliser la méthode de perturbation pour l'étude de l'équation de Duffing; en effet dans le cas où le système est hamiltonien (c'est-à-dire sans pertes, les résistances étant considérées nulles), on peut déterminer une solution analytique de cette équation différentielle ordinaire du second ordre en temps, et, par continuité, en déduire certains des comportements du système perturbé pour lequel ont été introduites des pertes. La non linéarité a été modélisée par deux droites; la résolution de ces équations s'est faite analytiquement et des domaines de stabilité des solutions ont ainsi pu être déterminés ([R1]).

Pour la plupart des systèmes d'ordre au moins égal à trois décrivant la ferorésonance parallèle, la résolution analytique est impossible. Néanmoins, il pourrait être intéressant de procéder de manière équivalente, après bien entendu avoir déterminé les invariants du système.

L'étude mathématique complète d'un circuit ferorésonant série monophasé a aussi été réalisée, toujours à l'aide de la méthode de perturbation. En particulier, les types de bifurcations susceptibles d'apparaître sont exposés et une description détaillée du portrait des phases et des variétés invariantes bordant les bassins d'attraction des régimes ferorésonants, apporte de précieux renseignements sur le comportement asymptotique des grandeurs physiques intervenant sur un tel circuit ([R3]).

Dans un autre document, R. Roussarie étudie la stabilité des régimes périodiques obtenus sur des cas ferorésonants série et établit une classification des bifurcations possibles. Des outils pour l'étude et la détermination de ces bifurcations d'orbites périodiques sont présentés, comme notamment la recherche des points fixes de l'application de retour T_λ , au bout d'un temps $2\pi q$ quand, partant d'une orbite $2\pi q$ -périodique connue pour une valeur λ_0 du paramètre de bifurcation, on cherche à déterminer une nouvelle orbite périodique proche de la première, pour une valeur de λ proche de λ_0 ; ceci est réalisé par détection de l'intersection de cette orbite avec le plan $\{t=0\}$. Grâce à ces méthodes, il est possible de traiter des systèmes de dimension n quelconque. D'autre part, il est également montré comment la stabilité d'une orbite périodique peut être déterminée à partir de son "équation aux variations premières" de l'orbite. Pour construire les lignes de bifurcation de l'équation différentielle du deuxième ordre à deux paramètres étudiée, les équations aux variations deuxièmes sont utilisées ([R2]). Ces travaux sont en rapport avec ceux effectués par H. Kawakami sur l'étude des bifurcations d'orbites périodiques ([Kaw1], [Kaw2]).

Enfin, de façon plus formelle, une introduction sur les techniques de perturbation appliquées à des systèmes différentiels de dimension quelconque, du type étudié sont exposées dans le but de rendre compte en particulier des cas de ferorésonance parallèle faisant l'objet de cette thèse, ainsi que certains cas triphasés. Certains résultats obtenus sur l'équation du second ordre modélisant la ferorésonance série sont généralisés et les phénomènes nouveaux sont introduits. Des méthodes numériques s'appuyant sur ces techniques et dont le développement serait intéressant sont énumérées, certaines d'entre elles faisant appel

à la mise en place de calculs formels, notamment en ce qui concerne la transformation systématique du système étudié sous forme normale ([R4]).

Ces différents travaux et explications établis par R. Roussarie concernant la ferrorésonance série, nous ont été précieux pour la compréhension et l'étude des phénomènes rencontrés pour la ferrorésonance parallèle.

0.4. Plan d'étude

L'objet de ce chapitre est de présenter le réseau physique sur lequel des phénomènes ferrorésonants sont apparus, et de tenter de les modéliser en les mettant sous forme d'un système d'équations différentielles à partir duquel on fera une étude numérique. On pourra alors déterminer, pour chaque configuration, le comportement de la solution en fonction de l'amplitude de la tension d'alimentation, et ainsi mettre en évidence les différents changements de types de solutions (bifurcations) rencontrés.

Cette modélisation est basée sur une décomposition du réseau en sous-réseaux simples ; chaque élément est ensuite remplacé par une partie d'un circuit (R, L, C) conformément aux règles utilisées par les électrotechniciens. Les valeurs numériques correspondantes sont fournies par des abaques EDF.

Le modèle obtenu de la sorte est formé de nombreux éléments ce qui se traduit bien entendu par un nombre important de degrés de libertés (nombre de variables d'état répondant chacune à une équation différentielle en temps, du premier ordre).

Dans une deuxième section, nous verrons de quelles manières il est possible de réduire progressivement la dimension d'un tel modèle, et validerons les différentes approximations réalisées.

I. MODELISATION DU RENVOI DE TENSION ENTRE CHASTANG ET CHINON

Depuis le cas survenu sur le renvoi de tension de Chastang vers Chinon, beaucoup d'études ont été réalisées à partir de différents modèles représentant cette partie de réseau. Une fois encore, nous nous proposons de modéliser ce renvoi de tension de façon peut-être plus précise, en tenant compte des différentes remarques déjà formulées et de notre connaissance mathématique des systèmes dynamiques non linéaires; en effet, par cette étude, nous ne voulons bien entendu pas remettre en cause la validité des

différents modèles déjà réalisés ni les résultats obtenus mais nous voulons mettre en évidence les paramètres qui nous semblent intéressants dans le cas d'apparition de la ferromésonance (voir [B1], [B2], [B3]). Il est maintenant connu que la sensibilité des résultats aux conditions initiales et aux valeurs des paramètres est importante pour de tels systèmes non linéaires et il nous a semblé important de modéliser avec précision chaque partie du réseau, quitte éventuellement à simplifier progressivement le modèle par la suite, mais seulement après avoir constaté théoriquement ou numériquement le caractère non influent de certains éléments sur le phénomène. Néanmoins, il est clair que de nombreuses approximations ne peuvent être évitées et que donc nous ne pouvons être assurés de l'exactitude des résultats.

Le but de cette modélisation est d'exprimer les variables de réseau comme étant les solutions d'un système d'équations différentielles ordinaires non linéaire et non autonome, paramétré, de la forme

$$\frac{du}{dt} = F(u, t, \lambda) \quad (I.1)$$

où $u \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur dont les composantes sont les variables d'état (flux, tensions et courants) apparaissant sur le réseau (la dimension de ce vecteur dépend de la précision de la modélisation),

$\lambda \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur contenant les paramètres du réseau (valeurs caractéristiques de la ligne, des transformateurs...)

F est le flot définissant le comportement des composantes de u , en fonction des différents paramètres présents dans le vecteur λ . F dépend explicitement de temps du fait de la présence du terme de forçage périodique, sous forme d'une fonction sinusoïdale.

La présence de transformateurs dont les caractéristiques ne sont pas des droites, rend le flot F non linéaire par rapport à ses variables u_i , $1 \leq i \leq n$, ce qui explique l'apparition de phénomènes inattendus sur le réseau.

Le but de la mise en équations du réseau sous la forme (I.1) est de faciliter l'étude dynamique du comportement des variables pour des grands temps (en régime permanent) ; on souhaite déterminer numériquement l'évolution des solutions en fonction des paramètres, à l'aide du logiciel AUTO que nous décrirons et utiliserons au chapitre 3.

1.1. Description du réseau

Le renvoi de tension entre Chastang et Chinon est composé des éléments suivants :

- un alternateur et un transformateur à Chastang,
- un autotransformateur parallèle au Breuil (réactance de compensation),

- un autotransformateur série à Distré,
- deux transformateurs de 1080 MVA à Chinon, situés aux extrémités de deux lignes venant de Distré.

Entre ces éléments, se trouvent des lignes de longueur :

- 22 km entre Chinon et Distré,
- 67,3 km entre Distré et l'Orangerie,
- 94,6 km entre l'Orangerie et Eguzon,
- 140,9 km entre Eguzon et La Mole,
- 20 km entre La Mole et Le Breuil,
- 19,7 km entre Le Breuil et Chastang.

Le réseau est à 225 kV entre Distré et Chastang, et à 400 kV entre Chinon et Distré.

Les différentes études et remarques établies par B. Blengino ([B1], [B2], [B3]) nous ont amené à établir les choix suivants :

. Le réseau est triphasé mais les résultats sont généralement très proches entre phases. Dans cette partie nous avons donc choisi de ne pas considérer les impédances et les susceptances en mode homopolaire, mais uniquement en mode direct. Nous traiterons par la suite un cas triphasé pour lequel la modélisation est un peu plus complexe.

. Le réseau est entièrement ramené à une même tension : 225 kV.

. Chaque morceau de ligne est remplacé par une cellule en Π , dont on calculera les éléments caractéristiques.

. Les deux lignes entre Le Breuil et Distré en parallèle sont remplacées par une seule ligne équivalente (ce qui n'altère pas les limites d'apparition de phénomènes [B2]).

. Les deux transformateurs de Chinon sont remplacés par un transformateur équivalent de 2160 MVA.

. L'alternateur de Chastang est représenté par une source de tension constante placée en série avec la réactance subtransitoire de l'alternateur.

. Les transformateurs et autotransformateurs sont remplacés par des réactances équivalentes.

. La caractéristique de la saturation du transformateur de Chinon a été calculée et mise sous forme polynômiale à partir de valeurs mesurées.

Ces différents points sont développés dans les sections suivantes, dans lesquelles figurent aussi les valeurs caractéristiques calculées pour chaque élément composant le réseau.

1.2. Les lignes

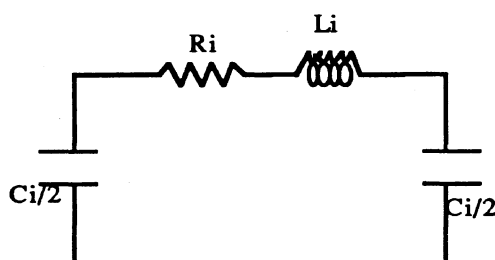
La ligne est divisée en trois parties :

- Chinon - Distré de longueur $\lambda_1 = 22$ km (2 lignes en parallèle).
- Distré - Le Breuil de longueur $\lambda_2 = 322,732$ km.
- Le Breuil - Chastang de longueur $\lambda_3 = 19,7$ km.

Les lignes Chinon-Distré et le Breuil-Chastang sont des lignes courtes, alors que la ligne Distré-Le Breuil est une ligne longue. Chaque partie de ligne est modélisée par une ou plusieurs cellules en Π .

Il est clair que les deux lignes courtes (λ_1 et λ_3) peuvent être remplacées par, chacune, une seule cellule; en revanche pour la ligne longue la question est de savoir combien de cellules il faut considérer pour avoir une modélisation raisonnable. Les paramètres de cette partie de ligne seront donc déterminés en fonction de la longueur λ_2 afin de pouvoir étudier le comportement du phénomène ferrorésonant en fonction de cette longueur et d'estimer ainsi le nombre de cellules nécessaires.

Dans un premier temps, nous allons représenter chacune de ces trois lignes par une cellule en Π de la forme



L'approximation réalisée est valide pour les lignes courtes. On présentera par la suite un cas pour lequel la ligne longue a été modélisée par deux cellules.

i) Ligne Chinon-Distré (λ_1)

Cette ligne est en fait composée de deux lignes en parallèle de longueur

$$\lambda_1 = 22 \text{ km} = 21,600 \text{ km} + 0,4 \text{ km à } 400 \text{ kV},$$

les 0,4 km étant constitués d'un câble situé entre le poste de Chinon et l'entrée de la ligne.

Les deux lignes parallèles à 400 kV sont ramenées à une seule ligne à 225 kV équivalente.

A partir des données calculées provenant des abaques E.D.F, il est possible de calculer les caractéristiques de la ligne en ne considérant que le mode direct. On ne tient compte ici que des paramètres linéiques moyens.

On ne considère donc qu'une seule ligne de longueur 22 km ; les caractéristiques obtenues à partir des valeurs données à 400 kV sont ensuite ramenées à 225 kV à partir du rapport de transformation:
 $\tau = 400/225$

La ligne Chinon - Distré est donc remplacée par une cellule en Π d'éléments caractéristiques C_4 , R_4 , L_4 . Les deux lignes étant placées en parallèle, la capacité doit être multipliée par 2, les résistance et impédance, divisées par 2.

Soit donc (en utilisant les données linéiques)

$$\left\{ \begin{array}{l} C_4 \omega = 430 \mu\text{Mhos} \\ R_4 = 0,13 \text{ Ohms} \\ L_4 \omega = 1,29 \text{ Ohms} \end{array} \right. \quad \text{ou bien} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{C_4}{2} = 0,68 \mu\text{F} \\ R_4 (50 \text{ Hz}) = 0,13 \Omega \\ L_4 = 0,004 \text{ H} \end{array} \right.$$

Nous attirons l'attention sur le fait que ces valeurs ne sont qu'approximatives dans la mesure où :

- On a considéré les valeurs moyennes calculées et non par celles mesurées.
- La caractéristique du câble n'est pas la même à l'entrée de la centrale que dans sa partie aérienne; cette différence n'a pas été prise en compte ici.

Dans le cas où on tient compte de cette différence, seule la capacité de la ligne est légèrement modifiée :

$$\frac{C_4}{2} \approx 0,68 + 0,2 \approx 0,88 \mu\text{F}$$

En considérant les caractéristiques non plus moyennes, mais mesurées, pour la ligne Chinon - Distré on obtient (les deux lignes étant mises en parallèle et ramenées à 225 kV):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C'_4}{2} = 0,6 \mu\text{F} \\ R'_4 = 0,10 \Omega \\ L'_4 = 0,0042 \text{ H} \end{array} \right.$$

ii) Ligne Le Breuil - Chastang (λ_3)

Cette ligne mesure 19,7 km et est sous une tension de 225 kV.

En opérant comme précédemment (1.2.1) on modélise cette partie de ligne par une cellule en Π dont les éléments caractéristiques sont les suivants:

Valeurs calculées à partir des données linéiques:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C_1}{2} = 0,088 \mu F \\ R_1 (50 \text{ Hz}) = 1,18 \Omega \\ L_1 = 0,025 \text{ H} \end{array} \right.$$

Valeurs mesurées pour la ligne Le Breuil - Chastang.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C'_1}{2} = 0,086 \mu F \\ R'_1 (50 \text{ Hz}) = 1,73 \Omega \\ L'_1 = 0,026 \text{ H} \end{array} \right.$$

iii) Ligne Distré - Le Breuil (λ)

On considère une seule ligne de longueur $\lambda = 322,72 \text{ km}$ sous une tension de 225 kV, composée des 4 lignes Distré - Orangerie, Orangerie - Eguzon, Eguzon - La Mole, La Mole - Le Breuil mises bout à bout.

En modélisant cette partie de ligne par une seule cellule, on obtient les caractéristiques suivantes pour les valeurs calculées à partir des données linéiques, en fonction de la longueur de la ligne λ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C_2}{2} = 0,0045 \times \lambda \mu F \\ R_2 (50 \text{ Hz}) = 0,060 \times \lambda \Omega \\ L_2 = 0,0013 \times \lambda \text{ H} \end{array} \right.$$

Alors que les valeurs mesurées, d'après les abaques et en mettant les lignes bout à bout sont:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C'_2}{2} = 1,423 \mu F \\ R'_2 (50 \text{ Hz}) = 28,66 \Omega \\ L'_2 = 0,426 \text{ H} \end{array} \right.$$

En conclusion, pour les lignes, on constate qu'entre les valeurs mesurées et les valeurs calculées, pour les impédances et les capacités, la différence est minime, alors qu'elle est très importante en ce qui concerne les résistances.

Remarque : on ne tient pas compte ici, dans le calcul des résistances, de l'effet de peau, bien qu'il soit connu que pour de grandes fréquences, les variations des résistances peuvent être de l'ordre de $\sqrt{f}$.

Mais si on compare en s'appuyant sur les abaques les valeurs théoriques des résistances à 50 Hz et à 150 Hz, on voit que la fluctuation est peu importante - surtout pour des lignes courtes - et donc négligeable par rapport aux erreurs déjà commises sur le calcul de la résistance.

Non seulement une erreur relative (pouvant aller jusqu'à 50%) est commise lors de la détermination des résistances, entre les valeurs calculées et les valeurs mesurées, mais, de plus, il est important de noter que les différentes pertes propres à chaque élément du réseau se traduisent aussi par des résistances supplémentaires n'apparaissant pas nécessairement sur le modèle choisi. Il est difficile de les déterminer avec précision, d'autant que celles-ci varient en fonction de l'âge des machines, des conditions climatiques (pour les lignes aériennes)... Il faudra donc faire varier ces paramètres résistances en conséquence, et nous regarderons par la suite comment elles agissent sur le comportement de la solution.

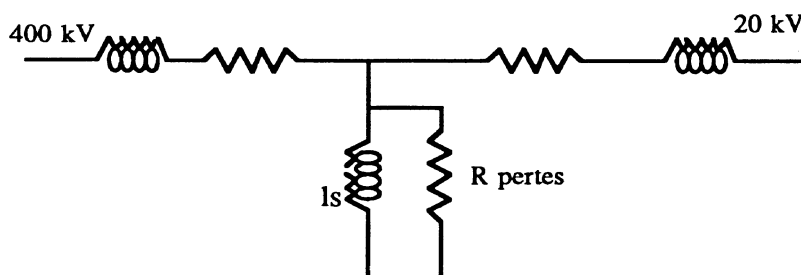
Enfin, remarquons aussi que les pertes par effet couronne n'ont pas non plus été prises en compte; elles se modélisent par des résistances non linéaires mises en parallèle avec les capacités.

Une étude du comportement de la solution en fonction de ces dernières devra donc être effectuée.

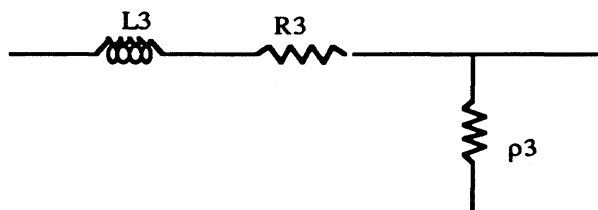
1.3. L'autotransformateur de Distré

A Distré, se trouve un autotransformateur (400 kV/225 kV) placé en série sur le réseau, dont les caractéristiques sont données (dans les abaques E.D.F.). On choisit de le remplacer par une réactance équivalente.

Au lieu de modéliser cet autotransformateur par l'élément



ici l_s est négligeable (200 kVAR à la tension nominale). On choisit l'élément simplifié



p_3 représente les pertes fer moyennes du transformateur.

Calcul des caractéristiques:

A partir des abaques, on obtient les valeurs de L_3 et R_3 que l'on ramène à une tension de 225 kV; on déduit alors les valeurs de p_3 et I_3 des résultats obtenus sur des essais à vide:

$$p_3 = \frac{U^2}{P_3} \quad \text{où } P_3 = 110 \text{ kW représente les pertes à vide du transformateur.}$$

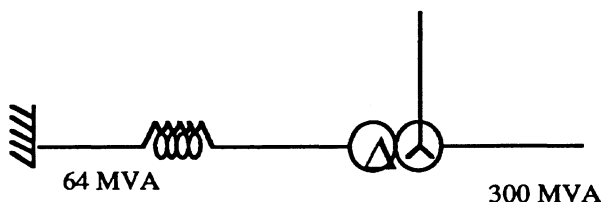
$$I_3 \omega = \frac{U^2}{Q_3} \quad \text{où } Q_3 = 196 \text{ kVA représente la consommation de réactif du transformateur à vide.}$$

Le réactif est bien négligeable en volume, devant le réactif produit par les lignes.

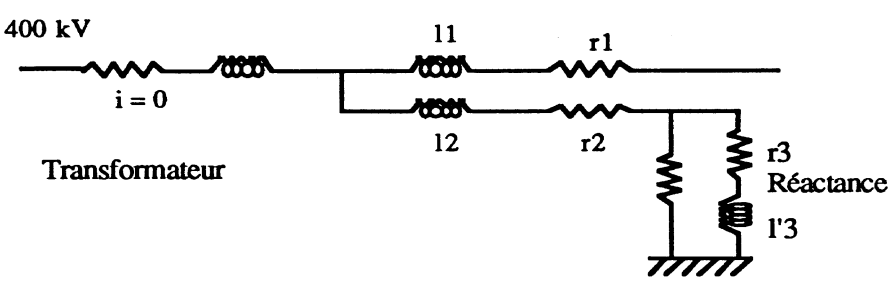
On peut donc supprimer sans faire une erreur importante, cette inductance. D'autre part, il faut signaler que cette inductance est non linéaire (car saturable) mais que l'on a supprimé cet effet devant l'importance de la non linéarité du transformateur de Chinon (de puissance apparente $2 \times 1080 \gg 300$ MVA).

1.4. L'autotransformateur du Breuil

Au Breuil se trouvent un autotransformateur (225 kV/20 kV) et une réactance placée en parallèle (à 225 kV) :



que l'on choisit de remplacer par une réactance équivalente de compensation des capacités de ligne, suivant les modèles :



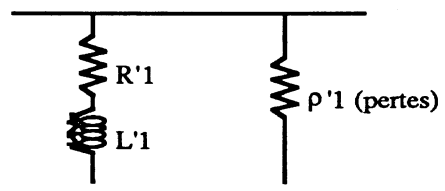
D'après les caractéristiques données, chaque phase comporte une réactance de 6,7 OHMS alimentée sur l'enroulement 20 kV du transformateur.

On obtient donc, à 225 kV, la valeur de l'3 et on en déduit r3 par $\frac{l'_3 \omega}{r_3} \approx 30$
et

$$\rho'_1 = \frac{U^2}{P_1} \quad \text{où } P_1 = 110 \text{ kW représente les pertes à vide du transformateur.}$$

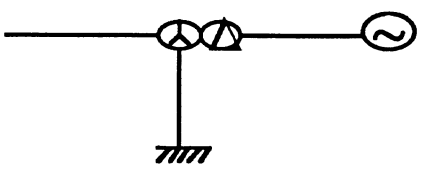
Pour le calcul de r1, l1, r2, l2 on se reporte aux abaques où figurent les caractéristiques de l'autotransformateur ramenées à une tension de 400 kV.

En ramenant les valeurs à une tension de 225 kV, on obtient les valeurs l1ω, r1, l2ω et r2 desquelles on déduit les valeurs ρ'1, R'1 = r1 + r2 + r3 et L'1ω = l1ω + l2ω + l'3ω, caractéristiques de l'élément finalement choisi pour représenter cet autotransformateur:

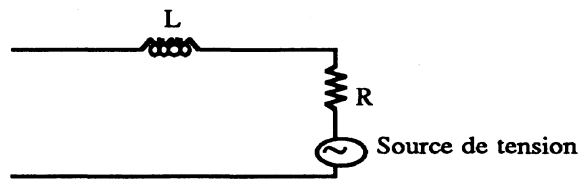


1.5. L'alternateur de Chastang

La tension fournie au réseau provient d'une source située à Chinon, composée d'un alternateur relié à un transformateur à 225 kV suivant le schéma:



Cet alternateur et ce transformateur sont modélisés par l'élément:



Notons qu'il est très difficile d'évaluer les pertes parallèles pour un tel modèle.

Le transformateur a une puissance apparente de 90 MVA.

Les réactances pour le transformateur et l'alternateur sont de 12 % et de 25 % respectivement.

D'où

$$L\omega = \frac{37}{100} \times \frac{225^2}{90} = 208,12 \, \Omega$$

La constante de temps τ pour un tel élément est de l'ordre de 40 ms, ce qui nous permet de déterminer la résistance par $R = \frac{L}{\tau}$.

La source de tension $E(t)$ est de la forme $E(t) = E \cos \omega t$ où la tension d'alimentation E est de l'ordre de $E \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times 225 \cdot 10^3 \, \text{V}$ (tension crête).

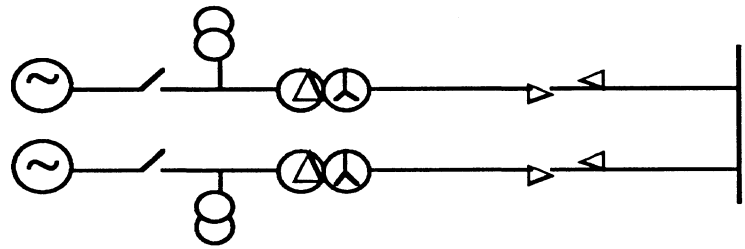
Lors d'un renvoi de tension, cette tension d'alimentation E est augmentée progressivement. Comme nous l'avons signalé, le caractère non linéaire du réseau peut provoquer des changements brusques de la forme des courants, tensions et flux présents sur le réseau, pour une modification minime de E .

C'est la raison pour laquelle, on a choisi de prendre E comme premier paramètre de bifurcation.

1.6. Les deux transformateurs de Chinon

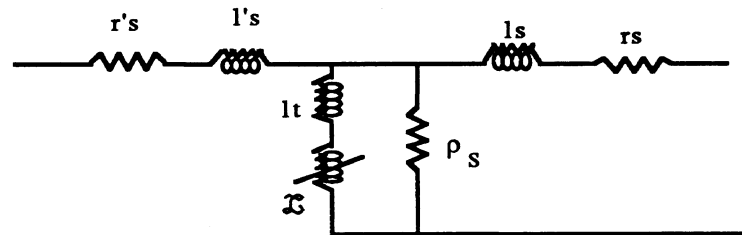
1.6.1. Le modèle proposé

Ce sont deux transformateurs triphasés semblables à 400 kV, de puissance apparente 1080 MVA et de pertes à vide $P_e = 900 \, \text{kW}$. Ils sont remplacés par un seul transformateur de puissance apparente $S_1 = 2160 \, \text{MVA}$.



On se ramène naturellement à une tension de 225 kV.

Ces deux transformateurs sont modélisés par l'élément :



les grandeurs r'_s et l'_s ne sont pas prises en compte car le circuit est ouvert à cette extrémité;

l_t représente l'inductance saturée du transformateur; on prend $l_t = 2 l_s$.

$\mathfrak{L}$ représente la self saturable (c'est le seul élément non linéaire du réseau);

r_s représente les pertes cuivre du primaire.

Les pertes à vide du transformateur (un pôle monophasé) sont $P_s = 175 \text{ kW}$.

Les valeurs l_s , ρ_s , r_s sont alors déterminées de la façon suivante :

$$l_s \omega = 13,6\% \left(\frac{U_n^2}{S_n} \right) \qquad r_s = 6 \times \frac{P_c}{3 I_n^2} = 6 \times \frac{P_c U_n^2}{S_n^2}$$

(Le rapport 6 est le produit d'un rapport 2 venant du fait de la présence de 2 transformateurs et du rapport 3 correspondant à la transformation du transformateur triphasé en un transformateur monophasé);

$$\text{et} \quad \rho_s = \frac{U^2}{P_s}$$

1.6.2. La Self non linéaire

La caractéristique de la self de saturation $\mathfrak{L}$ est donnée par une suite de points relevés, reliant le courant i au flux φ à l'intérieur de la bobine. Les valeurs relevées sont des valeurs efficaces; un calcul réalisé avec EMTP permet d'obtenir les valeurs instantanées. Cette caractéristique $i = f(\varphi)$ se comporte linéairement pour les petites valeurs de φ (avant la saturation) puis de façon exponentielle ensuite.

Plutôt que de garder une suite discrète de points et de travailler alors avec une caractéristique linéaire par morceaux (mauvais numériquement à cause de la non dérivabilité d'une telle fonction), on a donc choisi d'approcher cette suite de points par une fonction polynômiale, de degré impair (à cause de la symétrie) ne contenant que le terme de degré un et celui de degré le plus élevé, afin d'obtenir une caractéristique croissante, les coefficients polynômiaux étant bien entendu choisis positifs.

Connaissant ces couples de valeurs on cherche donc à déterminer $i = f(\varphi)$ où on impose à f d'être de la forme: $f(\varphi) = a\varphi + b\varphi^{2m+1}$, a et b étant des constantes positives.

Pour cela on calcule

$$k(\varphi) = \frac{f(\varphi)}{\varphi} = a + b\varphi^{2m}$$

et par un algorithme de régression linéaire, en réitérant sur le degré on détermine les coefficients a et b tels que la droite d'équation

$$y = a + bx \quad \text{avec} \quad y = k(\varphi), \quad x = \varphi^{2m}$$

approche le plus possible la suite de points $(\varphi_i^{2m}, k(\varphi_i))$, pour chaque valeur φ_i relevée.

Cela revient donc à chercher le meilleur triplet $(a, b, 2m+1)$ qui donne le coefficient de corrélation le plus proche de un.

1.7. Modélisation des pertes

Dans la modélisation que nous venons de présenter, nous avons choisi une modélisation très simple en ne prenant pas en compte les divers phénomènes présents sur un tel réseau et affectant le niveau des pertes. Elles sont dues principalement à l'effet de peau et à l'effet couronne en ce qui concerne les lignes aériennes d'une part, et d'autre part au phénomène d'hystérésis des transformateurs. Un rapport détaillé sur les différents moyens permettant de représenter ces pertes, accompagné d'une étude approfondie de leur influence dans le cas du renvoi de tension auquel nous nous intéressons ici, a été réalisé ([YB]); il permet de mettre en évidence le rôle stabilisant et régularisant des différentes pertes, sur le modèle considéré, celles-ci se comportant généralement comme des résistances supplémentaires (dépendant non linéairement de la fréquence, d'où la difficulté de représentation).

Plus précisément, on peut retirer de cette étude que:

. l'effet de peau a pour conséquence une augmentation de la résistance des conducteurs, en fonction de la fréquence, accompagnée d'une diminution de l'inductance interne des conducteurs (cette diminution, souvent très faible, est généralement négligée).



. l'*effet couronne*, que nous avons voulu prendre en compte à cause de la longueur importante de la ligne considérée, dépend fortement des conditions climatiques. Là encore, il est difficile de la modéliser avec précision. Ces pertes interviennent lorsque le champ électrique à la surface des conducteurs atteint la valeur critique au delà de laquelle débute l'ionisation de l'air, cette ionisation augmentant avec la tension. Ceci a pour conséquence une dissipation importante d'énergie, accompagnée d'une augmentation des capacités. Le modèle simplifié qui a été choisi, en basses fréquences, ne tient pas compte de cette augmentation de capacité, ni de la variation des pertes en fonction de la fréquence: les pertes ont été représentées par une résistance non linéaire (de caractéristique polynômiale).

. les *pertes fer* permettent de modéliser avec plus de précision le transformateur à vide, c'est-à-dire la non linéarité de la branche magnétisante en tenant compte des phénomènes d'hystérésis et des pertes par courants de Foucault. En première approximation, les pertes dues à l'hystérésis sont proportionnelles à la fréquence et au carré du flux, alors que les courants induits dans la masse de fer (courants de Foucault) sont, eux, proportionnels au carré de la fréquence et au carré du flux (en régime sinusoïdal, on choisit souvent de remplacer ces pertes par une résistance constante). Le phénomène d'hystérésis est représenté par une équation différentielle du premier ordre liant le courant au flux (cela revient à modéliser la branche magnétisante du transformateur par une self saturable de caractéristique courant-flux non linéaire associée en parallèle à une résistance de caractéristique courant-tension elle aussi non linéaire).

Notons que ces différentes modélisations sont parfois succinctes, et qu'il serait intéressant d'utiliser le savoir-faire des électrotechniciens, en vue d'obtenir des modèles très proches de la réalité.

La prise en compte de ces résistances supplémentaires placées en conséquence sur le modèle, tend à diminuer la taille des zones de paramètres pour lesquels le régime est irrégulier (surtout lorsqu'il s'agit de l'effet couronne). De plus, les surtensions aux bornes du transformateur sont réduites (légèrement pour l'effet de peau, et plus nettement pour l'effet couronne); il est intéressant de remarquer aussi que l'effet de peau tend à amortir l'amplitude des réponses, surtout aux points riches en harmonique. Les résistances non linéaires ont donc tendance à shunter les capacités de ligne à l'origine du phénomène de ferorésonance. (Voir le rapport [YB]).

Dans les systèmes dynamiques que nous présentons et dont nous ferons l'étude numérique, on ne représentera donc pas ces différentes modélisations, puisque cela a déjà été réalisé, mais nous utiliserons ces résultats et regarderons alors uniquement l'influence des résistances placées en série et en parallèle sur les modèles considérés. On verra, en particulier, comment l'accroissement de ces pertes peut faire disparaître certains régimes irréguliers. Enfin, il pourra être intéressant de faire le lien avec les études théoriques ([R1], [R2],[R3], [R4]) obtenues sur le système sans pertes (possédant des invariants caractéristiques), et par perturbation de ce dernier, en rajoutant progressivement des pertes.

1.8. Renormalisation

Chaque partie du réseau étudiée a été ramenée d'une tension de 400 kV à une tension de 225 kV. Etant donnée l'inutilité de travailler -numériquement notamment- avec des grandeurs physiques d'ordre de grandeur important, on choisit d'effectuer une renormalisation et de ramener flux, tensions et courants présents sur le modèle, en grandeurs réduites. Dans un premier temps, toutes ces grandeurs ont été divisées par un rapport de mille; hors mis le modèle du transformateur, chaque sous réseau considéré est linéaire; cette transformation peut donc s'effectuer sans que les paramètres caractéristiques du réseau (résistances, capacités, inductances) soient modifiées. Seuls les coefficients polynômiaux a et b de la caractéristique non linéaire $i = f(\phi)$ du transformateur, doivent être ajustés en conséquence.

On obtient alors un modèle ramené en grandeurs réduites qu'il est alors aussi possible d'expérimenter sur le "banc d'essais ferrorésonant" ([L.S.K]). La tension d'alimentation E est maintenant de l'ordre de la centaine de volts.

Lors de l'utilisation du logiciel permettant d'étudier le comportement des grandeurs physiques intervenant sur ce modèle, nous effectuerons à nouveau une renormalisation afin que les variables d'état considérées soient toutes de l'ordre de l'unité, pour des raisons de bonne convergence numérique et de rapidité d'exécution.

1.9. Le schéma final

Les modélisations que nous venons de présenter conduisent au schéma total donné à la figure 1.1, représentant le renvoi de tension mis sous forme de circuit:

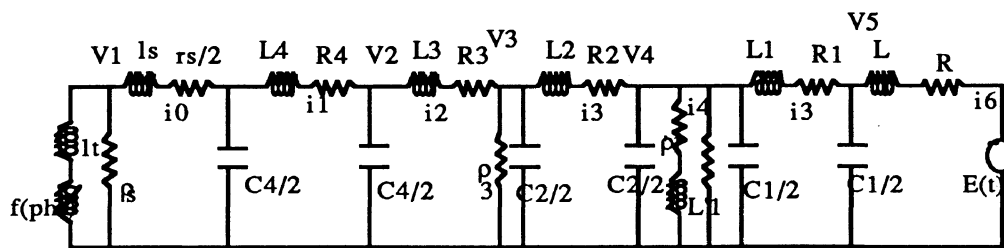


Figure 1.1 : Modèle 13D

Les valeurs des éléments caractéristiques sont les suivantes (cf. section I.2 à I.6)

$$\lambda = 322,732 \text{ km}$$

Impédances (en Henry) :

$$\begin{aligned} l_s &= 0,0102 & l_t &= 2,5 \times l_s \\ L_4 &= 0,004 \quad (+/- 5 \%) \\ L_3 &= 0,07 & L'_1 &= 2,94 \\ L_2 &= 0,423 \quad (+/- 0,8 \%) & \text{ou } 0,0013 \times \lambda \\ L_1 &= 0,025 \quad (+/- 4 \%) & L &= 0,66 \end{aligned}$$

Capacités (en μF) :

$$\begin{aligned} C_{4/2} &= 0,684 \quad (+/- 12 \%) & C_{1/2} &= 0,088 \quad (+/- 2 \%) \\ C_{2/2} &= 1,44 \quad (+/- 11 \%) & \text{ou } 0,0045 \times \lambda \end{aligned}$$

Résistances (en OHMS):

$$\begin{aligned} r_s &= 0,058 & R_3 &= 0,80 \\ R_4 &= 0,13 \quad (+/- 23 \%) & R'_1 &= 2,31 \\ R_1 &= 1,18 \quad (+/- 47 \%) & R &= 16,56 \\ R_2 &= 19,36 \quad (+/- 48 \%) & \text{ou } 0,060 \times \lambda \\ \rho_s &= 48,21 \cdot 10^3 & \rho_3 &= 460 \cdot 10^3 \\ \rho'_1 &= 460 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

Self saturable - Caractéristiques :

(en valeurs réduites: on a divisé par 1000 les tensions et courants et donc aussi les coefficients polynômiaux en conséquence)

$$i = a\varphi + b\varphi^{2m+1} = f(\varphi) \quad \text{où } m = 6, a = 1,8430 \cdot 10^{-3} \text{ et } b = 61$$

2. MISE EN EQUATIONS DU MODELE PRESENTE ET REDUCTION DE LA DIMENSION DU SYSTEME ETUDIE

Le renvoi de tension ayant été modélisé par plusieurs éléments simples mis bout-à-bout, on s'intéresse maintenant à la mise sous forme d'un système d'équations différentielles paramétrées de ce modèle, par application des lois classiques pour les circuits : les lois de Kirchhoff. Une telle démarche permettra d'étudier plus aisément et de façon plus systématique les différentes grandeurs physiques intervenant, en fonction des paramètres caractérisant le modèle, permettant alors de retrouver les phénomènes rencontrés par les exploitants du réseau et de déterminer des plages de valeurs de paramètres pour lesquelles il sera possible de prévoir le comportement souhaité. Ces études seront réalisées numériquement avec un logiciel adapté, comme nous le verrons au chapitre 3.

Le système d'équations différentielles obtenu à partir du modèle présenté à la section I de ce chapitre comprend treize équations différentielles non autonomes (dépendant explicitement du temps). Ces équations ont la particularité d'être toutes linéaires et ne dépendant pas explicitement du temps, sauf quatre d'entre elles. Cette remarque et la difficulté d'étude imposée par cette dimension importante nous incitent à penser que toute "l'information" source des phénomènes non linéaires observés est concentrée dans ces équations. On souhaite donc simplifier au maximum le modèle électrique obtenu, compte tenu des différents ordres de grandeur des paramètres présents, et, moyennant une modification des valeurs des paramètres, obtenir un modèle équivalent au modèle complet, et comportant seulement quatre équations, voire même trois.

Nous exposons dans cette section, les simplifications progressives effectuées, en se basant sur des règles classiques d'approximation, très souvent utilisées par les électrotechniciens.

2.1. Le Système complet de dimension treize

Par les lois classiques de Kirchhoff, il est facile de mettre le circuit présenté à la figure 1.1 sous forme d'équations différentielles en temps. Le nombre de cellules étant important, il en est de même pour la dimension du système dynamique obtenu : il faut traiter treize équations différentielles non autonomes.

Les variables d'état apparaissant le plus naturellement sont : le flux φ , les courants dans les différentes branches inductives $i_0, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$, et les tensions en chaque noeud connecté à des capacités v_1, v_2, v_3, v_4 et v_5 .

Ces inconnues doivent satisfaire au système suivant :

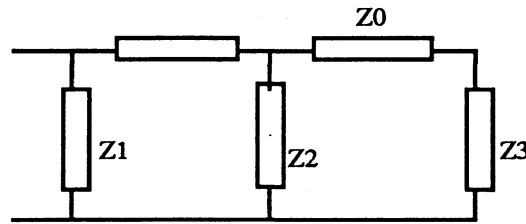
$$\begin{aligned}
 (S_1) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & \frac{d\varphi}{dt} = - \frac{\rho_s (f(\varphi) - i_0)}{1 + l_t \frac{df}{d\varphi}} \\
 & l_s \frac{di_0}{dt} = \rho_s f(\varphi) - (\rho_s + r_s)i_0 + v_1 \\
 & \frac{C_4}{2} \frac{dv_1}{dt} = f(\varphi) - \frac{v_1}{\rho_s} - i_1 \\
 & L_4 \frac{di_1}{dt} = v_1 - v_2 - R_4 i_2 \\
 & \frac{C_4}{2} \frac{dv_2}{dt} = i_1 - i_2 \\
 & L_3 \frac{di_2}{dt} = v_2 - v_3 - R_3 i_2 \\
 & \frac{C_2}{2} \frac{dv_3}{dt} = i_2 - \frac{v_3}{\rho_3} - i_3 \\
 & L_2 \frac{di_3}{dt} = v_3 - v_4 - R_2 i_3 \\
 & \frac{C_1 + C_2}{2} \frac{dv_4}{dt} = i_3 - i_4 - \frac{v_4}{\rho'_1} - i_5 \\
 & L'_1 \frac{di_4}{dt} = v_4 - R'_1 i_4 \\
 & \frac{C_1}{2} \frac{dv_5}{dt} = i_5 - i_6 \\
 & L_1 \frac{di_5}{dt} = v_4 - v_5 - R_1 i_5 \\
 & L \frac{di_6}{dt} = v_5 - R i_6 - E \cos \omega t
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Remarquons, que pour ce système (S₁), seules les trois premières équations sont non linéaires (par la présence du terme $f(\varphi)$), et que le terme de forçage sinusoïdal rendant le système non autonome, n'apparaît que dans la dernière équation. Les équations intermédiaires sont, elles, linéaires ; on va donc chercher à "éliminer" ces équations linéaires en modifiant bien entendu les valeurs des paramètres restants et en supprimant certaines valeurs dont l'effet est faible, et ce sans modifier le comportement global du phénomène.

2.2. Réduction de la dimension - Elimination des quelques paramètres - Détermination des modèles équivalents.

On cherche ici à supprimer les paramètres ayant un effet minime sur le comportement du réseau. Pour cela, on va opérer en deux temps: après avoir calculé les impédances dans chacune des branches du modèle, on les compare entre elles afin d'éliminer celles dont l'effet est négligeable. Rappelons brièvement la règle simple que nous utilisons ici;

Soit un circuit comportant les éléments simples suivants, pour lesquels les impédances Z_i sont connues:



S'il n'existe pas d'autres impédances "verticales", quelque soit le nombre de branches "horizontales" ayant une impédance non nulle, on peut dire que Z_0 est négligeable dans le circuit si:

$$\begin{cases} |Z_0| \ll |Z_1| \\ |Z_0| \ll |Z_2| \\ |Z_0| \ll |Z_3| \end{cases}$$

avec, dans le cas où le régime établi est sinusoïdal: $|Z| = \left| R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right|$

De façon plus générale, pour négliger une impédance "horizontale", il faut que celle-ci soit faible devant chacune des impédances "verticales". C'est ce que nous allons chercher à appliquer, après avoir remarqué que dans le modèle proposé (figure 1.1), la cellule comportant les éléments (L_2 , C_2 et R_2) est importante puisqu'elle modélise la ligne longue dans notre modèle initial ; elle doit donc rester intacte.

Nous insistons sur le fait que cette simplification grossière peut être réalisée dans le cas uniquement où les impédances supprimées sont très faibles par rapport aux autres impédances.

Dans un deuxième temps, nous utiliserons une simplification plus fine, en raisonnant sur des modèles équivalents pour lesquels, au lieu de supprimer certains éléments, on les déplace. On utilisera en particulier l'équivalent de Thévenin d'une partie du réseau.

2.2.1. Calcul des impédances dans les différentes branches

On suppose, pour ces calculs, que le régime obtenu est proche du régime sinusoïdal (ce qui est exact dans le cas linéaire). On cherche à simplifier le réseau obtenu au chapitre 1 et présenté à la figure 1.1, de part et d'autre de la cellule modélisant la ligne longue d'éléments caractéristiques (R_2 , L_2 , C_2). Pour cela, calculons tout d'abord les différentes impédances présentes dans chacune des branches "verticales",

impédances que nous comparerons ensuite à celles des différentes branches "horizontales" suivant la règle que nous venons de rappeler.

Le calcul de ces impédances se fait pour des fréquences variant de 50 à 200 Hz.

Soit donc, dans les branches représentant les lignes, le transformateur de Distré et celui de Breuil:

$$\begin{aligned}
 Z_0 &= \frac{1}{j\omega \frac{C_2}{2}} & |Z_0|^2 &\approx 10^7 \text{ à } 50 \text{ Hz} \\
 & & &\approx 10^6 \text{ à } 200 \text{ Hz} \\
 Z_1 &= \frac{1}{j\omega \frac{C_4}{2}} & |Z_1|^2 &\approx 10^8 \text{ à } 50 \text{ Hz} \\
 & & &\approx 10^6 \text{ à } 200 \text{ Hz} \\
 Z_2 &= \frac{1}{j\omega \frac{C_1}{2}} & |Z_2|^2 &\approx 10^{11} \text{ à } 50 \text{ Hz} \\
 & & &\approx 10^9 \text{ à } 200 \text{ Hz} \\
 Z_3 &= \rho_s & |Z_3|^2 &\approx 10^9 \\
 Z_4 &= \rho'_1 = \rho_3 & |Z_4|^2 &\approx 10^{11} \\
 Z_5 &= R'_1 + j\omega L'_1 & |Z_5|^2 &\approx 10^6 \text{ à } 50 \text{ Hz} \\
 & & &\approx 10^7 \text{ à } 200 \text{ Hz}
 \end{aligned}$$

alors que dans la branche représentant le transformateur saturable de Chinon, en régime quasi linéaire, le flux et le courant sont petits; on a donc

$$\begin{aligned}
 Z_6 &= \omega \left(l_t + \frac{1}{a} \right) & |Z_6|^2 &\approx 10^{10} \text{ à } 50 \text{ Hz} \\
 & & &\approx 10^{11} \text{ à } 200 \text{ Hz}
 \end{aligned}$$

Mais dès que la zone de saturation est atteinte (partie non linéaire), l'inductance de la bobine du transformateur devient petite et négligeable devant l_t et on a alors

$$\begin{aligned}
 Z_6 &\approx \omega l_t & |Z_6^s|^2 &\approx 5 \cdot 10^1 \text{ à } 50 \text{ Hz} \\
 & & &\approx 5 \cdot 10^2 \text{ à } 200 \text{ Hz}
 \end{aligned}$$

Partie Le Breuil - Chastang:

L'impédance de cette partie de ligne est

$$\begin{aligned}
 Z_7 &\approx R_1 + j\omega L_1 & |Z_7|^2 &\approx 60 \text{ à } 50 \text{ Hz} \\
 & & &\approx 10^3 \text{ à } 200 \text{ Hz}
 \end{aligned}$$

$$\text{et donc } |Z_7| \ll \min(|Z_1|, |Z_4|, |Z_5|), \quad \forall \omega / 314 \leq \omega \leq 1256$$

On peut ainsi négliger R_1 , L_1 et assembler les deux capacités $C_1/2$.

Partie Chinon - Distré:

L'impédance de cette partie de ligne est

$$Z_8 \approx R_4 + j\omega L_4 \quad \begin{array}{l} |Z_8|^2 \approx 1 \text{ à } 50 \text{ Hz} \\ \approx 10 \text{ à } 200 \text{ Hz} \end{array}$$

et donc

$$|Z_8| \ll \min(|Z_3|, |Z_4|, |Z_1|, |Z_2|, |Z_6|), \quad \forall \omega / 314 \leq \omega \leq 1256$$

et il est encore louable de négliger $|Z_8|$ devant $|Z_6^s|$ pour $\omega / 314 \leq \omega \leq 1256$.

On peut ainsi négliger R_4, L_4 et assembler les deux capacités $C_4/2$.

Transformateur de Chinon:

L'impédance est donnée par

$$Z_9 \approx \frac{r_s}{2} + j\omega \frac{l_s}{2} \quad \begin{array}{l} |Z_9|^2 \approx 10 \text{ à } 50 \text{ Hz} \\ \approx 30 \text{ à } 200 \text{ Hz} \end{array}$$

et donc

$$|Z_9| \ll \min(|Z_3|, |Z_4|, |Z_1|, |Z_2|, |Z_6|), \quad \forall \omega / 314 \leq \omega \leq 1256$$

mais $|Z_9|$ est du même ordre de grandeur que $|Z_6^s|$.

On décide quand même de négliger l_s et r_s , ce qui est justifié, tant que le transformateur n'est pas saturé.

Transformateur de Distré:

L'impédance est donnée par

$$Z_{10} \approx R_3 + j\omega L_3 \quad \begin{array}{l} |Z_{10}|^2 \approx 4.10^2 \text{ à } 50 \text{ Hz} \\ \approx 7.10^3 \text{ à } 200 \text{ Hz} \end{array}$$

et donc

$$|Z_{10}| \ll \min(|Z_3|, |Z_4|, |Z_1|, |Z_2|), \quad \forall \omega / 314 \leq \omega \leq 1256$$

mais $|Z_{10}|$ est de même ordre de grandeur que $|Z_6|$, et peut même être supérieur à $|Z_6^s|$.

Supprimer R_3 et L_3 peut donc être délicat dans le cas où on se trouve dans la zone de forte saturation.

On a donc choisi de traiter ces deux cas ; le cas où on garde R_3 et L_3 et le cas où, pour ne pas les supprimer totalement, on les "déplace" afin de pouvoir quand même simplifier le système.

2.2.2. Les modèles 8D, 7D et 5D

En nous appuyant sur les calculs que nous venons d'exposer, on peut réduire progressivement le nombre de variables d'état régissant le système physique présenté, de la façon suivante:

i) Le modèle 8D

Ce modèle est déduit du modèle 13D, pour lequel on a négligé les grandeurs (l_s , r_s , L_4 , R_4 , L_1 , R_1) conformément aux résultats obtenus en 2.2.1. On obtient donc le circuit de la figure 2.1. et les équations:

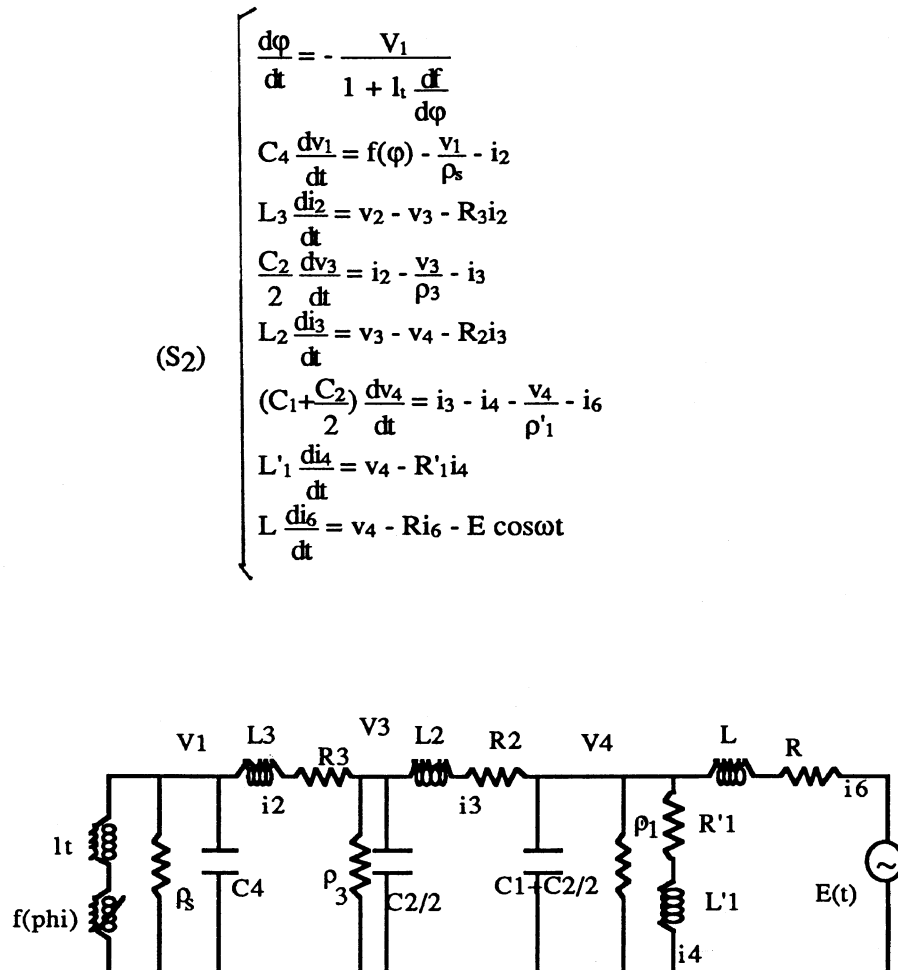


Figure 2.1: Le modèle 8D

Remarque 1 : les deux dernières équations du système S_2 peuvent être équivalentes à une seule équation dans le cas où le rapport R'_1/R_1 est proche de celui L'_1/L_1 , ce qui n'est pas du tout le cas ici.

Remarque 2 : En considérant toujours que l'on est en présence d'un régime presque sinusoïdal, on peut quand même assembler les 2 branches proches de la source de tension et ainsi diminuer de un la dimension du système à étudier: en prenant l'équivalent de Thévenin du système, nous obtenons alors un modèle de dimension sept.

ii) Le modèle 7D

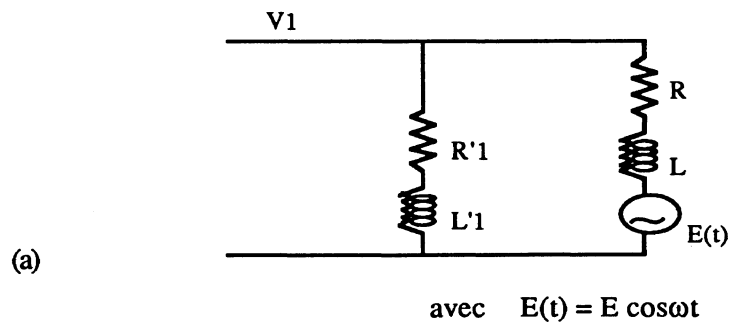
On souhaite remplacer les deux dernières équations du système (S2) par une seule équation ; soit donc remplacer

$$\begin{cases} L'_1 \frac{di_4}{dt} = v_4 - R'_1 i_4 \\ L \frac{di_6}{dt} = v_4 - R i_6 - E \cos \omega t \end{cases}$$

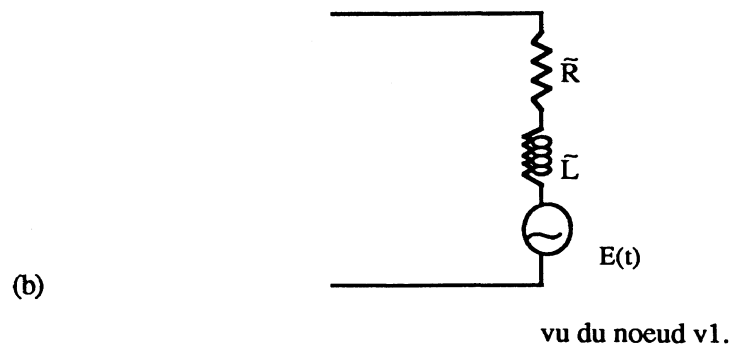
par

$$\tilde{L} \frac{dj}{dt} = v_4 - \tilde{R} j - E' \cos(\omega t + \theta)$$

ou bien encore, remplacer le système



par le système



Le théorème de Thévenin s'applique bien entendu ici dans le cas d'un régime sinusoïdal, où de plus on considère que la pulsation est la même dans chacune des deux branches du système (a) - ce qui est

quasiment le cas puisque d'une part cette partie du réseau est éloignée de la non linéarité, et que d'autre part, aucun élément perturbant n'est présent entre ces deux branches.

On va donc supposer que l'on est dans le cas proche du cas linéaire, et faire les simplifications évoquées. Calculons les valeurs $\tilde{L}$, $\tilde{R}$, E' et θ apparaissant dans l'équation que l'on cherche à déterminer.

Calcul de $\tilde{R}$ et $\tilde{L}$

Pour le calcul de ces grandeurs, on supprime le terme source (on utilisera ensuite le principe de superposition), puis on calcule et égale les deux impédances présentes dans chacun des éléments (a) et (b).

Soit $\tilde{Z} = \tilde{R} + j\omega\tilde{L}$ l'impédance équivalente apparaissant dans le système (b) ;

on doit alors avoir

$$\frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{R+j\omega L} + \frac{1}{R'_1+j\omega L'_1}$$

ce qui donne pour $\tilde{R}$ et $\tilde{L}$:

$$\tilde{R} = \frac{(R+R'_1)(RR'_1-\omega^2 LL'_1) + \omega^2 (L+L'_1)(R'_1 L + R L'_1)}{(R'_1+R)^2 + \omega^2 (L+L'_1)^2}$$

$$\tilde{L} = \frac{(R+R'_1)(R'_1 L + R L'_1) - (L+L'_1)(RR'_1-\omega^2 LL'_1)}{(R'_1+R)^2 + \omega^2 (L+L'_1)^2}$$

A condition, rappelons-le, que le régime soit proche du régime sinusoïdal.

Calcul de la source $E'(t)$:

Pour calculer la nouvelle tension d'alimentation $E'(t)$, déterminons et égalons les tensions à vide vues du noeud V_1 , dans chacun des circuits (a) et (b), en régime sinusoïdal.

Pour le circuit (a), qui se comporte comme un diviseur de tension :

$$E_{\text{vide}} = \frac{R+j\omega L}{(R+R'_1) + j\omega(L+L'_1)} E(t)$$

avec $E(t) = E \cos \omega t$

et pour le circuit (b):

$$E_{\text{vide}} = E'(t)$$

On doit donc avoir $E'(t) = z E(t)$ où on a posé

$$z = \frac{R + j\omega L}{(R + R'_1) + j\omega(L + L'_1)} = |z|e^{j\theta}$$

avec

$$|z| = \frac{\sqrt{(R'_1(R + R'_1) + \omega^2 L'_1(L + L'_1))^2 + \omega^2 (L'_1 R - R'_1 L)^2}}{(R + R'_1)^2 + \omega^2 L'_1(L + L'_1)}$$

et

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\omega(L'_1 R - R'_1 L)}{R'_1(R + R'_1) + \omega^2 L'_1(L + L'_1)}$$

Ainsi la tension d'alimentation du système équivalent est donnée par

$$E'(t) = E |z| \cos(\omega t + \theta)$$

Ce calcul est valable ici dans la mesure où on a choisi ω dans la bande de fréquences intéressante; ainsi, la quantité z dépend peu de ω .

On obtient bien un système à sept degrés de liberté.

iii) Le modèle 5D

L'impédance Z_{10} étant relativement importante, nous avons jugé qu'au lieu de la supprimer il était préférable de la déplacer pour l'ajouter dans la branche composée des éléments R_2 et L_2 , comme il l'est présenté à la figure 2.2. Ainsi, on peut à nouveau supprimer une cellule et obtenir finalement le système de dimension cinq:

$$(S_3) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = - \frac{V_1}{1 + I_t \frac{d\varphi}{d\varphi}} \\ C_\alpha \frac{dv_1}{dt} = f(\varphi) - \frac{v_1}{\rho_\alpha} - i_3 \\ L_2 \frac{di_3}{dt} = v_1 - v_4 - R_2 i_3 \\ C_\beta \frac{dv_4}{dt} = i_3 - \frac{v_4}{\rho'_1} - i_6 \\ \tilde{L} \frac{di_6}{dt} = v_4 - \tilde{R} i_6 - E|z| \cos \omega t \end{cases}$$

avec

$$\tilde{L} = \frac{LL'_1}{L + L'_1} \quad \text{et} \quad \tilde{R} = \frac{RR'_1}{R + R'_1}$$

$$\rho_{\alpha} = \frac{\rho_s \rho_3}{\rho_s + \rho_3} \quad \begin{aligned} C_{\alpha} &= C_4 + \frac{C_2}{2} \\ C_{\beta} &= C_1 + \frac{C_2}{2} \end{aligned}$$

En conclusion, en supprimant les éléments de faibles valeurs par rapport aux autres, on a pu réduire considérablement la dimension du problème.

Nous comparerons ultérieurement, (au chapitre III), les résultats numériques obtenus dans chacun des cas présentés.

Le système de dimension cinq obtenu comportant encore deux équations différentielles linéaires, on souhaite effectuer une nouvelle transformation du circuit présenté figure 2.2 afin de simplifier encore une fois le problème étudié.

Tous les paramètres en présence sur ce modèle sont importants; on choisit donc de changer la configuration du modèle tout en conservant certaines grandeurs caractéristiques qui nous ont semblées importantes pour l'étude de la ferorrésonance.

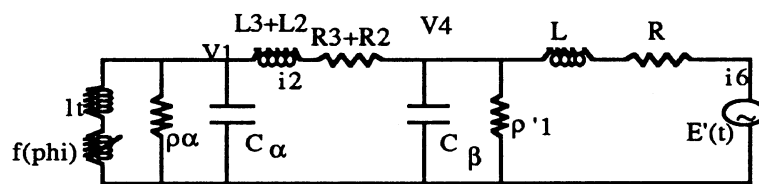


Figure 2.2 : Le modèle 5D

2.2.2. Détermination d'un modèle 3D équivalent

Supprimer deux équations au système de dimension cinq obtenu, revient à transformer le circuit de la figure 2.2 en celui de la figure 2.3.

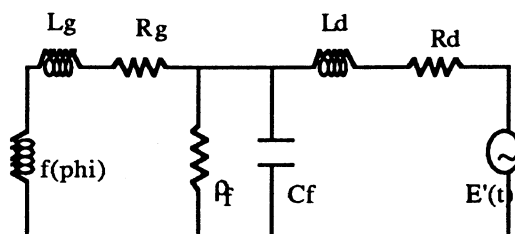
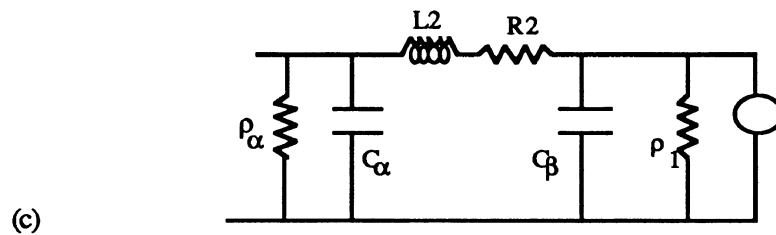
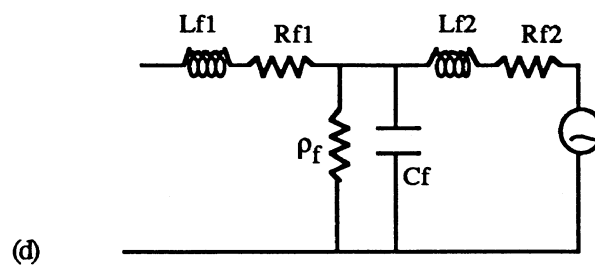


Figure 2.3 : Le modèle 3D

Cela revient donc à changer la cellule en Π :



par une cellule en T de la forme



et ce tout en conservant les propriétés caractéristiques du circuit.

Plusieurs méthodes permettent de réaliser cette transformation. Dans le cas d'un régime sinusoïdal, ces deux configurations sont équivalentes et on peut déduire, par le théorème de Kennely, les paramètres caractéristiques du modèle (d). Ces derniers dépendent bien entendu de ceux du système (c) mais sont aussi fonction de la pulsation du circuit, qui dans notre cas n'est pas constante; cette cellule est trop éloignée de la tension d'alimentation pour que l'on puisse considérer sa pulsation propre proche de celle de la source (bien qu'on ait dû le faire dans les premières approximations car son influence était moindre).

Nous avons donc choisi, pour passer de la configuration (c) à la configuration (d) de se fixer trois grandeurs invariantes particulièrement importantes dans les cas d'apparition de phénomènes ferromagnétiques, basées sur l'équivalent de Thévenin: la fréquence propre d'oscillation, la capacité totale, l'inductance totale.

Pour déduire les nouvelles grandeurs caractéristiques de la configuration (d), on ne tient pas compte des pertes dans un premier temps (n'intervenant pas dans le calcul de la fréquence), et on impose donc que soient conservées :

i) la fréquence vue de l'élément non linéaire, au maximum de l'impédance

$$L_f^2 C_f = L_2 C_\alpha$$

ii) l'impédance totale :

$$L_2 = L_f^1 + L_f^2$$

l'impédance de court-circuit du transformateur est ainsi conservée.

iii) la capacité totale :

$$C_f = C_\alpha + C_\beta$$

C'est ici l'impédance en circuit ouvert qui est conservée.

D'autres invariants auraient pu être choisis, comme par exemple un des paramètres du quadripôle, mais le choix réalisé nous a semblé plus judicieux, dans la mesure où, le phénomène étant fortement non linéaire, le circuit peut être très impédant ou non.

Ensuite, on ajuste les pertes dans les mêmes proportions, en sorte que :

. pour les pertes séries

$$\begin{aligned} R_f^1 + R_f^2 &= R_2 \\ \frac{R_f^1}{R_f^2} &= \frac{L_f^1}{L_f^2} \end{aligned}$$

. pour les pertes parallèles

$$\rho_f = \frac{\rho'_1 \rho_\alpha}{\rho'_1 + \rho_\alpha}$$

ce qui nous permet d'obtenir finalement le circuit présenté à la figure 2.3., et dont les équations sont :

$$(S_4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= - \frac{V_1}{1 + l_g \frac{df}{d\varphi}} \\ C_f \frac{dv}{dt} &= f(\varphi) - \frac{v}{\rho_f} - i \\ L_d \frac{di}{dt} &= v - R_d i - E|z| \cos \omega t \end{aligned} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{aligned} R_g &= R_f^1 = \frac{R_2}{1 + \frac{C_\alpha}{C_\beta}} \\ L_g &= L_f^1 + l_t = \frac{L_2 C_\beta}{C_\alpha + C_\beta} + l_t \\ L_d &= L_f^2 + L' = \frac{L_2 C_\alpha}{C_\alpha + C_\beta} + L' \\ R_d &= R_f^2 + R' = \frac{R_2}{1 + \frac{C_\beta}{C_\alpha}} + R' \end{aligned} \right.$$

Comme nous le verrons ultérieurement, tous ces modèles possèdent qualitativement le même type de comportement, tout au moins pour les grandeurs physiques habituellement utilisées ; ils font tous partie de la catégorie que l'on nomme "ferro-résonance parallèle", la ou les capacité(s) à l'origine de ces phénomènes se trouvant en parallèle avec la source de tension et l'impédance non linéaire.

Ceci confirme bien que toute l'information concernant l'apparition de ces phénomènes caractéristiques provient des équations non linéaires non autonomes, comme il était naturel de le penser.

2.3. Etude d'un invariant du système. Régime transitoire

Considérons le modèle le plus simple (3D) obtenu à la section précédente et dont les équations sont de la forme:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = - \frac{v}{1 + l_s \frac{df}{d\varphi}} \\ C \frac{dv}{dt} = f(\varphi) - \frac{v}{\rho} - i \\ L \frac{di}{dt} = v - R i - E(t) \end{cases} \quad \text{où } E(t) = E \cos \omega t$$

On se place dans le cas où l'inductance de pertes du transformateur est négligeable ($l_s \approx 0$; dans ce cas, la fréquence du réseau est infinie).

On pose $A = Li + \varphi + \varepsilon(t)$ où $\varepsilon(t)$ est telle que $\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = E(t)$.

alors le système (2.3.1) peut s'écrire

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = -v \\ C \frac{dv}{dt} = f(\varphi) - \frac{v}{\rho} - \frac{1}{L} (A - \varphi - \varepsilon(t)) \\ \frac{dA}{dt} = -\frac{R}{L} (A - \varphi - \varepsilon(t)) \end{cases}$$

et ainsi, si la résistance série R est nulle (ou faible) on se ramène à un système de dimension deux (correspondant à l'équation de Duffing avec terme de forçage):

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = -v \\ C \frac{dv}{dt} = f(\varphi) - \frac{v}{\rho} + \frac{1}{L} (\varphi + \varepsilon(t) - A_0) \end{cases}$$

où A_0 est une constante.

A est alors un invariant ou une intégrale première pour le système initial sans pertes. On retrouve bien ici l'idée proposée par R. Roussarie et qui consiste à initialiser à partir des solutions (analytiques) d'un système de dimension deux que l'on perturbe progressivement en introduisant des pertes.

D'autre part, cette remarque peut-être judicieuse lorsque l'on s'intéresse à l'étude de la ferrorésonance en régime transitoire; en effet, si on perturbe A en posant $\bar{A} = A - A_0$ et que l'on regarde le comportement de $\bar{A}$, cela revient à modifier la constante de temps caractéristique du circuit. Le modèle à étudier est alors donné par

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = -v \\ C \frac{dv}{dt} = f(\varphi) - \frac{v}{\rho} + \frac{1}{L} (\varphi + \varepsilon(t) - \bar{A} - A_0) \\ \frac{d\bar{A}}{dt} = \varepsilon \end{cases}$$

Ces équations régissent un modèle équivalent à celui que nous avons présenté et pour lequel une source de courant i_0 a été rajoutée à i:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = - \frac{V_1}{1 + I_s \frac{df}{d\varphi}} \\ C \frac{dv}{dt} = f(\varphi) - \frac{v}{\rho} - i - i_0 \\ L \frac{di}{dt} = v - R i - R i_0 - E(t) \end{cases}$$

Ainsi, on introduit un nouveau paramètre à partir duquel il est possible d'étudier le comportement des variables d'état en régime transitoire. Faute de temps, une étude approfondie de cette question n'a pas été réalisée, mais dans le cas de la ferrorésonance série, on sait que si on ajoute une constante dans l'équation de Duffing:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - x + x^3 = \gamma \cos(\omega t) + \alpha$$

pour laquelle le comportement de la solution x peut-être différent suivant les valeurs de ce nouveau paramètre α .

Enfin, remarquons que dans le cas où les systèmes étudiés sont de dimension supérieure à trois -comme ceux présentés au début de cette section- un invariant est donné par une combinaison linéaire du flux, des courants dans les différentes branches du réseau et de la fonction $\varepsilon(t)$.

2.4. Cas de la ligne longue

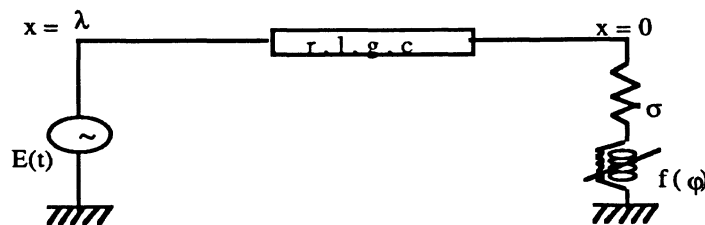
On a vu dans les sections précédentes que le modèle du réseau du renvoi de tension pouvait se simplifier jusqu'à donner un système de dimension trois. Aux vues des résultats (du chapitre 3), on peut constater que cette approximation est valide, en tout cas en ce qui concerne les singularités apparaissant dans une plage de valeurs de paramètres acceptable et engendrant les phénomènes ferrorésonants que l'électrotechnicien voudrait éviter. Cela signifie que toute l'information à l'origine de ces phénomènes se trouve concentrée dans ces trois équations, ou encore que c'est le fait de considérer une ligne longue placée entre une source de tension et un transformateur de caractéristique non linéaire qui engendre les comportements que l'on souhaite analyser.

On va ainsi considérer maintenant le modèle ferrorésonant parallèle le plus simple: la ligne placée entre les deux éléments "perturbants" ; elle se modélise par une équation en dérivées partielles à une dimension en espace (ligne mince). Nous verrons comment, en discrétisant cette équation par un schéma simple, il est possible de faire l'analogie entre le modèle obtenu et ceux étudiés à la section précédente (paragraphe 2.2. et 2.3), et ainsi de donner une approche plus mathématique de cette mise sous forme d'équations différentielles ordinaires; de plus, on pourra étudier, sur ce modèle, l'influence du nombre de cellules choisi pour représenter la ligne longue.

D'autre part, on pourra faire le lien entre les résultats obtenus sur ce modèle et les résultats théoriques déterminés au chapitre 4 dans lequel l'étude de l'équation aux dérivées partielles sera traitée.

2.4.1. L'équation des télégraphistes

Une ligne électrique de longueur λ placée entre une source de tension sinusoïdale $E(t)$ et un transformateur de résistance σ et de caractéristique non linéaire $i = f(\varphi)$, de configuration:



est modélisée par l'équation aux dérivées partielles linéaire suivante :

(appelée équation des télégraphistes)

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = r i + l \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial x} = g v + c \frac{\partial v}{\partial t} \end{cases} \quad (2.1)$$

$$(2.2)$$

$$x \in]0, \lambda[, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

dont les conditions limites (non linéaires) sont

$$i(0, t) = f(\varphi)$$

$$v(0, t) = \frac{d\varphi}{dt} + \sigma i(0, t)$$

$$v(\lambda, t) = E(t)$$

et les conditions initiales (données): $i(x, 0) = i_0(x)$ et $v(x, 0) = v_0(x)$

v et i représentent respectivement la tension et le courant sur la ligne .

La fonction f modélisant la caractéristique du transformateur est au moins deux fois continuellement différentiable à valeurs dans $\mathbb{R}$, strictement croissante et à coefficients positifs.

r, l, g, c sont des constantes positives représentant les caractéristiques linéiques de la ligne.

σ est une constante positive (résistance de pertes du transformateur).

L'existence et l'unicité de la solution pour ce problème seront étudiées au chapitre IV; il sera montré aussi l'existence d'un ensemble attracteur, attirant toutes les trajectoires solutions.

On se propose de discrétiser ce problème.

2.4.2. Discrétisation en espace

Soit $\Delta x = \lambda/N$ le pas de la discrétisation (la ligne est coupée en N pas Δx).

On pose $v_n(t) = v(n\Delta x, t)$ et $i_n(t) = i(n\Delta x, t)$

les valeurs de la tension et du courant en des valeurs discrètes $n\Delta x$ sur la ligne, où n est tel que $0 \leq n \leq N$.

On écrit alors l'équation (2.1) sous la forme $(2.1)_n$ suivante :

$$\frac{v_n - v_{n-1}}{\Delta x} = r i_n + l \frac{di_n}{dt} \quad (2.1)_n$$

et on fait de même pour l'équation (2.2), en décentrant le schéma

$$\frac{i_n - i_{n-1}}{\Delta x} = g v_{n-1} + c \frac{dv_n}{dt} \quad (2.2)_n$$

On obtient alors le système d'équations différentielles ordinaires:

$$(E_n) \quad \begin{cases} l \frac{di_n}{dt} = \frac{v_n - v_{n-1}}{\Delta x} - r i_n \\ c \frac{dv_{n-1}}{dt} = \frac{i_n - i_{n-1}}{\Delta x} - g v_{n-1} \\ i_0(t) = f(\varphi) \\ v_0(t) = \frac{d\varphi}{dt} + \sigma i_0(t) \\ v_N(t) = E(t) \end{cases} \quad 2 \leq n \leq N-1$$

i) Cas d'une discrétisation à un seul pas

On pose $N=1$, $\Delta x = \lambda$.

(En) s'écrit alors :

$$(E_1) \quad \begin{cases} l \frac{di_1}{dt} = \frac{v_1 - v_0}{\Delta x} - r i_1 \\ c \frac{dv_0}{dt} = \frac{i_1 - i_0}{\Delta x} - g v_0 \\ i_0(t) = f(\varphi) \\ v_0(t) = \frac{d\varphi}{dt} + \sigma i_0(t) \\ v_1(t) = E(t) \end{cases}$$

soit encore :

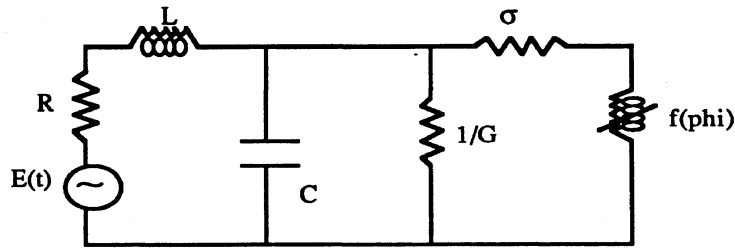
$$(P_1) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = v - \sigma f(\varphi) \\ C \frac{dv}{dt} = i - f(\varphi) - Gv \\ L \frac{di}{dt} = E(t) - v - Ri \end{cases}$$

où on a posé

$$v = v_0, i = i_1$$

$$L = \lambda l, R = \lambda r, G = \lambda g, C = \lambda c$$

Cette équation différentielle ordinaire décrit le circuit électrique:



Le système (P₁) correspond bien au système 3D obtenu à la section 2.2.3 de ce chapitre, pour lequel on a supprimé l'inductance de pertes dans le transformateur ($l_g = 0$). (il faut changer i en $-i$ et φ en $-\varphi$ pour passer d'un système à l'autre, les représentations correspondant à chacun des circuits étant inversées).

ii) Cas d'une discrétisation à deux pas

Si maintenant on choisit une discrétisation à deux pas, on pose : $N = 2$, $\Delta x = \lambda/2$

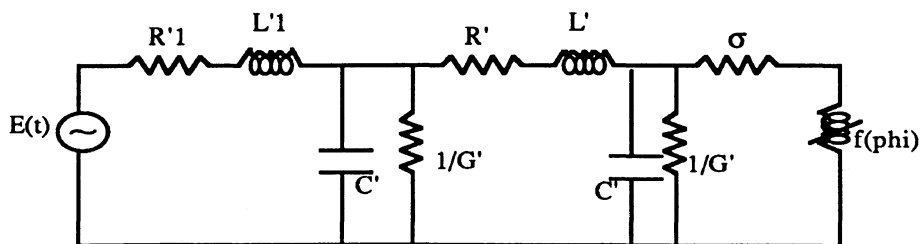
et le système (E_N) s'écrit alors:

$$(P_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} L' \frac{di_2}{dt} = E(t) - v_1 - R' i_2 \\ C' \frac{dv_1}{dt} = i_2 - i_1 - G' v_1 \\ L' \frac{di_1}{dt} = v_1 - v_0 - R' i_1 \\ C' \frac{dv_0}{dt} = i_1 - f(\varphi) - G' v_0 \\ \frac{d\varphi}{dt} = v_0 - \sigma f(\varphi) \end{array} \right.$$

où on a posé cette fois

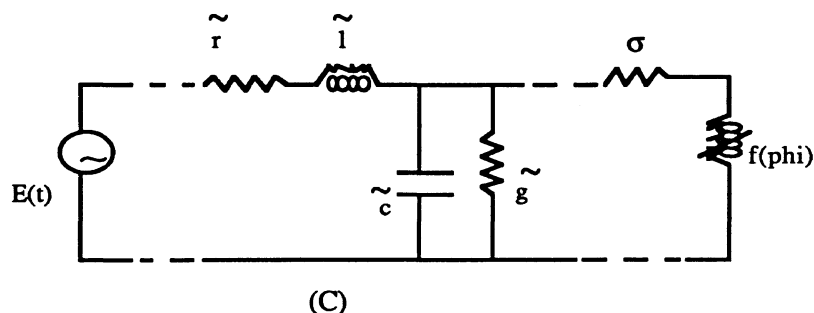
$$L' = \lambda l/2, \quad R' = \lambda r/2, \quad G' = \lambda g/2, \quad C' = \lambda c/2$$

Cette équation décrit le circuit électrique suivant :



Augmenter d'un degré de précision la discrétisation revient donc à rajouter deux équations différentielles du premier ordre, ou, d'un point de vue physique, à discrétiser la ligne en une cellule en Π supplémentaire.

En généralisant cela, on en déduit que l'équation continue (équation aux dérivées partielles) correspond alors au circuit :



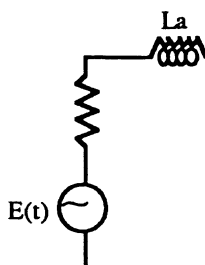
où l'élément C (la cellule principale) est répété un nombre infini de fois.

Nous verrons numériquement, comment se comporte les variables du réseau suivant le choix de la modélisation.

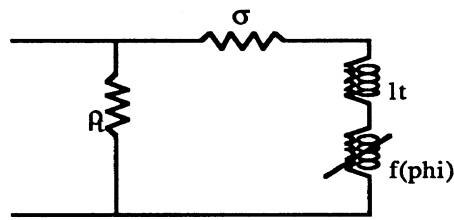
2.4.3. Modélisation plus fine des éléments d'extrémités (transformateur-générateur)

Nous venons de voir quelle était la modélisation choisie pour représenter une ligne longue placée entre une source de tension et un transformateur. Afin d'avoir un modèle plus proche de la réalité, il faut tenir compte des paramètres caractéristiques des deux machines agissant à chaque extrémité de la ligne, conformément aux explications données au paragraphe 1 de ce chapitre.

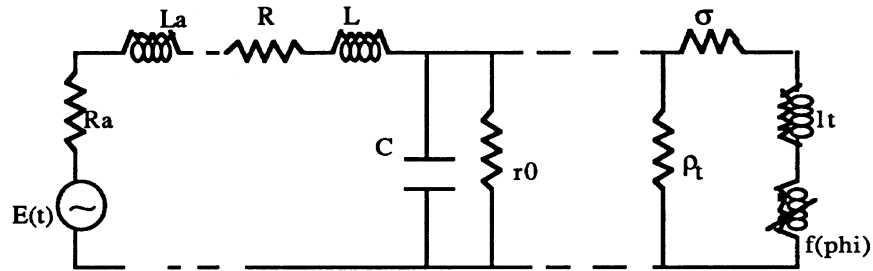
La source de tension correspond à un alternateur accompagné d'un transformateur (non saturé : sa caractéristique est donc linéaire) modélisés par :



En tenant compte des différentes pertes, le transformateur non linéaire est remplacé par



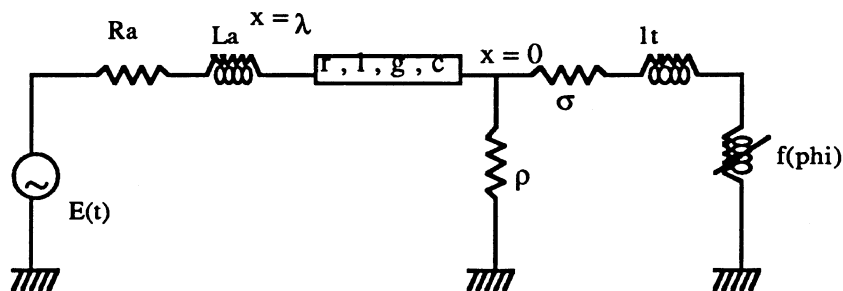
On obtient donc au total, dans le cas d'une modélisation à une cellule de la ligne placée entre ces deux éléments:



dont les équations sont données par

$$\begin{cases} (L+L_a) \frac{di}{dt} = E \cos \omega t - v - (R+R_a) i \\ C \frac{dv}{dt} = i - v \frac{1+\rho_t G}{G} - f(\varphi) \\ \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v - \sigma f(\varphi)}{1 + l_t \frac{df}{d\varphi}} \end{cases}$$

Remarque : cela revient à traiter le problème à constantes réparties suivant :



dont les équations aux dérivées partielles sont identiques aux précédentes, mais avec pour conditions de bord:

$$\begin{aligned}
 v(\lambda, t) &= E(t) - R_a i(\lambda, t) - L_a \frac{di(\lambda, t)}{dt} \\
 i(0, t) &= \frac{v(0, t)}{\rho_t} + f(\varphi) \\
 v(0, t) &= \left(1 + l_t \frac{df}{d\varphi}\right) \frac{d\varphi}{dt} + \sigma f(\varphi)
 \end{aligned}$$

Et, en prenant

$$R_a = L_a = 0, \quad \rho_t = 1, \quad l_t = 0$$

on retrouve bien les conditions de bord du problème (E₁), étudié au chapitre 4.

La modélisation du problème physique rencontré étant réalisée, nous allons maintenant nous attacher à étudier de façon plus mathématique les systèmes différentiels obtenus. Les systèmes d'équations différentielles ordinaires seront traités numériquement (au chapitre 3) à partir de la théorie exposée au chapitre 2, et l'étude théorique de l'équation aux dérivées partielles hyperbolique sera réalisée au chapitre 4.

BIBLIOGRAPHIE

- [B1] B. BLENGINO
Validation de la simulation sur EMTP des régimes ferrorésonants : influence de la représentation des lignes de transport.
Note EDF - HM-18/091 (novembre 89).
- [B2] B. BLENGINO
Simulation de l'incident Chastang - Chinon réalisé grâce à un réseau monophasé représentatif de schéma réel.
Note EDF - HM-18/011 (juin 88).
- [B3] B. BLENGINO
Simulation numérique des essais de ferrorésonance réalisés sur le modèle monophasé à l'aide du programme EMTP.
Note EDF - HM-15/1232 JCK/BB/CBs.
- [B.C.K] P. BORNARD, V. COLLET-BILLON, C. KIENY
Protection of EHV Power Systems against ferroresonance
Cigre. 1990 Session 26th august-1st september.
- [D.B.B.L.M] H.W. DOMMEL, S. BHATTACHARYA, W. BRANDWAJN, H.K. LAUW, L. MARTI
EMTP Theory book. Reference manual.
August 1986. Departement of Electrical Engineering . Faculty of Applied Science. The University of British Columbia
- [G.H] J. GUCKENHEIMER, P. HOLMES
Non linear oscillations, dynamical systems and Bifurcations of vector fields.
Springer Verlag - A.M.S. - 42.
- [K1] C. KIENY
Ferroresonance : état de l'art.
Note EDF - HM-18/014 (juin 88).

- [K2] C. KIENY
Critère simple de ferorrésonance pour les renvois de tension.
EDF. Bulletin de la DER. Série B. Réseaux électriques. Matériels électriques.
N°2. 1988. p.33.40.
- [K3] C. KIENY
Application de la théorie des bifurcations pour étudier et comprendre le comportement global d'un réseau électrique ferorrésonant.
Note EDF - HM-18/067 (1989).
- [Kaw] H. KAWAKAMI
Récurrences: construction numérique dans le cas d'un système continu. Traitement numérique des attracteurs étranges.
Colloque CNRS, Fev 1985, pp 53.66
- [Kaw2] H. KAWAKAMI
Bifurcation of periodic responses in forced dynamic non linear circuits; computations of bifurcation values of the system parameters
Trans, IEEE, Vol.CAS-31, pp 248.260 (1984)
- [K.L.S] C. KIENY, G. LE ROY, A. SBAI
Ferroresonance study using Galerkin Methhod with pseudo-arclength continuation Method
A paraître. Papier présenté au Summer Meeting IEEE/PES. 1991. 91 SM407-7 PWRD
- [K.S1] C. KIENY, A. SBAI
Ferroresonance et surtensions dans les postes 400 KV exploités en piquage.
Note EDF - HM-18/028 (septembre 88).
- [K.S2] C. KIENY, A. SBAI
Principale situation de ferorrésonance rencontrées dans les réseaux électriques.
Note EDF - HM-18/144 (mars 91).
- [K.S3] A. SBAI, C. KIENY
Application à la ferorrésonance de la méthode "pseudo-absisse curviligne " dans les équations implicites résolues par continuation.
Note EDF - HM-18/019.

[L.S.K] J. LACOUR, A. SBAI, C. KIENY

Présentation du banc ferro. Modèle réduit monophasé adapté à l'étude des renvois de tension.
Note EDF - HM-15/1011 (mars 87).

[P1] M. POLOUJADOFF

Cours d'Electrotechnique donnés à l'Ecole Centrale de Paris

[P2] M. POLOUJADOFF

Relationship between the skin effect and the evaluation of the inductance coefficients for low frequency operation
IEEE Vol 6. pp 231-238, 1968

[R1] R. ROUSSARIE

Etude de la ferorésonance série monophasée par une méthode de perturbation.
Note EDF - HM-18/104 (avril 88).

[R2] R. ROUSSARIE

Bifurcation des orbites périodiques dans les équations non linéaires du deuxième ordre.
Note EDF - HM-18/005 (mai 88).

[R3] R. ROUSSARIE

Etude de la ferorésonance dans un système monophasé non linéaire.
Note EDF - HM-18/006 (mai 88).

[R4] R. ROUSSARIE

Introduction à l'étude de la ferorésonance en dimension quelconque.
Note EDF - HM-18/007 (mai 88).

[R5] J. ROUX

Stabilité des solutions périodiques par les méthodes directes de Lyapunov. Application à la ferorésonance série : équation de Duffing.
Note EDF - H1-72/6926 (juin 90).

[R6] J. ROGUIN

Le programme EMTP pour l'étude des phénomènes électriques transitoires.
EDF. Bulletin de la DER. Série B. N° 3/4. 1983. pp 27-34

[W] S. WIGGINS

Global bifurcation and chaos.

Springer Verlag - AMS - 73.

[YB] J.L. YAO BI

Modélisation des réseaux électriques pour l'étude de la ferrorésonance.

Stage de fin d'étude. EDF.

CHAPITRE II

**RAPPEL DES DIFFERENTES NOTIONS UTILES
POUR L'ETUDE DES SYSTEMES DYNAMIQUES:**

STABILITE ET BIFURCATIONS

S O M M A I R E

0. INTRODUCTION

1. METHODES GENERALES D'ANALYSE D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES - ETUDE DE LA STABILITE

- 1.1. Introduction et définition
- 1.2. Etude du système linéaire à coefficients constants
- 1.3. Calcul des valeurs propres - Etude de la stabilité
- 1.4. Système linéaire à coefficients périodiques - Théorie de Floquet
- 1.5. Problème général - Méthode de linéarisation
 - 1.5.1. Linéarisation autour d'une solution stationnaire
 - 1.5.2. Linéarisation autour d'une solution périodique
 - 1.5.3. Section de Poincaré
- 1.6. Notions d'ensemble invariant et d'attracteur
- 1.7. Notions de stabilité
 - 1.7.1. Stabilité asymptotique
 - 1.7.2. Stabilité au sens de Lyapunov
- 1.8. Exposants de Lyapunov
 - 1.8.1. Approche géométrique des exposants de Lyapunov
 - 1.8.2. Définition analytique

2. EQUATIONS DIFFERENTIELLES PARAMETREES - THEORIE DES BIFURCATIONS

- 2.1. Bifurcation de solutions stationnaires
 - 2.1.1. Classification des points de courbes solutions
 - 2.1.2. Classification des bifurcations de solutions stationnaires
 - Bifurcation col-noeud
 - Bifurcations transcritique et fourche
 - Bifurcation de HOPF
- 2.2. Bifurcation de solutions périodiques
 - 2.2.1. Classification des bifurcations de solutions périodiques
 - Bifurcations col-noeud, transcritique et fourche
 - Bifurcation de doublement de période
 - Bifurcation vers le tore
 - 2.2.2. Etude sur l'application de Poincaré

2.3. Cas des exposants de Lyapunov

0. INTRODUCTION

Ce chapitre est une présentation succincte de notions relativement récentes et parfois mal accessibles, permettant l'étude du comportement des solutions de systèmes dynamiques non linéaires ; elles sont, en particulier, issues de théories mieux connues sous le nom de *théorie des bifurcations ou des catastrophes* (initialement développées par H. Poincaré, R. Thom...).

Nous ne prétendons pas donner tous les résultats obtenus dans ce domaine, mais simplement les outils mathématiques utilisés tout au long de cette thèse et à l'usage principalement des ingénieurs peu familiarisés avec ces notions et en s'excusant auprès de ceux pour lesquels ces rappels sont inutiles.

Dans une première section nous nous intéresserons aux notions de base caractérisant tout système dynamique, en regardant dans un premier temps, comment il est possible d'étudier le comportement des solutions du système dans le cas où celui-ci est linéaire. Dans le cas où il est périodique, la *théorie de Floquet* est exposée. L'étude de la stabilité, en particulier, sera présentée.

Nous verrons ensuite comment dans un cas plus général, il est possible de se baser sur les résultats précédents en réalisant une linéarisation d'un système non linéaire autour d'une solution connue. D'autre part, les notions de *section de Poincaré*, d'*ensembles invariants* et d'*attracteurs*, d'*exposants de Lyapunov* seront présentés et leurs intérêts mis en évidence.

Puis, dans une seconde section nous reprendrons les idées précédentes en les appliquant au cas où le système dépend d'un paramètre dont les variations peuvent engendrer des modifications du comportement des solutions.

Nous entrons alors dans le coeur de la *théorie des bifurcations*, fondamentale pour la compréhension des comportements physiques rencontrés. Après avoir rappelé le *théorème des fonctions implicites* qui se trouve être à la base de cette théorie, nous définirons les divers concepts utilisés dans ce domaine (*diagrammes et lignes de bifurcation*) ainsi que les différents types de singularités que l'on peut rencontrer et qui sont la source des changements de comportement observés. Puis nous donnerons une liste des bifurcations de branches de solutions stationnaires puis périodiques cataloguées (en nombre fini), et nous verrons comment il est possible de les détecter. Enfin, nous verrons comment se comportent les *exposants de Lyapunov* pour certaines de ces bifurcations.

Pour ceux qui veulent en connaître plus ou qui trouvent ces explications insuffisantes, une bibliographie est donnée à la fin de ce chapitre.

1. METHODES GENERALES D'ANALYSE D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES - ETUDE DE LA STABILITE

1.1. Introduction et définitions

On cherche à étudier le comportement asymptotique (pour de grands temps) des solutions du *système différentiel général*:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \\ \text{donnée} \end{array} \quad (\text{I.1})$$

où f est une fonction régulière - pouvant dépendre explicitement du temps t (cas dit *non autonome*) - définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ (ou U de $\mathbb{R}$) à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Pour les conditions d'existence et d'unicité des solutions du *système dynamique* (I.1) on pourra, par exemple, consulter [G.H.], [L2] ou [W].

Géométriquement, l'équation (I.1) peut être interprétée comme définissant un vecteur en chaque point de U ; une solution de cette équation est une courbe dans $\mathbb{R}^n$ dont la tangente - ou le vecteur vitesse - en chaque point est donnée par f évalué en ce point.

Pour cette raison, f est souvent nommé *champ de vecteurs*.

On dit que le champ de vecteurs f génère un flot

$$\phi(t) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tel que $\phi_t(x) = \phi(x, t)$ soit une fonction régulière définie en tout x de U et pour t appartenant à un intervalle I de $\mathbb{R}$ vérifiant de plus

$$\left(\frac{d\phi(x, t)}{dt} \right)_{x=\tau} = f(\phi(x, \tau)) \quad \forall x \in U, \forall t \in \mathbb{R}$$

Ce flot possède les propriétés de groupe :

$$\text{i) } \phi_0 = \text{Id}$$

$$\text{ii) } \phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$$

Si la condition initiale du système à étudier est donnée par $x(0) = x_0 \in U$ alors la solution $\phi(x_0, t)$ vérifiera

$$\phi(x_0, t) = x_0$$

et dans ce cas, $\phi(x_0, t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ définit la solution, la *trajectoire ou l'orbite* de l'équation différentielle considérée, issue de x_0 .

On s'intéressera ici à l'étude du comportement de familles de courbes solutions, c'est-à-dire au comportement global de flot $\phi_t : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ défini en tout point $x \in U$.

1.2. Etude du système linéaire à coefficients constants.

Soit le système - cas particulier de l'équation (I.1) -

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax & x \in U, t \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (I.2)$$

où A est une matrice $n \times n$ à coefficients constants.

Soit x la solution du problème à valeur initiale (I.2), définie pour tout temps t (on n'a souvent qu'une existence locale en temps dans le cas des systèmes non linéaires).

Le flot $\phi_t(x)$ défini précédemment s'écrit ici simplement :

$$\phi_t(x) = x(x_0, t)$$

et la solution globale du système (I.2) est donnée par :

$$x(x_0, t) = e^{tA} x_0$$

où e^{tA} est une matrice $n \times n$, déterminée à partir de A par la série convergente:

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

(Pour la définition et les propriétés des exponentielles de matrice, voir par exemple [H]).

La connaissance des valeurs propres de A est donc fondamentale pour l'étude de tels systèmes.

1.3. Calcul des valeurs propres - Etude de la stabilité

Lemme 1.3.1 : si λ est une valeur propre de A , de vecteur propre associé v , alors la fonction $x(t) = Ce^{\lambda t} v$ est une solution de l'équation I.2, $C \in \mathbb{R}$ étant une constante.

Lemme 1.3.2 : si A possède n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de vecteurs propres associés $v_1, \dots, v_n$ (respectivement), alors une solution générale de (I.2) est donnée par :

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i v_i e^{\lambda_i t}, \quad c_i \in \mathbb{R} \quad \text{constant}$$

Lemme I.3.3 : Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ($s \leq n$) sont les valeurs propres distinctes de A , de multiplicité $r(\lambda_1), \dots, r(\lambda_s)$ (respectivement), et $M_{\lambda_1}(A), \dots, M_{\lambda_s}(A)$ les espaces propres associés, alors la solution de (I.2) est donnée par :

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^{r(\lambda_j)-1} (A - \lambda_j)^k \frac{t^k}{k!} \right) x^{0,j} e^{\lambda_j t}$$

où $x^{0,j} \in M(A)$ et est déterminée par l'unique décomposition du vecteur initial x_0 .

Pour les démonstrations de ces trois lemmes voir [H].

D'après leur forme, on déduit aisément le comportement pour de grands temps, des solutions de l'équation (I.2): ce sont uniquement les valeurs propres λ_i de A qui déterminent la structure des trajectoires solutions.

On introduit alors la *partition du spectre* de A :

$$\begin{aligned} \sigma_+(A) &= \{ \lambda \in \mathbb{C}, \chi_A(\lambda) = 0, \Re(\lambda) > 0 \} \\ \sigma_0(A) &= \{ \lambda \in \mathbb{C}, \chi_A(\lambda) = 0, \Re(\lambda) = 0 \} \\ \sigma_-(A) &= \{ \lambda \in \mathbb{C}, \chi_A(\lambda) = 0, \Re(\lambda) < 0 \} \end{aligned} \tag{I.3}$$

où χ_A est le polynôme caractéristique de A .

On a alors le :

Théorème 1.1 : *Toutes les solutions de (I.2) convergent vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$ si et seulement si $\sigma_0(A) = \emptyset$ et $\sigma_+(A) = \emptyset$.*

Si $\sigma_+(A) = \emptyset$ les solutions de (I.2) restent bornées lorsque $t \rightarrow \infty$ si et seulement si $\sigma_0(A)$ est formé de valeurs propres de multiplicité égale à la dimension de l'espace propre associé (ie A diagonalisable).

(Pour la démonstration, voir [H])

1.4. Système linéaire à coefficients périodiques - Théorie de Floquet.

On s'intéresse maintenant au système périodique :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(t) x & x &\in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \\ \text{où } A(t) &= A(t+T) & T &\in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (I.4)$$

Pour un tel système, les critères de stabilité sont donnés par la *théorie de Floquet*.

Théorème de Floquet : *Toute matrice fondamentale $Y(t)$ de (I.4), ie solution de système matriciel associé:*

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = A(t)Y \\ Y(0) = I \end{cases}$$

peut être écrite sous la forme

$$Y(t) = X(t) e^{Bt}$$

où X est une matrice $n \times n$ périodique de période T, et B une matrice non constante.

Pour la démonstration de ce théorème, on pourra, par exemple, consulter [R].

La solution du système initial est alors fournie par :

$$y(t) = X(t) e^{Bt} c \quad \text{avec } X(t+T) = X(t) \quad \text{et } c \text{ est une constante réelle.}$$

Définition: . les valeurs propres de e^{BT} sont les racines caractéristiques du système (I.4)
 . les valeurs propres de B sont les exposants caractéristiques ou exposants de Floquet de la matrice périodique $A(t)$.
 . la matrice e^{BT} est appelée matrice de Floquet.

Notons que la matrice B et ses valeurs propres ne sont pas déterminées de façon unique pour le système (I.4). (En effet, on peut remplacer B par $B + 2\pi I$ où I est la matrice identité). En revanche, les valeurs propres de e^B sont, elles, déterminées de façon unique pour (I.4). (voir [R]).

En vertu de cette décomposition, les critères de détermination du comportement des solutions d'un système différentiel linéaire à coefficients constants à partir de la connaissance des valeurs propres de la matrice, peuvent être translatés, dans le cas où les coefficients du système étudié sont périodiques, en considérant l'étude des valeurs propres de la matrice de Floquet (exposants de Floquet). Nous verrons ultérieurement comment cela se traduit.

1.5. Problème général - Méthode de linéarisation

Soit le système général :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \text{donnée} \quad (I.6)$$

On a vu que dans le cas des systèmes à coefficients constants ou périodiques, les propriétés de stabilité du système sont entièrement déterminées par des exposants particuliers de l'équation. On va voir qu'il est possible de perturber légèrement le système tout en préservant ses propriétés de stabilité.

Si $f(x)$ possède de bonnes propriétés de régularité, alors chaque solution de (I.6) est bornée par une fonction exponentielle. Il est alors possible d'associer à chaque solution $x(t)$ de (I.6) un nombre appelé *exposant de Lyapunov* qui permettra de déterminer la stabilité du système étudié, comme nous le verrons par la suite.

Nous introduisons auparavant la notion de perturbation d'une solution et la *méthode de linéarisation* autour d'une solution connue, stationnaire ou périodique.

1.5.1. Linéarisation autour d'une solution stationnaire

On souhaite étudier la structure des solutions du système (I.6) pour lequel on connaît une solution stationnaire $\bar{x}$.

Une analyse linéaire, c'est-à-dire limitée aux termes d'ordre un par rapport aux écarts de la solution peut s'avérer suffisante. On veut donc caractériser le comportement de la solution au voisinage de $\bar{x}$ afin de voir si ce point d'équilibre est stable ou non.

Pour cela, on linéarise l'équation (I.6) autour de $\bar{x}$ de la façon suivante:

On pose $x = \bar{x} + \delta x$ où δx est une petite perturbation apportée à $\bar{x}$ et on regarde comment évolue δx quand on impose à x d'être solution de (I.6). La connaissance du comportement de cette perturbation permettra de déterminer la stabilité du point fixe $\bar{x}$.

Pour que $x = \bar{x} + \delta x$ soit solution de (I.6) il faut que

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{d(\delta x)}{dt} &= f(\bar{x} + \delta x) \\ &= f(\bar{x}) + Df(\bar{x}) \delta x + o(\delta x^2) \end{aligned}$$

soit donc, au premier ordre

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = Df(\bar{x}) \delta x \quad (I.7)$$

Première équation aux variations.

où

$$Df = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{1 \leq i, j \leq n}$$

est la matrice jacobienne associée à f

Ainsi, le "flot linéarisé" $D\phi_t(\bar{x}) \delta x$ de (I.6) au point $\bar{x}$ est obtenu par intégration de (I.7):

$$D\phi_t(\bar{x}) \delta x = e^{tDf(\bar{x})} \delta x$$

Une étude du comportement des solutions au voisinage du point fixe pourra donc être basée sur la connaissance des valeurs propres de $Df(\bar{x})$.

Néanmoins, il faut s'assurer que les solutions de (I.6) basées sur la résolution de (I.7) sont valides dans le cas considéré, pour δx petit ce qui n'est pas toujours le cas. Il est donc utile ici de rappeler le théorème de Hartman et Grobman.

Théorème de Hartman et Grobman: Si $Df(\bar{x})$ ne possède pas de valeurs propres nulles ou imaginaires pures, alors il existe un homéomorphisme h défini dans un voisinage U de $\mathbb{R}^n$ par lequel les orbites du flot non linéaire ϕ_t de (I.6) sont topologiquement équivalentes à celles du flot linéaire $e^{tDf(\bar{x})}$ de (I.7).

1.5.2. Linéarisation autour d'une solution périodique

Soit p une solution périodique de période T d'un problème de la forme (I.6);

p est tel que $\phi_T(p) = p$.

Soit $p(t) = \phi_t(p)$;

Revenons à la théorie de Floquet mentionnée au paragraphe 1.4; celle-ci permet l'étude du comportement d'une trajectoire solution $x(t)$, considérée au bout d'une période T , au voisinage d'une orbite de référence fermée.

Pour étudier la stabilité de la solution $p(t)$, on s'intéresse au comportement au bout d'une période T , du faible écart δx de cette solution. En linéarisant autour de la trajectoire périodique $p(t)$ on définit, comme précédemment le problème linéarisé associé par :

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = Df(p(t)) \delta x \quad (I.8)$$

(où $Df(p(t))$ est une matrice périodique).

Ainsi la condition initiale $x_0 + \delta x$ est transformée au bout d'une période en $x_0 + M\delta x$ où M est la *matrice de Floquet* du problème linéarisé (I.8).

Le comportement de la solution $x(t)$ pourra donc se déduire de l'étude du spectre de M :

- si toutes les valeurs propres de M sont situées à l'intérieur du disque unitaire complexe, alors toutes les composantes de δx - non tangentes à la trajectoire périodique - sont réduites à chaque période T ,

les trajectoires $x(t)$ convergent donc vers l'orbite périodique.

- si l'une au moins des valeurs propres de M se trouve à l'extérieur du disque unité complexe, δx s'accroît continuellement dans au moins une direction,

la trajectoire $x(t)$ est alors divergente et s'écarte indéfiniment de l'orbite périodique.

Remarque : Dans le cas autonome périodique, un multiplicateur de Floquet est toujours égale à 1.

1.5.3. Section de Poincaré

La méthode par application de Poincaré s'avère fondamentale dans l'étude de l'existence des solutions périodiques ; elle peut néanmoins se généraliser dans le cas de systèmes quelconques, possédant une solution de comportement voisin de celui périodique.

Soit $p(t)$ une orbite périodique solution de (I.6) dans $\mathbb{R}^n$,

Soit $\mathcal{H}$ une hypersurface (de dimension $n-1$) que l'on choisit transverse au flot,

Soit p_0 l'unique point où $p(t)$ rencontre $\mathcal{H}$, et soit x_0 un point de $\mathcal{H}$ proche de p_0 .

Au bout d'un temps $\theta(x_0)$ la trajectoire issue de x_0 recoupe $\mathcal{H}$ pour la première fois dans un voisinage de p_0 en un unique point noté $\Pi(x_0)$. (Dans le cas où le système est périodique, $\Pi(x_0) = p_0$ et $\theta(x_0) = T$).

L'application Π ainsi construite est appelée *application de premier retour de Poincaré*.

Ainsi, à un système dynamique à temps continu défini par le flot ϕ_t on peut associer un système dynamique à temps discret :

$$\{ \Pi^k \}, k \in \mathbb{N}$$

ce qui rend souvent l'étude moins lourde.

On a alors les analogies suivantes :

- une orbite T -périodique de ϕ_t correspond à un point fixe de Π ;
- une orbite mT -périodique de ϕ_t correspond à un point m -périodique de Π ;
- une orbite quasi-périodique de ϕ_t (deux fréquences $f_1 = \frac{1}{T_1}$ et $f_2 = \frac{1}{T_2}$ incommensurables

ie $\frac{f_1}{f_2} \notin \mathbb{Q}$) correspond à une orbite fermée périodique (de période T_2) ;

- les multiplicateurs de Floquet de ϕ_t correspondent aux valeurs propres de $D\Pi(p)$.

D'un point de vue plus général, on cherche à considérer l'évolution, au cours du temps, d'un ensemble de solutions dont les conditions initiales sont prises proches l'une de l'autre (à δx de différence) dans *l'espace des phases* (espace à n dimensions des n variables d'état). L'évolution de l'écart par rapport à une solution connue nous permettra de juger du comportement de la solution.

1.6. Notions d'ensemble invariant et d'attracteur

L'étude du comportement asymptotique des solutions est fondamental pour la compréhension des systèmes dynamiques.

Nous donnons ici les définitions qui permettent de décrire certains comportements.

Définition I.1: Un ensemble $S \subset U$ est appelé ensemble invariant par le flot $\phi_t(\cdot)$ si et seulement si

$$\phi_t(S) \subset S, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si cette propriété est vraie pour $t > 0$ ($t < 0$) alors S est appelé ensemble invariant positif (négatif).

Définition I.2: Un ensemble invariant fermé $\mathcal{A} \subset U$ est appelé ensemble attracteur si il existe un voisinage V de $\mathcal{A}$ tel que :

$$\begin{aligned} \forall x \in V, \quad \phi_t(x) \in V, \quad \forall t \geq 0 \\ \text{et } \phi_t(x) \rightarrow \mathcal{A} \text{ quand } t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

L'ensemble attracteur $\mathcal{A}$ attire toutes les trajectoires.

Définition I.3 : Le bassin d'attraction de $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ est tel que :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}} = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(V)$$

D'un point de vue plus géométrique, pour comprendre cette notion d'attracteur, il faut se placer dans l'espace des phases. Si, au cours du temps, on trace, dans cet espace les points solutions du système, on pourra voir se dessiner un ensemble précis: l'attracteur. Dans le cas où l'attracteur n'existe pas, les points dessinés finiront par recouvrir l'espace des phases tout entier. L'attracteur peut donc être un point, une orbite fermée...mais on a déjà observé des ensembles attracteurs plus compliqués ; ce sont bien sûr des ensembles bornés dans l'espace des phases, mais la trajectoire, à l'intérieur de cet ensemble borné ne repasse jamais par un chemin déjà emprunté et semble se replier indéfiniment. La dimension d'un tel attracteur n'est pas entière (pour la définition de la dimension d'un attracteur, voir [T]), et pour cette raison, ces objets sont appelés attracteurs étranges.

1.7. Notions de stabilité

Nous n'avons eu, jusqu'à présent, qu'une approche intuitive de la stabilité. Il n'existe pas de définition universelle de cette notion; on en trouve de nombreuses dans la littérature mathématique (voir par exemple [A], [L], [S] ou [A.M]). Citons simplement ici, les deux notions que nous utilisons.

1.7.1. Stabilité asymptotique

Définition 1.4 : Une solution d'un système de la forme (I.6) est dit asymptotiquement stable si il existe un voisinage V de $\bar{x}$ tel que :

$$\begin{aligned} \text{i) } & \forall x \in V, \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = \bar{x} \\ \text{ii) } & \phi_t(V) \subset \phi_s(V), \forall t, s \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

1.7.2 Stabilité au sens de Lyapunov

Définition 1.5 : Une solution $x(t)$ est dite stable au sens de Lyapunov si pour $\varepsilon > 0$ donné on peut trouver $\delta = \delta(\varepsilon)$ tel que pour tout autre solution $y(t)$ on ait :

$$|x(t_0) - y(t_0)| < \delta \Rightarrow |x(t) - y(t)| < \varepsilon, \text{ pour } t \in [t_0, \infty]$$

1.8. Exposants de Lyapunov

On a vu que pour étudier un système quelconque, on s'intéressait à l'évolution d'une perturbation d'une solution connue, au cours du temps. Les exposants de Lyapunov vont nous donner des informations sur cette évolution. Pour plus de renseignements sur les exposants de Lyapunov, on pourra consulter [O] et [A,W].

1.8.1. Approche géométrique des exposants de Lyapunov

Considérons, à un instant donné, un objet de dimension n . Cet objet, sous l'action du flot, sera transformé en un autre objet de dimension n ; on s'intéresse alors aux étirements et contractions des longueurs dans les différentes directions, qu'aura subi le premier objet pour devenir le deuxième.

L'étude du comportement et de la stabilité des solutions d'un système dynamique peut être basée sur les variations des longueurs et des directions des principaux axes caractérisant ces objet.

Chaque axe principal est lié à un *exposant de Lyapunov* qui mesure la vitesse moyenne de divergence des trajectoires dans la direction correspondante. Il correspond au rapport moyen de transformation d'un axe principal au cours de son évolution. Si l'exposant de Lyapunov est positif, il y a étirement; s'il est négatif, il y a contraction. On peut alors repérer un comportement chaotique lorsqu'au moins un des exposants est positif. Les directions de ces axes principaux (indépendants des conditions initiales) sont appelées *directions de Lyapunov*.

1.8.2. Définition analytique

On donne maintenant une définition analytique de ces exposants de Lyapunov dans le cas d'un système de la forme (I.6), de dimension n .

Définition 1.6 : On suppose qu'il existe des sous-espaces $V_i^{(1)} \supset V_i^{(2)} \dots \supset V_i^{(n)}$ dans l'espace tangent à $f^{(i)}(x)$ (i^e composante de $f(x)$), $x \in \mathbb{R}^n$ et des nombres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \dots \leq \lambda_n$ tels que :

$\forall j \in \mathbb{N}$,

$$i) Df(V_i^{(j)}) = V_{i+1}^{(j)},$$

$$ii) \dim V_i^{(j)} = n+1-j,$$

$$iii) \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \ln \|(Df)^m(v)\| = \lambda_j, \quad \forall v \in V_0^{(j)} - V_0^{(j+1)}$$

les λ_j sont alors appelés *exposants de Lyapunov* de f .

Remarque : Si $x = \bar{x}$ est un point fixe, alors les sous-espaces sont indépendants de i et sont simplement les espaces propres associés aux valeurs propres de $Df(\bar{x})$

Les exposants de Lyapunov sont alors les logarithmes du module de ces valeurs propres.

Plus généralement, si $x(t)$ est une solution du système, on pose :

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \ln |x(t)|$$

L'exposant de Lyapunov mesure la vitesse moyenne de divergence du logarithme du déplacement x

Lorsque l'on a divergence des trajectoires initialement voisines ($\lambda > 0$), on parle de *sensibilité aux conditions initiales* (SCI) sur l'attracteur que l'on qualifie d'*étrange*. C'est une propriété caractéristique des régimes chaotiques.

Propriétés des exposants :

. La somme des exposants de Lyapunov peut se calculer directement à partir de la trace de la matrice du problème linéarisé par :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{Tr} (Df(\bar{x}(s))) ds$$

. Dans le cas où le système est périodique, on retrouve les exposants de Floquet μ_i par:

$$\lambda_i = \ln (\mu_i)$$

2. EQUATIONS DIFFERENTIELLES PARAMETREES - THEORIE DES BIFURCATIONS

Dans la section précédente ont été présentés quelques résultats et méthodes permettant l'analyse du comportement des solutions pour des grands temps de systèmes différentiels quelconques. Retenons que des *grandeurs caractéristiques* (valeurs propres, multiplicateurs de Floquet, exposants de Lyapunov), suivant les cas, fournissent des informations importantes concernant l'étude de la stabilité du système, suivant qu'ils sont positifs ou non (valeurs propres et exposants de Lyapunov) ou de module inférieur à un ou non (multiplicateurs de Floquet).

Si maintenant on souhaite étudier le comportement d'un système dynamique quelconque paramétré de la forme:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, \mu) & x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^p \\ x(0) = x_0 & \text{donnée} \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ou bien

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu) & x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}^p \\ x(0) = x_0 & \text{donnée} \end{cases} \quad (\text{II.1 bis})$$

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dans le cas non autonome

où μ est un vecteur de paramètres, il est clair que les grandeurs caractéristiques sus-citées vont dépendre de μ . La caractéristique principale de tels systèmes non linéaires est la grande sensibilité du comportement de ses solutions en fonction du paramètre μ ou même des conditions initiales (SCI).

Pour les systèmes (II.1) et (II.1)bis on peut définir pour μ décrivant $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^p$) une solution associée $x(\mu)$ appelée *branche de solutions*. Une variation de μ pourra faire passer une des grandeurs caractéristiques par une valeur critique provoquant alors un changement de comportement de la solution ; on dit alors que la branche de solutions subit une *bifurcation* et le paramètre qui a causé cette modification est appelé *paramètre de bifurcation*. Le diagramme représentant la solution en fonction d'un paramètre est appelé *diagramme de bifurcation*, et la représentation d'un point singulier dans un plan à deux paramètres est appelée *ligne de bifurcation*.

Nous allons présenter une description succincte des différents types de bifurcation que l'on peut rencontrer. Dans une première partie, les bifurcations des solutions stationnaires seront traitées, puis dans une seconde partie on s'intéressera aux bifurcations des solutions périodiques.

2.1. Bifurcation des solutions stationnaires.

On souhaite étudier les courbes de solutions stationnaires de (II.1) définies - quand elles existent - par les couples

$$(\mu, x(\mu)) \text{ tels que } f(x, \mu) = 0 \quad (\text{II.2})$$

L'existence de tels couples pour chaque valeur de $\mu \in \mathbb{R}$ est donnée par le théorème des fonctions implicites que nous rappelons ici.

Théorème de fonctions implicites: Soit le système différentiel paramétré:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu) \quad x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^p$$

possédant une solution stationnaire (x_0, μ_0) - telle que $f(x_0, \mu_0) = 0$ - et supposons que f soit continue et différentiable dans un voisinage ouvert de (x_0, μ_0) - contenant ce point - dans l'hyperplan (x, μ) .

Alors si $D_x f(x_0, \mu_0) \neq 0$ (la matrice est inversible), il existe un réel positif α et un vecteur de $\mathbb{R}^n$, β de composantes toutes positives, tels que :

i) l'équation $f(x, \mu) = 0$ possède une unique solution $x = x(\mu)$ avec
 $\mu_0 - \alpha < \mu < \mu_0 + \alpha$ et $x_0 - \beta < x < x_0 + \beta$

ii) la fonction $x(\cdot)$ est continue et dérivable par rapport à μ , tel que $\mu_0 - \alpha < \mu < \mu_0 + \alpha$

$$\text{iii)} \quad D_\mu x(\mu) = - \frac{D_\mu f(x(\mu), \mu)}{D_x f(x(\mu), \mu)} \quad (\text{II.3})$$

où $D_x f$ représente la différentielle de F en x :

$$D_x f = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

Remarques:

- . On peut aussi déterminer $\mu(x)$ si $D_\mu f(x_0, \mu_0) \neq 0$
- . Si f est analytique, il en est de même de $\mu(x)$ et $x(\mu)$

En vertu de ce théorème, il est clair que si $D_x f(x(\mu), \mu)$ n'est pas singulière, il existe une unique branche de solutions stationnaires $(\mu, x(\mu))$. En revanche, les points singuliers de $D_x f(x(\mu), \mu)$ vont générer des modifications du comportement de la solution. Ce sont des points de bifurcations, qui peuvent être différents suivant la nature de la singularité rencontrée.

On peut alors classer les points $(\mu, x(\mu))$ de la façon suivante :

2.1.1. Classification des points de courbes solutions stationnaires

Avant d'énoncer explicitement les diverses bifurcations que peut subir une branche de solutions stationnaires, nous allons définir les différents cas de points singuliers que l'on peut rencontrer, suivant les valeurs des dérivées du flot dépendant d'un paramètre. Afin de permettre une meilleure compréhension, on se place dans le cas de la dimension un ($x \in \mathbb{R}$). Suivant les valeurs des dérivées de f par rapport à x et à μ , on a les caractérisations suivantes :

Définition II.1 : *Un point régulier de (II.2) est un point en lequel le théorème des fonctions implicites peut s'appliquer*

ie il faut que

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \mu} f(x, \mu) \neq 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} f(x, \mu) \neq 0 \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

Si (II.4) a lieu, on peut alors définir une courbe unique $\mu = \mu(x)$ ou $x = x(\mu)$ en chaque point.

Définition II.2 : *Un point régulier de retournement est un point en lequel:*

$$\frac{\partial \mu(x)}{\partial x} \text{ change de signe alors que } \frac{\partial f(x, \mu)}{\partial \mu} \neq 0.$$

Définition II.3 : *Un point singulier de la courbe $f(x, \mu) = 0$ est un point en lequel :*

$$\frac{\partial f(x, \mu)}{\partial \mu} = \frac{\partial f(x, \mu)}{\partial x} = 0$$

Définition II.4 : *Un point double sur la courbe $f(x, \mu) = 0$ est un point singulier en lequel passent deux branches et deux seulement de $f(x, \mu) = 0$, possédant des tangentes distinctes. Les dérivées secondes de f ne doivent pas s'annuler simultanément en un point double.*

Définition II.5 : *Un point singulier double de retournement de la courbe définie par $f(x, \mu) = 0$ est un point double en lequel $\frac{\partial \mu}{\partial x}$ change de signe sur une branche.*

Définition II.6 : *Un point "cusp" de la courbe défini par $f(x, \mu) = 0$ est un point de contact du second ordre entre deux branches de la courbe. Les deux branches de solutions ont la même tangente en chaque point.*

Ces différents types de singularité vont donner naissance à des différents types de bifurcations, souvent accompagnées d'un changement de stabilité; il est donc nécessaire d'avoir à l'esprit le comportement des solutions de problèmes différentiels linéaires (puisque dans le cas contraire, l'étude est réalisée sur le problème linéarisé), et en particulier, comme il l'a été mentionné en paragraphe 1.3 de ce chapitre, que c'est le signe de la partie réelle des valeurs propres qui indique le caractère stable ou instable de la solution.



2.1.2. Classification des bifurcations de solutions stationnaires

Nous donnons ici une classification des bifurcations simples (non dégénérées) des solutions stationnaires, par rapport à un seul paramètre d'étude. On se place à nouveau en dimension finie quelconque et on suppose que :

$$\begin{cases} \mu = \mu_0 \\ x = x_0 \end{cases} \quad \text{est un point fixe de (II.1) - (ou (II.1) bis)}$$

$$\text{Soit } J_0 = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{x=x_0}$$

le jacobien du linéarisé autour de la solution stationnaire $x = x_0$.

L'étude locale des bifurcations est basée sur la connaissance du spectre de la matrice J_0 . Suivant les valeurs propres de J_0 , on a les bifurcations suivantes:

- *Bifurcation col-noeud* (ou point de retournement)

Ce type de bifurcation se produit lorsque la courbe $(\mu, x(\mu))$ possède une tangente verticale, tout en demeurant l'unique branche de solutions. Le point $(\mu_0, x(\mu_0))$ en lequel une telle bifurcation a lieu, n'est pas un point singulier comme nous l'avons défini au paragraphe précédent; seule une valeur propre (réelle) de J_0 s'annule en changeant de signe, au passage de μ par une valeur μ_0 .

En dimension un, les conditions que doivent satisfaire le flot sont celles données à la définition 2.2 de la section précédente.

En dimension n quelconque (finie), il faut que f satisfasse aux trois propriétés :

(1i) $D_x f(x(\mu_0), \mu_0)$ a 0 comme valeur propre simple, de vecteurs propres associés v à droite et ω à gauche.

(1ii) $\omega \left(\frac{\partial f}{\partial \mu}(x(\mu_0), \mu_0) \right) \neq 0$

(1iii) $\omega (D_x^2 f(x(\mu_0), \mu_0)(v, v)) \neq 0$

(1ii) et (1iii) sont des propriétés de transversalité.

Cela peut aussi se traduire de la façon suivante (voir [R2])

(2i) $D_x f(x(\mu_0), \mu_0)$ a une valeur propre simple nulle

(2ii) $D_\mu f(x(\mu_0), \mu_0) \notin \text{Im}(D_x f(x(\mu_0), \mu_0))$

ie

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} D_x f(x(\mu_0), \mu_0) \\ D_\mu f(x(\mu_0), \mu_0) \end{bmatrix} = n$$

(2iii) Il existe une paramétrisation $(\mu(s), x(s))$

$$\text{avec } \mu(s_0) = \mu_0 \text{ telle que } \frac{d^2 \mu(s_0)}{ds^2} \neq 0$$

Exemple (en dimension 1):

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2 = f(x, \mu)$$

La branche de solutions stationnaires $x = \pm\sqrt{\mu}$ n'existe que pour des valeurs de μ positives et subit une bifurcation col-noeud au passage de μ par 0.

Le diagramme de bifurcation est alors le suivant :

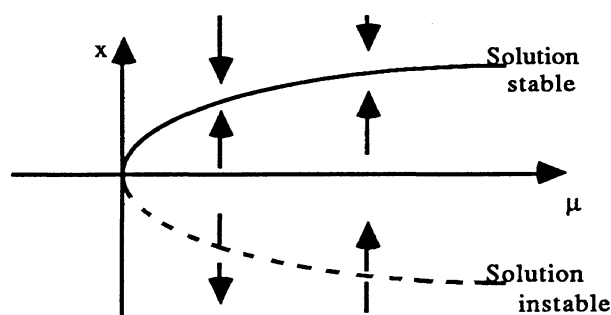


Figure II.1 : exemple de bifurcation col-noeud

Remarque: Le point de retournement (0,0) n'est pas singulier puisque

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \mu} \right]_{\substack{x=0 \\ \mu=0}} = 1 \neq 0$$

- Point de bifurcation transcritique et bifurcation fourche

Cette bifurcation se produit en un point stationnaire $(\mu_0, x(\mu_0))$ singulier (cf déf II.3) comme pour la bifurcation col-noeud, une valeur propre de J_0 s'annule en changeant de signe au passage de μ par la valeur critique μ_0 , mais de plus, en dimension un, on a la singularité supplémentaire:

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(x(\mu_0), \mu_0) = 0$$

En dimension n finie, les propriétés (1ii) et (1iii) ne sont plus satisfaites, tout comme les propriétés (2ii) et (2iii).

Dans ce cas donc

$$D_{\mu}f(x(\mu_0), \mu_0) \in \text{Im}(D_x f(x(\mu_0), \mu_0))$$

et en un tel point, deux branches de solutions stationnaires se rencontrent, mais leurs tangentes respectives sont distinctes.

Dans le cas où une des tangentes est verticale, on dit que l'on est en présence d'une *bifurcation fourche*, sinon c'est une *bifurcation transcritique* (cf Figure II. 2).

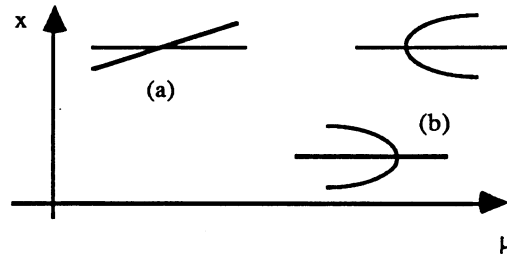


Figure II. 2: bifurcation transcritique (a) et bifurcations fourches (b)

Ces bifurcations sont souvent accompagnées de changement de stabilité; on peut distinguer alors les *bifurcations surcritiques* et *souscritiques*:

En dimension un, si la quantité $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x(\mu_0), \mu_0)$ est négative alors la bifurcation est dite *surcritique* et *souscritique* dans le cas où cette quantité est positive.

On peut ainsi obtenir les différents types de bifurcation:

- transcritiques

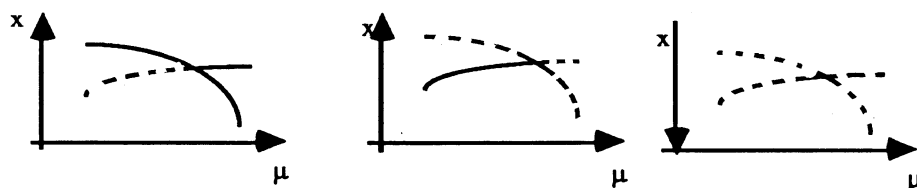


Figure II.3 : bifurcations transcritiques

- fourches surcritiques

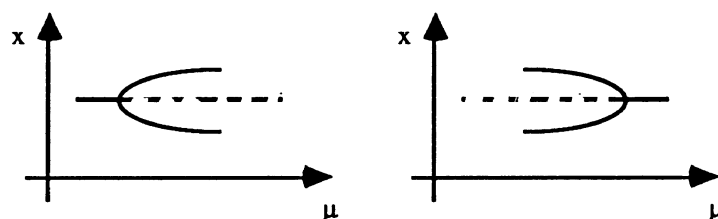


Figure II.4 : bifurcation fourches surcritiques

- fourches souscritiques (ou inverses)

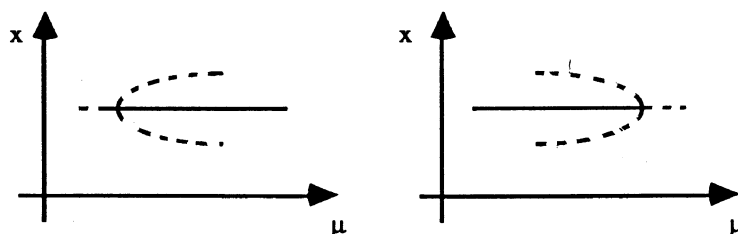


Figure II.5 : bifurcations fourches souscritiques

Exemple (en dimension 1):

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3 = f(x, \mu)$$

$x = 0$ est une branche de solutions stationnaires quelque soit μ ;

$x = \pm\sqrt{\mu}$ est aussi une branche de solutions stationnaires, mais uniquement dans le cas où μ est positif.

On a alors le diagramme de bifurcation fourche suivant :

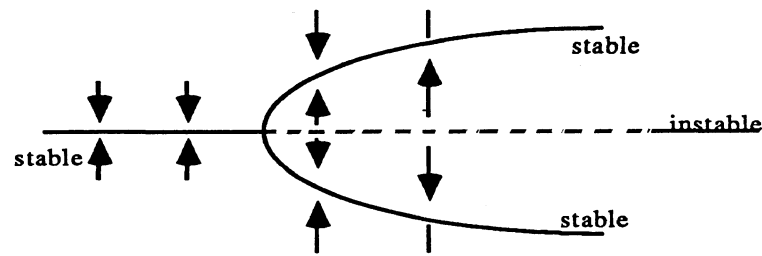


Figure II.6 : exemple de bifurcation fourche

Remarque: le point $(0, 0)$ est ici point singulier puisque :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\substack{x=0 \\ \mu=0}} = \left[\frac{\partial f}{\partial \mu} \right]_{\substack{x=0 \\ \mu=0}} = 0$$

- Bifurcation de HOPF

Une telle bifurcation est dite complexe; elle se produit quand un couple de valeurs propres complexes conjuguées $\alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$, franchissant l'axe imaginaire pour $\mu = \mu_0$, en $\pm i\omega(\mu_0)$, alors que toutes les autres valeurs propres sont de parties réelles non nulles. En ce point μ_0 la branche des solutions stationnaires $x(\mu)$ rencontre une nouvelle branche de solutions, non plus stationnaires mais périodiques, cette fois (de période $\frac{\omega(\mu_0)}{2\pi}$). (On pourra consulter, par exemple [M.Mc]).

Exemple : (en dimension 2)

$$\frac{dz}{dt} = (\mu + i\gamma)z - z|z|^2$$

$$z = x + iy, \quad z \in \mathbb{C}$$

dont le diagramme de bifurcation est le suivant :

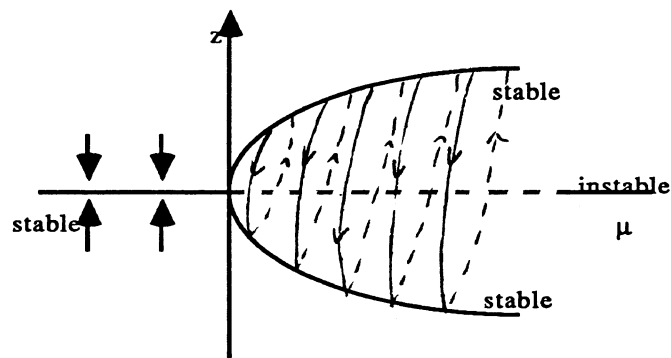


Figure II.7 : Bifurcation de Hopf

Remarque sur la stabilité :

Comme nous l'avons mentionné dans la première partie, la stabilité des solutions est fonction du signe de la partie réelle des valeurs propres de J_0 . Rappelons qu'une solution est stable si et seulement si toutes les parties réelles des valeurs propres de la matrice jacobienne de ce système, calculée en ce point solution, sont négatives.

Il est alors clair que dès qu'une branche de solutions stables rencontre un point de bifurcation tels ceux que nous venons de décrire, elle perd sa stabilité. En revanche, une branche de solutions instable, au passage d'une bifurcation, peut devenir stable ou rester instable.

Enfin, il est important de remarquer qu'au voisinage d'un point $(\mu, x(\mu))$, il ne peut exister qu'une seule solution stable, pour une même valeur de μ .

2.2. Bifurcation de solutions périodiques

De façon similaire au cas des bifurcations de solutions stationnaires, on peut faire une classification des bifurcations de solutions périodiques, mais en analysant maintenant, au lieu de la matrice jacobienne, la matrice de Floquet définie au paragraphe I de ce chapitre.

Soit $(\mu, p(\mu))$ l'orbite périodique solution du problème:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, t, \mu) \quad \mu \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \\ f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \text{ continue et dérivable} \\ \text{où } f(x, t+T, \mu) &= f(x, t, \mu) \quad T > 0 \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Une branche de solutions périodiques de (II.5) peut subir les bifurcations suivantes:

2.2.1. Classification des bifurcations de solutions périodiques

- *Bifurcation col-noeud (point limite), bifurcation transcritique, bifurcation fourche.*

Ce type de bifurcation se produit lorsque un seul multiplicateur de Floquet franchit le cercle unité complexe de la valeur (+1).

Comme pour les solutions stationnaires, la bifurcation col-noeud (point limite) se produit en un point régulier de la courbe (la branche est unique) alors que les bifurcations transcritiques et fourche se produisent en un point singulier où deux branches de solutions périodiques se rencontrent.

Les diagrammes de bifurcation sont bien entendu les mêmes que ceux obtenus lors des bifurcations de solutions stationnaires.

- *Bifurcation de doublement de période :*

Nous nous restreignons ici uniquement au cas du doublement de période; d'autres bifurcations sous harmoniques peuvent aussi se produire de façon similaire (voir par exemple [I, J]).

La bifurcation du doublement de période se produit lorsqu'un multiplicateur de Floquet (réel) franchit le cercle unité complexe en la valeur (-1), pour $\mu = \mu_0$; en un tel point, la branche de solutions T-périodiques intersecte une nouvelle branche de solutions périodiques, mais de période 2T cette fois (les tangentes ces deux courbes sont là encore distinctes).

Exemple : Diagramme de bifurcation

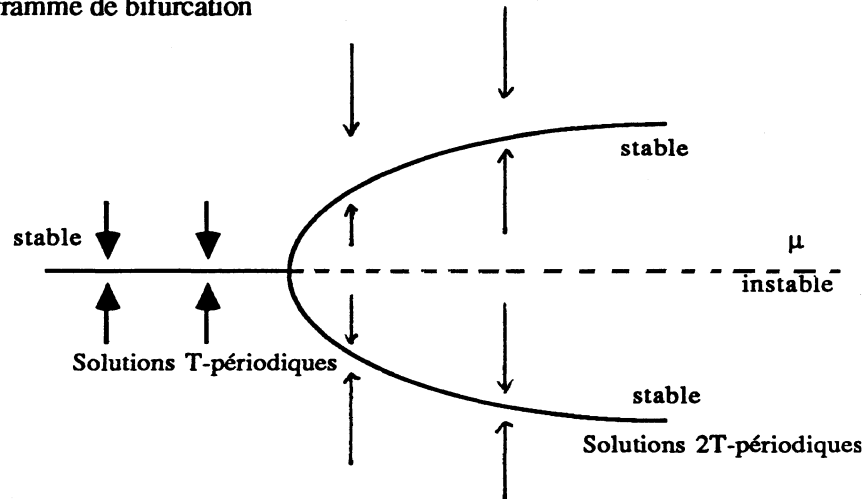


Figure II.8 : Bifurcation de doublement de période

Remarquons qu'une suite de bifurcations de doublement de période peut entraîner l'apparition du *chaos* (le spectre devient alors quasi-continu).

- Bifurcation vers le tore

Cette bifurcation est l'analogue de celle de Hopf (cas stationnaire) pour le cas périodique dans la mesure où la branche des solutions périodiques intersecte en un tel point de bifurcation une nouvelle branche de solutions *quasi-périodiques* cette fois. (c'est à dire que deux fréquences f et f' incommensurables - $\frac{f}{f'} \notin \mathbb{Q}$ - apparaissent dans le spectre).

Une telle solution peut s'écrire sous la forme d'une fonction de deux variables $x(t, t')$ telle que :

$$x(t+T, t') = x(t, t'+T') = x(t, t')$$

où T est la période des solutions sur la branche suivie et T' la seconde période des nouvelles solutions apparaissant en un tel point de bifurcation (avec $\frac{T}{T'} \notin \mathbb{Q}$).

La dénomination de bifurcation vers le tore paraît explicite, si on cherche à se représenter un point dans l'espace décrivant une première orbite périodique et une seconde s'enroulant autour de la première et ce sans que jamais elle ne se recoupe elle-même puisque les périodes sont incommensurables. La trajectoire de solutions finira donc, à recouvrir un tore de façon dense, puisqu'elle ne se referme jamais. Cette bifurcation est aussi appelée *bifurcation de Poincaré*.

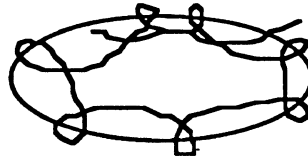


Figure II.9 : Solution quasi-périodique

Elle apparaît lorsqu'un couple de multiplicateurs de Floquet complexes conjugués, franchit le cercle unité complexe.

Le diagramme de bifurcation correspondant est naturellement similaire à celui représentant la bifurcation de Hopf.

2.2.2. Etude sur l'application de Poincaré

L'étude d'un système périodique de la forme (II.5) peut être simplifiée si au lieu de s'intéresser à la solution en tout temps, on tient compte du caractère périodique de la solution et on regarde cette dernière comme étant une suite discrète de points solutions considérés aux temps iT , i décrivant l'ensemble des entiers naturels. Cela revient donc à réaliser une coupe de Poincaré, conformément à ce que nous avons présenté dans la première partie de ce chapitre.

Une analyse sur une coupe de Poincaré d'une branche de solutions périodiques revient à étudier une branche de solutions stationnaires; les points limites et points de bifurcations sont conservés par l'application de Poincaré, et la bifurcation vers le tore d'une branche de solutions périodiques (intersectant donc une branche de solutions quasi-périodiques) est changée en bifurcation de Hopf de la branche de solutions stationnaires correspondante (intersectant alors une branche de solutions périodiques).

Ce principe d'étude par transformation de Poincaré est très utile et permet de réaliser une étude plus simple de certains systèmes.

Avant de conclure cette partie concernant l'étude de solutions périodiques, il est important de signaler qu'une branche de solutions quasi-périodiques - s'enroulant sur un tore à 2 périodes et appelé 2-Tore - peut à nouveau subir une bifurcation du type Hopf en laquelle elle intersectera une nouvelle branche de solutions dont l'étude fréquentielle mettra en évidence trois fréquences incommensurables. On aura ainsi une bifurcation vers un 3-Tore et ainsi de suite (à condition que la dimension du système le permette, bien entendu).

2.3. Cas des exposants de Lyapunov

Dans la première partie, les exposants de Lyapunov et leurs caractéristiques ont été présentés.

Nous donnons ici un simple aperçu de leur comportement lors des différentes bifurcations que nous venons de décrire.

- . Dans le cas d'un système autonome (le temps n'apparaît pas explicitement dans la définition du flot), non périodique, tous les exposants correspondants à une solution stable sont strictement négatifs.
- . Si, le paramètre variant, la solution devient périodique (bifurcation de Hopf) un des exposants s'annule et reste égal à 0 tant que la solution est périodique.
- . Si cette solution périodique devient quasi périodique (bifurcation vers le tore), à nouveau un exposant s'annule et deux exposants resteront nuls tant que la solution restera quasi-périodique.
- . Enfin dès qu'un exposant devient strictement positif, il y a apparition de chaos.

BIBLIOGRAPHIE

- [A] V.I. ARNOLD
Equations différentielles ordinaires
Mir-Moscou

- [AM] R.H. ABRAHAM - J.E. MARSDEN
Foundations of Mechanics
Benjamin/Cummings - Reading MA (1978)

- [AW] L. ARNOLD - V. WIHSTUTZ
Lyapunov Exponents: a Survey
Lectures Notes in Mathematics 1186. Springer Verlag. pp 1-26. Berlin, Heidelberg, New-York, Tokyo (1984)

- [B.P.V.] P. BERGE - Y. POMEAU - C. VIDAL
L'ordre dans le chaos.
HERMANN

- [G.H.] J. GUCKENHEIMER - P. HOLMES
Non linear oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector fields
Springer Verlag - AMS 42

- [H] J.K. HALE
Ordinary differential equations
WILEY - INTERSCIENCE

- [I.J] G. IOSS - D.D. JOSEPH
Elementary stability and bifurcation Theory (second edition)
Springer Verlag (UTM)

- [KM] M. KUBICEK - M. MAREK
Computational Methods in bifurcation theory and dissipative structure.
Springer Verlag (Springer Series in Computational Physics)

- [L] P. LASALLE (1976)
The stability of Dynamical Systems
CBMS Regional Conference Series in Applied Mathematical - Vol 25 - SIAM - Philadelphia

- [L2] S. LEFSCHETZ
Differential Equations. Geometric Theory
New-York. Dover. 1977

- [M.Mc] J.E. MARSDEN - M.Mc CRACKEN
Hopf Bifurcation and its Applications
Springer Verlag AMS-19

- [O] V.I. OSELEDEC
A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for Dynamical Systems
Trans. Moscow- Math. Soc. Vol 19 (1968)

- [R] M. ROSEAU
Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité
Springer Verlag

- [R2] J. ROUX
Problèmes de bifurcation : méthodes numériques et analyse de la stabilité - Phénomènes non linéaires de base
Note E.D.F. - HI-72/6759 (fev. 90)

- [S] M. SHUB
Global Stability of Dynamical Systems
Springer Verlag (1987)

- [T] R. TEMAM
Infinite - Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics
Springer Verlag - AMS 68

- [W] S. WIDDINGS
Global bifurcation and chaos - Analytical methods
Springer Verlag - AMS 73

CHAPITRE III

**ETUDE NUMERIQUE DE DIFFERENTS CAS DE
SYSTEMES FERRORESONANTS.**

PRESENTATION ET UTILISATION DU LOGICIEL AUTO

0. INTRODUCTION

1. LE LOGICIEL AUTO

1.1. Présentation générale du logiciel

1.1.1. Possibilités de logiciel dans le cadre de l'étude d'un circuit électrique ferromagnétique

1.1.2. Les fichiers d'entrée et de sortie

1.1.3. Implémentation du logiciel

1.1.4. Limites actuelles du logiciel

1.2. Modèles d'utilisation d'AUTO dans le cadre de l'étude de la ferromagnétisme

1.2.1. Intérêt de la renormalisation

1.2.2. Représentation du terme source

1.2.3. La méthode basée sur l'application de Poincaré

1.2.4. Les paramètres importants

2. PRESENTATION ET ANALYSE DES RESULTATS OBTENUS

2.1. Les résultats classiques obtenus pour la ferromagnétisme parallèle

2.2. Le modèle Chastang-Chinon

2.2.1. Le modèle de dimension treize

2.2.2. Validations de la modélisation et des simplifications

2.2.3. Etude du cas 3D

2.3. Etude du cas de la ligne longue; influence du nombre de cellules

3. LES EXPOSANTS DE LYAPUNOV

1. LE LOGICIEL AUTO

Dans cette section, nous présentons tout d'abord le logiciel dans son état actuel. On expose en particulier les nombreuses possibilités offertes à l'utilisateur ainsi que les différentes méthodes numériques originales et performantes auxquelles il fait appel. L'utilisation a priori aisée de ce logiciel demande toutefois une vigilance particulière ; nous décrivons les fichiers d'entrée définissant le problème traité, que l'utilisateur doit fournir, ainsi que les fichiers de sortie contenant de riches informations. Nous mentionnons également les limites du logiciel; des modifications et des possibilités supplémentaires sont prévues dans la nouvelle version qui doit paraître fin 1992.

Nous énumérerons ensuite les quelques points particuliers qui nous ont semblé fondamentaux lors de l'utilisation du logiciel dans le cadre de l'étude de la ferromagnétisme parallèle. Notamment, nous verrons comment rendre le système autonome sans lui apporter une quelconque perturbation, ainsi que l'intérêt d'une renormalisation systématique des équations dans le but d'éviter les difficultés numériques de convergence apparaissant trop souvent sur ce modèle d'une sensibilité importante. Nous présenterons également la technique simple utilisée pour l'étude de l'application de premier retour de Poincaré du système à étudier, ainsi que l'intérêt d'une telle opération.

Enfin, nous donnerons une liste des paramètres décrivant le problème posé et fixant la précision souhaitée dans les méthodes numériques choisies et que l'utilisateur doit fournir au logiciel, et auxquels une vigilance particulière doit être accordée.

1.1. Présentation générale du logiciel.

Pour plus de détails sur le logiciel et les différentes règles à connaître pour son utilisation, on pourra consulter le manuel d'AUTO, [Q1] et [Q2].

AUTO est un logiciel basé sur des méthodes d'analyse numérique sophistiquées et bien adaptées au type du problème considéré.

Ce logiciel, développé par E. DOEDEL (Université de Montréal), est un ensemble de sous-programmes écrits en langage Fortran et basés sur des algorithmes d'analyse numérique traitant d'équations algébriques et de systèmes dynamiques (équations différentielles ordinaires) non linéaires, à paramètres et autonomes.

AUTO peut réaliser une analyse des bifurcations de systèmes algébriques de la forme:

$$F(u, \lambda) = 0 \quad F, u \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

et de systèmes d'équations différentielles tels que:

$$\frac{du(t)}{dt} = F(u(t), \lambda) \quad F, u \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^p \quad (1.2c)$$

ou encore

$$u^{k+1}(t) = F(u^k(t), \lambda) \quad (1.2d)$$

Il peut aussi étudier l'évolution et réaliser certaines continuations des systèmes dissipatifs de la forme:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(u, \lambda) \quad f, u \in \mathbb{R}^n \quad (1.3)$$

où D représente la matrice diagonale des constantes de diffusion. Nous mentionnons cette possibilité ici, mais ce modèle ne s'applique évidemment pas à l'étude de la ferorrésonance.

Pour notre problème, on s'intéresse au calcul des branches de solutions stationnaires périodiques stables et instables en fonction du paramètre suivant lequel l'étude est réalisée (diagramme de bifurcation), des systèmes de la forme:

$$\frac{du}{dt} = F(u, t, \lambda) \quad (1.4)$$

où $u(\cdot)$ et $F(\cdot)$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}^p$ un ensemble de paramètres, $t \in \mathbb{R}^+$ représente le temps.

Il faut remarquer que AUTO peut travailler uniquement sur des équations différentielles autonomes de type (1.2) i.e. ne dépendant pas explicitement du temps. Notons tout de suite que le problème à traiter ici est, non autonome, à cause du terme de forçage périodique. On le modifiera pour le rendre autonome comme cela est présenté au paragraphe (2.5).

La détermination de branches d'états stationnaires est basée sur la résolution de systèmes algébriques :

$$f(u, \lambda) = 0 \quad (1.5)$$

On sait que de tels systèmes (voir [G-H] et le chapitre II) peuvent présenter des bifurcations de solutions stationnaires vers d'autres solutions stationnaires (bifurcation simple) ou aussi donnant lieu à des solutions périodiques (bifurcation de Hopf).

Le logiciel AUTO contient des algorithmes de continuation de solutions, et est capable de déterminer des points de bifurcation algébrique le long de ces branches de solutions; il peut alors changer de branche en ces points et suivre la nouvelle branche générée par cette bifurcation. AUTO peut aussi calculer les courbes de point singuliers (point limite et point de bifurcation de Hopf) dans un plan à deux paramètres. On étudie donc ici, le comportement d'un point singulier en effectuant une continuation simultanément sur le premier paramètre d'étude et sur un second que l'on fait alors varier.

Pour un système autonome à solution stationnaire, le programme a les possibilités suivantes :

- Tracer les *branches de solutions* et calculer les *valeurs propres de la matrice jacobienne* le long de ces branches.
- Localiser les *points de bifurcation* et calculer automatiquement les *branches de bifurcation* générées en ce point.
- Localiser les *points de bifurcation de Hopf* et les continuer en libérant un deuxième paramètre.
- Localiser les *points limites* (points de retournement, bifurcation noeud-col) et continuer ceux-ci en libérant un deuxième paramètre.
- Obtenir tous ces derniers résultats dans le cas d'un système dynamique discret de la forme (1.2d).
- Trouver les extrêma d'une fonction objective le long des branches de solution et continuer ces extrêma en plusieurs paramètres.

Dans le cas de solutions périodiques, le programme peut fournir les résultats suivants :

- Calculer les *branches de solutions périodiques stables et instables* ainsi que les *multiplicateurs de Floquet*, ceux-ci déterminant la stabilité de la solution le long de ces branches. Initialiser le calcul à partir des valeurs calculées de la solution périodique, générées automatiquement aux points de bifurcation de Hopf.
- Localiser les *points limites*, les points de *bifurcation de doublement de période*, les points de *bifurcation vers le tore*, et les points de *bifurcation ordinaire* le long des branches de solutions périodiques. On peut aussi changer de branche aux points de bifurcation ordinaire ou de doublement de période.
- Continuer les points limites en deux paramètres. On peut aussi faire une *continuation à deux paramètres* sur les orbites à période fixée dans les cas où la période dépend explicitement de la solution.

Il est important d'insister sur le fait que AUTO ne peut pas faire de continuation à deux paramètres en un point de bifurcation vers le tore. Un développement ultérieur est envisagé à ce sujet: en travaillant sur l'application de Poincaré, ces points singuliers deviennent des points de bifurcation de Hopf que le logiciel peut alors suivre, dans un plan à deux paramètres. Nous avons utilisé cette technique pour l'étude considérée ici.

1.1.1. Possibilités du logiciel pour l'étude dans le cas de l'étude d'un circuit électrique ferromagnétique.

Dans le cas qui nous intéresse ici, deux types différents d'études peuvent être réalisés sur AUTO:

i) Le cas où on cherche à connaître les variations de la solution $u \in \mathbb{R}^n$ d'un système différentiel non linéaire autonome, périodique et paramétré de dimension n , de la forme (1.2c), où le flot F est périodique en temps.

Pour l'étude de la ferromagnétique, le terme périodique source (fonction du temps) rend le système non autonome. En générant cette source par un oscillateur stable modélisé par deux équations différentielles, on rend le système autonome, de dimension cinq, comme nous le verrons ultérieurement.

Ce système périodique est interprété par AUTO comme étant un problème de valeurs aux bords (BVP pour Boundary Value Problem) pour lequel la contrainte imposée "aux bords" est la condition de périodicité:

$$u(T) = u(0)$$

où T est la période source du système.

ii) Le cas où, utilisant le caractère périodique de la solution, on choisit de ne considérer cette solution qu'au bout d'un nombre entier de périodes. On cherche alors à étudier le comportement de la solution u d'un système discret de la forme (1.2d).

AUTO travaille donc ici sur une application appelée *application de retour de Poincaré*, que l'on déterminera numériquement. Nous présenterons cette étude, plus en détail, ultérieurement.

Notons que dans le cas où la solution est périodique, la suite (u^k) est stationnaire, alors que dans le cas quasi-périodique qui nous intéresse ici, cette suite décrit, dans l'espace des phases (espace des variables d'état), une *orbite fermée*.

Par des méthodes de continuation, AUTO est capable de "suivre" une solution $u(t)$ de (1.2c) ou u de (1.2d) qu'on lui a fournie, en faisant varier un des paramètres de façon continue. La méthode de continuation utilisée ici (dite "*pseudo-abscisse-curviligne*", développée par Keller - voir [K]) exploite l'existence de dérivée première de la solution en fonction du paramètre (tangente à la courbe) et du vecteur solution. Ceci amène ainsi à travailler, à chaque itération, sur l'équation différentielle linéarisée du système obtenue par développement de Taylor du flot autour d'une solution connue (comme il l'est décrit au chapitre II).

La résolution des équations différentielles est réalisée ici, à partir d'une méthode de collocation; l'intérêt d'utiliser une telle méthode réside dans le fait que tous les points de l'intervalle temporel d'étude sont considérés ensemble et non pas, successivement, après chaque itération de calcul, comme dans les méthodes pas à pas en temps. Cet avantage apparaît ici, en particulier lors de l'étude des BVP pour lesquels il faut tenir compte simultanément du point initial et du point final. Pour la précision des résultats, il a été montré que la méthode de collocation est équivalente à une méthode de Runge Kutta implicite à quatre pas ([W] et [R.J]).

En utilisant ces différentes méthodes, AUTO est capable de déterminer, rappelons le, en fonction du paramètre, tous les points singuliers tels que :

- point limite
- point de bifurcation
- point de bifurcation de HOPF
- point de bifurcation vers le tore.

Il est ensuite possible de libérer un second paramètre et ainsi de suivre le point singulier en un point limite ou en un point de bifurcation de Hopf, (éventuellement aussi en un point de bifurcation simple, en intervenant toutefois sur les fichiers numériques) mais malheureusement pas en un point de bifurcation vers le tore.

D'autre part, un calcul de *valeurs propres ou des coefficients de Floquet* suivant les différents cas permet de déterminer le caractère stable ou instable de la solution.

On peut ainsi obtenir le *diagramme de bifurcation* de (1.2c) ou (1.2d), c'est-à-dire le graphe de la norme de la solution (ou d'une des variables d'état) en fonction du paramètre étudié, avec indication du caractère stable ou instable de la solution, ainsi que les lignes de bifurcation décrivant l'évolution d'un point singulier dans un plan à deux paramètres.

1.1.2. Les fichiers d'entrée et de sortie

a) les fichiers d'entrée

AUTO est composé d'une série de routines numériques Fortran, auxquelles l'utilisateur doit rajouter un certain nombre de procédures définissant le flot à étudier, le point de départ de la solution et différents paramètres indiquant le type de problème posé, ainsi que ceux intervenant dans les différentes méthodes numériques (pas de temps, de discrétisation, nombre d'itérations...).

Pour l'étude qui nous intéresse ici, dans le cas de l'analyse par BVP, le préprocesseur d'AUTO utilise au moins trois procédures écrites par l'utilisateur, indispensables pour décrire et traiter le problème à analyser:

- une procédure FUNC contenant le flot $F(u)$ de l'équation (1.2c), ainsi que les paramètres suivant lesquels on souhaite faire l'étude.
- une procédure STPNT définissant un point de départ solution du problème.
- une procédure INIT dans laquelle l'utilisateur devra initialiser les paramètres décrivant le type du problème à traiter, ceux indiquant le nombre d'itérations souhaité dans les différentes méthodes numériques utilisées, ceux fixant les pas de calcul et les valeurs limites du diagramme de bifurcation. Cette procédure reste la plus délicate à utiliser car il est difficile, a priori, de connaître les valeurs des paramètres de calcul susceptibles de correspondre le mieux au problème posé, d'autant que celles-ci sont multiples; il faut donc s'assurer de la cohérence des valeurs données à ces paramètres.

b) Les fichiers de sortie

Quatre fichiers de sortie sont créés à chaque exécution d'Auto : fort006, fort007, fort008, et fort009.

Fort006 : fichier de sortie sur l'unité 6 (correspondant, par défaut, au terminal).

Ce fichier résume le déroulement des calculs venant d'être effectués. Il indique tous les points labellés, c'est-à-dire tous les points demandés par l'utilisateur ainsi que les points singuliers déterminés.

Fort007 : Ce fichier contient les résultats précédents avec des informations supplémentaires :

- tous les points sont indiqués,
- la stabilité du point cité est spécifiée : le numéro du point est précédé du signe - s'il est stable ou du signe + s'il est instable,
- les différentes valeurs des variables de contrôle fournies par l'utilisateur y figurent.

Fort008 : Ce fichier contient toutes les informations sur le calcul et tous les résultats intermédiaires. C'est le fichier le plus complet, mais aussi le moins facilement lisible ; il sert principalement au graphique, ou au redémarrage lors d'une nouvelle exécution du programme à partir d'un point précédemment calculé. Les valeurs des variables y figurent en fonction du temps.

L'utilisateur n'a, en général, pas l'occasion de consulter ce fichier.

Fort009 : Ce fichier donne des informations plus précises concernant le calcul des solutions demandées.

On y trouve :

- Le nombre d'itérations de Newton, en chaque point.
- La valeur effectivement prise par le pas dans la méthode "pseudo-abscisse curviligne" pour le calcul (il est divisé par deux en cas de non convergence).
- Les valeurs prises par les fonctions déterminant un point limite ou un point de bifurcation.
- Les valeurs propres du jacobien ou les multiplicateurs de Floquet suivant le type d'étude demandé (stationnaire ou périodique). Le nombre de multiplicateurs de Floquet situés à l'intérieur du disque complexe unité y est aussi donné.
- La stabilité en chaque point .

1.1.3. Implantation du logiciel

Ce logiciel, rappelons-le, est composé de routines développées en langage Fortran. Il peut donc être utilisé dans son état initial sur n'importe quel ordinateur. Afin de le rendre plus souple à l'utilisation, des menus ont été réalisés sous forme de procédure écrite en langage Shell, sous un environnement UNIX. Après avoir été utilisé sur machine IBM, le logiciel a été installé sur stations de travail SUN ou HP, ce qui a facilité son utilisation. Via ces stations, il est maintenant possible de réaliser les exécutions sur CRAY, amélioration non négligeable vus les temps de calcul importants demandés pour certaines applications.

La partie graphique fait appel aux procédures du logiciel GKS, ou aussi STARBASE (logiciel graphique disponible sur stations de travail HP).

Signalons d'autre part que AUTO travaille en double précision.

1.2. Modèle d'utilisation d'AUTO dans le cadre de l'étude de la ferrorésonance

Ce paragraphe a pour but de mettre en évidence certaines remarques utiles pour l'étude du cas qui nous intéresse. Elles sont fondamentales pour le bon fonctionnement du logiciel dans un cas aussi délicat que celui qui est traité : suffisamment de problèmes numériques inévitables apparaissent ; il est donc utile de faire en sorte que le système proposé au logiciel soit le plus régulier possible.

1.2.1. Intérêt de la renormalisation

Lors de la modélisation du réseau une normalisation "naturelle" avait été effectuée (voir chapitre I) en ramenant la tension d'alimentation de l'ordre de la centaine et en ajustant éventuellement certains paramètres par la suite, pour obtenir le modèle dit réduit.

Les ordres de grandeur des variables d'état de ce modèle sont encore éloignées de l'unité puisque les tensions sont de l'ordre de 100 V et les intensités de 10^{-2} ampères.

Vue la sensibilité particulièrement importante du système étudié, et les problèmes numériques rencontrés, il s'est avéré qu'une nouvelle renormalisation semblait indispensable.

Remarquons auparavant qu'il est possible, dans la procédure INIT, de faire intervenir des "poids", permettant de compenser les rapports trop importants des différents ordres de grandeur ; ces "poids" interviennent sur la norme de la solution et sur chacun des paramètres.

Dans la méthode "pseudo-abscisse curviligne", la distance $\|(u, \lambda)\|^2$ est calculée de la manière suivante:

$$\|(u, \lambda)\|^2 = \theta_u^2 \int_0^T \|u\|^2 dt + \sum_{i=1}^p \theta_{\lambda_i} \lambda_i^2$$

$u \in \mathbb{R}^n$ étant le vecteur des variables d'état ;

$\lambda \in \mathbb{R}^p$ le vecteur des paramètres.

θ_u et θ_{λ_i} sont les poids respectifs de la norme de la solution et de chacun des paramètres .

Mais il s'est avéré que ces "poids" étaient insuffisants pour faire disparaître la lenteur d'exécution et la mauvaise convergence des méthodes numériques observées sur les cas traités (il est en particulier inutile de mettre un poids sur la norme de la solution uniquement, alors que les variables d'état ont, elles, des ordres de grandeur différents).

Une renormalisation systématique sur chacune des variables et/ou des paramètres semble bénéfique et ne doit pas être négligée; elle est réalisée en multipliant chacune des variables (et des paramètres) par une constante, convenablement choisie, ramenant les grandeurs sur lesquelles sont effectués les calculs de l'ordre de l'unité.

1.2.2. Représentation du terme source

Le système étudié est non autonome du fait de la présence de terme source périodique $E(t) = E \cos(\omega t)$. Pour rendre ce système autonome et ainsi exploitable par le logiciel, il a été choisi de rajouter non pas

une équation différentielle définissant la variable temps (ie $\frac{d\tau}{dt} = 1$), mais, et afin de ne pas perturber le système initial, deux équations différentielles décrivant un oscillateur périodique stable, comme suit:

la variable $E(t) = E \cos(\omega t)$ est solution du système différentiel de second ordre stable :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\omega y + (1 - x^2 - y^2) \\ \frac{dy}{dt} = \omega x + (1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

Le calcul des coefficients de Floquet a été réalisé et a permis de prouver le caractère stable de cet oscillateur (un coefficient est égal à 1, puisque le système est périodique, l'autre étant de module strictement inférieur à 1) . Voir [R - p 41].

1.2.3. La méthode basée sur l'application de Poincaré

L'application de premier retour ou application de Poincaré a été définie au chapitre II. Elle est fondamentale pour l'étude des systèmes périodiques ou proches du périodique. Elle rentre donc bien exactement dans le cadre de l'étude qui nous intéresse ici.

Par ailleurs, une raison évidente qui nous a incités à utiliser cette méthode est la suivante: les bifurcations vers le tore, obtenues pour le système étudié, ne peuvent être continuées à deux paramètres par le logiciel, comme nous l'avons déjà précisé. Il est donc impossible de déterminer une ligne de bifurcation de ce type de points singuliers. En revanche, AUTO étant capable de réaliser une telle continuation sur des points de bifurcation de Hopf, il nous a semblé naturel de travailler sur l'application de Poincaré du système étudié. Par cette technique, comme nous l'avons mentionné au chapitre II, une solution périodique sur le flot continu correspond à une solution stationnaire de l'application et une solution quasi-périodique correspond à une solution périodique; il est clair alors qu'une bifurcation vers le tore pour le flot continu correspond à une bifurcation de Hopf de l'application. On a ainsi pu, grâce à cette méthode, construire la ligne de bifurcation souhaitée.

D'autre part, la méthode des coupes de Poincaré simplifie beaucoup l'étude des flots continus :

- elle permet de passer d'un flot de dimension n à une application de $\mathbb{R}^{n-1}$ dans lui-même (on perd ainsi une unité du nombre de coordonnées intervenant). Dans le cas périodique où le terme source est modélisé par deux équations, on se ramène à un espace de travail de dimension $(n-2)$.
- la résolution numérique d'une application est plus rapide et moins coûteuse que la résolution d'un système différentiel.

- le nombre de données à manipuler est diminué puisque presque tous les points de la trajectoire peuvent être ignorés.

Pour cette méthode, on a réalisé, à l'aide du logiciel AUTO, une continuation sur une application. Pour la résolution de l'équation différentielle sur chaque période, entre kT et $(k + 1)T$, nous avons choisi d'intégrer au programme un algorithme basé sur la méthode de Runge Kutta explicite d'ordre quatre, à pas variable; cela nous semblait être un bon compromis complexité-précision.

1.2.4. Les paramètres importants

Dans la procédure INIT que l'utilisateur doit fournir, se trouvent les différents paramètres définissant le problème à traiter ainsi que les précisions concernant les méthodes numériques utilisées. Ces derniers doivent être ajustés avec beaucoup de précision et sont fondamentaux pour le bon fonctionnement numérique des méthodes. Cet ajustement est parfois délicat, d'autant que ces paramètres se trouvent être en nombre important et qu'il faut donc aussi veiller à ce qu'il n'y ait pas d'interactions néfastes ou inutiles entre eux.

Ces paramètres concernent (dans l'ordre de leur importance) :

- le *pas initial* choisi dans la méthode pseudo-abscisse curviligne. Ce pas est variable mais est limité entre un pas minimum et un pas maximum que l'utilisateur doit fournir,
- le *nombre d'intervalles de discrétisation* utilisés dans la méthode de collocation,
- le nombre de *points de collocation*,
- le *nombre maximum d'itérations* utilisées dans la méthode de la *sécante*,
- le *nombre maximum d'itérations* utilisées dans la méthode de *Newton Chord*,
- le nombre *d'itérations de Newton* à effectuer avant d'utiliser la méthode de *Chord* (pour laquelle le jacobien est gelé),
- les *tolérances* souhaitées pour le pas d'abscisse curviligne des paramètres et de la solution,
- les *constantes de renormalisation*.

Dans le cadre de l'étude de la ferorésonance, les paramètres à ajuster avec précision sont ceux concernant le nombre d'intervalles dans la méthode de collocation (en accord avec la période du système) et surtout les trois paramètres donnant le pas de l'abscisse curviligne. L'intervalle contenant ces valeurs doit être fin, puisqu'on a pris soin de renormaliser les équations. Il n'empêche qu'il faut encore rester vigilant et éviter de leur donner des valeurs trop importantes (on risque ainsi de passer au dessus de point(s) singulier(s)) ni trop petites (on ne décolle plus alors du point singulier).

2. PRESENTATION ET ANALYSE DES RESULTATS OBTENUS

Dans ce chapitre, avant de donner les résultats numériques obtenus à partir des différents modèles présentés au chapitre I, nous décrivons, dans une première section, le comportement caractéristique décrivant la majorité des cas de ferrorésonance parallèle. Nous verrons par la suite comment en fonction des différentes configurations considérées ainsi que suivant les valeurs données aux paramètres, ce type de comportement peut évoluer.

- On s'intéresse dans une deuxième section, au comportement des solutions du système complet (comportant treize équations) ; nous verrons en particulier, mais sans pour autant effectuer une étude à deux paramètres trop longue et coûteuse pour un système d'une telle dimension, et tout aussi inutile attendues les simplifications qui ont pu être faites, de quelles façons agissent les pertes parallèles et les pertes séries sur ce comportement, ce qui permettra de justifier en partie les simplifications réalisées.

Ensuite on étudie et compare les résultats obtenus sur les modèles réduits 8D, 7D, et 5D, en gardant les différentes pertes présentes, ceci toujours afin de mettre en évidence les analogies qualitatives du comportement des modèles ainsi que les quelques différences de faible importance observées, mais qu'il faut garder à l'esprit lors de l'exploitation des résultats des modèles les plus simples.

Enfin, à la section trois, après avoir constaté que le type du comportement concernant le modèle simplifié au maximum (de dimension trois) était toujours qualitativement le même, on réalise, sur ce système une étude complète; c'est-à-dire que l'on va pouvoir, à moindre coût maintenant, étudier les limites d'existence de phénomènes singuliers, en calculant les lignes de bifurcation obtenues par continuation d'un point singulier en libérant un deuxième paramètre. Cette étude étant longue et coûteuse n'a été réalisée que sur le modèle simplifié.

Dans une dernière section, nous exposerons les résultats obtenus à partir du modèle plus simple de la ligne longue. On mettra en évidence notamment, le peu d'influence du nombre de cellules mises en jeu.

2.1. Les résultats classiques obtenus pour la ferrorésonance parallèle

Dans tous les cas de ferrorésonance parallèle traités - avec une fréquence de résonance de la partie linéaire proche de 100 Hz- , pour des configurations singulières (dont le régime est différent du régime normal), le diagramme de bifurcation obtenu est quasiment toujours du même type, (comme d'ailleurs dans le cas série où on avait presque toujours un diagramme de bifurcation en S).

Ici, il est légèrement plus complexe et se compose de la façon suivante :

Tant que la valeur du *paramètre tension-source est faible*, la solution (on choisit de ne représenter que la valeur maximale sur une période de la variable d'état représentant la tension aux bornes du transformateur, ce qui semble plus parlant) évolue "normalement" c'est-à-dire de façon proportionnelle à la tension d'alimentation. On est alors dans la *zone non saturée*. En revanche, dès que le *flux devient trop important* et atteint le coude de saturation de la caractéristique du transformateur $i = f(\varphi)$, on entre dans une *zone fortement non linéaire* et des *bifurcations surviennent* : dans la plus grande partie des cas, on rencontre à ce niveau (et pour une tension d'alimentation physiquement admissible) un point de *bifurcation vers le tore*, la solution "normale" périodique stable perdant sa stabilité au profit d'une solution quasi périodique stable; deux *coefficients de Floquet*, complexes conjugués, sont sortis du cercle unité complexe (les branches de solutions quasi-périodiques n'apparaissent pas sur les diagrammes de bifurcation présentés, puisque, rappelons-le, le logiciel ne peut suivre numériquement de telles branches de solutions). La solution périodique reste instable uniquement sur un mince intervalle de tension d'alimentation puisqu'elle subit à nouveau une bifurcation vers le tore, les deux coefficients de Floquet entrant, cette fois, à l'intérieur du cercle unité complexe (on ne sait pas à l'heure actuelle si les deux branches de solutions quasi-périodiques se confondent, s'intersectent...etc (Voir [D])). Dans cette zone, la solution quasi-périodique peut être de *forte amplitude* et provoquer des dégâts.

En augmentant à nouveau la valeur du paramètre E, la solution périodique stable subit à *nouveau une bifurcation*, simple cette fois (un seul coefficient de Floquet franchit le cercle complexe unité); elle perd bien entendu sa stabilité et la solution physiquement accrochée est celle se trouvant sur la branche supérieure. L'amplitude de la tension aux bornes du transformateur a donc augmenté dans des proportions importantes puisque la tangente à cette nouvelle branche instable en son début est, tout d'abord, proche de la verticale, jusqu'au *point limite* où elle retrouve à la fois *sa stabilité* et son comportement "normal" puisqu'à partir de ce point limite, la tension aux bornes du transformateur augmente quasiment proportionnellement à la tension d'alimentation; notons toutefois, que pour certaines configurations, une *bifurcation de doublement de période* peut apparaître. On a même rencontré un cas où la nouvelle branche obtenue (de période double) subissait elle aussi ce type de bifurcation, et de même pour la nouvelle

branche (de période quatre) émanant. On n'a pas pu pousser cette étude au delà, les paramètres numériques devenant trop importants pour le logiciel ; c'est peut-être une route vers le *chaos* ?

Au voisinage du point limite, les études temporelles permettent de constater que les réponses obtenues sont riches en harmonique élevés (en fait, c'est principalement de l'harmonique deux; même si le signal possède plusieurs maxima sur une période, deux sont prépondérants, comme nous pourrions le constater dans les différents cas présentés). Puis, pour une valeur plus élevée de la tension d'alimentation, on aperçoit des réponses riches en harmonique 3.

On présente, dans la section suivante, les diagrammes de bifurcation obtenus sur différents systèmes obtenus en modifiant les valeurs des pertes d'une part, et en réduisant la dimension des systèmes d'autre part. Nous constaterons que ces diagrammes sont tous basés sur le modèle que nous venons de présenter. Nos critères de comparaison porteront donc sur l'évolution des quatre points singuliers que nous avons mentionnés.

2. 2. Le modèle Chastang-Chinon

2. 2. 1. Le modèle de dimension treize

Les équations et les valeurs numériques considérées sont celles données au chapitre I (système S_1).

Nous étudions ici, pour le système complet, les trois cas suivant:

- . le cas complet pour lequel on a tenu compte des différentes pertes des machines et des lignes (sauf les pertes par effet de peau, par effet couronne et les pertes fer, conformément aux remarques exposées au chapitre I)
- . le cas pour lequel ont été supprimées les pertes parallèles (obtenu en considérant les résistances ρ_3 et ρ'_3 infinies)
- . le cas pour lequel ont été supprimées les pertes séries (obtenu en prenant $R_1 = R_2 = R_4 = 0$)

i) Le système avec pertes

Le diagramme de bifurcation est le suivant:

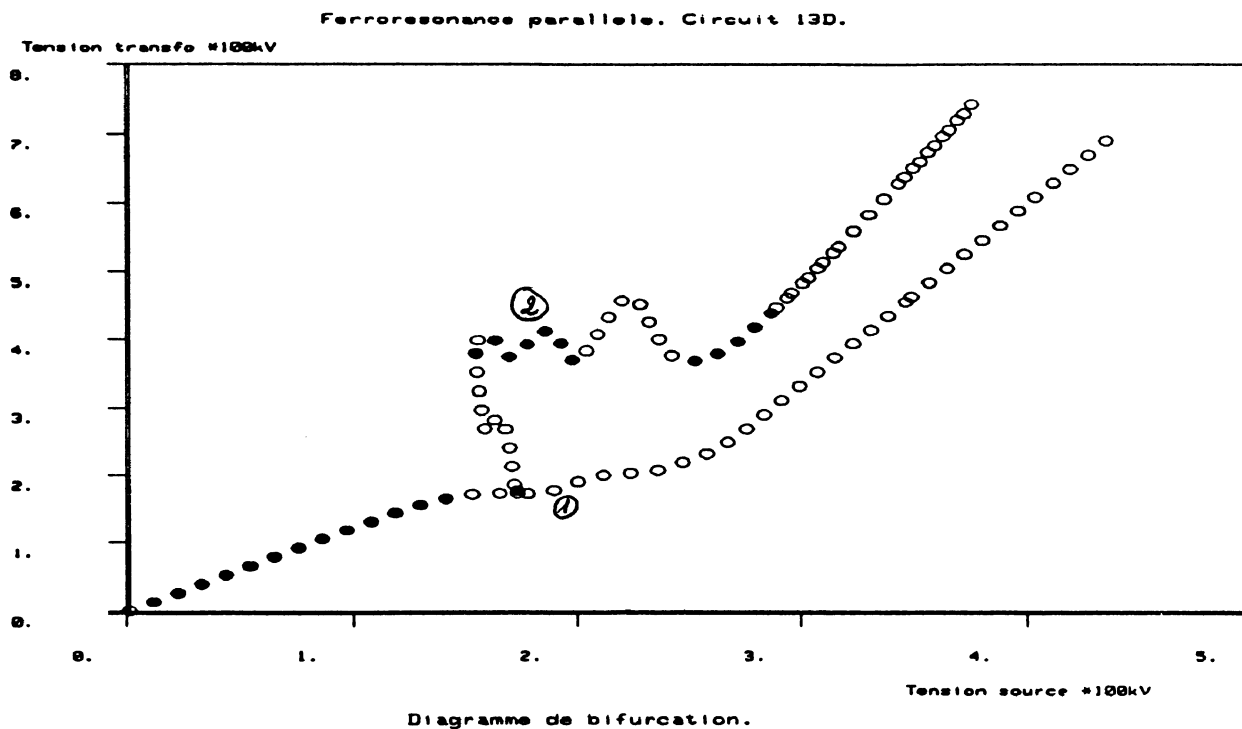


Figure 3.1: Diagramme de bifurcation du modèle complet avec pertes

Remarquons que, pour les cas étudiés dans cette section, nous avons obtenus, en plus des singularités présentées précédemment, d'autres points de bifurcation vers le tore sur les branches de solutions instables; c'est-à-dire que le nombre de coefficients de Floquet se trouvant à l'extérieur du disque complexe unité peut-être égal à deux, mais aussi à quatre, six... Ceci, naturellement, n'est possible, que si la dimension du système étudié le permet. Ces bifurcations supplémentaires laissent supposer l'existence d'autres branches de solutions stables quasi-périodiques. Avec le logiciel, dans son état actuel, nous n'avons pu élucider la question; nous nous sommes principalement intéressés aux bifurcations rencontrées sur les branches stables.

Les figures suivantes représentent la tension aux bornes du transformateur (en valeurs réduites) en fonction du temps, sur une période. Il est alors facile de constater que, suivant les valeurs données à la tension d'alimentation E , les régimes observés sont différents:

. Avant le premier point de bifurcation vers le tore, la solution périodique est de la forme classique habituelle:

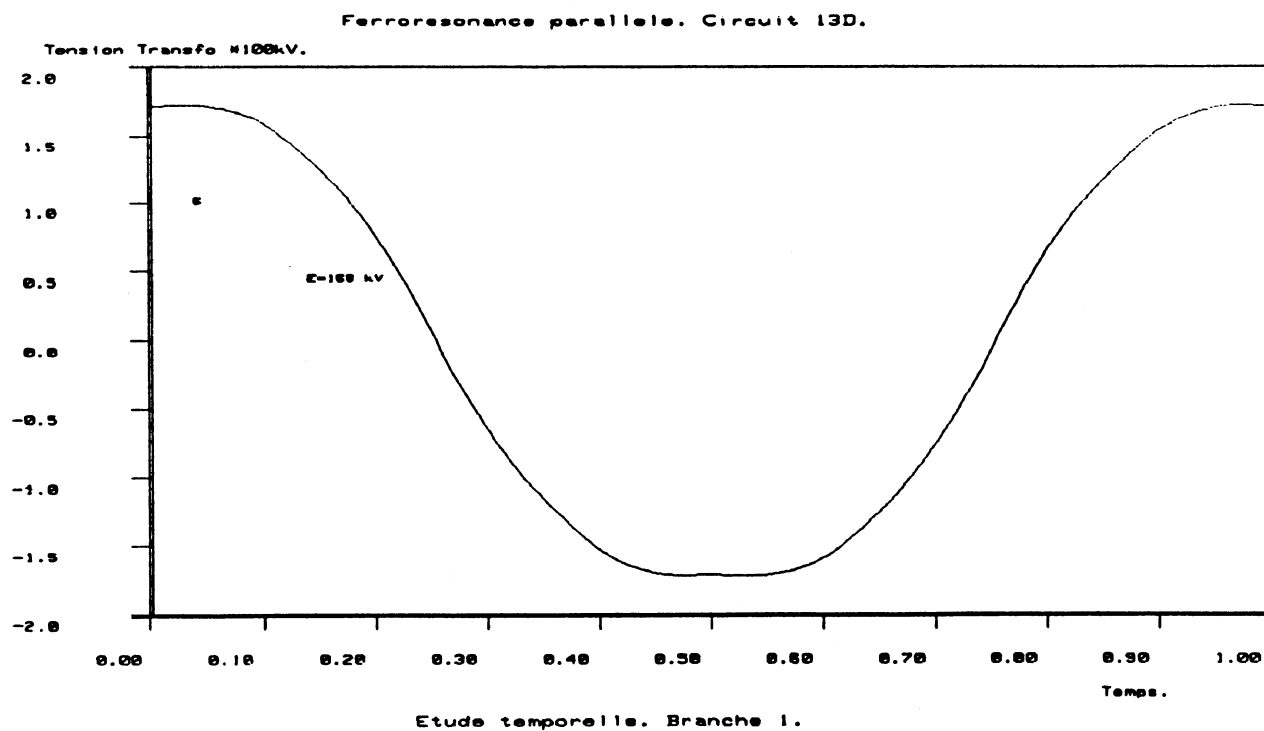


Figure 3. 2 : Régime normal

. Après la bifurcation simple (bifurcation fourche), les solutions périodiques instables sont riches en harmonique deux. Sur la figure 3.3 (et les suivantes), on constate que l'on est en présence d'harmoniques élevés (quinze), mais que deux maxima prédominent:

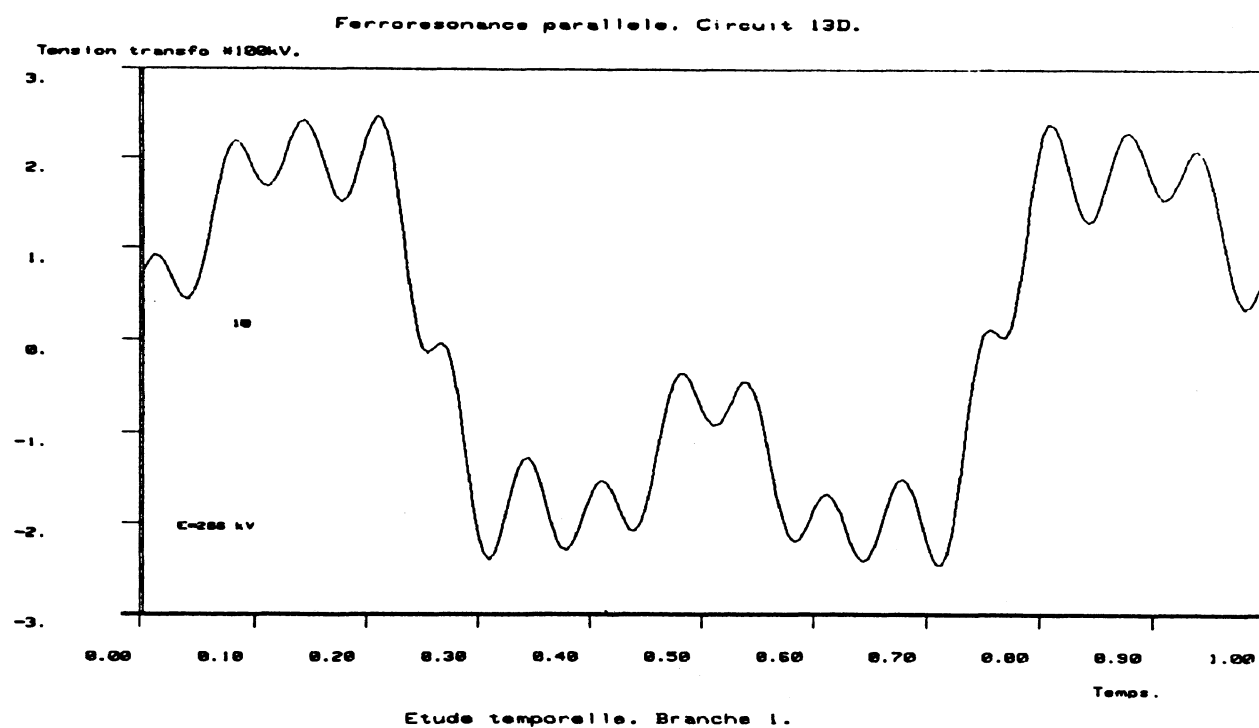


Figure 3.3 : Solution instable riche en harmonique 2

. Toujours sur cette même branche, mais pour une tension d'alimentation élevée, les solutions périodiques instables sont riches en harmonique trois:

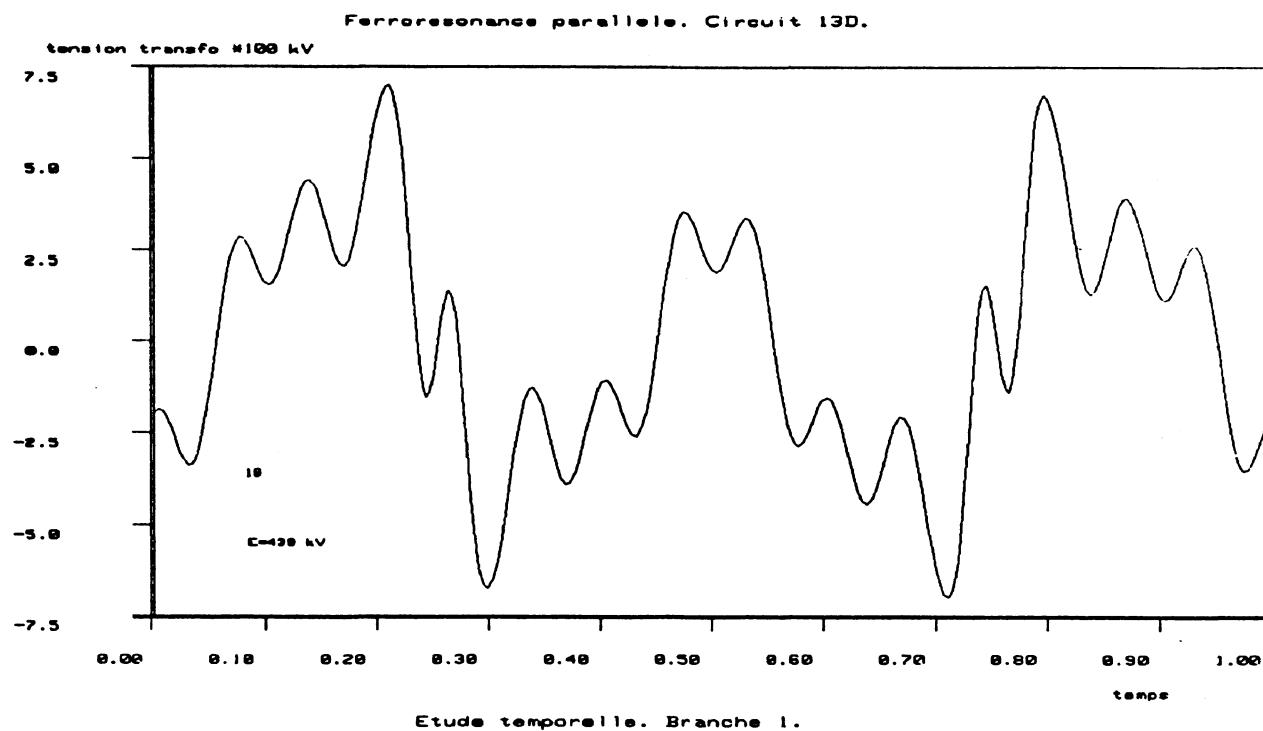


Figure 3. 4 : Solution périodique instable riche en harmonique 3

. Sur la deuxième branche, au voisinage du point de bifurcation, la solution périodique instable, est de forme classique:

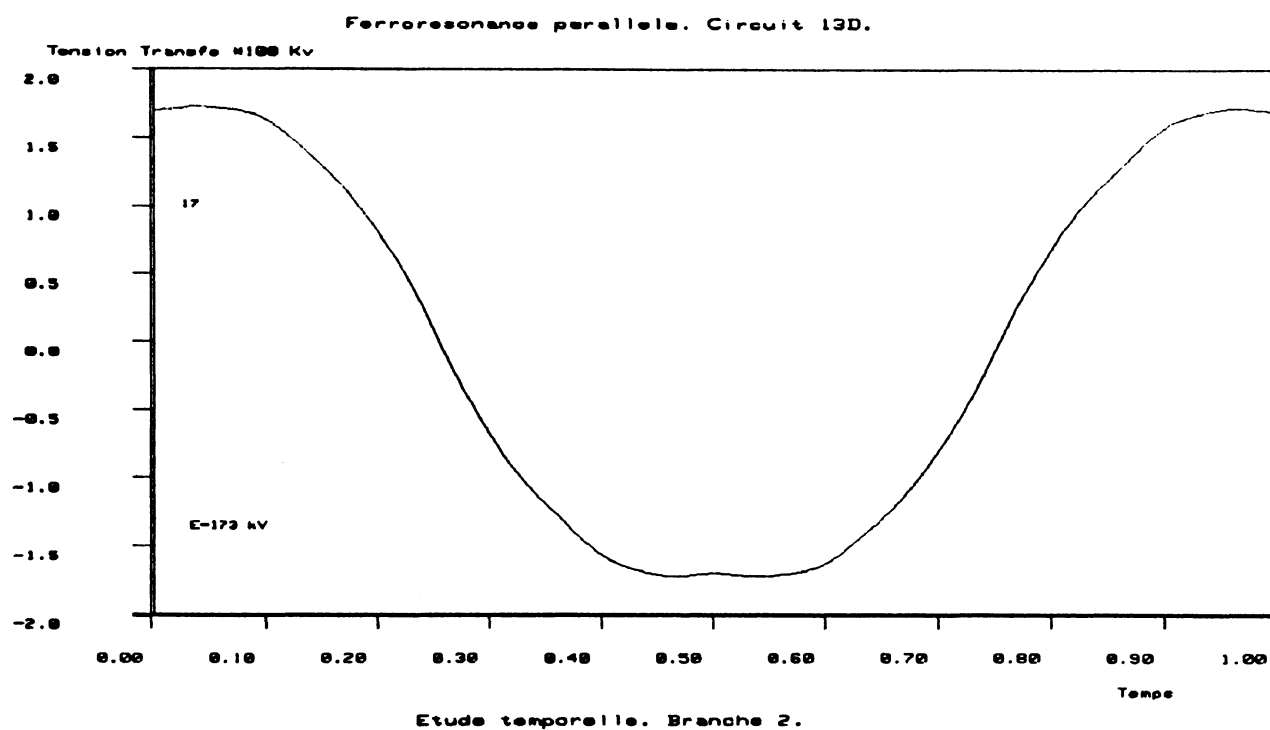


Figure 3. 5 : Branche bifurquée; régime normal

. Alors qu'au voisinage du point limite, la solution, devenue stable, est riche en harmonique
deux:

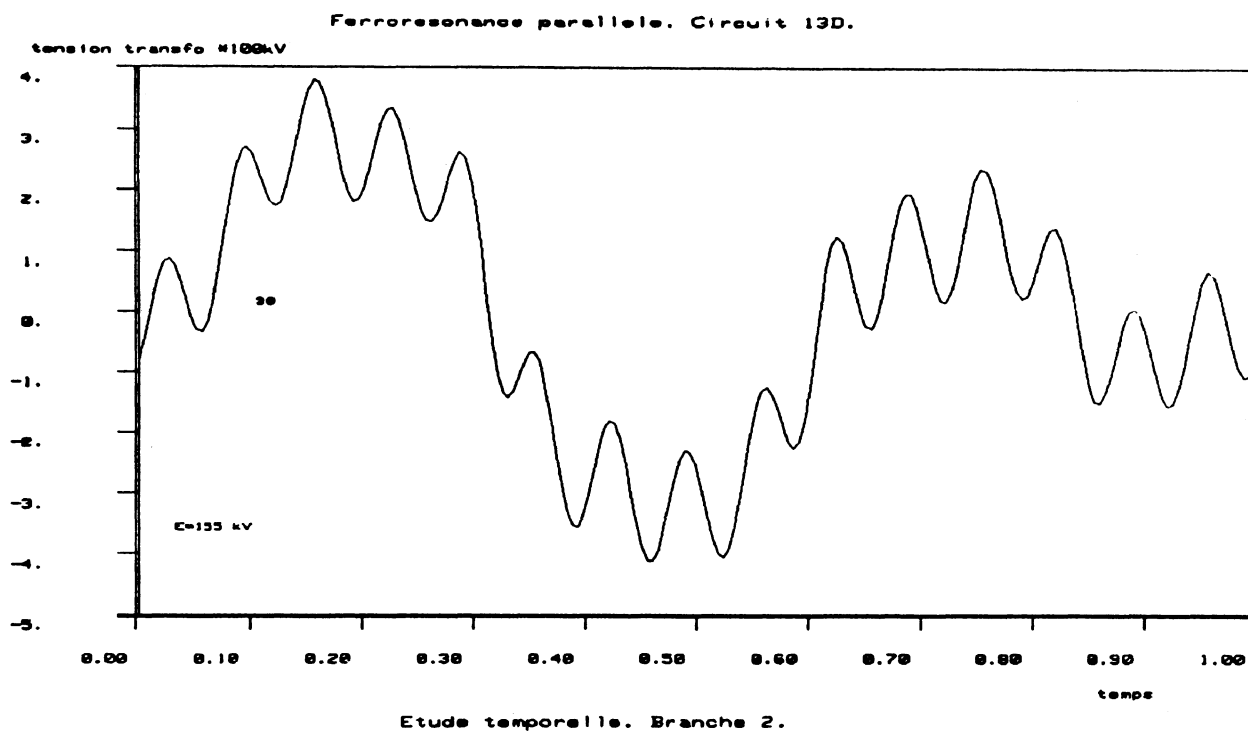


Figure 3.6: Solution périodique stable riche en harmonique 2

. Puis pour des valeurs plus importantes de la tension d'alimentation, cette solution périodique stable est riche en harmonique trois:

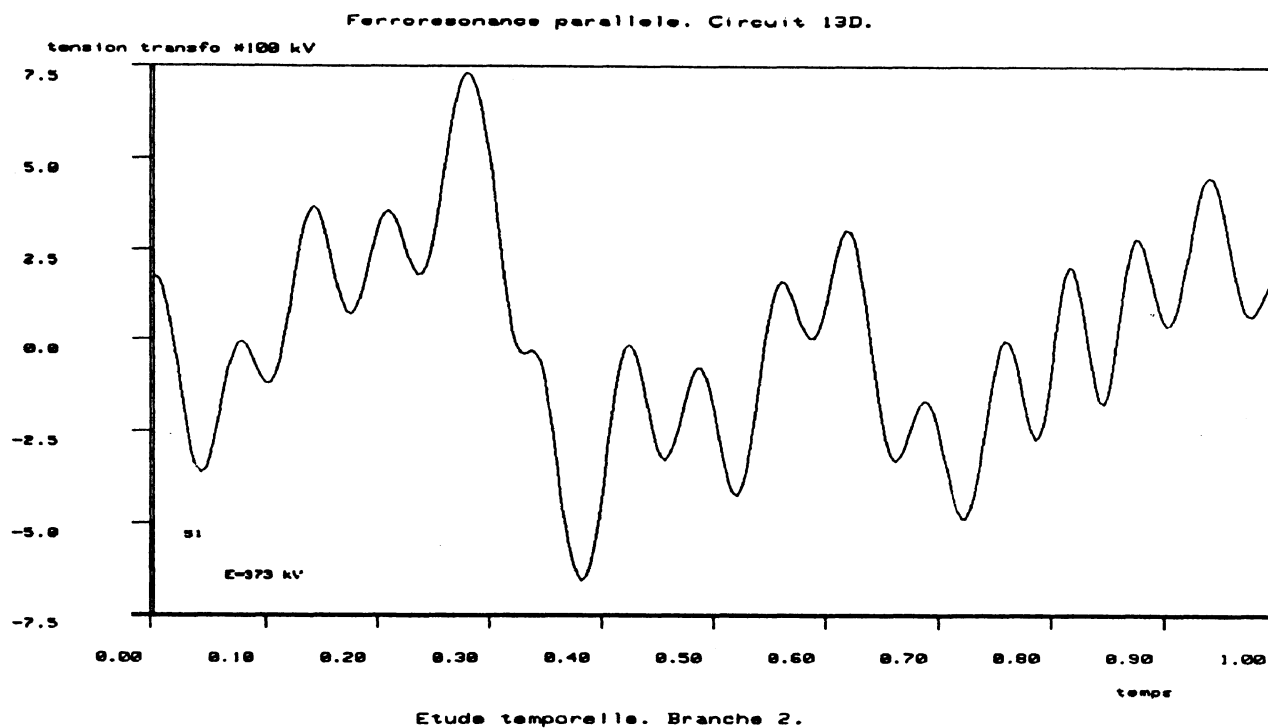


Figure 3. 7 : Solution périodique stable riche en harmonique 3

Seules les solutions stables intéressent l'exploitant du réseau (puisque, physiquement ce sont ces solutions, et elles seulement, qui sont accrochées); si maintenant on observe la branche de solutions stables du modèle, suivant les valeurs de la tension d'alimentation, on constate qu'elle se comporte tout d'abord normalement, jusqu'à ce que la branche de solutions subisse une première bifurcation vers le tore, en E_1 . Pour $E > E_1$, deux solutions stables apparaissent mais aucune n'est conforme à celle attendue par le physicien:

. l'une est quasi-périodique (elle n'apparaît pas sur le diagramme, mais la théorie des bifurcations nous dit que puisque deux exposants de Floquet ont franchi le cercle unité complexe, la solution périodique stable a perdu sa stabilité au profit d'une solution quasi-périodique nécessairement stable).

. l'autre solution stable est périodique, mais d'amplitude importante et riche en harmonique deux.

Nous verrons comment, en modifiant les paramètres caractéristiques du réseau, il est possible de déplacer et voire même de supprimer ces points singuliers, ce qui nous permet de donner un ensemble de valeurs de paramètres pour lesquels on est assuré du comportement classique de la solution.

ii) Cas sans pertes parallèles

Cette étude a été réalisée à partir des équations du système S_1 donné au chapitre I, et pour lesquelles les termes $\frac{V_3}{\rho_3}$ et $\frac{V_4}{\rho_1}$ ont été supprimés. Le diagramme de bifurcation obtenu dans ce cas est le suivant:

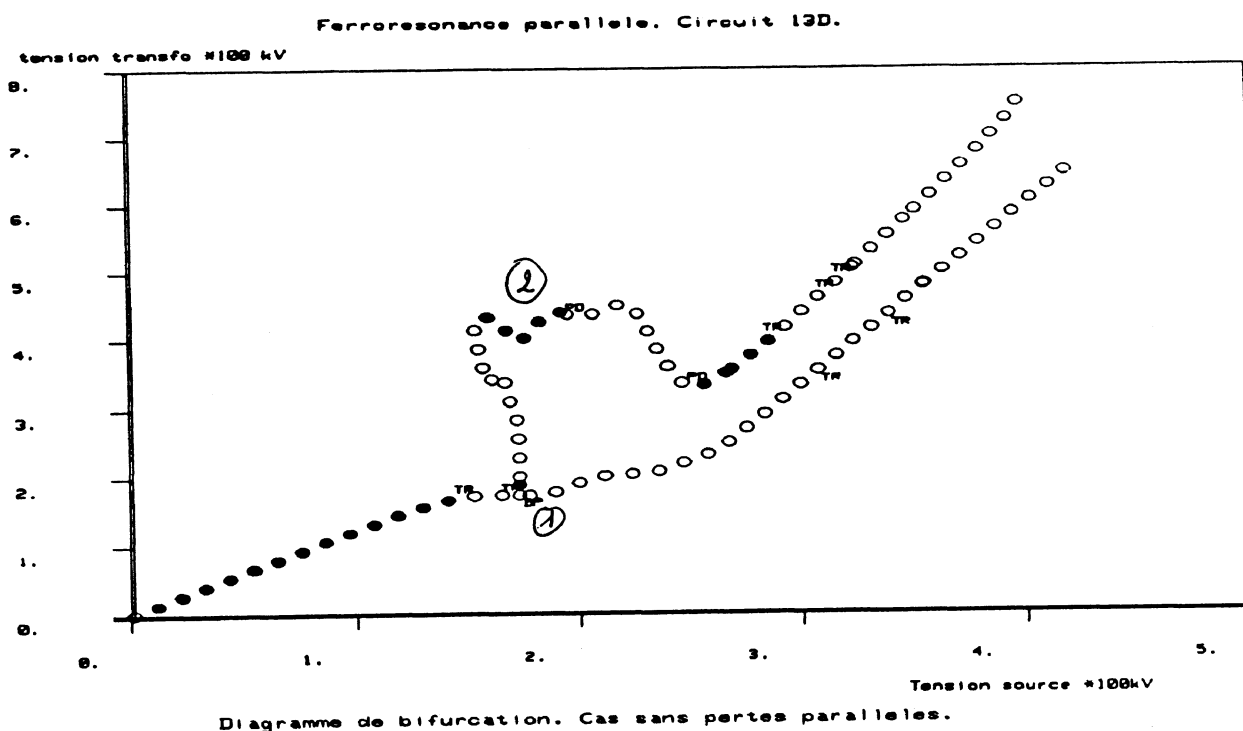


Figure 3.8 : Diagramme de bifurcation du modèle 13D, sans pertes parallèles

Ce diagramme est très proche de celui obtenu à la section précédente. On peut noter toutefois, une faible augmentation des surtensions sur la branche bifurquée, ainsi qu'une apparition des différents points singuliers pour des valeurs de la tension d'alimentation E plus faible.

Les études temporelles sont qualitativement identiques elles aussi; seules les amplitudes des réponses sont très légèrement supérieures.

Les pertes parallèles que nous avons introduites sur ce modèle, ont donc peu d'influence sur l'apparition des phénomènes ferro-résonants.

iii) Cas sans pertes séries

On prend à nouveau le système d'équations S_1 , pour lesquelles on fixe $R_1 = R_2 = R_4 = 0$.

Le diagramme de bifurcation obtenu est le suivant:

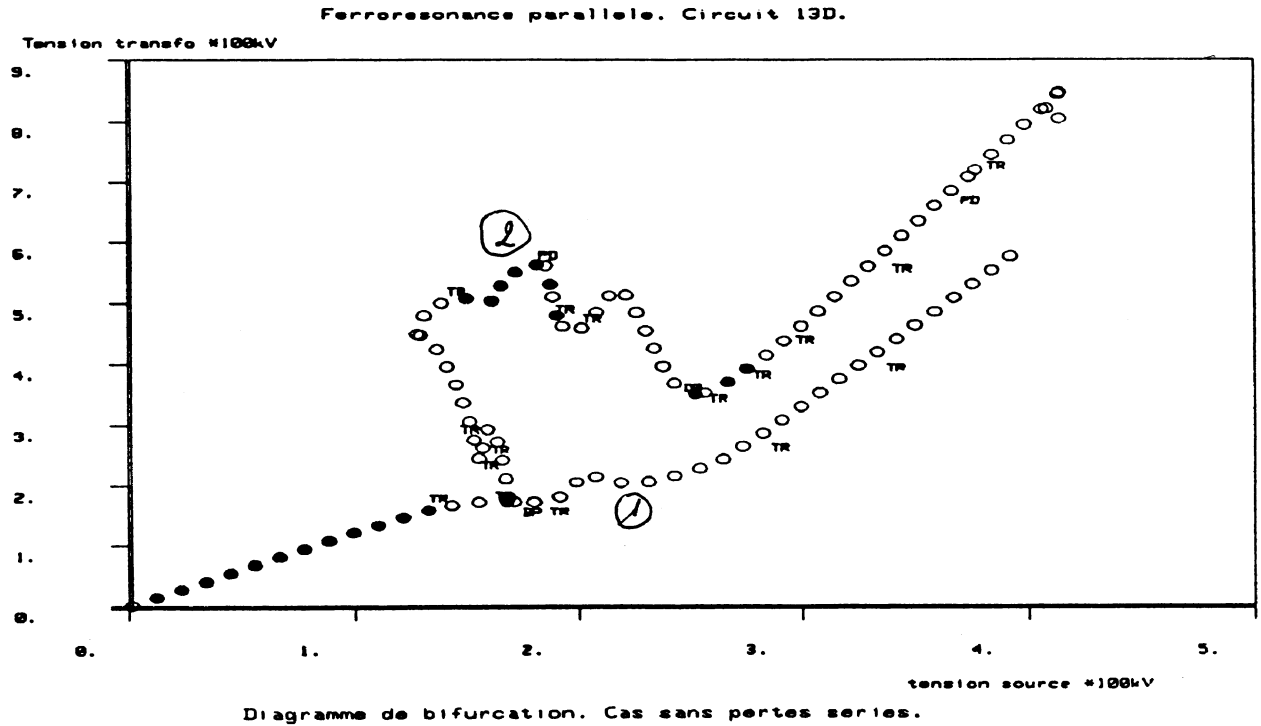


Figure 3.9 : Diagramme de bifurcation du modèle 13D sans pertes séries

Qualitativement, on obtient une fois encore, le même type de diagramme de bifurcation; en revanche, on constate clairement ici, que les tensions aux bornes du transformateur, subissent des surtensions bien plus importantes que dans le cas pour lequel on a tenu compte de ces pertes série. De plus, l'intervalle contenant les valeurs de la tension d'alimentation et à l'intérieur duquel la solution est quasi-périodique, est de taille plus importante (dans un rapport de deux), et les points singuliers apparaissent pour des valeurs de la tension d'alimentation plus faibles.

Ces mêmes remarques sont encore valides pour les représentations temporelles.

Tout ceci confirme bien l'effet régularisant que possèdent ces pertes série, sur les différents phénomènes de ferroresonance rencontrés; leur rôle est beaucoup plus important que celui joué par les pertes parallèles.

Toutes ces exécutions ont été réalisées sur le Cray d'EDF. Notons que les temps CPU pour chacune de ces trois exécutions est de l'ordre de 20000 secondes.

2.2.2. Validation de la modélisation et des simplifications

Dans cette section, nous allons présenter les différents résultats obtenus pour les systèmes de dimension huit, sept et cinq déduits du système complet par simplifications successives, comme il l'a été montré au chapitre I.

Les diagrammes de bifurcation obtenus sont les suivants:

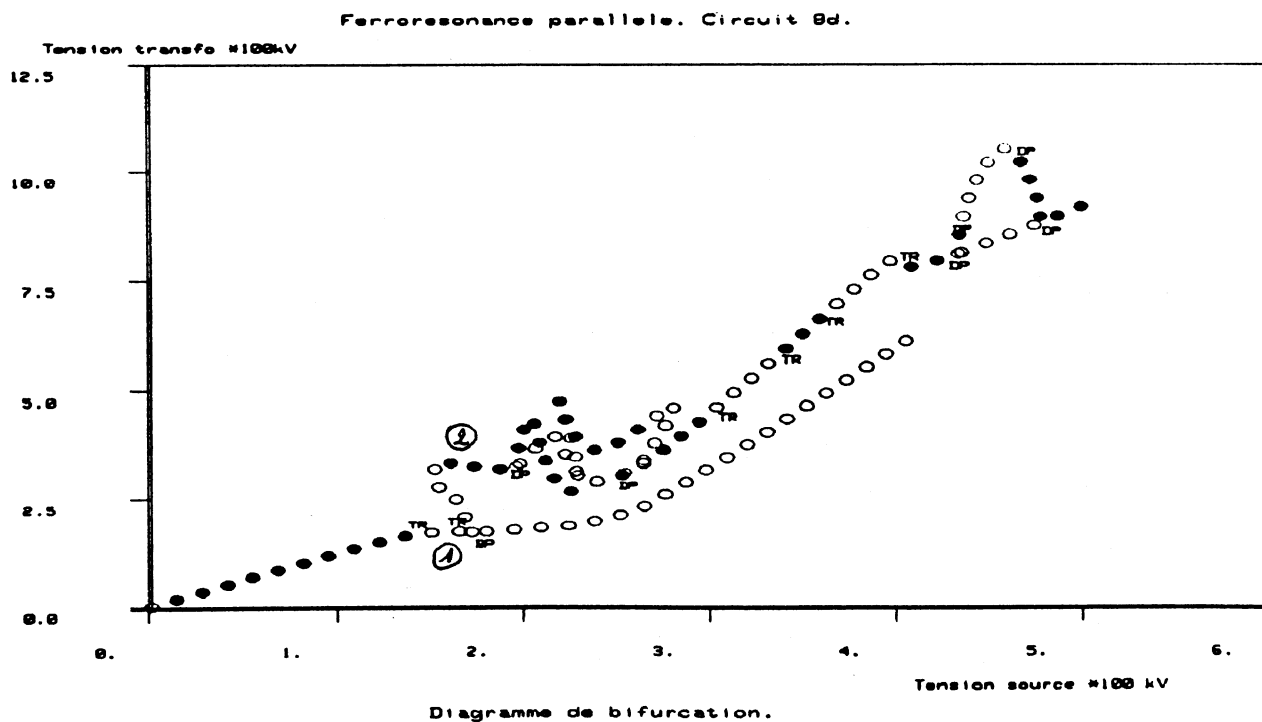


Figure 3.10: Diagramme de bifurcation du modèle 8D

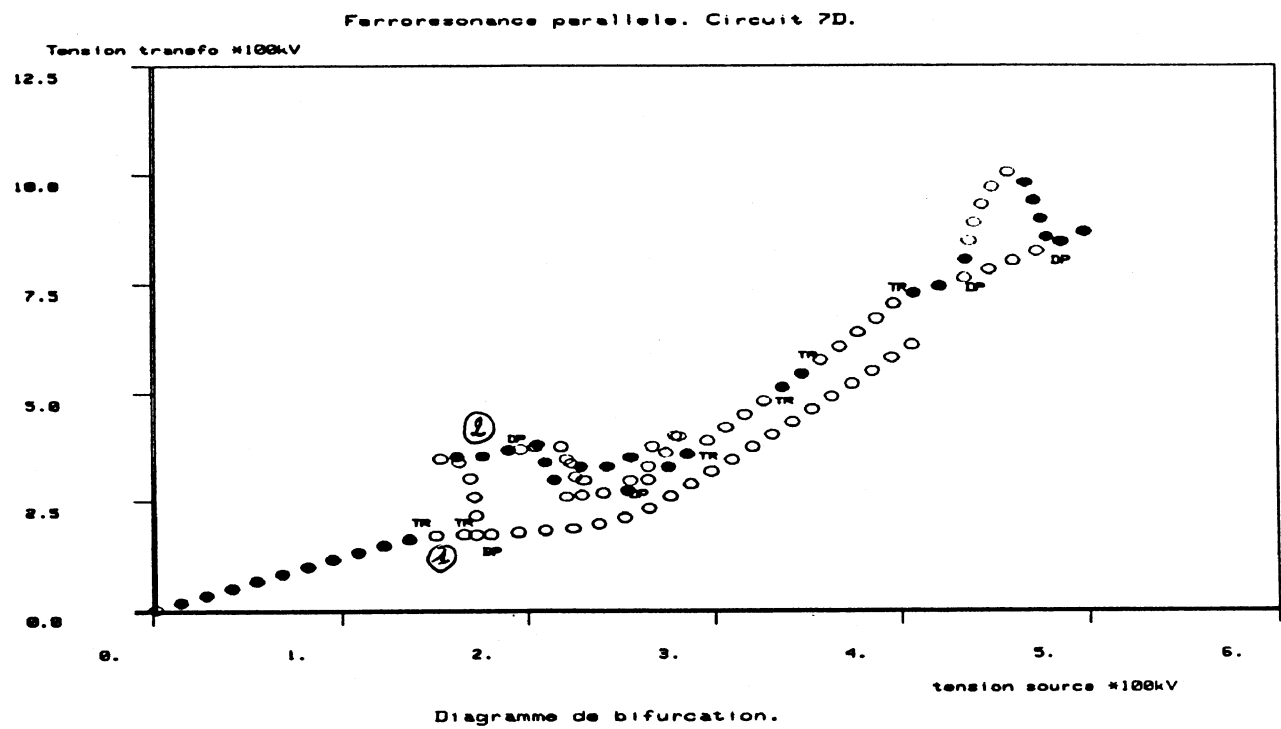


Figure 3. 11 : Diagramme de bifurcation du modèle 7D

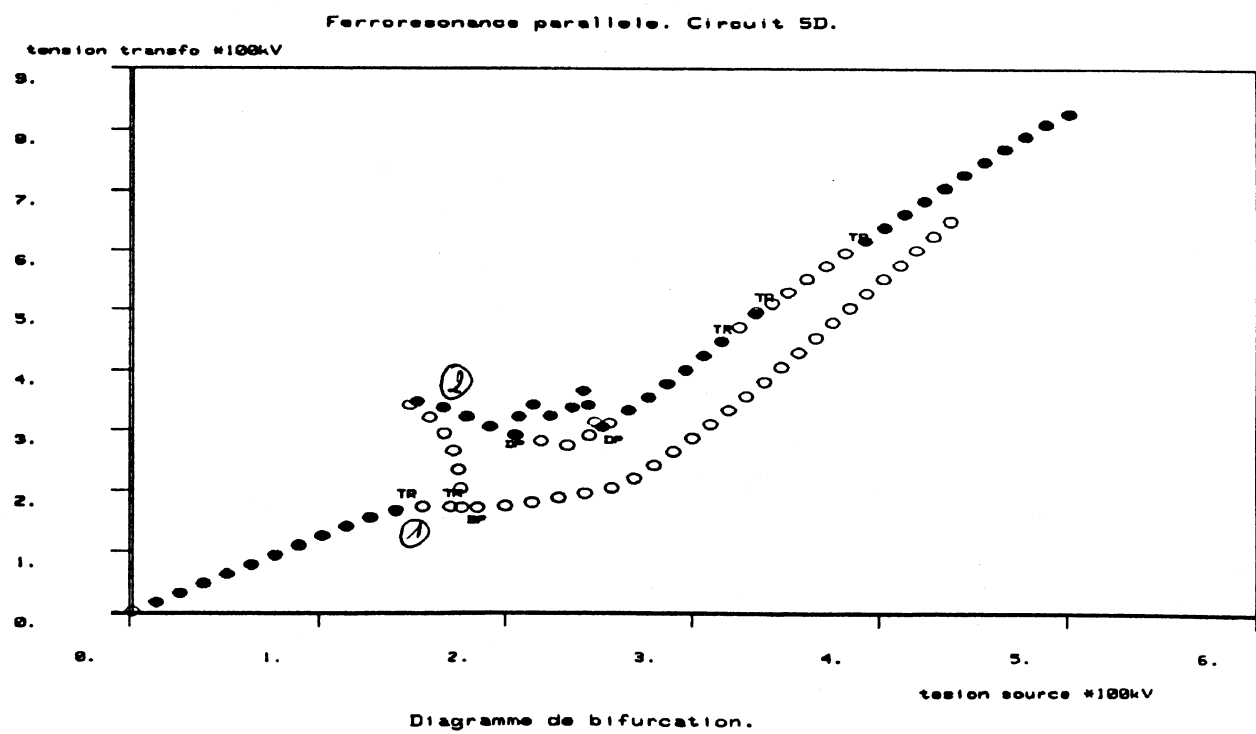


Figure 3. 12 : Diagramme de bifurcation du modèle 5D

On constate, tout d'abord, que les diagrammes de bifurcation obtenus dans les cas 8D et 7D sont quasiment identiques, ce qui semble normal, puisque, rappelons-le le passage de l'un à l'autre s'est fait à partir du calcul de l'équivalent de Thévenin. Le troisième diagramme de bifurcation (cas 5D) est, lui aussi, très semblable aux autres, même si de légères fluctuations apparaissent; elles proviennent du fait que certaines pertes ont été supprimées lors de cette dernière simplification.

D'autre part, au voisinage des quatre premiers points singuliers rencontrés, le comportement de la solution est lui aussi très proche de celui obtenu dans le cas 13D présenté antérieurement. En revanche, pour des valeurs de E plus importantes, apparaissent des nouvelles bifurcations vers le tore, et de doublement de période. Ces branches de solutions de période double ont elles aussi été déterminées.

Enfin, les représentations temporelles obtenues mettent à nouveau en évidence l'apparition de solutions riches en harmoniques deux ou trois, comme nous l'avons décrit lors de l'étude du cas 13D, bien que, dans le dernier cas (5D), l'harmonique quinze ait été remplacé par de l'harmonique neuf (et de l'harmonique dix-huit pour la branche de période double, bien entendu). Ce phénomène n'est pas physiquement expliqué.

Pour ces trois exécutions, les temps CPU ont naturellement diminué; ils sont de l'ordre de 7500 s pour l'étude 8D, 5500 s pour l'étude 7D et 2000 s pour l'étude 5D.

2.2.3. Etude du cas 3D

Rappelons que ce dernier modèle a été obtenu en effectuant une réduction d'un circuit à deux cellules (régé par un système différentiel de dimension cinq) par suppression d'une cellule et modification de l'autre (voir au chapitre I). Les caractéristiques du circuit simplifié ont été calculées de sorte que trois grandeurs physiques caractéristiques soient conservées par cette transformation; en particulier, la fréquence propre des deux modèles est la même.

Le diagramme de bifurcation obtenu est le suivant:

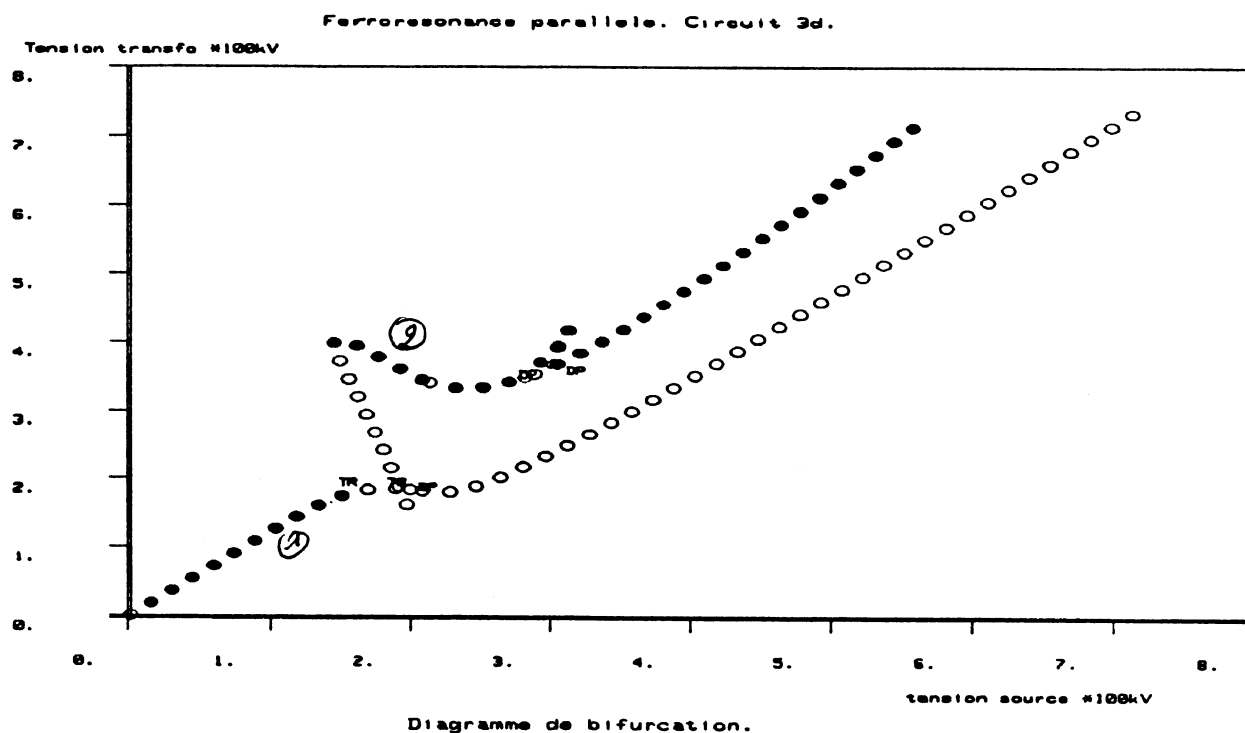


Figure 3. 13 : Diagramme de bifurcation du modèle 3D

Qualitativement, on obtient, une fois encore, le même type de diagramme. Toutefois, une légère différence apparaît sur les valeurs des tensions d'alimentation et aux bornes du transformateur, en lesquelles on rencontre les points singuliers. En particulier, l'intervalle des valeurs de E en lesquelles la solution est quasi-périodique, est plus important, tout comme la sution observée au point limite de la branche bifurquée. Tout se passe, en fait, comme si on avait supprimé certaines pertes.

Ce modèle possède l'avantage d'être le plus simple possible (nous avons vu qu'il était impossible de diminuer davantage sa dimension, sauf dans le cas où les pertes sont nulles, puisque, dans ce cas, une intégrale première existe, comme nous l'avons décrit au chapitre I), et bien représentatif du phénomène réel.

Les études temporelles font clairement apparaître cette fois les harmoniques deux et trois, et rien qu'eux:

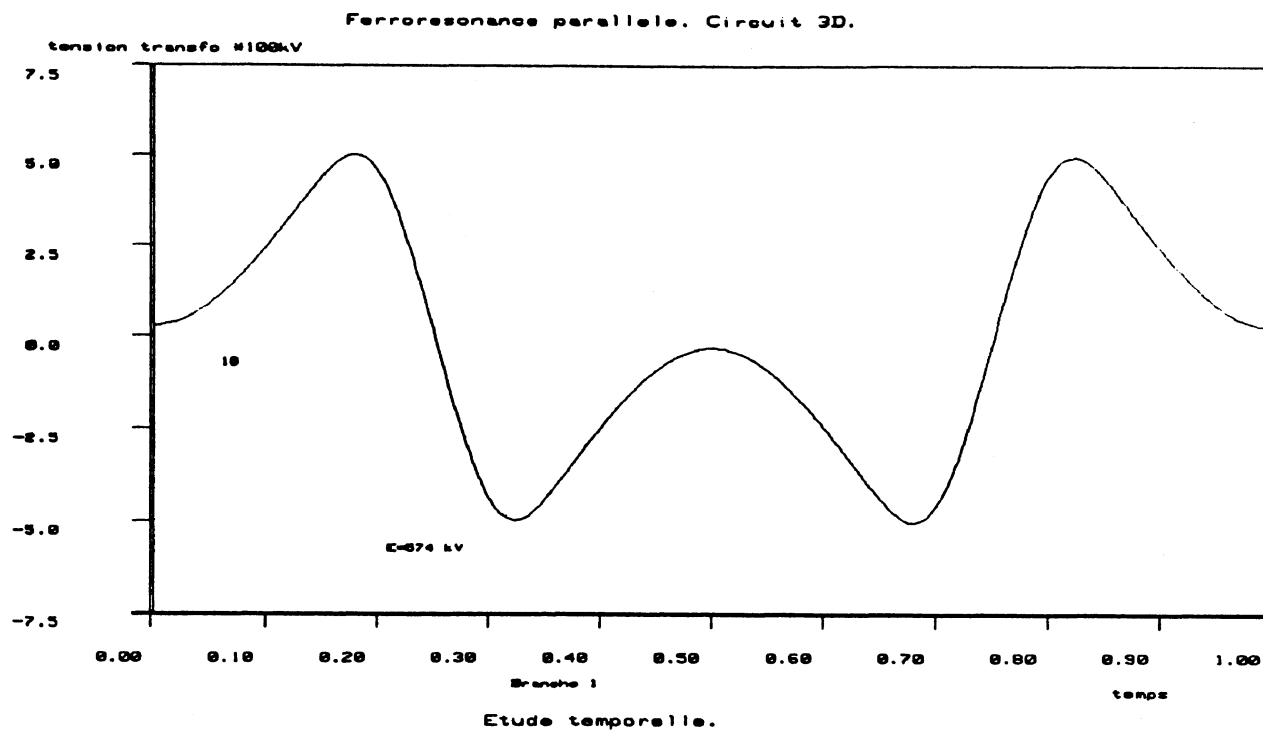


Figure 3. 14 : Solutions instables riches en harmonique 3

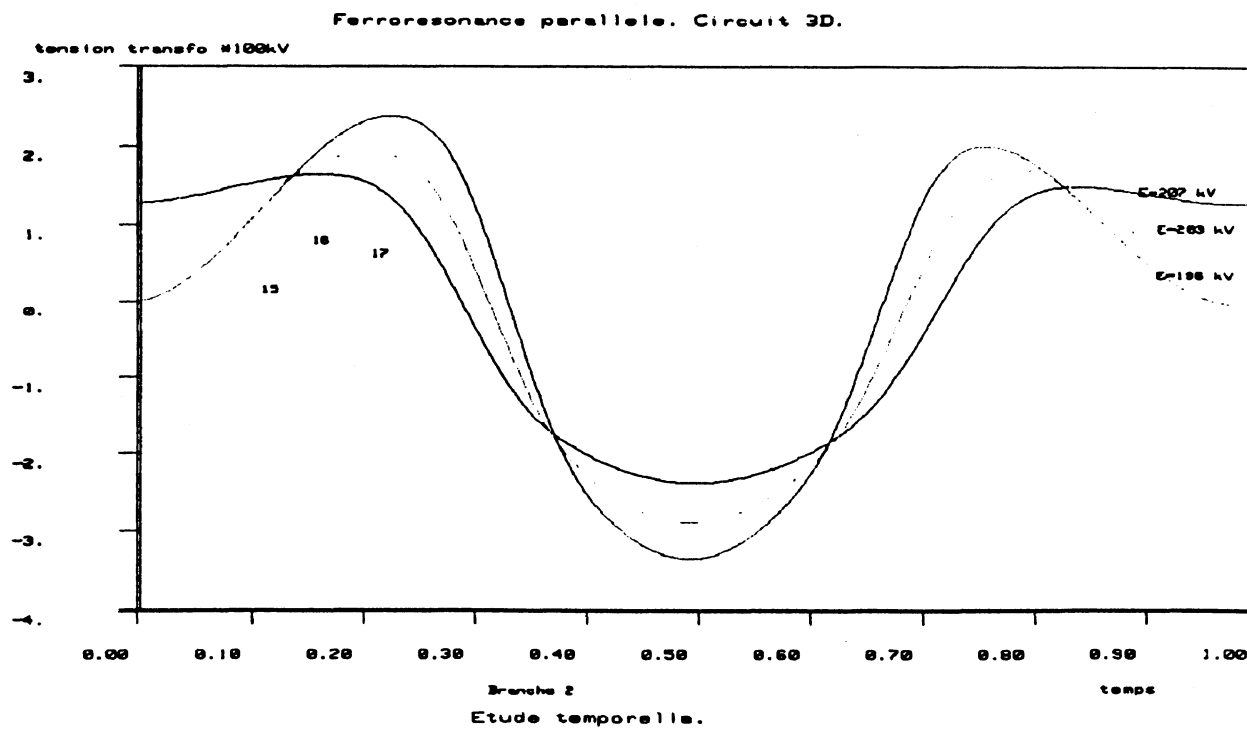


Figure 3. 15 : Solutions stables riches en harmonique 2

Le temps d'exécution pour cette étude n'est plus que de l'ordre de 1200 s.

Nous avons donc choisi de garder ce modèle pour réaliser une étude plus complète et notamment pour examiner le *comportement des points singuliers* (points limites et points de bifurcation vers le tore) dans des espaces à deux paramètres. Ces *lignes de bifurcation* nous permettent de tracer des frontières entre des zones à l'intérieur desquelles les comportements sont différents. Ainsi, pourra-t-on mettre en évidence les domaines de valeurs des différents paramètres gouvernant le modèle physique, où la solution possèdera le comportement souhaité. Il faut préciser que ces lignes de bifurcations sont longues à obtenir, d'une part parcequ'elles demandent beaucoup de calculs, et, d'autre part, car les méthodes employées convergent difficilement en de nombreux points.

Pour obtenir les lignes de bifurcation du point limite de la branche bifurquée, nous avons effectué une étude directe par BVP en partant des calculs déjà réalisés et que nous venons de présenter. En revanche, pour déterminer les limites des zones d'existence de solutions quasi-périodiques, il faut réaliser de la continuation à deux paramètres des points de bifurcation vers le tore, ce qui est actuellement impossible à réaliser avec le logiciel. C'est à cette occasion que nous avons choisi de travailler sur *l'application de premier retour de Poincaré*, ce qui nous a permis d'obtenir des points de bifurcation de Hopf à la place de points de bifurcation vers le tore, comme nous l'avons déjà mentionné.

Nous avons obtenu les parties de lignes de bifurcation suivants:

Continuation du point limite en fonction de la capacité:

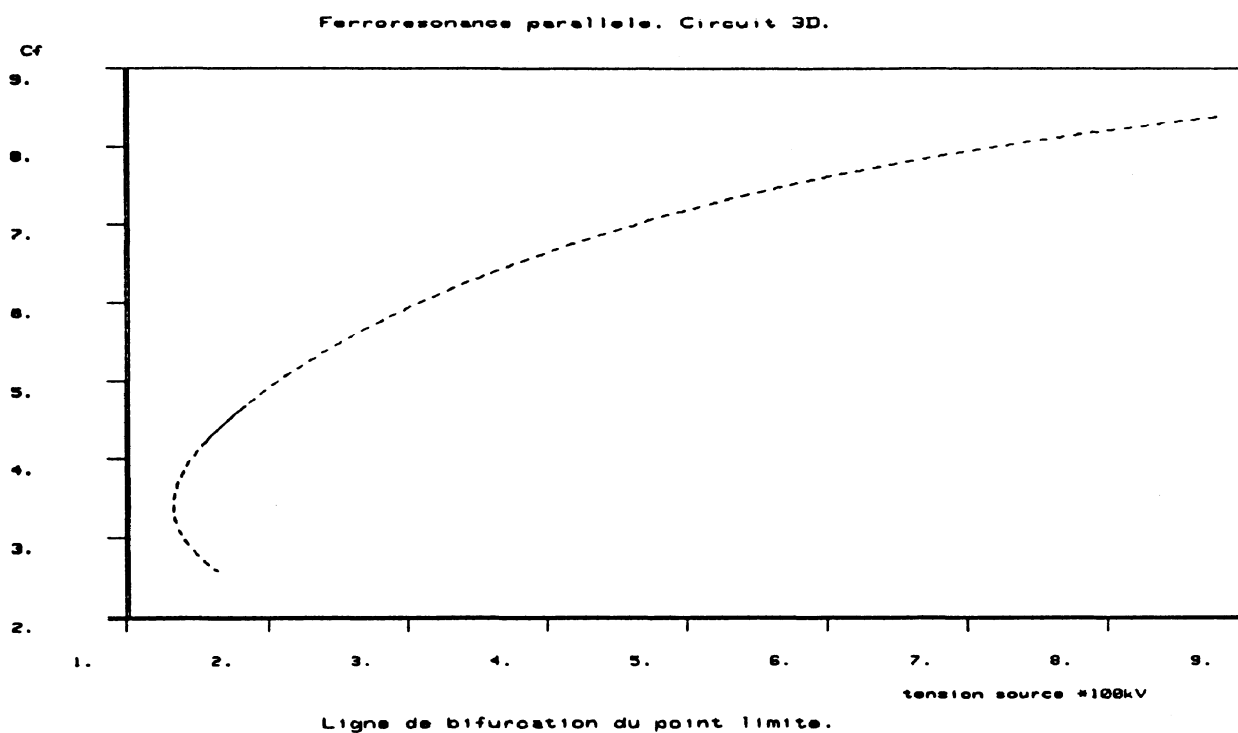


Figure 3.16 : Ligne de bifurcation du point limite

Des difficultés numériques ne nous ont pas permis de continuer cette étude pour des valeurs de la capacité inférieures; on peut remarquer néanmoins le point limite apparaissant sur cette ligne; cela permet de connaître les valeurs que peut prendre la capacité et pour lesquelles le point limite (et donc la surtension) n'apparaît pas, et ce, pour des valeurs de la tension d'alimentation couramment utilisées.

Continuation des points de bifurcation vers le tore:

On a effectué ici des continuations de points de bifurcation vers le tore en libérant tour à tour, trois paramètres: la capacité, l'inductance de ligne et le rapport de puissance du transformateur.

Dans les deux premiers cas, on obtient des lignes de bifurcation très semblables:

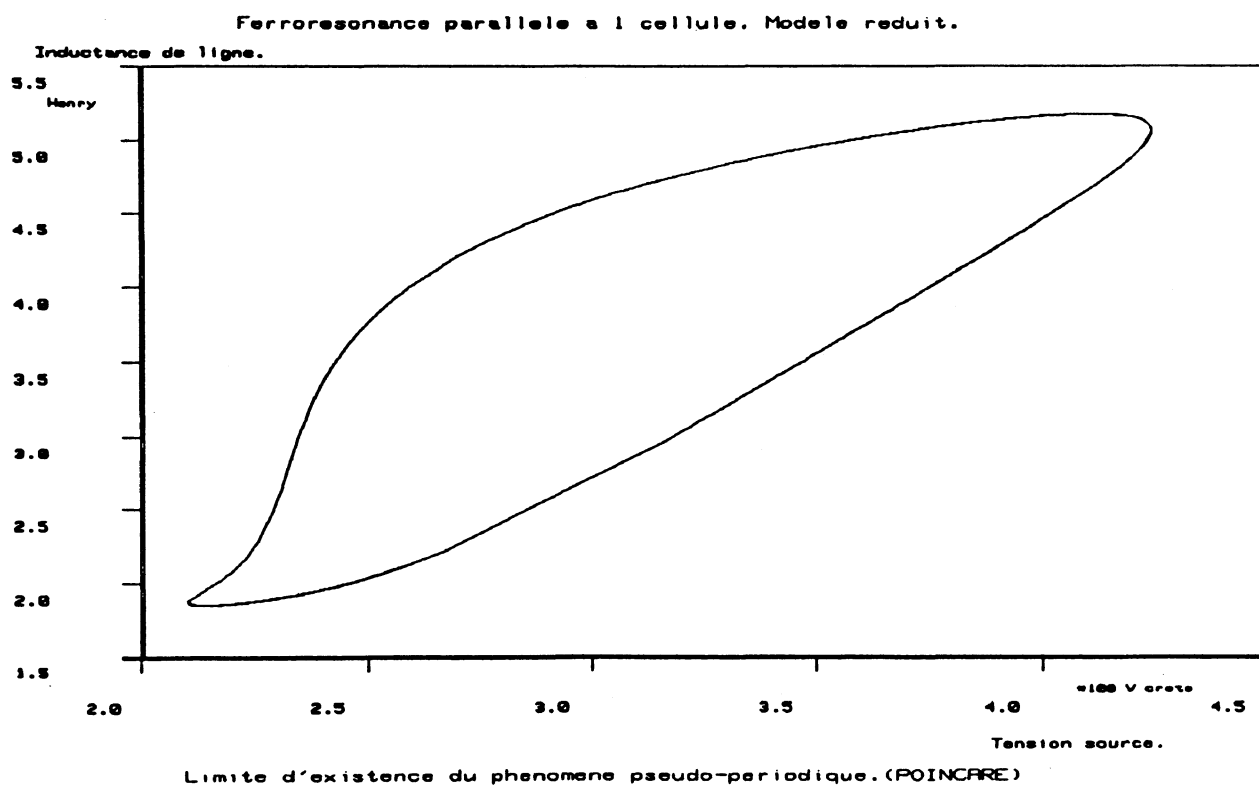


Figure 3.17 : Ligne de bifurcation en fonction de l'inductance

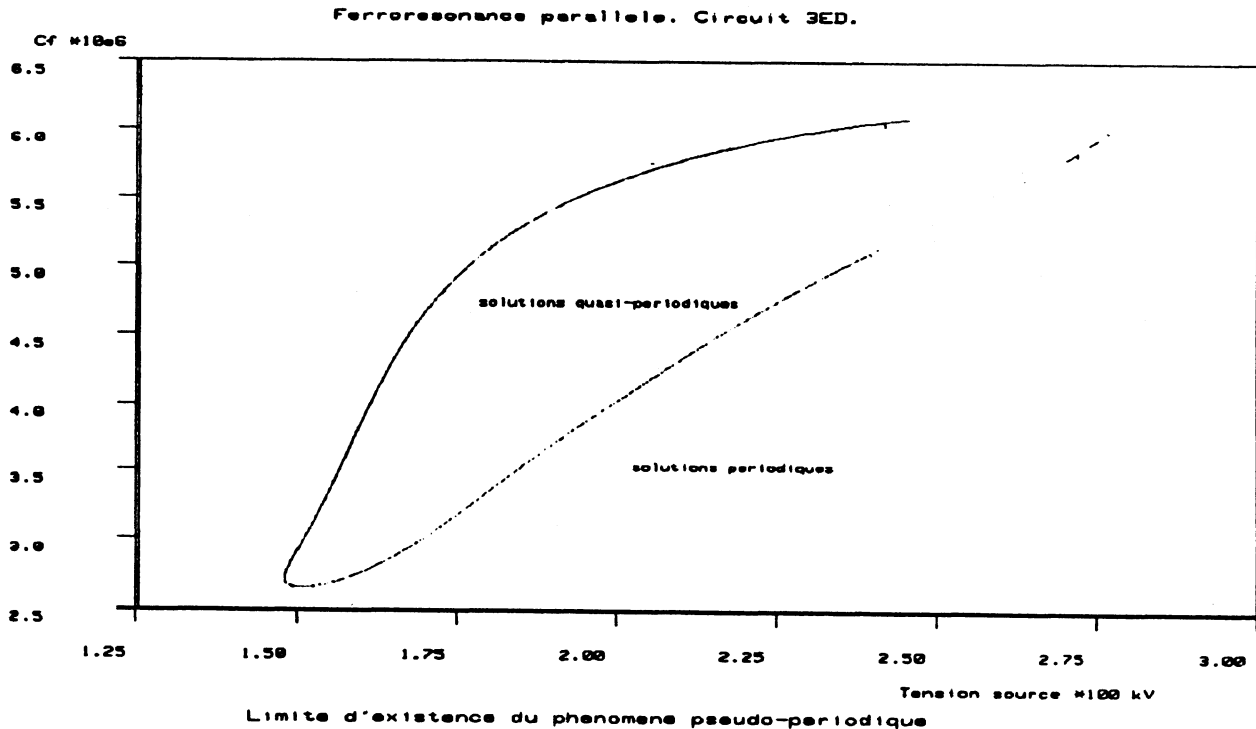


Figure 3.18 : Ligne de bifurcation en fonction de la capacité

Remarquons qu'il est normal d'obtenir des courbes fermées (quelques difficultés numériques nous ont empêché de terminer le second diagramme), puisque nous avons constaté, dans notre étude, que les points de bifurcation vers le tore apparaissent toujours par couple. Le fait que les deux schémas soient très ressemblants n'a rien d'étonnant, si on raisonne en termes de fréquence: en effet, dans la premier cas, il est intéressant de remarquer qu'aux valeurs minimale et maximale de l'inductance appartenant à la frontière, correspondent les fréquences:

$$f_{\max} = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_{\min} \times C}} = 95 \text{ Hz} \text{ et } f_{\min} = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_{\max} \times C}} = 57 \text{ Hz}$$

ce qui indique que le domaine d'existence des solutions quasi-périodiques est limité en fréquence, entre 50 Hz et 100 Hz, en accord avec l'intuition physique.

Naturellement, la fréquence variant de la même façon en fonction de la capacité que de l'inductance, on obtient un domaine similaire quand on libère la capacité.

On introduit, dans la caractéristique modélisant la saturation du transformateur, un rapport de puissance R_p en remplaçant $f(\varphi)$ par $f(\varphi) \cdot R_p$.

En libérant ce nouveau paramètre R_p , on obtient la ligne de bifurcation (incomplète) suivante:

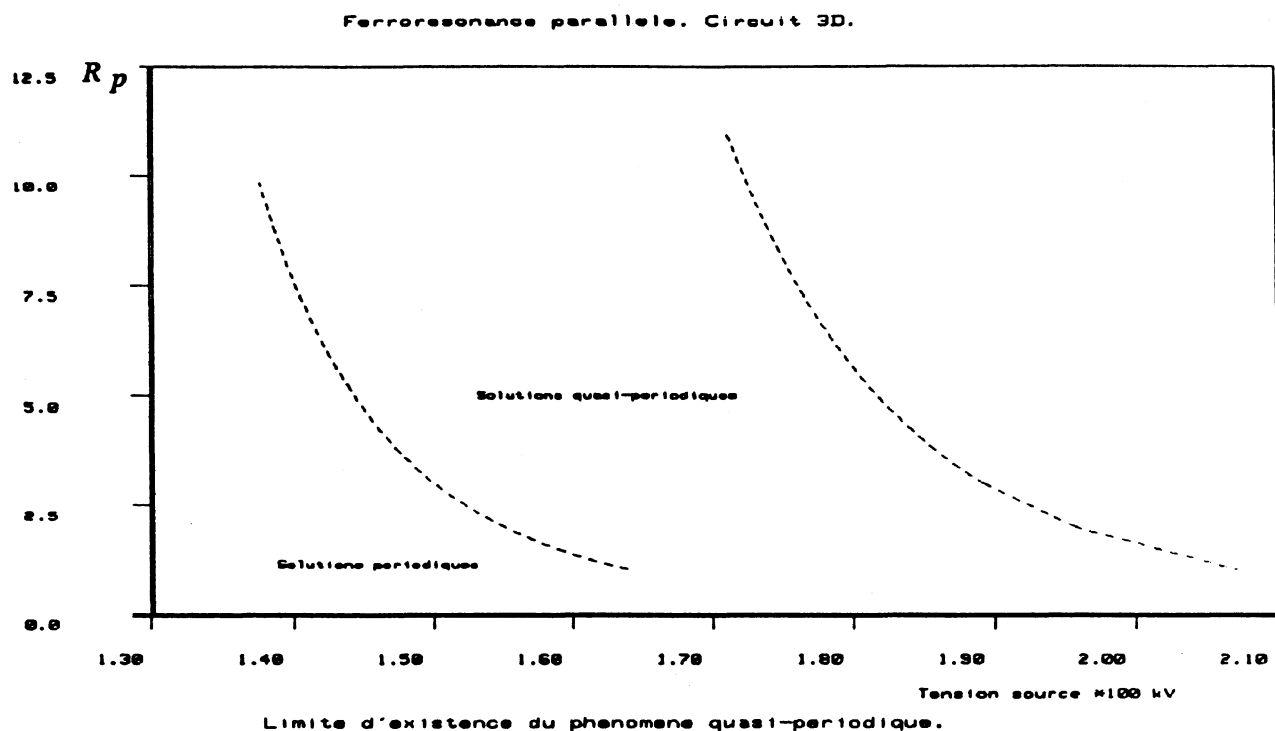


Figure 3.19 : Ligne de bifurcation en fonction du rapport de puissance

2. 3. Etude du cas de la ligne longue; influence du nombre de cellules

Pour cette étude, nous avons choisi le modèle de la ligne longue placée entre un générateur de tension sinusoïdale de résistance R_a , d'inductance L_a d'une part et d'autre part d'un transformateur dont on a considéré

- la résistance de pertes parallèle ρ_t ,
- la résistance de pertes série σ
- l'inductance de pertes l_t
- la caractéristique non linéaire $i = f(\varphi) = a\varphi + b\varphi^{2m+1}$

Les équations sont les suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} (L+L_a) \frac{di}{dt} = E \cos(\omega t) - v - (R+R_a) i \\ C \frac{dv}{dt} = i - v \frac{1+\rho_t G}{\rho_t} - f(\varphi) \\ \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v - \sigma f(\varphi)}{1 + l_t \frac{df(\varphi)}{d\varphi}} \end{array} \right.$$

La ligne, de longueur λ , est modélisée par une seule cellule en Π puis ensuite par deux. Le but de cette étude est d'examiner numériquement l'influence du nombre de cellules, et, sur le modèle à une cellule, l'influence des paramètres longueur de ligne λ et impédance de la machine L_a .

On choisit toujours, comme premier paramètre de bifurcation, l'amplitude de la tension d'alimentation.

Les valeurs des paramètres du circuit ont tout d'abord été fixées de la façon suivante (R, L, G, C sont les caractéristiques de la cellule modélisant la ligne):

$$L = 1,3 \cdot 10^{-3} \times \lambda, \quad R = 6 \cdot 10^{-2} \times \lambda, \quad C = 9 \cdot 10^{-9} \times \lambda, \quad G = 10^{-10} \times \lambda$$

$$L_a = 1,5, \quad R_a = 16,56$$

$$\sigma = 0,116, \quad l_t = 0,01, \quad \rho_t = 48,21 \cdot 10^3$$

$$a = 1,84 \cdot 10^{-3}, \quad b = 61, \quad m = 6, \quad l = 300$$

Comparaison de l'étude à une cellule avec l'étude à deux cellules:

Les diagrammes de bifurcation obtenus dans les deux cas sont les suivants:

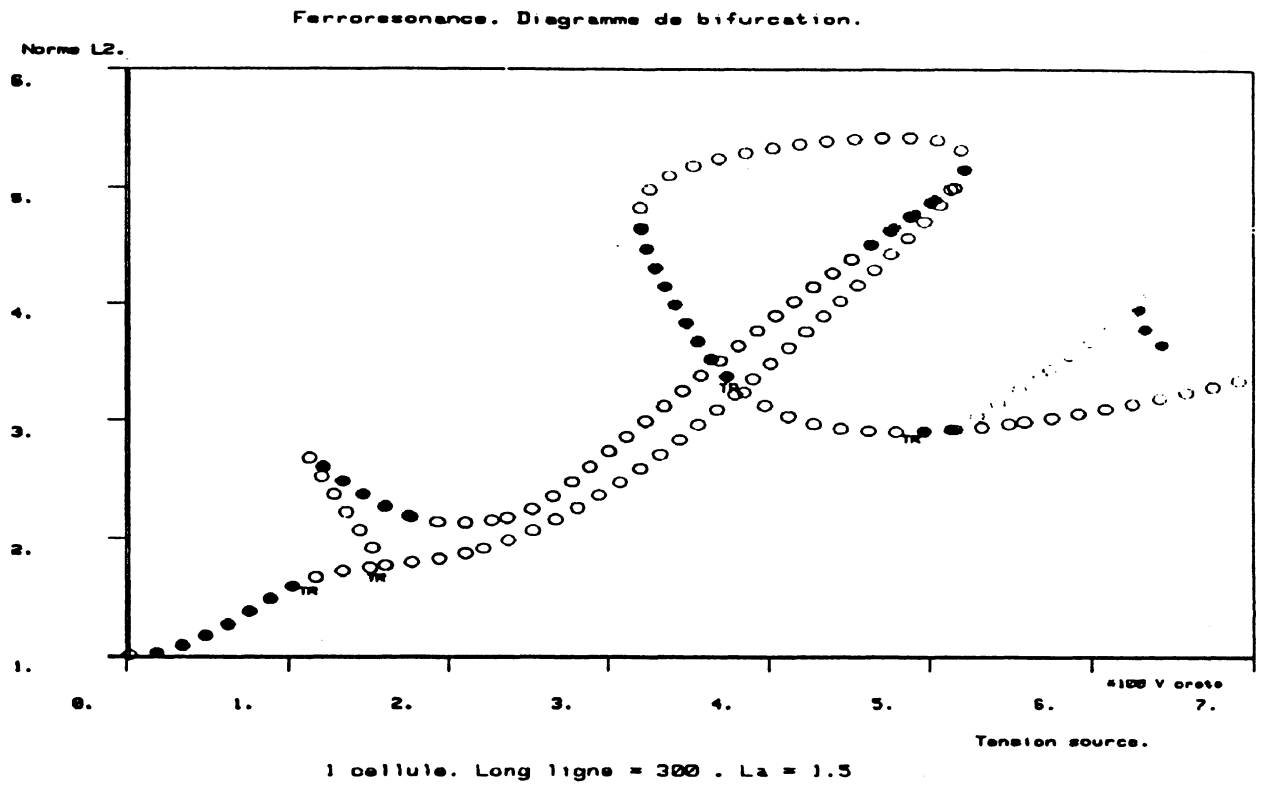


Figure 3. 20 : Diagramme de bifurcation. Une cellule

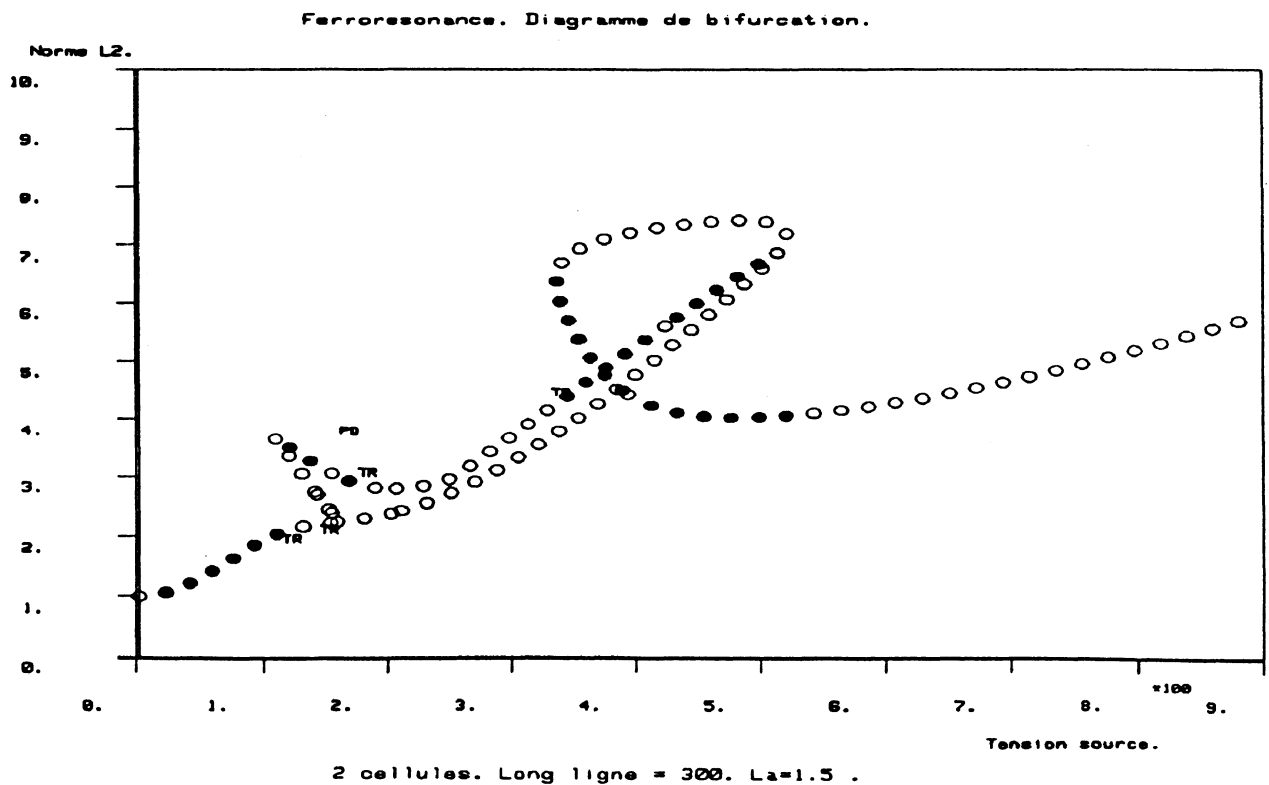


Figure 3. 21 : Diagramme de bifurcation. Deux cellules

Une fois encore, on obtient le même type de diagramme de bifurcation que lors des études précédentes. En comparant ces deux études, on constate que:

- Des points de bifurcation de doublement de période apparaissent sur le modèle à deux cellules alors qu'ils n'existaient pas sur le modèle à une seule cellule.
- Les surtensions sont nettement plus importantes dans le cas du modèle à deux cellules
- Les points singuliers apparaissent pour des valeurs de la tension source légèrement plus importantes dans le cas du modèle à deux cellules (mais cela est très faible).

Tout se passe comme si les pertes (plus concentrées) jouaient un rôle plus important sur le modèle à une seule cellule.

On constate donc que, pour l'étude du comportement des points singuliers à deux paramètres, le modèle à une seule cellule suffit puisque la différence de valeurs de la tension en lesquels apparaissent ces points, entre les deux modèles, est très faible. En revanche, il faudra moins se fier aux valeurs des surtensions obtenues.

Etude en fonction de la longueur de la ligne:

Dans le plan à deux paramètres (tension d'alimentation, longueur de ligne), une partie de la ligne de bifurcation a été obtenue, par continuation du point limite. Pour des raisons de difficultés numériques et de temps de calcul trop importants, seule une partie de la ligne a été représentée:

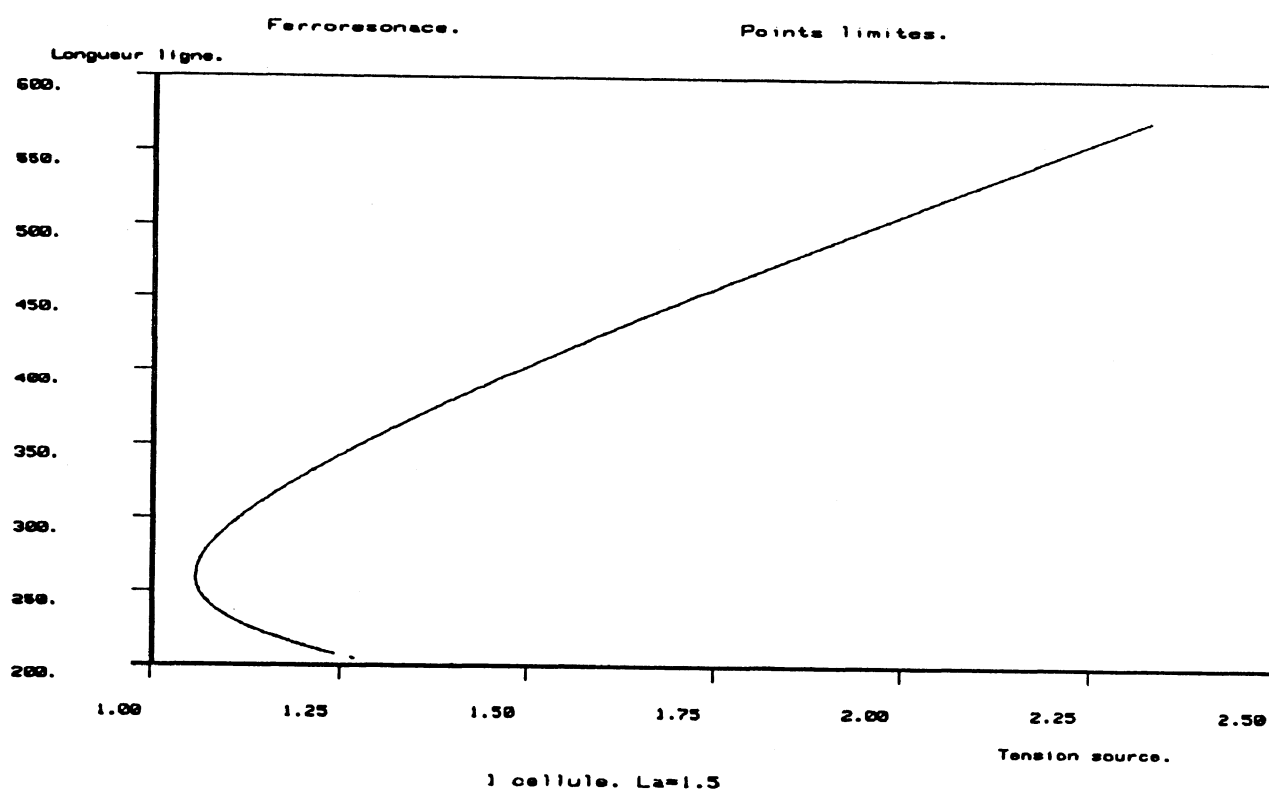


Figure 3. 22 : Ligne de bifurcation du point limite

Il découle de cette représentation, qu'à partir d'une certaine valeur critique de la longueur de la ligne (250 km), les valeurs de la tension d'alimentation en lesquelles apparaissent les points limites, varient de façon quasi-proportionnelle avec la longueur de la ligne. Mais, au voisinage de cette zone critique, le point limite apparaît pour des valeurs de la tension d'alimentation proches de celles couramment utilisées, ce qui permet d'expliquer les problèmes effectivement rencontrés.

Nous avons alors, au vue de cette ligne de bifurcation, étudié le comportement des solutions du même modèle pour lequel on a choisi des longueurs de lignes inférieures (figures 3.23 et 3.24), confirmant bien l'apparition du point limite pour des valeurs de la tension source plus élevées. On peut remarquer, d'autre part, que les surtensions en ces points limites ont fortement diminué; enfin, il est intéressant de noter, sur la figure 3. 20 la disparition des points de bifurcation vers le tore.

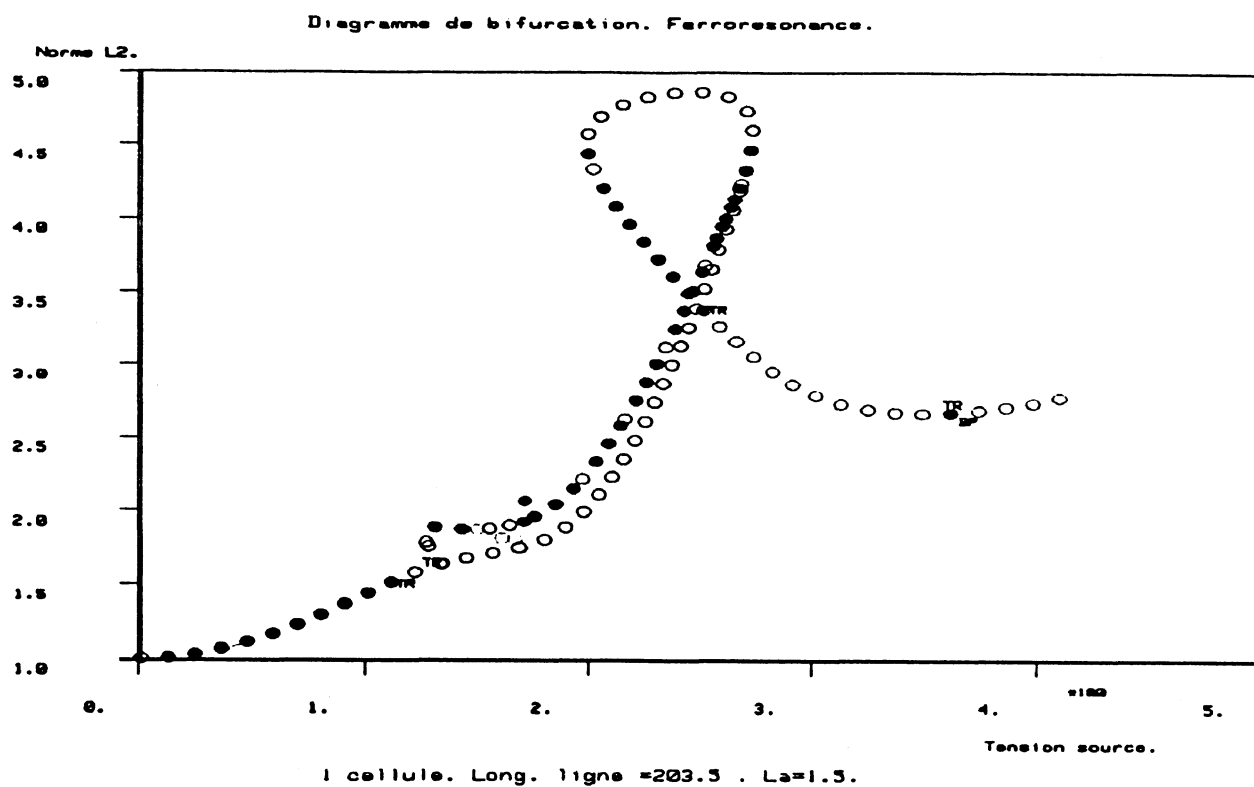


Figure 3. 23 : Diagramme de bifurcation; longueur de ligne=203,5

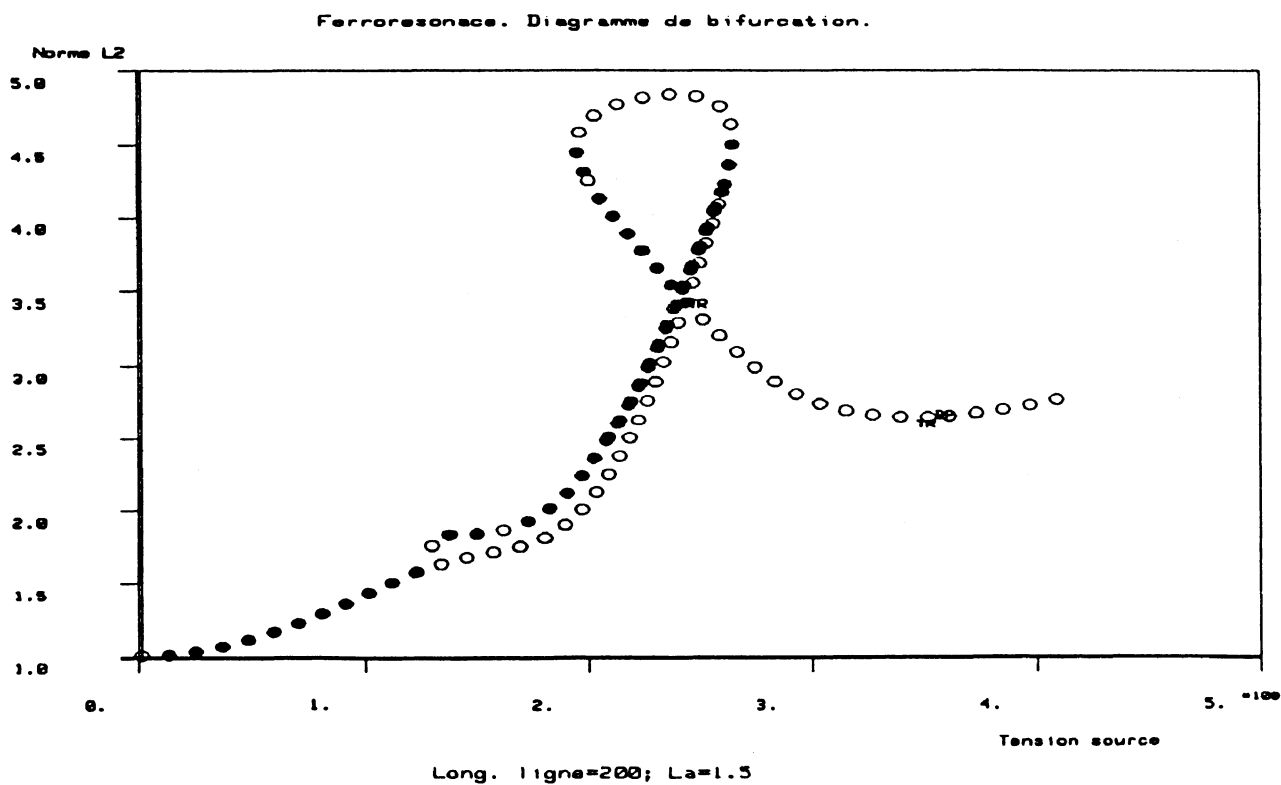


Figure 3. 24 : Diagramme de bifurcation; longueur de ligne=200

Etude en fonction de la valeur de l'impédance de la machine:

Nous avons construit de même une partie de la ligne de bifurcation, toujours du point limite, mais cette fois, dans le plan tension source - impédance de la machine.

Nous obtenons la ligne de bifurcation:

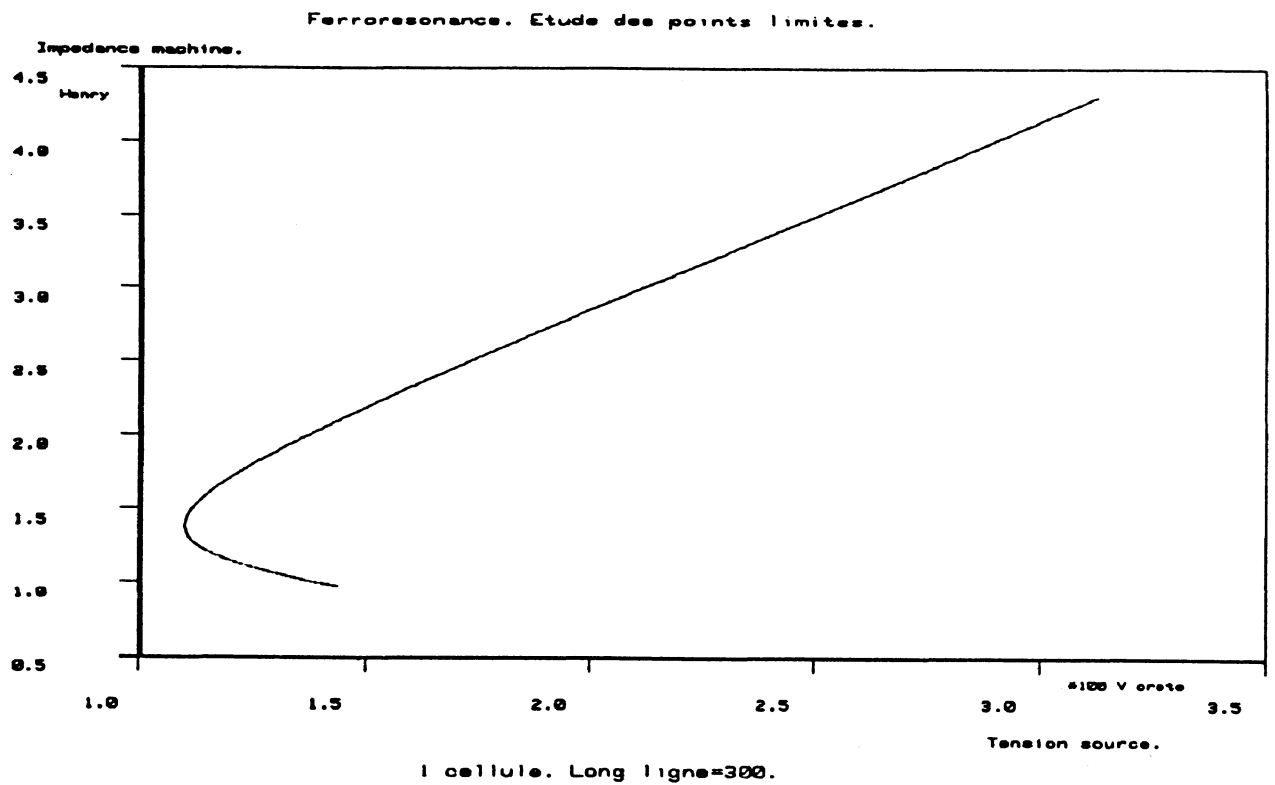


Figure 3. 25 : Ligne de bifurcation du point limite

A nouveau, il nous a semblé intéressant de construire le diagramme de bifurcation obtenu pour une valeur de l'impédance de la machine nettement plus faible:

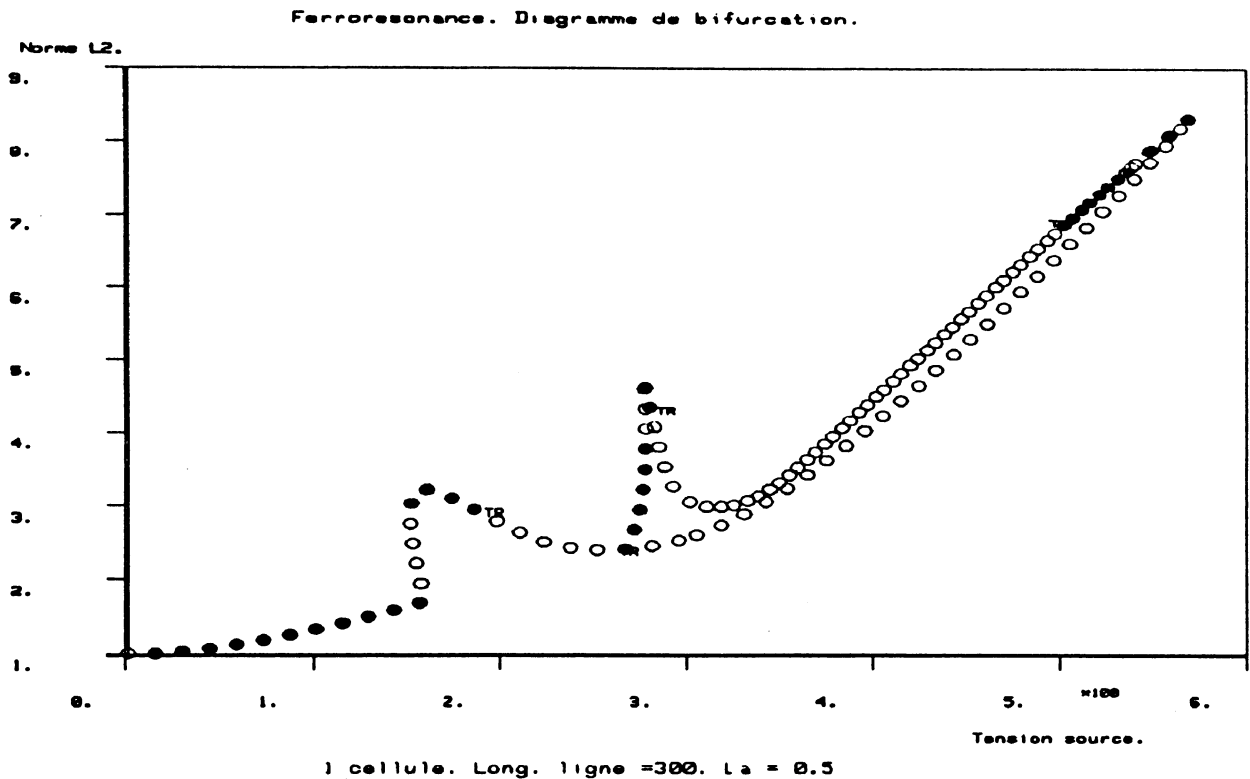


Figure 3. 26 : Diagramme de bifurcation; $L_a=0,5$

On constate que le point limite obtenu précédemment a disparu (même si d'autres points limites sont apparus), comme il l'était indiqué sur la ligne de bifurcation. Ce diagramme de bifurcation est différent de ceux que nous avons l'habitude d'obtenir: avant le point de bifurcation fourche, on obtient une courbe en S, comme dans le cas de la ferro-résonance série; les bifurcations vers le tore sont bien conservées, mais décalées.

Toujours en fonction de la valeur de l'impédance de la machine, en considérant l'application de Poincaré du système, nous avons construit une partie de ligne de bifurcation par continuation du premier point de bifurcation vers le tore. Cette frontière (qui doit être fermée, les points de bifurcation vers le tore apparaissant par couple dans le modèle que nous étudions), délimite les zones de solutions quasi-périodiques de celles où les solutions sont simplement périodiques:

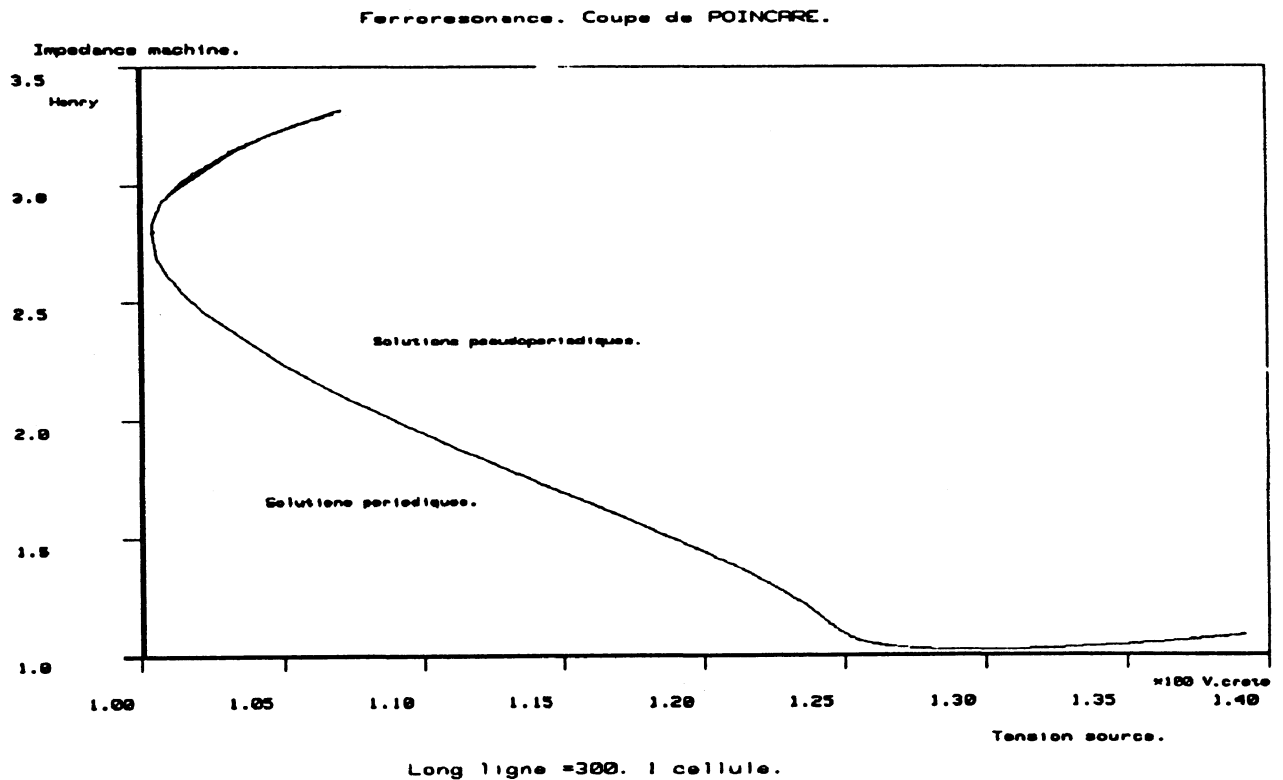


Figure 3. 27 : Ligne de bifurcation de points de bifurcation vers le tore

On constate que pour les valeurs de L_a inférieures à une valeur critique proche de un, les points de bifurcation vers le tore doivent disparaître, tout comme ils avaient disparu pour une valeur particulière de la longueur de ligne.

Enfin, pour les valeurs $L_a=0,5$ et $\lambda=200$, qui nous semblaient intéressantes, on obtient le diagramme de bifurcation suivant:

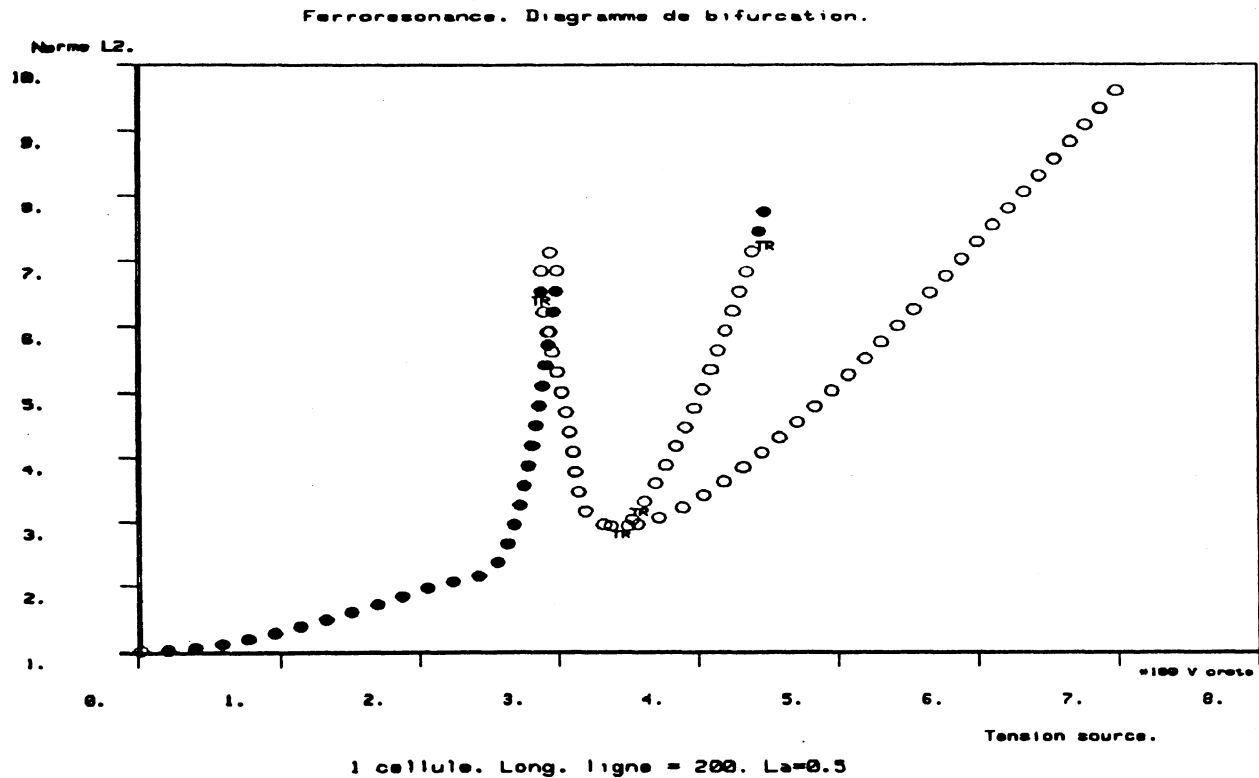


Figure 3.28 : Diagramme de bifurcation; $L_a=0,5$; $\lambda=200$

Remarque : On a aussi réalisé une étude en prenant $L_a = 1,1$ et $\lambda = 300$; le diagramme de bifurcation obtenu est toujours du même type, mais dans ce cas on a obtenu une suite de branches de solutions de période double: la première branche de solutions de période double subit à son tour des bifurcations de doublement de période; si on poursuit la nouvelle branche en émanant (de période quatre fois plus grande que celle de la source cette fois), on rencontre à nouveau des points de bifurcation de doublement de période. Ce phénomène s'est répété cinq fois, jusqu'à ce qu'on ne puisse plus continuer les calculs, le nombre d'intervalles d'intégration (doublant à chaque étape) devenant trop important. Il serait intéressant d'analyser ce cas avec plus de précision, et regarder notamment si on peut rencontrer du chaos.

3. LES EXPOSANTS DE LYAPUNOV

Parallèlement, un programme Fortran a été développé, permettant de calculer les exposants de Lyapunov du modèle de dimension trois. Ce programme a initialement été réalisé par F. Jauberteau (Université d'Orsay) qui s'est particulièrement intéressé au modèle de Lorenz.

Ces exposants sont longs et numériquement difficiles à obtenir; les résultats exposés ne concernent que le cas de la dimension trois.

Par ces exposants, on a pu mettre ainsi en évidence le caractère quasi-périodique de la solution (deux exposants sont nuls) et prouver, de plus, l'absence de phénomènes chaotiques (aucun exposant n'est strictement positif). Cet article a été présenté lors du congrès IMACS-TCI'90, en septembre 1990.

PSEUDO-PERIODIC FERRORESONANT SOLUTIONS STABILITY IN POWER NETWORK
APPLICATION OF BIFURCATION THEORY AND LYAPUNOV EXPONENTS

Laure QUIVY, Christophe KIENY

ELECTRICITE DE FRANCE - Direction des Etudes et Recherches - 1 Avenue du Général de Gaulle - 92141 CLAMART Cedex - FRANCE.

ABSTRACT: This paper discusses a strange phenomenon which can affect power networks: ferroresonance. We emphasize on the description of the studied network and on the behavior and stability of the different solutions, using bifurcation and Lyapunov theory.

1. INTRODUCTION

1.1. Physical problem

Very high voltage power networks are sometimes affected by a strange phenomenon: *ferroresonance*. It can be defined as an oscillation between a non-linear reactor (generally an unloaded transformer) and capacitances (due to lines), which are fed by the sinusoidal voltage. The main property characterizing ferroresonance is the existence of several permanent states for the same circuit, depending only on initial conditions. The type of solution can also suddenly change when a circuit parameter, such as supply voltage, is continuously modified (jump phenomenon). The nature of those different states is very diversified: the "normal state", generally the one expected by the network operator, has a low amplitude; the fundamental ferroresonant state has a high amplitude and the signals are highly distorted. The subharmonic state, contrary to the fundamental state, has a period which is not equal to the supply's period but is rather a multiple of this period.

The main problem with ferroresonance is that an overcurrent, or an overvoltage, is generated; this is dangerous for the equipment, which is why we are interested in studying it, and finding methods enabling us to understand and predict the phenomenon.

Risky situations and the corresponding phenomena are well known (1). But we recently observed a type of phenomenon which, to our knowledge, has never been reported in the literature. Moreover, it appeared in an unusual type of circuit for ferroresonance: a test made to simulate service restoration following a black-out. We had to refeed the transformers (two 1080-MVA machines) of a remote power generating station by hydroelectric generator (90 MW rated power). The shunt capacitance of the 360-km line connecting the supply to the non-linear load explained the occurrence of a

ferroresonance phenomenon. More precisely, the circuit's first natural frequency (neglecting the non-linear characteristic) was near 85 Hz; i.e., below the second harmonic of the industrial frequency.

The signal recorded during the test shows a very low frequency modulation of a 50 Hz carrier (Fig. 1).

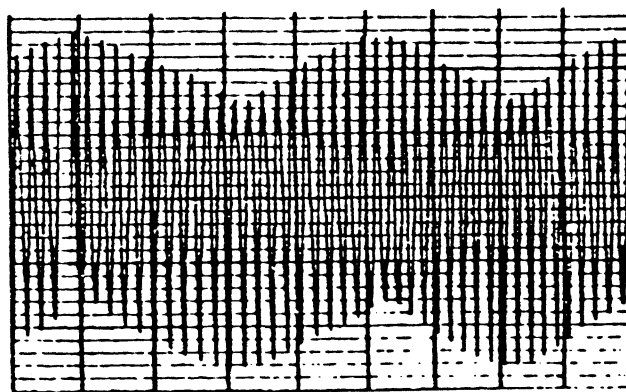


FIGURE 1
Voltage measurement during the field test on
the 400 kV network

Is this a new sub-harmonic phenomenon with a long period or a fundamentally different phenomenon which is *non-periodic*? Our work was aimed at providing a clear answer to this question. In fact, the existence of a non-periodic phenomenon in a sinusoidally supplied circuit is surprising, but, as will be proved here, can exist.

1.2. Mathematical and numerical studies

The first step, represented the circuit on a single phase reduced scale mock-up where the phenomenon could be reproduced. Using signal analysis methods we determined that the

phenomenon was non-periodic; however, due to uncertain measurements, there was still some doubt.

We were therefore obliged to work with a model and use mathematical theory to reach a valid conclusion.

The circuit is modeled by a non-linear differential equation with several parameters. The behavior of the different solutions is studied, using the bifurcation theory briefly described in section III. This theory allows us to justify the existence of more than one solution (stable or unstable) in one circuit for our set of parameters. We have used several mathematical and numerical methods concerning this kind of problem. To find a permanent solution for different values of the parameter, the *continuation method* is used. Ensuring the stability of solutions is a more delicate matter. For a linear system, the eigenvalues of a matrix are sufficient; for a periodical system, Floquet theory is applied (described below). For our problem, we show that a permanent periodic solution loses its stability; in addition, the bifurcation theory tells us that the new stable state appearing in this case has a *pseudo-periodical* behavior. This bifurcation is called *bifurcation to an invariant torus*. Floquet theory is inadequate; Lyapunov theory, however, can be applied.

This paper describes how Lyapunov numbers can describe this kind of bifurcation. They provide information about the change in behavior and specify the stable nature of solutions after bifurcation to a invariant torus. We therefore know that new solutions do not show chaotic behavior. This paper defines the Lyapunov numbers and describes how to calculate it.

2. EXPRESSING THE CIRCUIT IN MATHEMATICAL FORM

As usually occurs in the electrotechnical field, the network is a three-phase network; to simplify the study, we have limited ourself to the single phase case. Hence, the schematic is simplified as much as possible to highlight the characteristic elements which cause the appearance of ferroresonance.

The network contains lines with distributed parameters governed by the telegraphic equation. Limit conditions are imposed by a voltage source with internal impedance on one side and by the non-linear element on the other side.

We must therefore study linear partial differential equations with parameters, but limit conditions are non-linear due to the presence of the transformer's saturable inductance.

The non-linear element in the network represents the transformers, which contain ferromagnetic material. We know that this material, is the seat of hysteresis phenomena,

but we ignore these phenomena in order to simplify the model. The saturation is modeled by a bijective function $i = f(\Phi)$; results have justified this choice. On the other hand, we take into account the transformer's losses because of the sensitivity of ferroresonance and resonance, in general. Therefore, we add resistances in series and in parallel with the inductance, showing Joule and iron losses respectively.

The saturation function $i = f(\Phi)$, where i is the inductance current and Φ , its flux, is modeled by a polynomial function with an odd power:

$$i = f(\Phi) = a\Phi + b\Phi^{2n+1}$$

where a, b are positive constantes

This representation is very simple. Because of the high saturation level of the transformer, we have modified the characteristic in the high saturation area by adding low linear inductance in series with the non-linear element. These elements are shown in Figure 2.

We know that the bifurcation theory is correct framework to explain the phenomenon under discussion. To use it we will have to model our system using an ordinary differential equation and then discretize in space the telegraphic equation.

Initially we consider the simple case where the discretization in space is made with one step, and we try to find, numerically, the already observed phenomenon.

We thus obtain the following three dimensional non-linear ordinary, differential system:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{v - r_1 f(\Phi)}{1 + L_s \frac{df}{d\Phi}} \\ \frac{di}{dt} = \frac{1}{L} (E \cos(\omega t) - Ri - v) \\ \frac{dv}{dt} = \frac{1}{C} (i - \frac{v}{R_0} - f(\Phi)) \end{cases}$$

Naturally, non-linearity comes from the term $f(\Phi)$. Note that the system depends on parameters such as E, L, C, R , etc.

This model shows an electrical network placed between a sinusoidal voltage source and non-linear inductance.

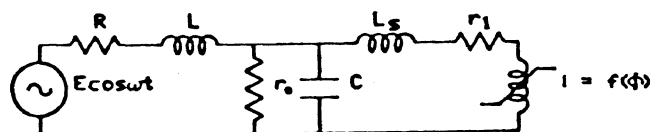


FIGURE 2
Electrical network used in the modelization

The other impedance - the generator's internal impedance - is included in the discrete model.

It is possible to simulate this operating schematic on a reduced scale model or with the EMTP program (2). Results for EMTP are shown in figure 3. The observed phenomenon thus seems to be non-periodic. To really justify this fact, however, we must use theoretical results given by mathematical theorems. Related numerical methods prove the pseudo-periodic character of the phenomenon.

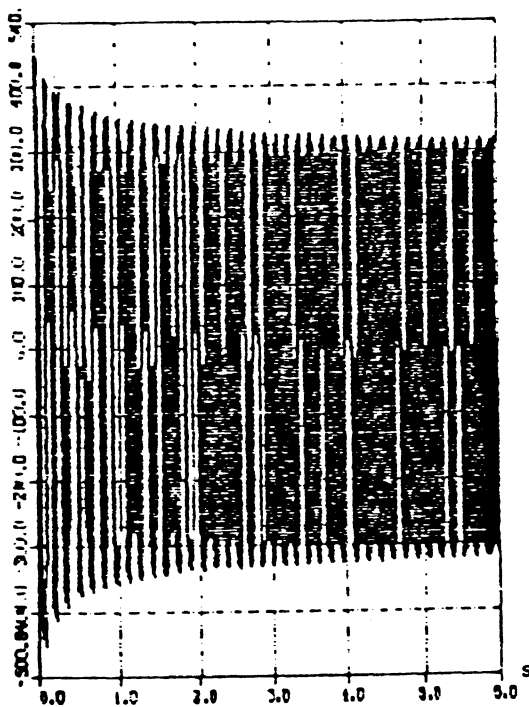


FIGURE 3
EMTP Time simulation ($E = 265$ V)

3. GENERAL MATHEMATICAL ANALYSIS

3.1. Non-linear dynamical system

The general problem is the study of a non-linear dynamical system depending on parameters. Our aim is to find solutions and describe their behavior or stability. A number of similar works in different scientific fields have recently been studied using bifurcation theory. For example, Van de Pol and Duffing equations are already known; Lorenz has shown the existence of chaotic solutions for his meteorological model ((3), (4)).

Based on this, we have attempted to apply the bifurcation theory to describe the nature of different ferroresonance solutions. For instance, an intuitive approach to a bifurcation may be used. As mentioned, the circuit is represented by a differential system forced by the term $E \cos \omega t$. In the case of small flux (quasi linearity of equations), this

term gives rise to a unique periodical solution with the period $2\pi/\omega$. When the amplitude of the voltage increase, other type of solutions may appear. This kind of problem should be tested by the bifurcation theory, in order to know the number of possible solutions.

Another key point of this study concerns stability of solutions; only some of the theoretically existing solutions will take place in reality, whereas the other solutions are just transiently maintained i.e., they are unstable.

3.2. Bifurcation theory

Changing of a parameter (e.g., supply voltage) can cause significant modifications in a solution's behavior: a stable solution can become unstable and give rise to a new solution after transient state extinction. This is a bifurcation. The critical parameter value at which a change of solution appears, is called a *bifurcation point*. One of the most important results of this theory is that the different kinds of bifurcations are known and indexed.

This section reviews different bifurcations, particularly bifurcation to an invariant torus as observed in the present case.

Let μ be the parameter, and μ_0 the critical value at which a bifurcation appears.

Following are some examples of bifurcations involving periodic solutions.

Hopf bifurcation :

$\mu < \mu_0$: a stationary stable solution

$\mu > \mu_0$: the stable solution becomes unstable and a periodical stable solution arises.

Limit point bifurcation :

$\mu < \mu_0$: no solution

$\mu > \mu_0$: two periodic solutions: one is stable, and the other is unstable

Pitchfork bifurcation :

$\mu < \mu_0$: one periodic stable solution

$\mu > \mu_0$: the stable solution become unstable and gives rise to 2 stable periodic solutions

Bifurcation to an invariant torus (three dim. unless)

$\mu < \mu_0$: just one periodical solution (stable)

$\mu > \mu_0$: the stable solution becomes unstable and a non-periodic stable solution arises. We therefore obtain a quasi or pseudo-periodic solution. That means that the first period stays in the spectrum, but another, different from the first, arises; there two periods are incommensurable.

The goal of numerical analysis is to verify that the phenomenon observed for the model is, in fact, this kind of bifurcation.

3.3. Solution stability

The appearance and disappearance of solutions are often accompanied by a change in the solution's behavior. A solution for which a small disturbance at a given time does not change the final solution is called a stable solution; it can become unstable or vice versa. No universal definition of this concept exists, and we can find many definitions in mathematical literature (see (5)).

Here is the notion stability as defined by Lyapunov.

Definition:

A solution $x(t)$ for a differential system is said to be *stable in terms of Lyapunov*.

If, for a given $\epsilon > 0$, we can find $\delta = \delta(\epsilon)$ so that for any other solution $y(t)$ of the system,

we have $|x(t_0) - y(t_0)| < \delta$ for all $t_0 > 0$,

then $|x(t) - y(t)| < \epsilon$ for $t \in [t_0, \infty[$.

For a linear system in $\mathbb{R}^n$

$$(3.3.1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = A x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

where A matrix with constant coefficients, x et x_0 vectors in $\mathbb{R}^n$.

Stability analysis is based on spectrum values of A .

Eigenvalues of A are enough to give the general nature of solutions:

If at least one real part of eigenvalues is positive, then the solution is unstable.

If all the real parts of eigenvalues are negative, then the solution is stable.

4. MATHEMATICAL AND NUMERICAL METHODS

4.1. Continuations method

The goal is to study the asymptotic behavior of solutions for different parameter values. Theory says that *bifurcation diagrams* (modul of the asymptotic solution depending on parameter) contain a continuous line called a bifurcation curve, which is not necessarily a function.

With the continuation method we can follow a solution, changing the value of the bifurcation parameter continuously instead of searching for different solutions according to a discrete set of parameter values.

If we consider many parameter values, the initial conditions for each of them must be known to use the iterative method of resolution; on the other hand, the continuation method guaranties detection of all characteristic points as limit points or bifurcation points.

The continuation method used here, also called *pseudo arc length*, was developed by Keller (6).

Let a differential system with parameters

$$(4.1.1) \quad \frac{dx}{dt} = F(x, t, \lambda)$$

with a condition on the solution, for example :

$$x(0) = x(T).$$

Assume that a solution $x_0(t)$ of (4.1.1) is known according to $\lambda = \lambda_0$.

Therefore look for a solution according to $\lambda_0 + \delta\lambda$; where $\delta\lambda$ is a small disturbance given to λ . The iterative method is used to solve the problem, with x_0 is the initial estimate. When a singular point exists, for a given value the jacobian vanishes. In consequence (4.1.1) cannot be solved for this value. We want to bypass this difficulty, due to the non-inversibility of Jacobian, considered for a critical value of λ .

The originality of the pseudo-arc-length method is due to the fact that, instead of working with just one unknown x in dimension n , we solve an equation with one unknown in dimension $(n + 1) : (x, \lambda)$.

We also consider a new parameter, s , which represents the pseudo arc length.

Progressively varying s enables us to follow the solution's curve in its entirety.

Having established the bifurcation diagram, we want to study the solution's stability.

For the linear case the solution is relatively simple. When the system is periodical, Floquet theory applies (as shown below), but for general cases (pseudo-periodical solution, in particular), calculating Lyapunov exponents is indispensable.

There two theories are described below.

4.2. Periodical case: Floquet exponents

In differential equations, the stability of closed orbits or periodic solutions is discussed in terms of *Floquet multipliers*.

One would like to use a tool similar to linear theory, based on the fact that the system is periodic. We attempt to find the behavior of solutions, after a period T , in the neighborhood of a given closed orbit.

Consider the periodic system

$$(4.2.1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

so that $F(x, t + T) = F(x, t)$
 $t \in \mathbb{R}$, $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$, $T > 0$ is the period
 $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^1$.

Let $y(t)$ be a solution for system (4.2.1). We linearize (4.2.1) at $y(t)$, by considering

$$\tilde{y}(t) = y(t) + \delta y(t)$$

where $\delta y(t)$ is a small disturbance given to $y(t)$.

$\tilde{y}(t)$ must be a solution of (4.2.1); only first order variation terms are considered.

Therefore, $\delta y(t)$ verifies evolution equation below:

$$(4.2.2) \quad \frac{d}{dt}(\delta y) = Df(\tilde{y})\delta y \quad \delta y \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{where } Df = \left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right]_{1 \leq i, j \leq n}$$

is the Jacobian matrix of first partial derivations of F .

Note that Df depends both on the flow F and on the solution. Hence, here Df is periodic.

Finally, the equation to be studied takes the following form:

$$(4.2.3) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = P(t)y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

where $P(t)$ is a continuous and periodic matrix: $P(t+T) = P(t)$, $y, y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Consider a similar system with a matrix variable:

$$(4.2.4) \quad \begin{cases} \frac{dY(t)}{dt} = P(t)Y(t) \\ Y(0) = D \end{cases}$$

where $Y(t)$, D are matrices in $\mathbb{R}^n$, D is given.

The system (4.2.4) possesses an unique solution for $t \in [0, t_0[$ (local solution).

So, we can apply the Floquet theorem:

Theorem: Any fundamental matrix $Y(t)$ of (4.2.4), can be written as:

$$Y(t) = X(t) e^{Bt}$$

where $X(t)$ is a matrix with periodic coefficients and B a matrix with constant coefficients; the dimensions of B and X are the same as P .

Therefore, solutions of system (4.2.3) are given by

$$y(t) = X(t) e^{Bt} y_0.$$

It follows that the behavior of solutions in the neighborhood of $y(t)$ is determined by the eigenvalues of the constant matrix e^{Bt} .

If v is an eigenvector of B , according to the eigenvalue λ , then

$$e^{Bt} v = v e^{\lambda t}$$

and solution $y(t)$ of (4.2.3) can be written as

$$y(t) = z_1(t) e^{\lambda t}$$

where

$$z_1(t) = X(t) y_0$$

is periodic with period T in t .

Definition:

If $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ are eigenvalues of B , then $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ are eigenvalues of e^{Bt} . Numbers $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (calculated (mod $2i\pi$)) for equation (4.2.3) are called Floquet exponents. The matrix e^{Bt} is called Floquet matrix.

The stability of periodic solution is given by knowledge of spectrum of $M = e^{BT}$.

-> solutions are *linearly stable* if all eigenvalues are inside the complex unity disk (since, in this case, all components of δy are reduced in amplitude at each period).

-> If at least one eigenvalue is not inside the complex unity disk, then δy increases continuously, in at least one direction. The solution is then *unstable*.

-> If the system depends on parameter μ , the matrix M also depends on μ ; in this case varying μ , an eigenvalue of M could cross the complex unity circle and therefore *bifurcation* occurs.

4.3. AUTO Software - Results

AUTO is a software package developed by E. Doedel (see (7)), for continuation and bifurcation problems in ordinary differential equations.

L2-Norm

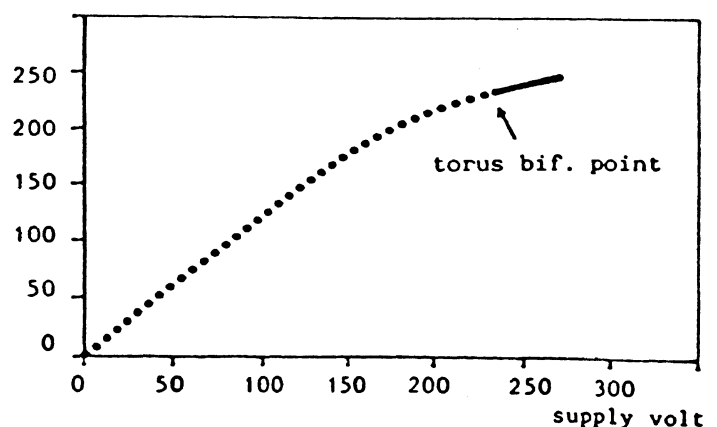


FIGURE 4
Bifurcation diagram (Torus bifurcation)

It uses the continuation method presented previously and establishes solution stability using a linearized system. It computes Jacobian eigenvalues if the system is linear, or Floquet exponents for periodic systems.

Concerning the supplied model, a torus bifurcation point had been found as expected, for the critical value of parameter E . ($E = 234$ volts peak).

Figure 4 shows the corresponding bifurcation diagram.

5. PSEUDO-PERIODICAL CASE

As we have seen, the ferroresonance case presented here presents *bifurcation to an invariant torus*. A pseudo-periodic solution therefore occurs. The goal is now to know if this solution stays stable or not. In the latter case, the solution will become *chaotic*. Floquet theory is inadequate, in terms of stability.

Lyapunov theory provide a definite indication, pseudo-periodic nature of solutions behaviors.

To achieve this, Lyapunov exponents are computed for the problem. The principle and numerical methods are described below.

5.1. Lyapunov exponents principle

Computing Lyapunov exponents enables the study of stability in dynamical systems, for general cases. They provide information concerning evolution of solutions in the neighborhood of a trajectory which is not automatically closed.

Lyapunov exponents can measure the average rates of trajectory divergence in the course of the evolution.

A set of ordinary differential equations will be studied.

5.2. Geometrical approach

To study a solution's behavior in dynamical systems, we need information concerning the evolution of a set of solutions which have initial conditions close together in the phases's space. The difference between orbits, after a sufficiently long time, gives information about stability.

As initial conditions are very close, linear analysis is sufficient. Therefore, evolution of this difference can be accurately approximated by the solution of linear differential equations, as previously explained.

At a given time, we consider a set of points lying in the phases's space of the initial equation (4.2.1).

This set defines a n -dimensional object which will be transformed, in the course of time, into another object, also in dimension n . For example, a sphere will be transformed into an ellipsoid.

The goal here is to know if this object will tend towards a fixed object, after a long time, or if it will be contracted or expanded continuously.

Each principal axis of the object defines a Lyapunov direction. According to this direction, there exists a Lyapunov exponent which measures the average rate of divergence of trajectory in the corresponding direction.

If the exponent is positive, the object will be expanded in the corresponding direction. If it is negative, it will contract. Then, if all the exponents are negative, system (4.2.1) is *stable*.

If at least one exponent is positive, the system will be *chaotic*.

For a non-autonomous pseudo periodic system, one exponent is equal to zero.

5.3. Analytical definition

The object to be studied is a non-linear differential system. As pointed out previously, it is sufficient to consider the linearized system near a known solution $y(t)$.

Given the notations of system (4.2.2), the Lyapunov exponent of the solution $\delta y(t)$ resulting from $\delta y(0)$, is given by the formula

$$\lambda_{\delta y} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Log} || \delta y(t) ||$$

$\lambda_{\delta y}$ is the Lyapunov exponent attached to the solution $\delta y(t)$.

Lyapunov has proved that $\lambda_{\delta y}$ is necessarily finite.

For a n dimensional system, n Lyapunov exponents (not necessarily distinct) exist.

5.4. Numerical method for computing Lyapunov exponents in three dimensions:

We again consider, the differential system (4.2.1) and its linearized system (4.2.2).

The first Lyapunov exponent (the greater) is defined by the relation:

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Log} || \delta y(t) ||$$

where $\delta y(t)$ is the solution of linearized system (4.2.3), resulting from the initial value $\delta y(0) = (1, 0, 0)^T$.

The second exponent λ_2 is computed by:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Log} || \delta y_1(t) \wedge \delta y_2(t) ||$$

where $\delta y_1(t)$ and $\delta y_2(t)$ are solutions of 4.2.3 with the initial conditions $\delta y_1(0)$ being a vector of a base of $\mathbb{R}^3$.

Each differential system is solved using a Runge-Kutta fourth order method, with adaptative step.

Note that, at each step of the calculation, $\hat{y}_2$ is modified so as to stay orthogonal to $\hat{y}_1$.

For the third and last exponent, we use the following relation (true for any dimensions)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^t \text{Tr}(K(s)) ds$$

where

$$K(t) = \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_{y(t)}$$

is the matrix of the linearized system.
For the proof, see (8).

6. RESULTS

Parameter values considered are:

$n=4$; $a=1/100$; $b=1/20$,
 $L=3,0$ H; $C=1,5 \cdot 10^{-6}$ F; $R=20$ Ω ; $r_0=10^5$ Ω ;
 $r_1=10$ Ω ; $L_2=0,1$ H.

The figure 5 shows the POINCARÉ map, i.e., the solution is represented at each period in the phase's space (here flux, voltage). The points tend to a close curve (a cut of the invariant torus); therefore, the pseudo-periodic character appears.

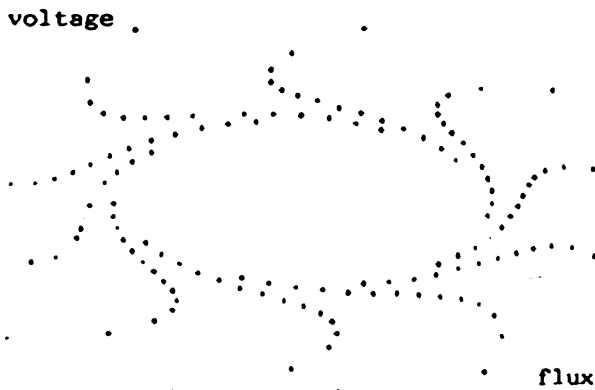


FIGURE 5
Poincaré map $E = 235$ V

The figure 6 shows the Lyapunov exponents. Note the change of the first exponent near the torus bifurcation point ($E = 234,5$).

Before the bifurcation to an invariant torus, the first and the second exponents are identical (with a precision 10^{-2}) and negative, because the solution is periodic and stable.

After the bifurcation, one exponent is equal to 0 and the second is negative because the solution is pseudo-periodic. The third exponent has a value near -15 and does not vary a lot at the bifurcation point.

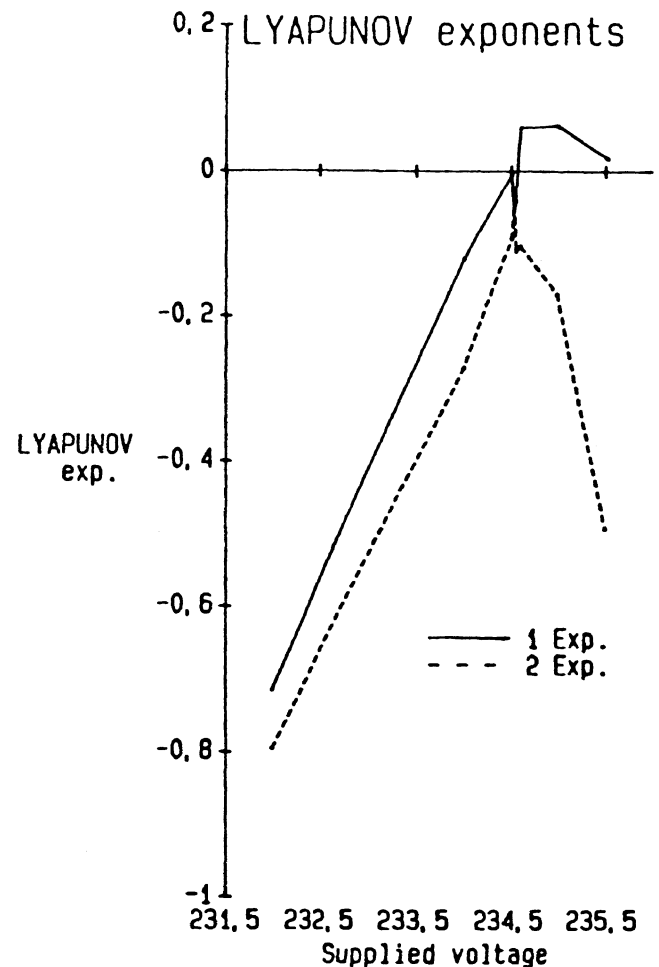


FIGURE 6
The first and the second Lyapunov exponents

7. CONCLUSION

The bifurcation theory is correct framework to explain and index ferroresonance phenomena. In a simple electrical circuit with three state variables modeling a real 400 kV power network, related methods prove the existence of a pseudo-periodic solution. The Lyapunov exponents permit to study solution stability and allows us to affirm that the solution is not chaotic but stable and pseudo-periodic. Therefore, we have a mathematical and numerical tools proving the existence of non-periodic phenomenon in simple electrical circuits. The results obtained confirm the appropriateness of those mathematical theory for the study of ferroresonance and stability. We will now try to apply them to other electrotechnical problems.

ACKNOWLEDGMENTS

We would like to acknowledge assistance provided in the theoretical study by the advisors J.M. Ghidaglia (ORSAY University), M. Poloujadoff (JUSSIEU University), and J. Roux (EDF-DER). We thank B. Blengino too for the EMTP results.

REFERENCES

- (1) N. Germany, S. Mastero, J. Vroman, Review of ferroresonance phenomena in High voltage power system and presentation of a voltage transformer model for pre-determining them, CIGRE (1974) report 33-18.
- (2) H.W. Dommel, Digital computer solution of electromagnetic transients in single and multiphase network, IEEE PAS 88 pp. 388-399 (April 1969).
- (3) P. Bergé, Y. Pomeau, C. Vidal, L'ordre dans le chaos, Hermann.
- (4) J. Guckenheimer, P. Holmes, Non-linear oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer Verlag - Applied Mathematical Sciences, 42.
- (5) V.I. Arnold, Equations différentielles ordinaires, MIR, Moscou.
- (6) H.B. Keller, Numerical solution of bifurcation and non-linear eigenvalue problems, in application of bifurcation theory, Academic Press, New-York, (1987), pp. 359-384.
- (7) E.J. Doedel, "AUTO : A program for the automatic bifurcation analysis of autonomous systems", Congressus Numerantium 30 (1981) pp. 265-284.
- (8) L. Arnold, V. Wihstutz, Lyapunov exponents: a survey, Lecture Notes in Mathematic, 1186 (1984), pp. 1-26.

In summary, ferroresonance is a strange phenomenon which can affect power networks. This phenomenon can be explained using mathematical theory, and bifurcation theory particularly. Non-periodic phenomenon occurs in the network considered here; a pseudo-periodic solution appears, after a bifurcation to an invariant torus, as presented. It is well explained by bifurcation theory, concerning a non-linear differential system, depending on parameters. The stability of the pseudo-periodic solution found is proved using the Lyapunov theory. Different mathematical and numerical related methods are presented.

B I B L I O G R A P H I E

- [D] L. DEBRAUX
Thèse (1990). UTC Compiègne.
- [GH] J. GUCKENHEIMER et P. HOLMES
Non linear oscillations, Dynamical systems, and bifurcations of Vector Fields
Springer Verlag - AMS - 42
- [K] H.B. KELLER
Lecture on numerical methods in bifurcation problems
Tata institute of fundamental research. BOMBAY (1987)
- [P.P.C] M. POLOUJADOFF, E. PILLET, I. CAMARGO
Improved Determination of Floquet's Reference Frame for the Phase-to-Ground Short Circuit of a Nonsalient-Pole Damped Alternator
IEEE Transactions of circuits and systems. Vol CAS-34- N°8. August 1987
- [Q1] L. QUIVY
Présentation et utilisation du logiciel AUTO. Modélisation du renvoi de tension Chastang-Chinon
EDF - HM/18-097 (Mai 1990)
- [Q2] L. QUIVY
Validation d'AUTO. Modèle d'utilisation du logiciel. Présentation et analyse des résultats sur différents cas de phénomènes ferorrésonants.
EDF - HM/18-136
- [R] J. ROUX
Stabilité des solutions périodiques pour les méthodes de Lyapunov. Application à la ferorrésonance série : équation de Duffing
EDF - HI/72/6926 (Juin 1990)

[R.J] R.D. RUELE - L.F. SHAMPIN

A collocation method for boundary value problem.

Numero Math v 19, 1972 - pp. 1-28

[W] R. WEISS

The application of implicit Runge-Kutta and collocation methods to boundary value problems

Math of computation - Vol 28. N° 126 April 1974 - pp. 449-464

CHAPITRE IV

**ETUDE DU COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE
DES SOLUTIONS D'UNE EQUATION
HYPERBOLIQUE NON LINEAIRE
INTERVENANT DANS LES RESEAUX
FERRORESONANTS**

S O M M A I R E

0. POSITION DU PROBLEME ET RESULTATS

- 0. 1. Equation hyperbolique non linéaire intervenant dans des réseaux électriques
- 0. 2. Cadre fonctionnel
- 0. 3. Plan d'étude et résultats

1. EXISTENCE ET UNICITE DE LA SOLUTION

- 1.1. Le problème linéaire
 - 1. 1. 1. Existence et unicité de la solution dans $H^1(0,L)$
 - 1. 1. 2. Quelques résultats de régularité
 - 1. 1. 3. Construction de l'application $\mathfrak{L}$ et ses propriétés
- 1.2. Le problème non linéaire

2. DEFINITION D'UNE FAMILLE D'OPERATEURS ET ETUDE DU COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

- 2.1. Le groupe non linéaire
- 2.2. Ensembles bornés absorbants
 - 2.2.1. Existence d'un ensemble borné absorbant dans L^2
 - 2.2.2. Existence d'un ensemble borné absorbant dans H^1
 - 2.2.1. Existence d'un ensemble borné absorbant dans H^2
- 2.3. L'ensemble oméga-limite
- 2. 4. L'attracteur universel

0. POSITION DU PROBLEME ET RESULTATS

0.1. Equation hyperbolique non linéaire intervenant dans des réseaux électriques

Sur une ligne électrique de longueur L placée entre une source de tension périodique en temps (en $x=L$) et un transformateur de caractéristique non linéaire, le courant i et la tension v vérifient le système d'équations aux dérivées partielles linéaires suivant: (appelées équations des télégraphistes).

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = ri + \ell \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial x} = gv + c \frac{\partial v}{\partial t} \end{cases} \quad x \in [0, L], \quad t \in]0, T[\quad (0.1)$$

$$(0.2)$$

r, g, ℓ, c étant des constantes positives caractérisant la ligne. Les variables d'état $(v(x, t), i(x, t))$ représentent respectivement la tension et le courant au temps t , et à la position x sur la ligne, $x \in [0, L]$. Les fonctions v et i , solutions des équations (0.1) et (0.2), doivent vérifier les conditions limites non linéaires et les conditions initiales:

$$i(0, t) = f(\varphi) \quad (0.3)$$

$$v(0, t) = \frac{d\varphi}{dt} + \sigma i(0, t) \quad (0.4)$$

$$v(L, t) = E(t) \quad (0.5)$$

$$\begin{cases} v(x, 0) = v_0(x) \\ i(x, 0) = i_0(x) \end{cases} \quad (0.6)$$

où les fonctions i_0 et v_0 sont données, ainsi que f et E ; σ est une constante positive représentant les pertes du transformateur.

La quantité $\varphi(t)$ représente le flux existant à la sortie de la ligne (en $x=0$); le courant $i(0, t)$ dans le transformateur est donné par la fonction

$f(\varphi)$ de classe au moins C^3 à valeurs dans $\mathbb{R}$. (0.7)

Elle décrit la caractéristique non linéaire du flux dans le transformateur; en pratique elle est souvent représentée par une fonction polynômiale de degré impair.

$E(t)$ est une fonction définie de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$,
de classe au moins C^3 , périodique de période $\tau > 0$ (0.8)
et représente la tension d'alimentation fournie au réseau en $x=L$.

Les quantités $i_0(x)=i(x,0)$ et $v_0(x)=v(x,0)$ représentent les valeurs du courant et de la tension en tout point de la ligne, au temps initial $t=0$; v_0 vérifie la condition de compatibilité :

$$v_0(L) = E(0) \quad (0.9)$$

Le but de notre étude est d'obtenir des résultats concernant le comportement asymptotique (lorsque $t \rightarrow \infty$) des solutions (i,v) du système d'équations (0.1)-(0.9). Nous allons montrer que, suivant les propriétés satisfaites par les données aux bords (conditions limites), le comportement de ces solutions est décrit par un attracteur capturant toutes les trajectoires.

L'originalité de ce problème découle du fait de la présence du terme non linéaire apparaissant uniquement dans les conditions aux limites (par la fonction $f(\varphi)$), alors que les équations aux dérivées partielles -équations des ondes- sont, elles, linéaires et peuvent se résoudre aisément quand les données aux bords sont des constantes fixées.

Nous considérerons ici uniquement le cas de la dimension un, car il représente le modèle donné par la physique. Une partie des techniques utilisées peuvent s'étendre aux dimensions supérieures, moyennant l'utilisation des propriétés vérifiées par les espaces de Sobolev, mais il serait intéressant d'essayer de traiter le problème ultérieurement en dimension deux ou supérieure.

Afin d'étudier ce problème et le poser plus précisément, nous allons nous placer dans des espaces d'énergie appropriés que nous allons tout d'abord introduire:

0.2 Cadre fonctionnel

Les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

• $L^2(0, L)$ désigne l'espace des classes de fonctions de carré intégrable sur l'intervalle $[0, L]$.

On note (f, g) le produit scalaire dans $L^2(0, L)$ défini pour f, g fonctions de $L^2(0, L)$ par

$$(f, g) = \int_0^L f(x)g(x)dx \quad (0.10)$$

et $\|f\|$ la norme dans $L^2(0, L)$ définie par

$$\|f\|^{\frac{1}{2}} = (f, f)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^L f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (0.11)$$

• Pour $1 \leq p < \infty$, on désigne par $L^p(0, L)$ l'espace des classes de fonctions f telles que

$$\|f\|_{L^p(0, L)}^p = \int_0^L |f(x)|^p dx < \infty \quad (0.12)$$

• Pour $p = \infty$, on remplace la norme (0.12) par la norme

$$\sup_{x \in]0, L[} |f(x)| = \|f\|_{L^\infty(0, L)} \quad (0.13)$$

Les espaces L^p , ainsi normés, sont complets.

• On utilisera aussi les espaces de Sobolev $H^1(0, L)$ et $H^2(0, L)$ définis par

$$H^1(0,L) = \left\{ v / v \in L^2(0,L), \frac{dv}{dx} \in L^2(0,L) \right\} \quad (0.14)$$

munis de la norme

$$\|v\|_{H^1(0,L)} = \left(|v|^2 + \left| \frac{dv}{dx} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (0.15)$$

que l'on notera aussi $\|v\|_1$,

et

$$H^2(0,L) = \left\{ v / v \in H^1(0,L), \frac{d^2v}{dx^2} \in L^2(0,L) \right\} \quad (0.16)$$

muni de la norme

$$\|v\|_{H^2(0,L)} = \left(\|v\|_1^2 + \left| \frac{d^2v}{dx^2} \right|^2 \right)^{1/2} = \|v\|_2 \quad (0.17)$$

Les espaces $H^1(0,L)$ et $H^2(0,L)$ ainsi normés sont complets.

Pour l'étude du problème (0.1) à (0.9), il est utile d'introduire les espaces affines :

$$V_0^a(0,L) = \{u \in H^1(0,L), u(0) = a\} \quad (0.18)$$

$$V_L^b(0,L) = \{u \in H^1(0,L), u(L) = b\} \quad (0.19)$$

que l'on munira de la distance induite par la norme de $H^1(0,L)$.

Remarque : Pour $u \in V_0^a(0,L)$ ou $V_L^b(0,L)$, la distance induite par $\left| \frac{du}{dx} \right|$ est équivalente à celle induite par la norme $\|u\|_1$ dans $H^1(0,L)$.

De façon générale, X étant un espace de Banach, on désigne par $L^p(0,T;X)$ l'espace des (classes de) fonctions $t \rightarrow f(t)$ de $]0,T[\rightarrow X$ qui sont mesurables à valeurs dans X et telles que

$$\left(\int_0^T \|f\|_X^p dt \right)^{1/p} = \|f\|_{L^p(0,T;X)} < \infty \quad (0.20)$$

Si $p = \infty$, on remplace la norme (0.17) par la norme

$$\sup_{t \in]0, T[} \text{ess } \|f(t)\|_X = \|f\|_{L^\infty(0, T; X)} \quad (0.21)$$

L'espace $L^p(0, T; X)$ ainsi normé est complet.

Enfin on utilisera les espaces de Beppo-Levi $W^{m, p}(0, T)$ définis pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout p tel que $1 \leq p < \infty$, par

$$W^{m, p}(0, L) = \left\{ \psi \in L^p(0, L) / \frac{d^i \psi}{dt^i} \in L^p(0, T), \forall i \leq m \right\} \quad (0.22)$$

munis de la norme

$$\|y\|_{W^{m, p}(0, L)} = \left(\sum_{i=0}^m \left\| \frac{d^i y}{dt^i} \right\|_{L^p(0, T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (0.23)$$

0.3. Plan d'étude et résultats

Le plan de ce travail est le suivant :

Dans la première section on montrera l'existence et l'unicité de la solution de (0.1)-(0.9) dans $[C([0, T]; H^1(0, L))]^2$. Pour cela, on étudie tout d'abord l'existence et l'unicité des solutions (i, v) du problème linéaire pour lequel les conditions de bord sont fixées, en appliquant la méthode de décomposition de Galerkin. Des résultats de régularité sur ces solutions s'en suivront et plus précisément on montre que les quantités i et v sont continues et dérivables sur $[0, T]$, si les conditions initiales sont choisies dans H^1 . Ces estimations nous permettent de définir une fonctionnelle linéaire permettant de passer continuellement des conditions initiales et limites aux quantités aux bords $\frac{\partial i}{\partial t}(0, t)$ et $\frac{\partial v}{\partial t}(0, t)$, toujours en ce qui concerne le problème linéaire. Cette fonctionnelle est continue de $H^1(0, L) \times H^1(0, L) \times W^{2, 1}(0, T) \times W^{2, 1}(0, T)$ dans $L^2(0, L)$ et permet de traduire le problème non linéaire comme une équation différentielle implicite pour laquelle on montre que l'application solution possède un unique point fixe. Ceci nous amène à conclure sur l'existence locale d'une solution (i, v) continue de $[0, T]$ à valeurs dans $H^1(0, L)$ si les conditions initiales sont données dans $H^1(0, L)$. Enfin, en montrant que la

norme de cette solution dans les espaces fonctionnels où elle vit, ne peut exploser en temps fini, on prouve l'existence globale et la régularité C^1 de la solution du problème non linéaire.

Dans la deuxième section on s'intéresse plus spécialement au comportement pour les grands temps du couple solution (i,v) . Pour cela, en vertu de la régularité que possèdent i,v on est en mesure de définir un semi-groupe non linéaire continu $S(t,s)$ qui aux conditions initiales i_0, v_0 associe les solutions i,v du problème non linéaire. Ce dernier étant périodique, il en est de même de $S(t,s)$. On démontre alors l'existence d'ensembles bornés absorbants dans les espaces L^2, H^1, H^2 , pour lesquels on sait que la trajectoire solution issue de tout point y demeurant, ne peut quitter cet ensemble. L'ensemble oméga-limite du borné absorbant dans H^2 peut alors être défini ce qui nous permet de conclure sur l'existence d'un attracteur maximal faible dans H^2 , ayant la propriété d'attirer toutes les trajectoires de $S(t,s)$.

Ces différentes notions d'ensembles bornés absorbants, d'ensemble oméga-limite, d'attracteurs, ainsi que les méthodes permettant de les déterminer sont souvent utilisées pour l'étude des équations d'évolution de ce type. On pourra trouver toutes les références s'y rattachant dans [G.T1], [G.T2], [H1], [H2], [T], [G1] et [G2].

I- EXISTENCE ET UNICITE DE LA SOLUTION

L'objet de ce chapitre est de montrer que le système (0.1)-(0.9) possède une unique solution (i,v) telle que

$$\begin{cases} i \in C([0,T], H^1(0,L)) \\ v \in C([0,T], H^1(0,L)) \end{cases}$$

$$\text{avec } \varphi \in W^{2,2}(0,T),$$

i_0 et v_0 étant données dans $H^1(0,L)$ et vérifiant la condition de compatibilité

$$v_0(L) = E(0)$$

et $E(t)$ étant une fonction de $W^{2,1}(0,T)$.

Dans la section I-1 on étudie le problème linéaire suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = ri + \ell \frac{\partial i}{\partial t} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial i}{\partial x} = gv + c \frac{\partial v}{\partial t} \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} i(0,t) = \psi(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} v(L,t) = E(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} v(x,0) = v_0(x) \\ i(x,0) = i_0(x) \end{cases} \quad (1.5)$$

$$r, \ell, g, c \in \mathbb{R}_+,$$

E et ψ étant des fonctions données, de régularité suffisante (que l'on précisera) et vérifiant

$$E(0) = v_0(L) \quad (1.6)$$

$$\psi(0) = i_0(0) \quad (1.7)$$

L'existence et l'unicité d'une solution de ce problème linéaire s'appuie sur la méthode de Faedo-Galerkin: en décomposant i et v sur des bases appropriées, de dimension finie, on démontre que le problème linéaire possède une unique solution approchée (i^M, v^M) ;

un passage à la limite sur i^M et v^M permet de montrer que ces solutions approchées tendent vers les solutions du problème (1.1)-(1.7) dans $H^1(0,L)$.

Ensuite, nous chercherons à obtenir des résultats de régularité sur ces solutions dans $H^1(0,L)$ et on montrera comment la régularité des solutions dépend de celles des données.

Dans la section (I.2) nous nous intéresserons au problème non linéaire (0.1)-(0.7). En s'appuyant sur les résultats de la section I.1, on montrera que les quantités $\frac{\partial i}{\partial x}(0,t)$ et $\frac{\partial v}{\partial x}(0,t)$ sont liées aux données $(i_0, v_0) \in (H^1(0,L))^2$ et $(E, \psi) \in (W^{2,1}(0,T))^2$ de façon linéaire et continue, par une fonctionnelle $\mathcal{L}$.

En prouvant que cette fonctionnelle est strictement contractante en un sens que nous préciserons, nous montrerons l'existence d'un point fixe de $\mathcal{L}$ qui nous permettra d'obtenir l'existence locale d'une solution (i,v) du problème non linéaire (0.1)-(0.9) dans $(C(0,T), H^1(0,L))^2$.

Enfin, en utilisant des hypothèses supplémentaires sur f (vérifiées dans le cas où f est polynômiale de degré impair), et en montrant que la norme de la solution (i,v) obtenue, dans $(H^1(0,L))^2$, ne peut exploser en temps fini, nous prouverons alors que cette solution existe non plus seulement localement, mais globalement.

I.1. Le problème linéaire

I.1.1. Existence et unicité de la solution dans $H^1(0,L)$

Pour T réel positif fini, on montre qu'il existe un couple solution (i,v) , de fonctions continues de $[0,T]$ à valeurs dans $H^1(0,L)$, par le théorème suivant:

Théorème 1.1: *On se donne ψ , E , i_0 et v_0 avec*

$$\psi \in W^{2,2}(0,T) \quad (1.8)$$

$$E \in W^{2,2}(0,T) \quad (1.9)$$

$$(i_0, v_0) \in (H^1(0,L))^2 \text{ et vérifiant (1.6) et (1.7)} \quad (1.10)$$

Alors

il existe deux fonctions i et v vérifiant

$$(i, v) \in (L^\infty(0,T; H^1(0,L)))^2 \quad (1.11)$$

$$\left(\frac{\partial i}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t} \right) \in (L^\infty(0,T; L^2(0,L)))^2 \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = ri + \ell \frac{\partial i}{\partial t} \quad \text{dans } [0,L] \times [0,T] \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = gv + c \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{dans } [0,L] \times [0,T] \quad (1.14)$$

$$\begin{cases} i(0,t) = \psi(t) \\ v(L,t) = E(t) \end{cases} \quad t \in [0,T] \quad (1.15)$$

$$\text{et } \begin{cases} v(x,0) = v_0(x) \\ i(x,0) = i_0(x) \end{cases} \quad x \in [0,L]$$

Remarque 1.1:

De (1.11), (1.12), il résulte en particulier que i et v sont continues de $[0,T]$ dans $L^2(0,L)$. Donc (1.15) a bien un sens.

Remarque 1.2:

D'après (1.11) et (1.15), les conditions (1.6) et (1.7) sont bien respectées.

PREUVE du théorème 1.1

Le plan de la démonstration est le suivant:

i/ On construit des solutions approchées par la méthode de Faedo-Galerkin;

ii/ On établit, sur ces solutions approchées, des estimations a priori;

iii/ On passe à la limite (immédiat ici puisque le problème est linéaire).

Auparavant, afin d'avoir des conditions limites homogènes, on introduit les fonctions j et w définies par

$$j(x,t) = i(x,t) - \psi(t) \quad (1.16)$$

$$\omega(x,t) = v(x,t) - E(t) \quad (1.17)$$

Le système (1.1)-(1.7) devient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \omega}{\partial x} = rj + \ell \frac{\partial j}{\partial t} + A(t) \end{array} \right. \quad (1.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial j}{\partial x} = g\omega + c \frac{\partial \omega}{\partial t} + B(t) \end{array} \right. \quad (1.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(L,t)=0 \end{array} \right. \quad (1.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} j(0,t)=0 \end{array} \right. \quad (1.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(x,0)=v_0(x)-E(0)=\omega_0(x) \\ j(x,0)=i_0(x)-\psi(0)=j_0(x) \end{array} \right\} \quad (1.22)$$

où

$$\left[\begin{array}{l} A(t) = -E(t) + r \psi(t) + \ell \frac{d\psi}{dt}(t) \end{array} \right. \quad (1.23)$$

$$\left[\begin{array}{l} B(t) = \psi(t) + g E(t) + c \frac{dE(t)}{dt} \end{array} \right. \quad (1.24)$$

$$\text{avec } (A,B) \in (W^{1,2}(0,T))^2$$

ω_0 et j_0 vérifient, de plus, les conditions de compatibilité données en (1.6) et (1.7) c'est à dire

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0(L) = E(0) \Rightarrow \omega_0(L) = 0 \end{array} \right. \quad (1.25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i_0(0) = \psi(0) \Rightarrow j_0(0) = 0 \end{array} \right. \quad (1.26)$$

et le problème revient à

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \text{trouver } j \in C(\mathbb{R}^+; V_0^0) \cap C^1(\mathbb{R}^+; L^2(0, L)) \\
 \omega \in C(\mathbb{R}^+; V_L^0) \cap C^1(\mathbb{R}^+; L^2(0, L))
 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1.27) \\ (1.28) \end{array} \\
 \\
 \text{telles que (1.18)-(1.26) aient lieu au sens des} \\
 \text{fonctions (presque partout dans } L^2(0, L)) \\
 \\
 (\mathcal{P}) \quad \text{sous les hypothèses} \\
 \\
 \begin{array}{l}
 j_0 \in V_0^0 \\
 \omega_0 \in V_L^0 \\
 \psi \in W^{1,1}(0, T) \\
 E \in W^{1,1}(0, T)
 \end{array}
 \end{array}$$

La méthode de Galerkin permet de ramener le problème à un système d'équations différentielles ordinaires linéaires de dimension finie, dont la solution est une solution approchée du problème initial, après décomposition sur une base appropriée.

Les estimations obtenues ensuite sur ces solutions approchées permettent d'en déduire les limites, elles-mêmes solutions du problème initial.

Remarque 1.3: Il est clair que les résultats d'existence et d'unicité du couple solution (ω, j) de (1.18), (1.26) entraînent ceux de (v, i) solution de (1.1)-(1.7).

Considérons les deux problèmes aux valeurs propres:

$$E_0 \left\{ \begin{array}{l} u_{xx} = -\lambda u \\ u(0) = 0 \\ u_x(L) = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad E_L \left\{ \begin{array}{l} u_{xx} = -\lambda u \\ u(L) = 0 \\ u_x(0) = 0 \end{array} \right.$$

où u_x désigne la dérivée de u par rapport à x : $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Soient (φ_k, λ_k) les solutions de (E_0) appartenant à V_0^0 et (ϕ_k, λ_k) les solutions de (E_L) appartenant à V_L^0 .

Remarque 1.4: φ_k et ϕ_k sont liées par les propriétés suivantes

$$\begin{cases} \phi_k(x) = \varphi_k(L-x) \\ \frac{d}{dx}\phi_k(x) = -\frac{d}{dx}\varphi_k(L-x) \end{cases}$$

Les suites d'éléments

$$\varphi_1, \dots, \varphi_m, \dots \text{ de } V_0^0$$

et

$$\phi_1, \dots, \phi_m, \dots \text{ de } V_L^0$$

sont libres et totales dans V_0^0 et V_L^0 respectivement.

Soient

$$\begin{aligned} &V_{0,M}^0 \text{ l'espace engendré par } (\varphi_1, \dots, \varphi_M) \\ &\text{et } V_{L,M}^0 \text{ l'espace engendré par } (\phi_1, \dots, \phi_M), \end{aligned}$$

pour chaque entier M fixé, on définit une solution approchée de

$$(\mathcal{P}) \text{ dans } C(\mathbb{R}^+; V_{0,M}^0 \times V_{L,M}^0) \cap C^1(\mathbb{R}^+; (L^2(0,L))^2)$$

C'est donc un couple de vecteurs (j^M, ω^M) tels que

$$\begin{aligned} j^M &\in C(\mathbb{R}^+; V_{0,M}^0) \cap C^1(\mathbb{R}^+; L^2(0,L)) \\ \omega^M &\in C(\mathbb{R}^+; V_{L,M}^0) \cap C^1(\mathbb{R}^+; L^2(0,L)) \end{aligned}$$

définis par

$$j^M(x, t) = \sum_{k=1}^M j_k^M(t) \varphi_k(x) \quad (1.29)$$

$$j_k^M \in C^1(\mathbb{R}^+)$$

$$\omega^M(x, t) = \sum_{k=1}^M \omega_k^M(t) \phi_k(x) \quad (1.30)$$

$$\omega_k^M \in C^1(\mathbb{R}^+)$$

et vérifiant les équations approchées $(\mathcal{E}_M)$ obtenues par projection des équations (1.18) à (1.21) sur la base de Galerkin, comme suit:

$$(\mathcal{E}_M) \left\{ \begin{array}{l} \left(\ell \frac{\partial j^M}{\partial t} + r j^M + A - \frac{\partial \omega^M}{\partial x}, \varphi_k \right) = 0 \\ \left(c \frac{\partial \omega^M}{\partial t} + g \omega^M + B - \frac{\partial j^M}{\partial x}, \phi_k \right) = 0 \\ j^M(0) = j_0^M \\ \omega^M(0) = \omega_0^M \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1.31) \\ (1.32) \\ (1.33) \\ (1.34) \end{array}$$

j_0^M et ω_0^M sont, par exemple, les projections orthogonales dans $L^2(0,L)$ de j_0 et ω_0 (resp.) sur les espaces $V_{0,M}^0$ et $V_{L,M}^0$ (resp.).

Les fonctions j_k^M et ω_k^M , $1 \leq k \leq M$ sont des fonctions scalaires définies sur $[0,T]$.

Le but est de montrer qu'il existe une et une seule solution $u = (j^M, \omega^M)$, telle que les équations (1.31) à (1.34) soient vérifiées.

Le système $(\mathcal{E}_M)$ est un système différentiel linéaire à $2M$ équations, dont les $2M$ inconnues sont les fonctions scalaires $(j_k^M, \omega_k^M)_{1 \leq k \leq M}$ composantes de vecteurs $u = (j^M, \omega^M)$.

En effet,

en remarquant que $(\varphi_k, \varphi_k) = \delta_{kk} = (\phi_k, \phi_k)$
(δ_{kk} étant le symbole de KRONECKER),

l'équation (1.31) s'écrit

$$\begin{aligned} \ell \frac{d}{dt} j_k^M(t) + r j_k^M(t) + (A(t), \varphi_k) \\ = \sum_{k=1}^M \omega_k^M(t) \int_0^L \frac{d\phi_k(x)}{dx} \varphi_k(x) dx \end{aligned} \quad (1.35)$$

et (1.32) devient

$$c \frac{d}{dt} \omega_k^M(t) + g \omega_k^M(t) + (B(t), \phi_k)$$

$$= \sum_{k=1}^M j_k^M(t) \int_0^L \frac{d\varphi_k(x)}{dx} \varphi_k(x) dx \quad (1.36)$$

Le système formé des équations (1.35), (1.36), (1.33), (1.34) peut se mettre sous la forme vectorielle

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = -\Lambda^{-1} \rho U + \Lambda^{-1} A U + \Lambda^{-1} C \\ U(0) = U_0 \end{cases} \quad (1.37)$$

où

$$\begin{aligned} U &= (j_1^M, \dots, j_M^M, \omega_1^M, \dots, \omega_M^M) \in \mathbb{R}^{2M} \\ \Lambda U &= (\ell j_1^M, \dots, \ell j_M^M, c\omega_1^M, \dots, c\omega_M^M) \\ \rho U &= (rj_1^M, \dots, rj_M^M, g\omega_1^M, \dots, g\omega_M^M) \end{aligned}$$

$$A = - \begin{pmatrix} 0 & \left(- \int_0^L \frac{d\varphi_{k'}(x)}{dx} \varphi_k(x) dx \right)_{1 \leq k, k' \leq M} \\ \left(- \int_0^L \frac{d\varphi_k(x)}{dx} \varphi_{k'}(x) dx \right)_{1 \leq k, k' \leq M} & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = (C_1^M, \dots, C_M^M, \tilde{C}_1^M, \dots, \tilde{C}_M^M)$$

avec

$$\begin{aligned} C_k^M &= -(A(t), \varphi_k) \\ \tilde{C}_k^M &= -(B(t), \Phi_k) \end{aligned}$$

Les conditions (1.33) et (1.34) sont équivalentes aux 2M équations:

$$\begin{cases} j_k^M(0) = k^e \text{ composante de } j_0^M \\ \omega_k^M(0) = k^e \text{ composante de } \omega_0^M \end{cases} \quad (1.38)$$

$$\text{avec } (j_0^M, \omega_0^M) = U_0^M$$

Le système différentiel (1.37), avec la condition initiale (1.38), définit j_k^M et ω_k^M de façon unique sur tout l'intervalle $[0, T]$.

Puisque les fonctions

$$t \longrightarrow C_k^M = -(A(t), \varphi_k)$$

et

$$t \longrightarrow \tilde{C}_k^M = -(B(t), \Phi_k)$$

sont continues, il en est de même des fonctions j_k^M et ω_k^M , et ainsi,

$$\begin{aligned} \forall M, j^M &\in C(\mathbb{R}^+; V_0^0) \cap C^1(\mathbb{R}^+; L^2(0, L)) \\ \omega^M &\in C(\mathbb{R}^+; V_L^0) \cap C^1(\mathbb{R}^+; L^2(0, L)). \end{aligned}$$

Estimations a priori:

On cherche à obtenir des bornes sur j^M et ω^M , indépendantes de M , dans les espaces V_0^0 et V_L^0 respectivement, afin de pouvoir passer à la limite pour M tendant vers l'infini.

En dérivant l'équation (1.18) en temps, il vient

$$\frac{\partial^2 j}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial j}{\partial t} + \beta j - \gamma \frac{\partial^2 j}{\partial x^2} = G(t) \quad (1.39)$$

où on a posé

$$\left. \begin{aligned} G(t) &= -\left(\frac{1}{\ell} A'(t) + \frac{g}{c\ell} A(t)\right), \quad G \in L^2(0, T) \\ \alpha &= \frac{cr + \ell g}{c\ell}, \quad \beta = \frac{gr}{c\ell}, \quad \gamma = \frac{1}{c\ell} \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

On projette (1.39) sur la base de Galerkin, et les $j_k^M(t)$ à déterminer pour connaître une solution approchée j^M du problème, sont à déterminer par les conditions:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 j^M}{\partial t^2}, \varphi_k \right) + \alpha \left(\frac{\partial j^M}{\partial t}, \varphi_k \right) + \beta (j^M, \varphi_k) + \gamma \left(-\frac{\partial^2 j^M}{\partial x^2}, \varphi_k \right) \\ = (G(t), \varphi_k) \quad 0 \leq k \leq M \end{aligned} \quad (1.41)$$

Le système (1.41) d'équations différentielles (ordinaires) non linéaires est à compléter par les conditions initiales:

$$j^M(0) = j_{0M} = \sum_{k=1}^M \alpha_{kM} \varphi_k \rightarrow j_0 \text{ dans } V_0^0(0, L) \quad (1.42)$$

lorsque $M \rightarrow \infty$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial j^M}{\partial t} \right) (0) &= \frac{1}{1} \left[\left(\frac{\partial \omega^M}{\partial x} \right) (0) - r j^M(0) - A(0) \right] \\ &= \sum_{k=1}^M \beta_{kM} \varphi_k \rightarrow \left(\frac{1}{1} \frac{\partial \omega_0}{\partial x} - r j_0 - A(0) \right) \end{aligned} \quad (1.43)$$

dans $L^2(0, L)$, quand $M \rightarrow \infty$

On multiplie l'équation (1.41) d'indice k , par $\frac{\partial j_k^M(t)}{\partial t}$ et on somme en k ,

il vient

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 j^M}{\partial t^2}, \frac{\partial j^M}{\partial t} \right) + \alpha \left(\frac{\partial j^M}{\partial t}, \frac{\partial j^M}{\partial t} \right) + \beta \left(j^M, \frac{\partial j^M}{\partial t} \right) \\ + \gamma \left(- \frac{\partial^2 j^M}{\partial x^2}, \frac{\partial j^M}{\partial t} \right) = \left(G(t), \frac{\partial j^M}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (1.44)$$

or

$$\begin{aligned} \left(- \frac{\partial^2 j^M}{\partial x^2}, \frac{\partial j^M}{\partial t} \right) &= - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial j^M}{\partial x}, \frac{\partial j^M}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{\partial j^M}{\partial x} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{\partial j^M}{\partial x} \right|^2 \end{aligned}$$

puisque

$$\frac{\partial j^M}{\partial t}(L, t) \frac{\partial j^M}{\partial x}(L, t) - \frac{\partial j^M}{\partial t}(0, t) \frac{\partial j^M}{\partial x}(0, t) = 0$$

d'après les conditions aux limites imposées à φ_k ;

(1.44) s'écrit alors

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\left| \frac{\partial j^M}{\partial t} \right|^2 + \beta |j^M|^2 + \gamma \left| \frac{\partial j^M}{\partial x} \right|^2 \right) + \alpha \left| \frac{\partial j^M}{\partial t} \right|^2 = (G(t), \frac{\partial j^M}{\partial t})$$

que l'on intègre entre 0 et $t < T$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\left| \frac{\partial j^M}{\partial t} \right|^2 + \beta |j^M|^2 + \gamma \|j^M\|_1^2 \right) + \alpha \int_0^t \left| \frac{\partial j^M}{\partial t} \right|^2 ds \\ & \leq \frac{1}{2} \left(\left| \frac{\partial j^M}{\partial t}(0) \right|^2 + \beta |j^M(0)|^2 + \gamma \|j^M(0)\|_1^2 \right) + \int_0^t |G(s)| \left| \frac{\partial j^M}{\partial t} \right| ds \quad (1.45) \end{aligned}$$

D'après (1.42) et (1.43), le membre de droite de (1.45) est

$$\leq C + \int_0^t |G(s)| \left| \frac{\partial j^M}{\partial t} \right| ds$$

(C étant une constante indépendante de m),

d'où

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\left| \frac{\partial j^M}{\partial t} \right|^2 + \beta |j^M|^2 + \gamma \|j^M\|_1^2 \right) + \alpha \int_0^t \left| \frac{\partial j^M}{\partial t} \right|^2 ds \\ & \leq C + \frac{1}{6\alpha} \int_0^t |G(s)|^2 ds + \frac{3\alpha}{2} \int_0^t \left| \frac{\partial j^M}{\partial t} \right|^2 ds \end{aligned}$$

soit encore

$$\left(\left| \frac{\partial j^M}{\partial t} \right|^2 + \beta |j^M|^2 + \gamma \|j^M\|_1^2 \right)$$

$$\leq C + \frac{1}{3\alpha} \int_0^L |G(s)|^2 ds + \alpha \int_0^t \left| \frac{\partial j^M}{\partial t} \right|^2 ds \quad (1.46)$$

D'après (1.40)

$$\int_0^t |G(s)|^2 ds \leq \text{constante},$$

on déduit donc, en particulier, de (1.46) que

$$\left| \frac{\partial j^M}{\partial t} \right|^2 \leq C + \int_0^t \left| \frac{\partial j^M}{\partial t} \right|^2 ds \quad (1.47)$$

d'où

$$\left| \frac{\partial j^M}{\partial t} \right| \leq \text{constante (indépendante de } M) \quad (1.48)$$

Reprenant (1.46) on en déduit que

$$\|j^M\|_1 \leq \text{constante (indépendante de } M) \quad (1.49)$$

Et ainsi

$$\begin{aligned} &\text{Lorsque } M \rightarrow \infty, j^M \text{ demeure dans un ensemble} \\ &\text{borné de } L^\infty(0, T; V_0^0(0, L)) \text{ et } \left(\frac{\partial j^M}{\partial t} \right) \text{ dans} \quad (1.50) \\ &\text{un ensemble borné de } L^\infty(0, T; L^2(0, L)) \end{aligned}$$

En effectuant le même travail à partir de l'équation (1.19) (pour ω), on obtient

$$\begin{aligned} &\text{Lorsque } M \rightarrow \infty, \omega^M \text{ demeure dans un ensemble} \\ &\text{borné de } L^\infty(0, T; V_L^0(0, L)) \text{ et } \left(\frac{\partial \omega^M}{\partial t} \right) \text{ dans un} \quad (1.51) \\ &\text{ensemble borné de } L^\infty(0, T; L^2(0, L)) \end{aligned}$$

Le problème étant linéaire, on passe à la limite sans difficulté, ce qui achève la démonstration du théorème 1.1.

I.1.2. Quelques résultats de régularité

L'existence et l'unicité de la solution du système linéaire (1.1) à (1.7) étant prouvées, nous allons étudier la régularité d'une solution (i,v) de ce problème. Nous allons en particulier montrer comment la régularité de ces solutions dépend de celles des données.

Pour cela on travaille à nouveau avec les équations (1.18) à (1.22).

Les estimations obtenues sur j et ω sont données dans la

Proposition 1.1: *Sous les conditions*

- $\psi \in W^{2,1}(0,T)$
- $E \in W^{2,1}(0,T)$
- $j_0 \in V_0^0(0,L)$
- $\omega_0 \in V_L^0(0,L)$

Les quantités

$$E_0(t) = \int_0^L \ell j^2 + c \omega^2 dx \quad (1.52)$$

$$E_j(t) = \int_0^L \ell \left(\frac{\partial j}{\partial t} \right)^2 + \frac{rg}{c} j^2 + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial j}{\partial x} \right)^2 dx \quad (1.53)$$

$$E_\omega(t) = \int_0^L c \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 + \frac{rg}{\ell} \omega^2 + \frac{1}{\ell} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 dx \quad (1.54)$$

vérifient les inégalités suivantes:

$$E_0(t) \leq 2E_0(0) + \delta_0 \left(|E|_{W^{2,1}(0,T)}^2 + |\psi|_{W^{2,1}(0,T)}^2 \right) \quad (1.55)$$

$$E_j(t) \leq \beta_j E_j(0) + \delta_j \left(|E|_{W^{2,1}(0,T)}^2 + |\psi|_{W^{2,1}(0,T)}^2 \right) + \gamma_j \quad (1.56)$$

$$E_{\omega}(t) \leq \beta_{\omega} E_{\omega}(0) + \delta_{\omega} \left(|E|_{W^{2,1}(0,T)}^2 + |\psi|_{W^{2,1}(0,T)}^2 \right) + \gamma_{\omega} \quad (1.57)$$

où $\delta_0, \delta_j, \delta_{\omega}, \gamma_j, \gamma_{\omega}, \beta_j, \beta_{\omega}$ sont des constantes positives.

Remarque: Les estimations obtenues dans la proposition 1.1, impliquent que les solutions j et ω appartiennent à $C^1(0,T)$ si les données i_0 et v_0 sont de régularité H^1 .

Preuve:

i) *Première estimation*

En multipliant (1.18) par j , (1.19) par ω , en sommant puis en intégrant entre 0 et L , il vient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L (\ell j^2 + c\omega^2) dx + \int_0^L (rj^2 + g\omega^2) dx + \int_0^L (A(t)j + B(t)\omega) dx$$

$$= \int_0^L \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} j + \frac{\partial j}{\partial x} \omega \right) dx$$

$$= \omega(L,t)j(L,t) - \omega(0,t)j(0,t) = 0$$

et donc,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L (\ell j^2 + c\omega^2) dx + \int_0^L (rj^2 + g\omega^2) dx \\ = -A(t) \int_0^L j dx - B(t) \int_0^L \omega dx \end{aligned} \quad (1.58)$$

or

$$\int_0^L j dx \leq \sqrt{L} \left(\int_0^L j^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{L}{\ell}} E_0^{\frac{1}{2}}(t)$$

où E_0 est défini en (1.52)

et, de même,

$$\int_0^L \omega dx \leq \sqrt{L} \left(\int_0^L \omega^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{L}{c}} E_0^{\frac{1}{2}}(t)$$

(1.58) s'écrit alors

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E_0(t) \leq \left(\sqrt{\frac{L}{\ell}} |A(t)| + \sqrt{\frac{L}{c}} |B(t)| \right) E_0^{\frac{1}{2}}(t)$$

soit encore

$$\frac{d}{dt} E_0^{\frac{1}{2}}(t) \leq \left(\sqrt{\frac{L}{\ell}} |A(t)| + \sqrt{\frac{L}{c}} |B(t)| \right) \quad (1.59)$$

et, en intégrant (1.49) entre 0 et $t \leq T$:

$$E_0^{\frac{1}{2}}(t) \leq E_0^{\frac{1}{2}}(0) + \int_0^t \left(\sqrt{\frac{L}{\ell}} |A(s)| + \sqrt{\frac{L}{c}} |B(s)| \right) ds$$

Soit donc

$$\begin{aligned} & \int_0^L (\ell j^2 + c\omega^2) dx \\ & \leq 2 \int_0^L \left(\ell j_0^2(x) + c\omega_0^2(x) \right) dx + 2 \left(\int_0^T \left(\sqrt{\frac{L}{\ell}} |A(s)| + \sqrt{\frac{L}{c}} |B(s)| \right) ds \right)^2 \end{aligned} \quad (1.60)$$

Pour démontrer les inégalités (1.56) et (1.57) estimant E_j et E_ω , on utilise le lemme suivant:

Lemme 1.1: Une fonction f appartenant à $H^1(0, L)$, L étant une constante strictement positive, vérifie les estimations suivantes

$$|f(0)| \leq \sqrt{2} \|f\|_{L^2(0, L)}^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_{L^2(0, L)}^{\frac{1}{2}} + |f(L)| \quad (1.61)$$

$$|f(L)| \leq \sqrt{2} \|f\|_{L^2(0, L)}^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_{L^2(0, L)}^{\frac{1}{2}} + |f(0)| \quad (1.62)$$

En effet

$$f^2(0) = -2 \int_0^L f(x) \frac{\partial f}{\partial x}(x) dx + f^2(L)$$

ou encore,

$$|f(0)|^2 \leq 2 \left(\|f\|_{L^2(0,L)} \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_{L^2(0,L)} + \frac{1}{2} f^2(L) \right)$$

d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz.

et donc

$$|f(0)| \leq \sqrt{2} \|f\|_{L^2(0,L)}^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_{L^2(0,L)}^{\frac{1}{2}} + |f(L)|$$

De manière identique, on obtient l'inégalité (1.62)

□

ii) Deuxième estimation

En dérivant l'équation (1.18) en temps, on obtient

$$\ell \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} + r \frac{\partial j}{\partial t} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial t} - A'$$

ou encore

$$\ell \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} + \left(r + \frac{\ell g}{c}\right) \frac{\partial j}{\partial t} + \frac{rg}{c} j - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 j}{\partial x^2} = -\frac{g}{c} A - A' \quad (1.63)$$

En multipliant l'équation (1.63) par $\frac{\partial j}{\partial t}$ et en intégrant l'équation obtenue entre 0 et L, il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \left(\ell \left(\frac{\partial j}{\partial t} \right)^2 + \frac{rg}{c} j^2 \right) dx + \left(r + \frac{\ell g}{c} \right) \int_0^L \left(\frac{\partial j}{\partial t} \right)^2 dx \\ = \frac{1}{c} \int_0^L \frac{\partial^2 j}{\partial x^2} \frac{\partial j}{\partial t} dx - \left(\frac{g}{c} A + A' \right) \int_0^L \frac{\partial j}{\partial t} dx \end{aligned} \quad (1.64)$$

or

$$\frac{\partial^2 j}{\partial x^2} \frac{\partial j}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial j}{\partial x} \frac{\partial j}{\partial t} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial j}{\partial x} \right)^2$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial j}{\partial t}(0, t) = 0 \\ \frac{\partial j}{\partial x}(L, t) = g\omega(L, t) + c \frac{\partial \omega}{\partial t}(L, t) + B(t) = B(t) \end{cases}$$

L'équation (1.64) s'écrit alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \ell \left(\frac{\partial j}{\partial t} \right)^2 + \frac{gr}{c} j^2 + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial j}{\partial x} \right)^2 dx + \left(r + \frac{\ell g}{c} \right) \int_0^L \left(\frac{\partial j}{\partial t} \right)^2 dx \\ = \frac{1}{c} B(t) \frac{\partial j}{\partial t}(L, t) - \left(\frac{g}{c} A + A' \right) \int_0^L \frac{\partial j}{\partial t} dx \end{aligned}$$

Soit encore, l'inégalité

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_0^L \ell \left(\frac{\partial j}{\partial t} \right)^2 + \frac{gr}{c} j^2 + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial j}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{c} B(t) j(L, t) \right] + \left(r + \frac{\ell g}{c} \right) \int_0^L \left(\frac{\partial j}{\partial t} \right)^2 dx \\ \leq \frac{1}{c} |j(L, t)| |B'| + \left| \frac{g}{c} A + A' \right| \left| \int_0^L \frac{\partial j}{\partial t} dx \right| \quad (1.65) \end{aligned}$$

car $j(0, t) = 0$ d'après (1.21)

On pose

$$E_j(t) = \int_0^L \ell \left(\frac{\partial j}{\partial t} \right)^2 + \frac{gr}{c} j^2 + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial j}{\partial x} \right)^2 dx$$

ainsi

$$\int_0^L \left| \frac{\partial j}{\partial t} \right| dx \leq \sqrt{\frac{L}{\ell}} E_j^{1/2}(t)$$

et

$$|j(L, t)| = \left| \int_0^L \frac{\partial j}{\partial x}(x, t) dx \right|$$

$$\leq \sqrt{Lc} E_j^{\frac{1}{2}}(t)$$

(1.65) s'écrit alors, en particulier,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} E_j(t) - \frac{1}{c} B(t) j(L, t) \right] \leq |G(t)| E_j^{\frac{1}{2}}(t) \quad (1.66)$$

où

$$G(t) = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{L}{c}} |B'| + \sqrt{Lc} \left| \frac{g}{c} A + A' \right|$$

vérifie

$$|G|_{L^1(0, T)} \leq \alpha_1 |\psi|_{W^{2,1}(0, T)} + \alpha_2 |E|_{W^{2,1}(0, T)}$$

α_1 et α_2 étant des constantes dépendant de (L, r, g, ℓ, c) .

On pose

$$\mathcal{F}_j(t) = E_j(t) - \frac{2}{c} B(t) j(L, t) \quad (1.67)$$

$\mathcal{F}_j$ vérifie la double inégalité

$$D_1 E_j - D_2(B) \leq \mathcal{F}_j \leq C_1 E_j + C_2(B) \quad (1.68)$$

C_1, C_2, D_1, D_2 sont des constantes positives dépendant éventuellement de $|B|$, cette quantité étant bornée d'après les hypothèses de régularité faites sur E et ψ (appartenant à $W^{2,1}(0, T)$).

L'inégalité (1.68) se démontre de la façon suivante:

D'une part,

$$\mathcal{F}_j \leq E_j + \frac{2}{c} |B| |j(L, t)|$$

$$\leq E_j + \frac{1}{c^2} |B|^2 + |j|_0 \left| \frac{\partial j}{\partial t} \right|_0 \text{ en vertu du lemme 1.1.}$$

Soit donc,

$$\mathcal{F}_j \leq E_j + \frac{1}{c^2} |B|^2 + \frac{c}{2} \left(\frac{1}{gr} + 1 \right) |E_j|$$

ce qui donne bien l'inégalité de droite de (1.68) avec

$$C_1 = 1 + \frac{c}{2} \left(\frac{1}{gr} + 1 \right)$$

et

$$C_2 = \frac{1}{c^2} |B|^2$$

D'autre part, puisque, quelque soit α constante strictement positive

$$2B(t)j(L,t) \leq \frac{1}{\alpha} |B(t)|^2 + c\alpha \left(\frac{1}{gr} + 1 \right) E_j,$$

$$\mathcal{F}_j = E_j - \frac{2}{c} B(t)j(L,t) \geq E_j - \frac{1}{c\alpha} |B|^2 - \alpha \left(\frac{1}{gr} + 1 \right) E_j$$

il suffit alors de choisir $\alpha < \frac{gr}{gr+1}$ pour obtenir l'inégalité de gauche de (1.68) avec

$$D_1 = \left(1 - \alpha \left(\frac{1}{gr} + 1 \right) \right)$$

et

$$D_2 = \frac{1}{c\alpha} |B|^2.$$

L'estimation (1.66) devient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathcal{F}_j) \leq |G| E_j^{\frac{1}{2}}$$

ou encore

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathcal{F}_j + D_2) \leq \frac{1}{(D_1)^{\frac{1}{2}}} |G| (\mathcal{F}_j + D_2)^{\frac{1}{2}}$$

et donc

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{F}_j + D_2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{|G|}{D_1^{\frac{1}{2}}} \quad (1.69)$$

En intégrant (1.69) entre 0 et $t \leq T$ il vient

$$(\mathcal{F}_j(t) + D_2)^{\frac{1}{2}} \leq (\mathcal{F}_j(0) + D_2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{D_1^{\frac{1}{2}}} \int_0^t |G(s)| ds$$

soit encore

$$\mathcal{F}_j(t) \leq 2\mathcal{F}_j(0) + 2D_2 + \frac{2}{D_1} \left(\int_0^T |G(s)| ds \right)^2$$

ce qui donne pour E_j

$$E_j(t) \leq \frac{2C_1}{D_1} E_j(0) + \delta_j \left(\|E\|_{W^{2,1}(0,T)}^2 + \|\psi\|_{W^{2,1}(0,T)}^2 \right) + 2 \frac{(C_2 + D_2)}{D_1}$$

et donc l'inégalité (1.56)

$$\text{avec } \beta_j = \frac{2 C_1}{D_1} \quad \text{et} \quad \gamma_j = \frac{2}{D_1} (C_2 + D_2)$$

iii) Troisième estimation

Les techniques de calcul pour l'obtention de l'inégalité (1.57) sont les mêmes que celles utilisées pour l'obtention de l'inégalité (1.56); (1.57) est, bien entendu, obtenue à partir de l'équation (1.19) dérivée en temps, multipliée par $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ et intégrée entre 0 et L.

On obtient alors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L c \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 + \frac{rg}{\ell} \omega^2 + \frac{1}{\ell} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 dx + \left(g + \frac{rc}{\ell} \right) \int_0^L \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 dx \\ &= - \frac{1}{\ell} A \frac{\partial \omega}{\partial t}(0, t) - \left(B' + \frac{r}{\ell} B \right) \int_0^L \frac{\partial \omega}{\partial t} dx \end{aligned}$$

et par le même calcul que dans l'estimation précédente, on obtient, en particulier, l'inégalité

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_0^L c \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 + \frac{rg}{\ell} \omega^2 + \frac{1}{\ell} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{\ell} A(t) \omega(0, t) \right] \\ \leq \frac{1}{\ell} |A'(t)| |\omega(0, t)| + \left| B' + \frac{r}{\ell} B \right| \int_0^L \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right) dx \quad (1.70) \end{aligned}$$

On pose

$$E_\omega(t) = \int_0^L c \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 + \frac{rg}{\ell} \omega^2 + \frac{1}{\ell} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 dx$$

ainsi

$$\int_0^L \left| \frac{\partial \omega}{\partial t} \right| dx \leq \sqrt{\frac{L}{c}} E_\omega^{\frac{1}{2}}(t)$$

et

$$|\omega(0, t)| \leq \sqrt{\frac{L}{\ell}} E_\omega^{\frac{1}{2}}(t)$$

(1.70) s'écrit alors

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} E_\omega(t) + \frac{1}{\ell} A(t) \omega(0, t) \right] \leq |H(t)| E_\omega^{\frac{1}{2}}(t) \quad (1.71)$$

où

$$H(t) = \frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{L}{\ell}} |A'| + \sqrt{\frac{L}{c}} \left| B' + \frac{r}{\ell} B \right|$$

vérifie

$$|H|_{L^1(0, T)} \leq \alpha_1' |\Psi|_{W^{2,1}(0, T)} + \alpha_2' |E|_{W^{2,1}(0, T)}$$

α_1 et α_2 étant des constantes dépendant de (L, r, g, l, c) .

On pose

$$\mathcal{F}_\omega(t) = E_\omega(t) + \frac{2}{\ell} A(t) \omega(0, T) \quad (1.72)$$

$\mathcal{F}_\omega$ vérifie la double inégalité

$$D_1' E_\omega - D_2' (A) \leq \mathcal{F}_\omega \leq C_1' E_\omega + C_2' \quad (1.73)$$

C_1', C_2', D_1', D_2' étant des constantes positives, dépendant éventuellement de $|A|$ quantité bornée.

La démonstration de l'inégalité de droite de (1.73) est immédiate (identique à la démonstration de (1.67)). Pour l'inégalité de gauche, il suffit de remarquer que

$$\mathcal{F}_\omega = E_\omega - \frac{2}{\ell} A(t) \int_0^L \frac{\partial \omega}{\partial x} dx$$

et

$$\begin{aligned} 2 A(t) \int_0^L \frac{\partial \omega}{\partial x} dx &\leq \frac{1}{\alpha} |A(t)| + \alpha \sqrt{2} \left(\int_0^L \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\alpha} |A(t)| + \frac{L}{4} + \alpha^2 \ell E_\omega \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathcal{F}_\omega \geq (1 - \alpha^2) E_\omega - \frac{1}{\ell} \left(\frac{1}{\alpha} |A| + \frac{L}{4} \right)$$

Il suffit de choisir α tel que $0 < \alpha < 1$ pour obtenir l'inégalité de gauche de (1.73), avec

$$D_1' = (1 - \alpha^2)$$

et

$$D_2' = \frac{1}{\ell} \left(\frac{1}{\alpha} |A| + \frac{L}{4} \right)$$

L'estimation (1.71) devient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\mathcal{F}_\omega) \leq |H| E_\omega^{\frac{3}{2}}$$

ce qui donne pour E_ω

$$E_\omega(t) \leq \frac{2C_1'}{D_1'} E_\omega(0) + \delta_\omega(|E|_{W^{2,1}(0,T)}^2 + |\psi|_{W^{2,1}(0,T)}^2) + \frac{2(C_2' + C_1')}{D_1'}.$$

Soit donc l'inégalité (1.57) avec

$$\beta_\omega = \frac{2C_1'}{D_1'} \quad \text{et} \quad \gamma_\omega = \frac{2}{D_1'} (C_2' + D_2')$$

□

I.1.3. Construction de l'application $\mathcal{L}$ et ses propriétés

Avant de traiter le problème non linéaire initial, nous montrons, grâce aux estimations obtenues au chapitre précédent, l'existence d'une fonctionnelle linéaire continue $\mathcal{L}$ qui, à $t \in [0, T]$, i_0, v_0, ψ et E donnés dans des espaces que l'on précisera, associe une combinaison linéaire de $\frac{\partial i}{\partial x}(0, t)$ et de $\frac{\partial v}{\partial x}(0, t)$;

elle est définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\{i_0, v_0, \psi, E\}}(t) &= \frac{1}{c} \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) - \frac{\sigma}{\ell} \frac{\partial i}{\partial x}(0, t) \\ &= \frac{1}{c} \mathcal{L}_v\{i_0, v_0, \psi, E\}(t) - \frac{\sigma}{\ell} \mathcal{L}_i\{i_0, v_0, \psi, E\}(t) \end{aligned}$$

où $\mathcal{L}_v$ et $\mathcal{L}_i$ sont définies dans la

Proposition 1.2:: Si $\psi \in W^{2,1}(0, T)$,
 $E \in W^{2,1}(0, T)$,

$(i_0, v_0) \in (H^1(0, L))^2$ et vérifiant les conditions (1.6) et (1.7),
 alors

il existe deux fonctionnelles linéaires $\mathcal{L}_i$ et $\mathcal{L}_v$ définies par

$$\ell_i : (i_0, v_0, \psi, E), t \rightarrow \ell_{i\{i_0, v_0, \psi, E\}}(t) = \frac{\partial i}{\partial x}(0, t) \quad (1.74)$$

$$\ell_v : (i_0, v_0, \psi, E), t \rightarrow \ell_{v\{i_0, v_0, \psi, E\}}(t) = \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) \quad (1.75)$$

De plus,

ces deux fonctionnelles sont continues de

$$H^1(0, L) \times H^1(0, L) \times W^{2,1}(0, T) \times W^{2,1}(0, T) \text{ dans } L^2(0, L)$$

Preuve:

Nous nous inspirons du cas de la dimension un dans le lemme 3.7 (page 40) de J.L. Lions [L].

Considérons à nouveau les équations (1.12) à (1.16). On cherche à déterminer des estimations aux bords pour les quantités v et i , en considérant une fonction plateau θ , définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, paire, de classe C^∞ telle que

$$\theta(0) = 1$$

$$\text{et } \theta(L) = 0.$$

(θ est une fonction régulière, de valeur maximum égale à 1).

En dérivant en x , les équations (1.18) et (1.19), il vient

$$\ell \frac{\partial^2 j}{\partial t \partial x} + r \frac{\partial j}{\partial x} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad (1.76)$$

et

$$c \frac{\partial^2 \omega}{\partial t \partial x} + g \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial^2 j}{\partial x^2} \quad (1.77)$$

En multipliant (1.76) par $c\theta \frac{\partial \omega}{\partial x}$, (1.77) par $\ell\theta \frac{\partial j}{\partial x}$, en sommant les deux équations obtenues, puis en intégrant en x et en t :

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_0^T \theta(x) \left(c \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \ell \frac{\partial^2 j}{\partial x^2} \frac{\partial j}{\partial x} \right) dx dt \\ &= \int_0^L \int_0^T \theta(x) \left(\ell c \frac{\partial^2 j}{\partial t \partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \ell c \frac{\partial^2 \omega}{\partial t \partial x} \frac{\partial j}{\partial x} + \ell g \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial j}{\partial x} + cr \frac{\partial j}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) dx dt \end{aligned}$$

qui s'écrit encore sous la forme:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^L \frac{\theta(x)}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[c \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \ell \left(\frac{\partial j}{\partial x} \right)^2 \right] dx dt \\ &= (cr + \ell g) \int_0^T \int_0^L \theta(x) \frac{\partial j}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} dx dt + \ell c \int_0^T \int_0^L \theta(x) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial j}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) dx dt \end{aligned}$$

et, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left[\frac{\theta(x)}{2} \left(c \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \ell \left(\frac{\partial j}{\partial x} \right)^2 \right) \right]_{x=0}^L dt \\ & \quad - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \left(c \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \ell \left(\frac{\partial j}{\partial x} \right)^2 \right) dx dt \\ &= (cr + \ell g) \int_0^T \int_0^L \theta(x) \frac{\partial j}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} dx dt \\ & \quad + \ell c \int_0^L \theta(x) \left[\frac{\partial j}{\partial x}(x, T) \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, T) - \frac{\partial j}{\partial x}(x, 0) \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, 0) \right] dx \quad (1.78) \end{aligned}$$

et puisque $\theta(0) = 1$
et $\theta(L) = 0$,

l'équation (1.78) s'écrit encore

$$\frac{1}{2} \int_0^T \left(c \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}(0, t) \right)^2 + \ell \left(\frac{\partial j}{\partial x}(0, t) \right)^2 \right) dt$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L \frac{\partial \theta}{\partial x}(x) \left(c \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \ell \left(\frac{\partial j}{\partial x} \right)^2 \right) dx dt \\
= & - (cr + \ell g) \int_0^T \int_0^L \theta(x) \frac{\partial j}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} dx dt \\
& + \ell c \int_0^L \theta(x) \left[\frac{\partial j_0}{\partial x} \frac{\partial \omega_0}{\partial x} - \frac{\partial j(x,T)}{\partial x} \frac{\partial \omega(x,T)}{\partial x} \right] dx \quad (1.79)
\end{aligned}$$

D'autre part, θ étant bornée,

$$2 \int_0^L \theta \frac{\partial j}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} dx \leq \int_0^L \left(\left(\frac{\partial j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right) dx \quad (1.80)$$

et ainsi, par (1.80) et (1.79), on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned}
\int_0^T c \left(\frac{\partial \omega(0,t)}{\partial x} \right)^2 + \ell \left(\frac{\partial j(0,t)}{\partial x} \right)^2 dt & \leq K \int_0^T \int_0^L \left(\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial j}{\partial x} \right)^2 \right) dx dt \\
& + \ell c \int_0^L \theta(x) \left[\frac{\partial j_0}{\partial x} \frac{\partial \omega_0}{\partial x} - \frac{\partial j(x,T)}{\partial x} \frac{\partial \omega(x,T)}{\partial x} \right] dx \quad (1.81)
\end{aligned}$$

où K est une constante ne dépendant que des paramètres (ℓ, g, r, c) et de θ ;

et, en utilisant les estimations (1.56) et (1.57) de la proposition 1.1, en particulier pour les quantités

$$\int_0^L \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 dx \quad \text{et} \quad \int_0^L \left(\frac{\partial j}{\partial x} \right)^2 dx,$$

l'inégalité (1.81) aboutit à

$$\begin{aligned} & \int_0^T c \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}(0, t) \right)^2 + \ell \left(\frac{\partial j}{\partial x}(0, t) \right)^2 dt \\ & \leq C(L, r, \ell, g, c) (1+T) \times \left(\|j_0\|_1^2 + \|\omega_0\|_1^2 + |\psi|_{W^{2,1}(0,T)}^2 + |E|_{W^{2,1}(0,T)}^2 \right) \quad (1.82) \end{aligned}$$

Enfin, puisque, par (1.10) et (1.17),

$$\begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial x}(0, t) &= \frac{\partial j}{\partial x}(0, t) \\ \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) &= \frac{\partial \omega}{\partial x}(0, t) \end{aligned}$$

et d'après (1.22), l'inégalité (1.82) donne lieu aux deux estimations suivantes:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \ell \left(\frac{\partial i}{\partial x}(0, t) \right)^2 dt \leq C(L, \ell, r, g, c) (1+T) \times \\ & \left[\|i_0\|_1^2 + \|v_0\|_1^2 + |\psi|_{W^{2,1}(0,T)}^2 + |E|_{W^{2,1}(0,T)}^2 \right] \quad (1.83) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad & \int_0^T c \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}(0, t) \right)^2 dt \leq C(L, \ell, r, g, c) (1+T) \times \\ & \left[\|i_0\|_1^2 + \|v_0\|_1^2 + |\psi|_{W^{2,1}(0,T)}^2 + |E|_{W^{2,1}(0,T)}^2 \right] \quad (1.84) \end{aligned}$$

prouvant ainsi l'existence et la continuité des deux fonctionnelles définies par les relations (1.74) et (1.75).

I.2. Le Problème non linéaire

Revenons au problème non linéaire (0.1)-(0.6).

Par un théorème de point fixe, et, en utilisant la fonctionnelle $\mathcal{L}$ définie à la section précédente, nous énonçons un premier résultat prouvant l'existence locale de la solution (i,v) du problème (0.1)-(0.6), dans $C([0,T];H^1(0,L))^2$.

Puis nous montrerons que la norme de la solution dans cet espace ne peut exploser en temps fini, ce qui nous permettra de conclure sur l'existence globale en temps de la solution.

Théorème 1.2: (Existence locale)

On se donne

$$E \in W^{2,1}(0,T),$$

$$(i_0, v_0) \in (H^1(0,L))^2 \text{ vérifiant (1.6)-(1.7).}$$

Pour T assez petit,

le problème (0.1)-(0.6) possède une solution (i,v) vérifiant

$$i \in C([0,T], H^1(0,L))$$

$$v \in C([0,T], H^1(0,L))$$

$$\text{avec } \varphi \in W^{2,1}(0,T)$$

Preuve:

Soit (i,v) le couple solution de problème linéaire (1.1)-(1.7), pour lequel

$$\psi(t) = f(\varphi(t)) \quad (1.85)$$

et

$$\frac{d\varphi}{dt} = v(0,t) - \sigma i(0,t) \quad (1.86)$$

La démonstration du théorème (1.2) se fait par une méthode de point fixe, pour laquelle on utilisera les résultats de la proposition 1.2. Nous définirons une application ζ opérant sur φ et montrerons que cette application est contractante dans l'espace métrique

$$\mathcal{F}(M, \varphi_0) \text{ défini par}$$

pour $M > 0$, $\alpha > 0$, β , φ_0 des constantes réelles fixées et f vérifiant la propriété 0.7,

$$\mathcal{F}(M, \varphi_0) = \left\{ \varphi \in W^{2,1}(0, T), \varphi(0) = \varphi_0 \text{ et } \int_0^T \left[\frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right]^2 dt \leq M \right\} \quad (1.87)$$

Soit ζ une application de $W^{2,1}(0, T)$ dans lui-même, telle que $\zeta\varphi$ soit solution de l'équation différentielle:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(\zeta\varphi) + \alpha(\zeta\varphi) + \beta F(\zeta\varphi) \\ &= \int_0^t \mathcal{L}_{\{i_0, v_0, f(\varphi), E\}}(s) ds + v_0(0) - \sigma i_0(0) + \alpha\varphi(0) + \beta F(\varphi)(0) \end{aligned} \quad (1.88)$$

où

$$F(\varphi) = \int_0^\varphi f(\sigma) d\sigma$$

et

$$\mathcal{L}_{\{i_0, v_0, \varphi, E\}}(s) = \frac{1}{c} \mathcal{L}_v \{i_0, v_0, \varphi, E\}(s) - \frac{\sigma}{\ell} \mathcal{L}_i \{i_0, v_0, \varphi, E\}(s)$$

où les fonctionnelles $\mathcal{L}_v$ et $\mathcal{L}_i$ ont été définies en (1.74) et (1.75).

Pour $\varphi \in W^{2,1}(0, T)$, $f(\varphi) \in W^{2,1}(0, T)$,

et puisque $((i_0, v_0), E) \in (H^1(0, L))^2 \times W^{2,1}(0, T)$,

$\mathcal{L}_{\{i_0, v_0, f(\varphi), E\}}(\cdot)$ est linéaire, continue, de

$$(H^1(0, L))^2 \times (W^{2,1}(0, T))^2 \times [0, T] \text{ dans } L^2(0, T)$$

d'après la proposition 1.2.

Donc, pour $\varphi \in W^{2,1}(0, T)$, $(\zeta\varphi)$ solution de l'équation différentielle (1.88), appartient à $W^{2,1}(0, T)$.

Cette application ζ est définie et contractante de $\mathcal{F}(M, \varphi_0)$ dans lui-même comme nous le montrons dans le lemme suivant:

Lemme 1.2: f appartenant à $C^2(W^{2,1}(0, T))$,

(i_0, v_0) étant donné dans $(H^1(0, L))^2$ vérifiant (0.9)

α, β, M_0 étant des constantes ($M_0 \geq 0$),

alors pour $M \leq M_0$

il existe T_0 tel que pour T suffisamment petit ($T \leq T_0$),

ζ possède les propriétés suivantes :

- ζ est une application de $\mathcal{F}(M, \varphi_0)$ dans $\mathcal{F}(M, \varphi_0)$ (1.89)
- $(\varphi_1, \varphi_2) \in (\mathcal{F}(M, \varphi_0))^2$,

$$\int_0^T |D(\zeta\varphi_1 - \zeta\varphi_2)(t)|^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_0^T |D(\varphi_1 - \varphi_2)|^2 dt \quad (1.90)$$

où D est l'opérateur défini par

$$D\varphi(t) = \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \alpha \frac{d\varphi}{dt}(t) + \beta f(\varphi(t)) \quad (1.91)$$

Preuve :

Soit $\varphi \in \mathcal{F}(M, \varphi_0)$,

i) D'après (1.88),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\zeta\varphi)(0) + \alpha(\zeta\varphi)(0) + \beta F(\zeta\varphi)(0) \\ = v_0(0) - \sigma i_0(0) + \alpha\varphi(0) + \beta F(\varphi)(0) \\ = \frac{d}{dt}\varphi(0) + \alpha\varphi(0) + \beta F(\varphi)(0) \end{aligned}$$

et donc

$$(\zeta\varphi)(0) = \varphi(0) = \varphi_0.$$

Pour $\varphi \in \mathcal{F}(M, \varphi_0)$, l'équation (1.88) dérivée en temps s'écrit

$$D(\zeta\varphi)(t) = \mathcal{L}_{\{i_0, v_0, f(\varphi), E\}}(t) \quad (1.92)$$

et donc, par les estimations (1.83) et (1.84)

$$\int_0^T |D(\zeta\varphi)(t)|^2 dt \leq C(1+T) \left(\|v_0\|_1^2 + \|i_0\|_1^2 + |f(\varphi)|_{W^{2,1}(0,T)}^2 + |E|_{W^{2,1}(0,T)}^2 \right) \quad (1.92')$$

et, pour $T \leq 1$

$$\int_0^L \|D(\zeta\varphi)(t)\|^2 dt \leq 2C \left(\|v_0\|_1^2 + \|i_0\|_1^2 + |f(\varphi)|_{W^{2,1}}^2 + |E|_{W^{2,1}}^2 \right) \quad (1.93)$$

C étant une constante pouvant dépendre de L, ℓ, r, g, c .

D'autre part, φ appartenant à $\mathcal{F}(M, \varphi_0)$,

$$\varphi(0) = \varphi_0 \quad \text{et} \quad \int_0^T \left| \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right|^2 dt \leq M$$

De plus,

$$|f(\varphi)|_{W^{2,2}(0,T)}^2 \leq C'(\varphi_0, \frac{d\varphi}{dt}(0)) \int_0^T \left| \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right|^2 dt$$

soit donc

$$|f(\varphi)|_{W^{2,2}(0,T)} \leq C'(\varphi_0, \frac{d\varphi}{dt}(0)) M$$

ainsi, par (1.93),

$$\int_0^T \left| \frac{d^2\zeta\varphi}{dt^2} \right|^2 dt \leq 2C \left\{ C'(\varphi_0)M + \|i_0\|_1^2 + \|v_0\|_1^2 + |E|_{W^{2,1}(0,T)}^2 \right\} \quad (1.94)$$

On peut alors trouver M_0 tel que pour $M \leq M_0$,

il existe T_0 (dépendant de M) telle que

pour tout $T \leq T_0$,

$$\int_0^T \left| \frac{d^2 \zeta \varphi}{dt^2} \right|^2 dt \leq M,$$

ζ est donc définie de $\mathcal{F}(M, \varphi_0)$ dans lui-même.

ii) *Etude de $(\zeta \varphi_1 - \zeta \varphi_2)$, φ_1 et φ_2 étant des fonctions de $\mathcal{F}(M, \varphi_0)$:*

Par (1.92')

$$D(\zeta \varphi_1 - \zeta \varphi_2)(t) = \mathcal{L}_{\{0,0,f(\varphi_1)-f(\varphi_2),0\}}(t)$$

et donc par (1.93),

$$\begin{aligned} \int_0^T |D(\zeta \varphi_1 - \zeta \varphi_2)(t)|^2 dt &\leq C(1+T) \|f(\varphi_1) - f(\varphi_2)\|_{W^{2,1}(0,T)}^2 \\ &\leq CT(1+T) \|f(\varphi_1) - f(\varphi_2)\|_{W^{2,2}(0,T)}^2 \end{aligned}$$

et puisque φ_1 et φ_2 appartiennent à $\mathcal{F}(M, \varphi_0)$, cette dernière inégalité s'écrit aussi

$$\int_0^T |D(\zeta \varphi_1 - \zeta \varphi_2)(t)|^2 dt \leq K(M, \varphi_0) T(1+T) \int_0^T (|D(\varphi_1 - \varphi_2)|^2(t)) dt$$

où K est une constante dépendant de M et de φ_0 .

Il suffit alors de choisir $T_0(M)$ tel que pour $T \leq T_0(M)$, M fixé, $K(M, \varphi_0) T(1+T) \leq \frac{1}{2}$ et ainsi l'inégalité (1.90) est démontrée, ce qui achève la preuve du lemme.

□

Revenons au problème non linéaire:

L'égalité (1.86) s'écrit

$$\frac{d\varphi}{dt} = v_0(0) - \sigma i_0(0) + \int_0^t \left(\frac{\partial v}{\partial s}(0,s) - \sigma \frac{\partial i}{\partial s}(0,s) \right) ds$$

soit encore

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} = & v_0(0) - \sigma i_0(0) \\ & + \int_0^t \left(\frac{1}{c} \left(\frac{\partial i}{\partial x}(0,s) - g v(0,s) \right) - \frac{\sigma}{\ell} \left(\frac{\partial v}{\partial x}(0,s) - r i(0,s) \right) \right) ds \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} = & v_0(0) - \sigma i_0(0) + \int_0^t \mathcal{L}_{\{i_0, v_0, f(\varphi), E\}}(s) ds \\ & - \alpha \int_0^t \frac{d\varphi}{ds}(s) ds - \beta \int_0^t f(\varphi(s)) ds \end{aligned} \quad (1.95)$$

$$\text{où } \alpha = \frac{g}{c} \text{ et } \beta = \sigma \left(\frac{g}{c} - \frac{r}{\ell} \right).$$

Résoudre (1.95) revient alors à résoudre l'équation différentielle:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} + \alpha \varphi(t) + \beta F(\varphi(t)) \\ = \int_0^t \mathcal{L}_{\{i_0, v_0, f(\varphi), E\}}(s) ds + v_0(0) - \sigma i_0(0) + \alpha \varphi(0) + \beta F(\varphi)(0) \end{aligned} \quad (1.96)$$

$(\zeta\varphi)$ étant solution de (1.88), la solution de (1.96) est donc le point fixe de l'application:

$$\zeta\varphi = \varphi.$$

Le lemme 1.2 prouve le caractère contractant de l'application ζ , et donc l'existence et l'unicité de ce point fixe φ de ζ ce qui achève la démonstration du théorème (1.2).

□

On a alors le résultat de continuation classique suivant:

Proposition 1.1: *Soit T est fini et alors la quantité*

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \sup \left(\int_0^L \left(\left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + v^2 + i^2 \right) dx + \int_0^t \left(\left| \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right|^2 + \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|^2 + |\varphi|^2 \right) ds \right)$$

n'est pas finie,

• Soit T est infini.

Nous allons donc chercher à montrer maintenant que la quantité (1.97) ne peut exploser en temps fini, ce qui prouvera l'existence globale - et non plus seulement locale - de la solution.

I.2.2. Le théorème d'existence globale

On introduit ici de nouvelles hypothèses sur f:

Il existe des constantes positives C et C_0 telles que
 $\forall \varphi \in W^{2,1}(0,T),$

$$(H_0) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cdot \frac{df}{d\varphi}(\varphi) \geq -C \\ \cdot F(\varphi) = \int_0^\varphi f(\sigma) d\sigma \text{ est telle que } F(\varphi) \geq -C_0 \end{array} \right.$$

Cette hypothèse est en particulier vérifiée quand f est une fonction polynômiale de degré impair à coefficients positifs.

Avant d'établir le théorème d'existence globale, remarquons que :

Remarque 1.5 : Pour $E \in W^{2,1}(0,T)$, $f \in C^3(\mathbb{R})$ satisfaisant (H_0) ,
 et $(i_0, v_0) \in (H^1(0,L))^2$ satisfaisant (0.9),
 les quantités $F(\varphi)$ et donc φ sont bornées, $\forall t \in \mathbb{R}^+$.

En effet, si on pose

$$\tilde{v}(x,t) = v(x,t) - \frac{x}{L} E(t) \tag{1.98}$$

les équations (0.1) à (0.5) s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{E(t)}{L} = ri + \ell \frac{\partial i}{\partial t} \end{array} \right. \quad (1.99)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial i}{\partial x} - \frac{x}{L} \left(gE + c \frac{dE}{dt} \right) = g\tilde{v} + c \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (1.100)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{v}(L, t) = 0 \end{array} \right. \quad (1.101)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{v}(0, t) = \frac{d\varphi}{dt} + \sigma i(0, t) \end{array} \right. \quad (1.102)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i(0, t) = f(\varphi) \end{array} \right. \quad (1.103)$$

En multipliant (1.99) par i , (1.100) par $\tilde{v}$ et en intégrant entre 0 et L la somme des deux équations obtenues, il vient:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \ell i^2 + c \tilde{v}^2 dx + 2F(\varphi) + \int_0^L ri^2 + g\tilde{v}^2 dx + \sigma [f(\varphi)]^2 \\ = - \int_0^L i \frac{E(t)}{L} dx + \left(g \frac{E}{L} + \frac{c}{L} \frac{dE}{dt} \right) \int_0^L x \tilde{v} dx \end{aligned} \quad (1.104)$$

Le terme de droite de (1.104) est majoré, d'après l'inégalité de Young, par

$$\left| \frac{E(t)}{L} \right| \left(\frac{r}{2} \int_0^L i^2 dx + \frac{L}{2r} \right) + \frac{1}{L} \left(gE(t) + c \frac{dE(t)}{dt} \right) \left(\frac{g}{2} \int_0^L \tilde{v}^2 dx + \frac{L^2}{4g} \right) \quad (1.105)$$

et puisque $E \in W^{2,1}(0, T)$, par (1.104) et (1.105), on a en particulier que

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^L (\ell i^2 + c \tilde{v}^2) dx + 2 F(\varphi) \right) \leq \text{Constante} \quad (1.106)$$

impliquant alors que $F(\varphi)$ et donc φ sont bornées.

Nous pouvons maintenant énoncer le

Théorème 1.3: (Existence globale)

Sous les hypothèses données en théorème 1.2, la solution du problème (0.1)-(0.6) existe pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Preuve :

Soit (i, v) la solution du problème (0.1)-(0.6) sur $[0, T[, T < \infty$.

On appelle M la borne supérieure de φ sur $\mathbb{R}^+$:

$$|\varphi(t)| < M \quad \forall t \quad (1.107)$$

On veut montrer que T ne peut être fini, et donc que la quantité

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \sup \int_0^L \left(\frac{\partial v^2}{\partial x} + v^2 + \frac{\partial i^2}{\partial x^2} + i^2 \right) dx + \int_0^t \left(\left(\frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \varphi^2 \right) ds \quad (1.108)$$

est bornée.

Considérons à nouveau la fonction θ définie au chapitre I.2.1

En dérivant (1.1) et (1.2) en temps, en multipliant les équations

obtenues par $\theta \frac{\partial v}{\partial x}$ et $\theta \frac{\partial i}{\partial x}$ respectivement, en intégrant en temps et en espace la somme des deux équations, il vient,

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^L \theta(x) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} \left[c \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \ell \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)^2 \right] dx ds \\ &= \int_0^t \int_0^L \theta(x) (cr + \ell g) \frac{\partial i}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx ds + \ell c \int_0^t \int_0^L \theta(x) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial i}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} \right) dx ds \quad (1.109) \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(\theta \left(c \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \ell \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)^2 \right) \right) dx ds = \int_0^t \int_0^L \frac{d\theta}{dx} \left(c \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \ell \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)^2 \right) dx ds \\ & + 2 \int_0^t \int_0^L \theta (cr + \ell g) \frac{\partial i}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx ds + 2\ell c \int_0^L \left(\theta \frac{\partial i}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial i(x, 0)}{\partial x} \frac{\partial v(x, 0)}{\partial x} \right) dx \quad (1.110) \end{aligned}$$

Puisque, par hypothèse, $\theta(L) = 0$ et $\theta(0) = 1$,

le terme de gauche de (1.110) s'écrit aussi

$$- \int_0^t c \left(\frac{\partial v(0,s)}{\partial x} \right)^2 + \ell \left(\frac{\partial i(0,s)}{\partial x} \right)^2 ds \quad (1.111)$$

et par (0.1), (0.2), (0.3), (0.4),

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}(0,t) &= ri(0,t) + \ell \frac{\partial i}{\partial t}(0,t) \\ &= rf(\varphi) + \ell \frac{d}{dt}f(\varphi) \end{aligned} \quad (1.112)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial x}(0,t) &= gv(0,t) + c \frac{\partial v}{\partial t}(0,t) \\ &= g \frac{d\varphi}{dt} + \sigma gf(\varphi) + c \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \sigma c \frac{d}{dt}f(\varphi) \end{aligned}$$

(1.110) s'écrit alors

$$\begin{aligned} & - \int_0^t c \left(rf(\varphi) + \ell \frac{d}{ds}f(\varphi) \right)^2 + \ell \left(g \frac{d\varphi}{ds} + c \frac{d^2\varphi}{ds^2} + \sigma \left(gf(\varphi) + c \frac{df(\varphi)}{ds} \right) \right)^2 ds \\ &= 2(cr + \ell g) \int_0^t \int_0^L \theta \frac{\partial i}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx ds + \int_0^t \int_0^L \frac{d\theta}{dx} \left(c \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \ell \left(\frac{\partial i}{\partial t} \right)^2 \right) dx dt \\ & \quad + 2\ell c \int_0^L \theta(x) \left[\frac{\partial i}{\partial x}(t,x) \frac{\partial v}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial i}{\partial x}(0,x) \frac{\partial v}{\partial x}(0,x) \right] dx \end{aligned} \quad (1.113)$$

θ étant de classe C^∞ , bornée, à support compact, φ , $f(\varphi)$, $f'(\varphi)$ étant bornées, de (1.113), on peut déduire l'inégalité suivante permettant d'estimer φ dans $W^{2,1}(0,T)$ en fonction de i et v dans $C^1(0,T; (H^1(0,L))^2)$:

$$\int_0^t \left(\alpha \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \beta \frac{d\varphi}{ds} \frac{d^2\varphi}{ds^2} + \gamma \frac{d^2\varphi}{ds^2} \right) ds$$

$$\leq K_1 \int_0^t \int_0^L \left(c \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \ell \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)^2 \right) dx ds + K_2 \int_0^L \left(\left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) dx + K_3 \quad (1.114)$$

où α, β, γ sont des constantes dépendant de ℓ, r, g, c, σ, L et K_1, K_2, K_3 sont des constantes pouvant dépendre de

$$(\ell, r, g, c, \sigma, L, \sup_x |\theta(x)|, \sup_x \left| \frac{d\theta(x)}{dx} \right|, \|i_0\|_1, \|v_0\|_1, M).$$

Essayons maintenant d'estimer le terme de droite de (1.114):

Par (0.1) et (0.2) dérivées en x , on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L c \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \ell \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)^2 dx = \int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - g \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial i}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - r \frac{\partial i}{\partial t} \right) \right) dx$$

soit encore

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L c \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \ell \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^L g \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + r \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)^2 dx \\ = \frac{\partial v}{\partial x}(L, t) \frac{\partial i}{\partial x}(L, t) - \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) \frac{\partial i}{\partial x}(0, t) \\ = (ri(L, t) + \ell \frac{\partial i}{\partial t}(L, t))(J(t)) - Y(\varphi) \end{aligned} \quad (1.115)$$

où on a posé

$$J(t) = gE(t) + c \frac{dE}{dt}(t) \in W^{1,2}(0, T) \quad (1.116)$$

et

$$\begin{aligned} Y(\varphi) &= \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) \frac{\partial i}{\partial x}(0, t) \\ &= \left[rf(\varphi) + \ell \frac{d}{dt} f(\varphi) \right] \times \left[g \frac{d\varphi}{dt} + c \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + g\sigma f(\varphi) + c\sigma \frac{d}{dt} f(\varphi) \right] \end{aligned} \quad (1.117)$$

En utilisant les quatre égalités :

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad & f(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} F(\varphi) \quad \text{où} \quad \frac{dF(\varphi)}{d\varphi} = f(\varphi) \\
 \text{ii)} \quad & \frac{d}{dt} f(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} = \frac{df(\varphi)}{d\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \\
 \text{iii)} \quad & f(\varphi) \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(f(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} \right) - \left(\frac{df(\varphi)}{d\varphi} \right) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \\
 \text{iv)} \quad & \left(\frac{df(\varphi)}{d\varphi} \right) \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \frac{df(\varphi)}{d\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \frac{d^2 f(\varphi)}{d\varphi^2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^3
 \end{aligned}$$

On peut écrire $Y(\varphi)$ sous la forme

$$\begin{aligned}
 Y(\varphi) = & \frac{d}{dt} \left[grF(\varphi) + rcf(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} + \sigma \frac{(rc+\ell g)}{2} [f(\varphi)]^2 + \frac{\ell c}{2} \frac{df(\varphi)}{d\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \\
 & + \sigma rg[f(\varphi)]^2 + \left[\frac{df(\varphi)}{d\varphi} \left(\sigma c \ell \frac{df(\varphi)}{d\varphi} - rc + \ell g \right) \right] \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \\
 & - \frac{\ell c}{2} \frac{d^2 f(\varphi)}{d\varphi^2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^3 \quad (1.118)
 \end{aligned}$$

(1.115) devient alors

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_0^L c \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \ell \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)^2 dx - \ell i(L, t) J(t) + grF(\varphi) + rcf(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} \right. \\
 & \left. + \sigma \left(\frac{rc+\ell g}{2} \right) [f(\varphi)]^2 + \frac{\ell c}{2} \frac{df(\varphi)}{d\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] + \int_0^L g \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \ell \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)^2 dx \\
 & = (rJ(t) - \ell J'(t)) i(L, t) + \sigma rg(f(\varphi))^2 \\
 & + \left[\frac{df}{d\varphi} \left(\sigma c \ell \frac{df(\varphi)}{d\varphi} - rc + \ell g \right) \right] \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \frac{\ell c}{2} \frac{d^2 f(\varphi)}{d\varphi^2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^3 \quad (1.119)
 \end{aligned}$$

φ étant bornée ainsi que les dérivées de f en φ , on a l'inégalité suivante :

$$|rJ(t) - \ell J'(t)| |i(L, t)|$$

$$\leq \frac{1}{r} (|rJ(t)| + |\ell J'(t)|)^2 + \frac{r}{4L} |i(L, t)|^2$$

$$\leq \frac{2L}{r} (|rJ(t)|^2 + |\ell J'(t)|^2) + \frac{r}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{r^3}{2L} |f(\varphi)|^2 \quad (1.120)$$

qui conduit, si on intègre (1.119) entre 0 et t, à l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^L c \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \ell \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)^2 dx - \ell i(L, t) J(t) + grF(\varphi) + rcf(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} \\ & + \sigma \frac{(rc + \ell g)}{2} [f(\varphi)]^2 + \frac{\ell c}{2} \frac{df}{d\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \int_0^t \int_0^L g \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{r}{2} \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)^2 dx ds \\ & \leq C_1 \left(\int_0^t \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 ds + \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|^3 ds + C_2(t) \right) \end{aligned} \quad (1.121)$$

où C_1 et $C_2(t)$ sont des constantes pouvant dépendre de

$$(M, |E|_{W^{2,2}(0,T)}, \|i_0\|_1, \|v_0\|_1, \varphi(0), \frac{d\varphi}{dt}(0), \ell, r, g, c, \sigma, L).$$

Par les techniques exposées dans la démonstration de la proposition 1.1, on peut montrer que les énergies

$$\mathcal{E} - \ell i(L, t) J(t) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}, \quad \text{où} \quad \mathcal{E} = \int_0^L c \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \ell \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)^2 dx$$

sont équivalentes.

D'après les hypothèses (H_0) , (1.121) s'écrit en particulier

$$\frac{1}{2} \int_0^L c \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \ell \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)^2 dx + rcf(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} + \int_0^t \int_0^L g \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{r}{2} \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)^2 dx$$

$$\leq \int_0^t \left(\left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|^3 \right) ds + C_2(t) \quad (1.122)$$

Or, d'après l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg [B], il existe $C(t)$ telle que

$$\int_0^t \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^3 ds \leq C(t) \left\{ \left(\int_0^t \varphi^2 ds \right)^{3/2} + \left(\int_0^t \left(\frac{d^2\varphi}{ds^2} \right)^2 ds \right)^{7/8} \left(\int_0^t \varphi^2 ds \right)^{5/8} \right\}$$

et puisque φ est bornée dans $\mathbb{R}$,

$$\int_0^t \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^3 ds \leq C(t) \left\{ 1 + \left(\int_0^t \left(\frac{d^2\varphi}{ds^2} \right)^2 ds \right)^{7/8} \right\} \quad (1.123)$$

Ainsi, par (1.122)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^L c \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \ell \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)^2 dx + rcf(\varphi) + \int_0^t \int_0^L g \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{r}{2} \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)^2 dx ds \\ \leq C \left(\int_0^t \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 ds + \left(\int_0^t \left(\frac{d^2\varphi}{ds^2} \right)^2 ds \right)^{7/8} + 1 \right) \end{aligned} \quad (1.124)$$

Reprenons l'inégalité (1.114); par (1.124) et en remarquant que

$$\left| f(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} \right| \leq C(M) \left(\int_0^t \frac{d^2\varphi}{ds^2} ds + \frac{d\varphi}{dt}(0) \right)$$

il vient, δ étant une constante positive,

$$\int_0^t \alpha \frac{d\varphi}{ds} + \beta \frac{d\varphi}{ds} \frac{d^2\varphi}{ds^2} + \delta \left(\frac{d^2\varphi}{ds^2} \right)^2 ds$$

$$\leq \left(\int_0^t \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 ds + \left(\int_0^t \left(\frac{d^2\varphi}{ds^2} \right)^2 ds \right)^{7/8} + 1 \right) \quad (1.125)$$

ce qui implique que

$$\int_0^t \left(\frac{d^2\varphi}{ds^2} \right)^2 ds \leq C_1 \int_0^t \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 ds + C_2 \left(\int_0^t \left(\frac{d^2\varphi}{ds^2} \right)^2 ds \right)^{7/8} + C_3 \quad (1.126)$$

C_1, C_2, C_3 étant de nouvelles constantes.

En utilisant à nouveau l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg,

$$\int_0^t \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 ds \leq C'(t) \left\{ \left(\int_0^t \varphi^2 ds \right) + \left(\int_0^t \left(\frac{d^2\varphi}{ds^2} \right)^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \varphi^2 ds \right)^{1/2} \right\}$$

et, en particulier, puisque φ est bornée sur $\mathbb{R}$

$$\int_0^t \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 ds \leq C'(t) \left\{ 1 + \left(\int_0^t \left(\frac{d^2\varphi}{ds^2} \right)^2 ds \right)^{1/2} \right\}$$

d'où finalement, en reprenant (1.126)

$$\int_0^t \left(\frac{d^2\varphi}{ds^2} \right)^2 ds \leq K_1 \left(\int_0^t \left(\frac{d^2\varphi}{ds^2} \right)^2 ds \right)^{1/2} + K_2 \left(\int_0^t \left(\frac{d^2\varphi}{ds^2} \right)^2 ds \right)^{7/8} + K_3$$

ce qui entraîne la majoration souhaitée:

$$\int_0^t \left(\frac{d^2 \varphi}{ds^2} \right)^2 ds \leq \text{Cste.}$$

Ainsi

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \sup \int_0^t \left(\frac{d^2 \varphi}{ds^2} \right)^2 ds < \infty$$

et d'après (1.122) et (1.106)

les quantités

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \sup \int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)^2 dx$$

et

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \sup \int_0^L v^2 + i^2 dx$$

sont finies,

ce qui nous permet de conclure, d'après le théorème de continuation, que T ne peut être fini entraînant ainsi l'existence globale de la solution.

□

II. DEFINITION D'UNE FAMILLE D'OPERATEURS ET ETUDE DU COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

II.1. Le groupe non linéaire

Nous avons montré dans la section (I) que pour

$$\bullet \text{ } f \text{ et } E \text{ satisfaisant } (H_0) \text{ et } (0.8) \tag{2.1}$$

$$\bullet (i_0, v_0) \in (H^1(0, L))^2 \text{ satisfaisant } (0.9) \tag{2.2}$$

le système (0.1)-(0.6) possède une solution unique

$$\{i, v\} \in C(\mathbb{R}^+; H^1(0, L))^2 \quad (2.3)$$

Si on change t en $(-t)$ et x en $(x-L)$ dans les équations (0.1)-(0.6) cela revient à changer (ℓ) en $(-\ell)$, c en $(-c)$, σ en $(-\sigma)$, $v(x, t)$ en $(-v(L-x, -t))$, $\varphi(t)$ en $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(-t)$ et $E(t)$ en $\tilde{E}(t)$.

. Ainsi, si E est définie sur $]-T, 0]$ ou sur $]-T; T[$ ou sur $\mathbb{R}$ tout entier, les théorèmes 1.2 et 1.3 restent valides ce qui signifie que l'on peut résoudre (0.1)-(0.2) de façon rétrograde en temps.

On peut alors donner un sens à

$$\{v, i\} \in C(\mathbb{R}, H^1(0, L))^2 \quad (2.4)$$

Nous tiendrons compte, dans ce chapitre du caractère périodique de la fonction E :

$$E(t+\tau) = E(t), \quad \tau \in \mathbb{R} \text{ fixée}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

et nous supposons que E est uniformément bornée.

Ainsi, la famille d'opérateurs $\{S(t, s)\}_{(t, s) \in \mathbb{R}^2}$ telle que

$$\begin{aligned} \{i(t), v(t)\} &= S(t, s)\{i(s), v(s)\} \quad s \leq t \\ &= S(t, 0)\{i_0, v_0\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

définit un flot continu sur $(H^1(0, L))^2$ au sens suivant :

Définition 2.1: Une famille $\{S(t, s)\}_{(t, s) \in \mathbb{R}^2}$ est un flot continu sur un espace métrique $\mathcal{E}$ si

$$\forall (t, s) \in \mathbb{R}^2, \text{ l'application } S(t, s) \text{ est continue sur } \mathcal{E} \quad (2.7)$$

$$S(t, s) S(s, \sigma) = S(t, \sigma) \quad \forall t, s, \sigma \in \mathbb{R} \quad (2.8)$$

L'hypothèse de τ -périodicité de E -(2.5)- entraîne

$$S(t+\tau, s+\tau) = S(t, s) \quad \forall t, s \in \mathbb{R} \quad (2.9)$$

De (2.8) et (2.9) il résulte que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la famille

$$\{S(t+m\tau, s)\}_m \in \mathbb{Z}$$

forme un groupe discret et possède les propriétés:

$$S(t+m\tau, t) = S(t+\tau, t)^m, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (2.10)$$

et

$$S(t+m\tau, t) = S(t, 0) S(\tau, 0)^m S(0, t), \quad m \in \mathbb{Z} \quad (2.11)$$

Nous nous intéressons au comportement pour des grands temps des quantités $S(t, 0)(i_0, v_0)$, et ce, quelques soient les conditions initiales. Des estimations uniformes en temps sur ces quantités nous permettront de démontrer l'existence de bornés absorbants, que nous allons définir dans le cas du flot périodique.

II-2. Ensembles bornés absorbants

Nous allons montrer que le système (0.1)-(0.8) possède des bornés absorbants dans les espaces $L^2(0, L)$, $H^1(0, L)$ et $H^2(0, L)$ au sens suivant:

Définition 2.2: Soit $\{S(t, s)\}_{(t, s) \in \mathbb{R}^2}$ un flot continu sur un espace métrique $\mathcal{E}$.

Un ensemble borné B_a de $\mathcal{E}$ est dit absorbant, si, pour tout ensemble borné B de $\mathcal{E}$, il existe un temps $t_0 = t_0(B)$ tel que

$$S(t, s)B \subset B_a \quad \text{pour } t-s \geq t_0(B) \quad (2.12)$$

L'existence de bornés absorbants dans L^2 , H^1 et H^2 résulte d'estimations uniformes en temps sur (i, v) dans $L^2(0, L)$, $H^1(0, L)$ et $H^2(0, L)$ (respectivement), c'est à dire ne dépendant pas des données de départ pour un temps t suffisamment grand.

Pour cela on introduit une hypothèse supplémentaire sur f ; au total, f doit satisfaire aux quatre propriétés suivantes, en particulier vérifiées quand f est une fonction polynômiale de

degré impair à coefficients positifs.

$$(Hf) \left[\begin{array}{l} \cdot f \text{ est régulière (de classe au moins } C^3) \\ \cdot \text{ Pour } C_1 \text{ constante positive, } F(\varphi) \geq -C_1, \quad \frac{dF(\varphi)}{d\varphi} = f(\varphi) \\ \cdot \text{ Pour } C_2 \text{ constante positive, } \frac{df}{d\varphi} \geq -C_2 \\ \cdot \inf_{\varphi} \frac{f(\varphi)^2}{F(\varphi)} \text{ existe et est positif.} \end{array} \right.$$

Avant d'énoncer les résultats de régularité uniforme en temps, on introduit la fonction ω telle que

$$v(x,t) = \omega(x,t) + \frac{x}{L} E(t) \quad (2.13)$$

Les équations (0.1) à (0.6) s'écrivent alors

$$\ell \frac{\partial i}{\partial t} + ri = a(x,t) + \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (2.14)$$

$$c \frac{\partial \omega}{\partial t} + g\omega = b(x,t) + \frac{\partial i}{\partial x} \quad (2.15)$$

$$\omega(L,t) = 0 \quad (2.16)$$

$$\omega(0,t) = \frac{d\varphi}{dt} + \sigma(i(0,t)) \quad (2.17)$$

$$i(0,t) = f(\varphi) \quad (2.18)$$

$$\left[\begin{array}{l} i(x,0) = i_0(x) \\ \omega(x,0) = \omega_0(x) = v_0(x) - \frac{x}{L} E(0) \end{array} \right] \quad (2.19)$$

avec la condition de compatibilité

$$\omega_0(L) = 0 \quad (2.20)$$

et où on a posé

$$\left[\begin{aligned} a(x,t) &= a(t) = \frac{E(t)}{L} \\ b(x,t) &= - \left(\frac{x}{L} \frac{dE(t)}{dt} + g \frac{x}{L} E(t) \right) \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} (2.21) \\ (2.22) \end{aligned}$$

Dans cette section nous montrons, que suivant la régularité des conditions initiales i_0 et v_0 du problème, la solution obtenue au théorème 1.3 est uniformément bornée en temps pour les normes H^1 et H^2 , ce qui nous permet de définir des espaces bornés absorbants pour le flot $S(t,s)$ défini en (2.7)-(2.8), dans les espaces H^1 et H^2 . Auparavant nous montrons que si les conditions initiales sont dans L^2 , on peut définir un ensemble borné invariant B_0 dans L^2 contenant les inconnues i et v du problème (mais ne répondant pas aux hypothèses du théorème 1.3), et entraînant le fait que la quantité φ est uniformément bornée.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que f vérifie les hypothèses (H_f) , et E les conditions (0.8) et (2.5).

2.2.1. Existence d'un ensemble borné absorbant dans L^2

Nous allons montrer que si les conditions initiales i_0 et v_0 sont dans $L^2(0,L)$, alors les quantités $\{i,v\}$ vérifiant les équations (0.1)-(0.6) sont uniformément bornées dans L^2 (et le flux φ est uniformément borné dans $\mathbb{R}$).

Proposition 2.1: *Il existe une constante positive R_0 , telle que*

$$\forall R > 0, \forall \{i_0, v_0\} \in (L^2(0,L))^2$$

avec

$$\ell \|i_0\|_0^2 + c \|v_0\|_0^2 + 2F(f^{-1}(i_0(0))) \leq R^2 \quad (2.23)$$

il existe $T_0(R)$ tel que les quantités i et v de (0.1)-(0.6) vérifient

$$\ell \|i\|_0^2 + c \|v\|_0^2 + 2F(\varphi) \leq R_0^2, \quad \forall t \geq T_0(R) \quad (2.24)$$

Preuve:

En multipliant l'équation (2.14) par i , l'équation (2.15) par ω et en intégrant la somme des deux équations obtenues entre 0 et L , il vient,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^L \ell i^2 + c \omega^2 dx \right) + \int_0^L (r i^2 + g \omega^2) dx \\ &= \int_0^L a(x,t) i(x,t) + b(x,t) \omega(x,t) dx \\ & \quad + \omega(L,t) i(L,t) - \omega(0,t) i(0,t) \end{aligned}$$

d'où, en utilisant l'inégalité de Young,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\ell \|i\|_0^2 + c \|\omega\|_0^2 + 2F(\varphi)) + r \|i\|_0^2 + g \|\omega\|_0^2 - \sigma [f(\varphi)]^2 \\ & \leq \int_0^L \frac{a^2(x,t)}{2r} + \frac{b^2(x,t)}{2g} dx + \frac{1}{2} (r \|i\|_0^2 + g \|\omega\|_0^2) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Par (2.21)-(2.22) et (2.5), $a(x,t)$ et $b(x,t)$ sont uniformément bornées $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [0, L]$,

l'inégalité (2.25) s'écrit alors

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\ell \|i\|_0^2 + c \|\omega\|_0^2 + 2F(\varphi)) + r \|i\|_0^2 + g \|\omega\|_0^2 + 2\sigma (f(\varphi))^2 \\ & \leq \text{constante} = C_0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\text{Soit } \delta_0 = \inf \frac{(f(\varphi))^2}{F(\varphi)} ; \quad \delta_0 \geq 0 \text{ par (Hf)}$$

et

$$\delta = \min(\sigma \delta_0, \frac{r}{\ell}, \frac{g}{c}) > 0$$

en appliquant le lemme de Gronwall à (2.26), on obtient, par (2.23)

$$\ell \|i\|_0^2 + c \|\omega\|_0^2 + 2F(\varphi) \leq R^2 e^{-\delta t} + \frac{C_0}{\delta} (1 - e^{-\delta t}) \quad (2.27)$$

et donc pour $t \geq T_0(R) = \frac{2}{\delta} \ln(R)$,

$$\ell \|i\|_0^2 + c \|\omega\|_0^2 + 2F(\varphi) \leq \frac{C_0}{\delta} + 1 = R_0^2$$

Ainsi, pour t suffisamment grand, les quantités i et w (et donc v) sont bornées dans $(L^2(0,L))^2$ indépendamment des conditions initiales

et

$$\text{la quantité } \varphi \text{ est uniformément bornée dans } \mathbb{R}. \quad (2.28)$$

On en déduit aisément, par la définition 2.2, le

Corollaire 2.1: *L'ensemble*

$$B_0 = \left\{ (i,v) \in (L^2(0,L))^2 / \ell \|i\|_0^2 + c \|v\|_0^2 \leq R_0^2 \right\} \quad (2.29)$$

est un ensemble borné absorbant pour $\{S(t,s)\}_{(t,s) \in \mathbb{R}^2}$ dans $(L^2(0,L))^2$.

2.2.2. Existence d'un ensemble borné absorbant dans H^1

Nous allons montrer que si les conditions initiales du problème sont régulières dans $H^1(0,L)$, la solution obtenue au théorème 1.3 est alors uniformément bornée en temps pour la norme H^1 (et la quantité $\frac{d\varphi}{dt}$ est uniformément bornée).

Proposition 2.2: *Il existe une constante R_1 -dépendant de la constante R_0 définie dans la proposition 2.1- telle que*

$$\forall R > 0, \forall \{i_0, v_0\} \in (H^1(0,L))^2 \cap B_0$$

avec

$$\frac{1}{\ell} \|v_0\|_1^2 + \frac{1}{c} \|i_0\|_1^2 + f' [f^{-1}(i_0(0))] [v_0(0) - \sigma i_0(0)]^2 \leq R^2 \quad (2.30)$$

il existe $T_1(R)$ tel que la solution obtenue au théorème (1.3) vérifie

$$\frac{1}{\ell} \|v\|_1^2 + \frac{1}{c} \|i\|_1^2 + f'(\varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \leq R_1^2 \quad \forall t \geq T_1(R) \quad (2.31)$$

Preuve:

Si $\{i, \omega\}$ est une solution de (2.14)-(2.22) avec i_0 et v_0 vérifiant (2.30) et appartenant à l'ensemble borné absorbant B_0 défini en (2.29), en vertu de la proposition 2.1, φ est bornée et il en va de même de $f(\varphi)$, ainsi que de ses dérivées.

En dérivant (2.14) et (2.15) en temps, il vient

$$\begin{cases} \ell \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + r \frac{\partial i}{\partial t} = a'(t) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial t} \end{cases} \quad (2.32)$$

$$\begin{cases} c \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + g \frac{\partial \omega}{\partial t} = b'(t) + \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} \end{cases} \quad (2.33)$$

En multipliant (2.32) par $\frac{\partial i}{\partial t}$, (2.33) par $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ en intégrant en $x \in [0, L]$ la somme de deux équations obtenues, il vient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\ell \left| \frac{\partial i}{\partial t} \right|_0^2 + c \left| \frac{\partial \omega}{\partial t} \right|_0^2 \right) + r \left| \frac{\partial i}{\partial t} \right|_0^2 + g \left| \frac{\partial \omega}{\partial t} \right|_0^2$$

$$= \int_0^L \left(a' \frac{\partial i}{\partial t} + b' \frac{\partial \omega}{\partial t} \right) dx + \int_0^L \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial i}{\partial t} \frac{\partial \omega}{\partial t} \right] dx \quad (2.34)$$

Or, par (2.16), (2.17), (2.18),

$$\begin{aligned} - \int_0^L \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial i}{\partial t} \frac{\partial \omega}{\partial t} \right] dx &= \left(\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \sigma \frac{df(\varphi)}{dt} \right) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[f'(\varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \left[f''(\varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^3 \right] + \sigma \left[\frac{d}{dt} f(\varphi) \right]^2 \end{aligned}$$

Nous cherchons à montrer que la quantité $\frac{d\varphi}{dt}$ est uniformément bornée pour (i, ω) appartenant au borné absorbant B_0 défini en (2.29).

Or de (2.17) et (2.18),

$$\left| \frac{d\varphi}{dt} \right| \leq |\omega(0, t)| + \sigma |f(\varphi)| \quad (2.35)$$

soit encore,

$$\left| \frac{d\varphi}{dt} \right| \leq \sqrt{2} |\omega|_0^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right|_0^{\frac{1}{2}} + \sigma |f(\varphi)|$$

et donc, par (2.14) et en utilisant l'inégalité de Young

$$\left| \frac{d\varphi}{dt} \right|^3 \leq 4 \times 2^{3/2} |\omega|_0^{3/2} \left(|a|_0 + \ell \left| \frac{\partial i}{\partial t} \right|_0 + r |i|_0 \right)^{3/2} + 4\sigma^3 |f(\varphi)|^3$$

Ainsi, quelque soit $\varepsilon > 0$,

$$\left| \frac{d\varphi}{dt} \right|^3 \leq 6\varepsilon \ell \left| \frac{\partial i}{\partial t} \right|_0^2 + 6\varepsilon (|a|_0 + r|i|_0)^2 + \frac{2^6 |\omega|_0^6}{\varepsilon^3} + 4\sigma^3 |f(\varphi)|^3 \quad (2.36)$$

Revenant à (2.34), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\ell \left| \frac{\partial i}{\partial t} \right|_0^2 + c \left| \frac{\partial \omega}{\partial t} \right|_0^2 + f'(\varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] + r \left| \frac{\partial i}{\partial t} \right|_0^2 + g \left| \frac{\partial \omega}{\partial t} \right|_0^2 + \sigma \left[f'(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} \right]^2 \\ & \leq \frac{r}{4} \left| \frac{\partial i}{\partial t} \right|_0^2 + \frac{g}{2} \left| \frac{\partial \omega}{\partial t} \right|_0^2 + \frac{1}{r} |a'|_0^2 + \frac{1}{2g} |b'|_0^2 + 3\varepsilon \ell f''(\varphi) \left| \frac{\partial i}{\partial t} \right| \\ & \quad + 3\varepsilon f''(\varphi) (|a|_0 + r|i|_0)^2 + \frac{2^5}{\varepsilon^3} f''(\varphi) |\omega|_0^6 + 2\sigma^3 f''(\varphi) |f(\varphi)|^3 \end{aligned}$$

φ étant bornée, on choisit ε tel que

$$3\varepsilon \ell f''(\varphi) \leq \frac{r}{4}$$

Ainsi, $\{i, \omega\} \in B_0$, et les quantités $|a|_0$, $|a'|_0$, $|b|_0$, $|b'|_0$ étant uniformément bornées, par (2.14) et (2.15):

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\ell} \left| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right|_0^2 + \frac{1}{c} \left| \frac{\partial i}{\partial x} \right|_0^2 + f'(\varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] + \frac{r}{\ell^2} \left| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right|_0^2 + \frac{g}{c^2} \left| \frac{\partial i}{\partial x} \right|_0^2 \\ & \quad + 2\sigma \left[f'(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} \right]^2 \leq C(R_0) \end{aligned} \quad (2.37)$$

C étant une constante dépendant de R_0 ,
et, en posant

$$\delta = \min \left(2\sigma C_2, \frac{r}{\ell}, \frac{g}{c} \right) > 0$$

le lemme de Gronwall appliqué à (2.37) donne l'estimation (en utilisant (2.30)),

$$\frac{1}{\ell} \left| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right|^2 + \frac{1}{c} \left| \frac{\partial i}{\partial x} \right|^2 + f'(\varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \leq R^2 e^{-\delta t} + \frac{K_1}{\delta} (1 - e^{-\delta t}) \quad (2.38)$$

K_1 dépendant de R_0 ,

et donc

$$\text{pour } t \geq T_1(R) = \frac{2}{\delta} \ln(R)$$

$$\frac{1}{\ell} \left| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right|^2 + \frac{1}{c} \left| \frac{\partial i}{\partial x} \right|^2 + f'(\varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \leq \frac{K_1}{\delta} + 1 = R_1^2$$

Ainsi, pour t suffisamment grand, (i, v) sont bornées dans $(H^1(0, L))^2$, indépendamment des conditions initiales, et la quantité $\frac{d\varphi}{dt}$ est uniformément bornée.

Il en découle alors le

Corollaire 2.2: *L'ensemble*

$$B_1 = \left\{ (i, v) \in (H^1(0, L))^2 \cap B_0 / \frac{1}{\ell} \|v\|_1^2 + \frac{1}{c} \|i\|_1^2 \leq R_1^2 \right\} \quad (2.39)$$

est un ensemble borné absorbant pour $\{S(t, s)\}_{(t, s) \in \mathbb{R}^2}$, dans $(H^1(0, L))^2$.

2.2.3. Existence d'un ensemble borné absorbant dans H^2 .

Nous allons montrer que si les données initiales du problème sont régulières dans H^2 , la solution du problème (0.1)-(0.6) obtenue au théorème 1.3 est uniformément bornée en temps dans H^2 (et la quantité $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ est également uniformément bornée).

Proposition 2.3: *Il existe une constante R_2 -dépendant de la constante R_1 définie dans la proposition 2.2- telle que*

$$\begin{aligned} \forall R > 0, \forall \{i_0, v_0\} \in (H^2(0, L))^2 \cap B_1, \\ \frac{1}{\ell} \|v_0\|_1^2 + \frac{1}{c} \|i_0\|_1^2 \\ + 2f''(f^{-1}(i_0)) \left(\frac{d}{dt} f^{-1}(i_0) \right)^2 \frac{d}{dt} (v_0(0) - \sigma i_0(0)) \\ + f'(f^{-1}(i_0)) \left(\frac{dv_0(0)}{dt} - \sigma \frac{di_0(0)}{dt} \right) \leq R^2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

il existe $T_2(R)$ tel que la solution obtenue au théorème (1.3) vérifie

$$\frac{1}{\ell} \|v\|_2^2 + \frac{1}{c} \|i\|_2^2 + \left(2f''(\varphi) \frac{d\varphi^2}{dt} \right) \frac{d^2\varphi}{dt^2} + f'(\varphi) \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} \right)^2 \leq R_2^2 \quad (2.41)$$

$$\forall t \geq T_2(R)$$

Preuve:

Soit $\{i, \omega\}$ solution de (2.14)-(2.22) dans l'ensemble borné absorbant B_1 .

La quantité $\frac{d\varphi}{dt}$ est alors finie.

En dérivant (2.32) et (2.33) une nouvelle fois en temps, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell \frac{\partial^3 i}{\partial t^3} + r \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = a''(t) + \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial t^2} \\ c \frac{\partial^3 \omega}{\partial t^3} + g \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = b''(t) + \frac{\partial^3 i}{\partial x \partial t^2} \end{array} \right. \quad (2.42)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell \frac{\partial^3 i}{\partial t^3} + r \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = a''(t) + \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial t^2} \\ c \frac{\partial^3 \omega}{\partial t^3} + g \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = b''(t) + \frac{\partial^3 i}{\partial x \partial t^2} \end{array} \right. \quad (2.43)$$

En multipliant (2.42) par $\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$, (2.43) par $\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}$, en intégrant en $x \in [0, L]$ la somme des deux équations obtenues, il vient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\ell \left| \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \right|_0^2 + c \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right|_0^2 \right) + r \left| \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \right|_0^2 + g \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right|_0^2 \\ &= \int_0^L a'' \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + b'' \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} dx + \int_0^L \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right) dx \end{aligned} \quad (2.44)$$

Or, par (2.16), (2.17), (2.18),

$$\begin{aligned} & - \int_0^L \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right) dx = \left(\frac{d^2}{dt^2} f(\varphi) \right) \left(\frac{d^3 \varphi}{dt^3} + \sigma \frac{d^2}{dt^2} f(\varphi) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(f''(\varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{1}{2} f'(\varphi) \left(\frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right)^2 \right) \\ &- \left(f'''(\varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^3 + 2f''(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} \left(\frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right) - 2\sigma f'(\varphi) f''(\varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) \left(\frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right) \end{aligned}$$

$$- \left(\frac{1}{2} f''(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} - \sigma f'^2(\varphi) \right) \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} \right)^2 + \sigma \left(f''(\varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right)^2 \quad (2.45)$$

$\varphi, \frac{d\varphi}{dt}$ étant bornées ainsi que $a''(t)$ et $b''(t)$, (2.44) devient, par (2.45)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\ell \left| \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \right|_0^2 + c \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right|_0^2 + B(\varphi) \frac{d^2\varphi}{dt^2} + f'(\varphi) \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} \right)^2 \right) + \left(\frac{3r}{4} \left| \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \right|_0^2 + \frac{c}{2} \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right|_0^2 \right) \\ + A(\varphi) \frac{d^2\varphi}{dt^2} + C(\varphi) \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} \right)^2 + \sigma (f'(\varphi))^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} \leq \frac{1}{2} \left(f''(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} \right) \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} \right) + C^te \quad (2.46) \end{aligned}$$

où on a posé

$$A(\varphi) = 2\sigma \left(f'(\varphi) f''(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} \right) - f'''(\varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^3 - 2f''(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.47)$$

$$B(\varphi) = 2 \left(f''(\varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) \quad \text{et} \quad C(\varphi) = -2f''(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.48)$$

Pour $\{i, \omega\} \in B_1$, les quantités A, B et C sont finies.

D'autre part, la quantité $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ est uniformément bornée pour $\{i, \omega\}$ appartenant à B_1 , puisque de (2.17),

$$\left| \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right| \leq \left| \frac{\partial \omega(0, t)}{\partial t} \right| + \sigma \left| f'(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} \right| \quad (2.49)$$

soit encore,

$$\left| \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right| \leq \sqrt{2} \left| \frac{\partial \omega}{\partial t} \right|_0^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right|_0^{\frac{1}{2}} + \sigma \left| f'(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} \right|$$

par (2.14) et en utilisant l'inégalité de Young, on obtient, pour

tout réel $\varepsilon > 0$

$$\left| \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right|^2 \leq \frac{2\ell}{\varepsilon} \left| \frac{\partial \omega}{\partial t} \right|_0^2 + 4\varepsilon \ell \left| \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \right|_0^2 + \frac{4\varepsilon}{\ell} \left(r \left| \frac{\partial i}{\partial t} \right|_0 + \|a'\|_0 \right)^2 \quad (2.50)$$

En utilisant le fait que a' est bornée et que $\{i, \omega\}$ appartient à B_1 , (2.46) peut s'écrire

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\ell \left| \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \right|_0^2 + c \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right|_0^2 + B(\varphi) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + f'(\varphi) \left(\frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right)^2 \right) \\ & + \left(\frac{3r}{4} \left| \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \right|_0^2 + \frac{c}{2} \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right|_0^2 \right) + A(\varphi) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + C(\varphi) \left(\frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right)^2 + \sigma \varphi (f'(\varphi))^2 \left(\frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right)^2 \\ & \leq 2\varepsilon \ell \left(f''(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} \right) \left| \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \right|_0^2 + \text{constante} \quad (2.51) \end{aligned}$$

cette dernière constante dépendant de R_1 .

φ et $\frac{d\varphi}{dt}$ étant bornées, on choisit ε tel que

$$2\varepsilon \ell \left(f''(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} \right) \leq \frac{r}{4} \quad (2.52)$$

Ainsi, par (2.14) et (2.15) et en tenant compte du fait que $\{i, \omega\} \in B_1$, (2.51) s'écrit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\ell} \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right|_0^2 + \frac{1}{c} \left| \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} \right|_0^2 + B(\varphi) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + f'(\varphi) \left| \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right|^2 \right) + C(\varphi) \left(\frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right)^2 \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{\ell^2} \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right|_0^2 + \frac{g}{c^2} \left| \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} \right|_0^2 \right) + A(\varphi) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \sigma (f'(\varphi))^2 \left(\frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right)^2 \leq K_2 \quad (2.53) \end{aligned}$$

K_2 dépendant de R_1 ;

en choisissant

$$\delta' = \min \left(\frac{r}{\ell}, \frac{g}{c}, \sigma c_2, M_1, M_2 \right) \geq 0 \quad (2.54)$$

$$\text{où } M_1 = \inf_{\varphi} \left| \frac{A(\varphi)}{B(\varphi)} \right| \quad \text{et} \quad M_2 = \inf_{\varphi} \left| \frac{C(\varphi)}{f'(\varphi)} \right| \quad (2.55)$$

le lemme de Gronwall appliqué à (2.53) et compte tenu de (2.40) donne l'inégalité

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ell} \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right|_0^2 + \frac{1}{c} \left| \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} \right|_0^2 + B(\varphi) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + f'(\varphi) \left(\frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right)^2 \\ \leq R^2 e^{-\delta' t} + \frac{K_2}{\delta'} (1 - e^{-\delta' t}) \end{aligned} \quad (2.56)$$

et donc,

$$\text{pour } t \geq T_2(R) = \frac{2}{\delta'} \ln(R),$$

$$\frac{1}{\ell} \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right|_0^2 + \frac{1}{c} \left| \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} \right|_0^2 + B(\varphi) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + f'(\varphi) \left(\frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right)^2 \leq \frac{K}{\delta'} + 1 = R_2^2$$

Ainsi, pour t suffisamment grand, i et v sont uniformément bornées dans $(H^2(0,L))^2$, indépendamment des conditions initiales, et la quantité $\left| \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right|$ reste uniformément bornée.

Il en découle le

Corollaire 2.3: *L'ensemble*

$$B_2 = \left\{ (i, v) \in (H^2(0,L))^2 \cap B_1 / \frac{1}{\ell} \|v\|_2^2 + \frac{1}{c} \|i\|_2^2 \leq R_2^2 \right\} \quad (2.57)$$

est un ensemble borné absorbant pour $\{S(t,s)\}_{(t,s) \in \mathbb{R}^2}$ dans $(H^2(0,L))^2$.

2.3. L'ensemble oméga-limite

On s'intéresse au comportement pour des grands temps de $S(t,s)$, groupe périodique non linéaire, continu de $(H^1(0,L))^2$ dans lui-même, défini en (2.6); l'existence d'ensembles bornés absorbants étant prouvée, il est possible, d'après (2.10) de se restreindre pour cela à l'étude des cas pour lesquels les conditions initiales se trouvent déjà dans l'ensemble borné absorbant.

Auparavant, introduisons l'ensemble oméga-limite associé au borné absorbant B_2 de $(H^2(0,L))^2$ défini au corollaire 2.3 pour le groupe $S(t,s)$ continu de $(H^1(0,L))^2$ dans lui-même.

Proposition 2.4:

$$L'ensemble \omega(B_2) = \bigcap_{n \geq 0} \overline{\bigcup_{m \geq n} S(m\tau, 0)B_2} \quad (2.58)$$

où $\overline{A}$ représente l'adhérence de A pour la topologie faible de H^2 , est non vide et inclu dans B_2 .

De plus, il est invariant par le flot $S(t,s)$, ie

$$S(t,s)\omega(B_2) = \omega(B_2) \quad \forall (t,s) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.59)$$

Preuve:

Les éléments de cette démonstration sont issus de [G.T2]. D'après la définition des ensembles bornés absorbants (def 2.2 et égalité (2.57)), le fait que B_2 soit non vide entraîne que $\omega(B_2)$ est aussi non vide et inclu dans B_2 .

Pour prouver (2.59) montrons tout d'abord que $S(t,s)$ est une application faiblement continue de $(H^2(0,L))^2$ dans lui-même, $\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire que si une suite b_n converge vers b pour la topologie faible de H^2 , alors $S(t,s)b_n$ converge vers

$S(t,s)b$ pour la même topologie. En utilisant la compacité de l'injection de $H^2(0,L)$ dans $H^1(0,L)$,

on sait que $b_n \longrightarrow b$ faible dans H^2
entraîne que $b_n \longrightarrow b$ fort dans H^1

et puisque $S(t,s)$ est continu de $(H^1(0,L))^2$ dans lui-même,

$$S(t,s)b_n \longrightarrow S(t,s)b \quad \text{fort dans } H^1 \quad (2.60)$$

Puisque, d'autre part, b_n est bornée dans H^1 , $S(t,s)b_n$ est aussi bornée dans H^2 et on peut extraire de $S(t,s)b_n$ une sous suite convergeant faiblement dans H^2 , vers un élément $c \in (H^2(0,L))^2$;

ainsi, d'après (2.60),

$$S(t,s)b_n \longrightarrow c \text{ fort dans } H^1 \text{ et } c = S(t,s)b \text{ nécessairement;}$$

ce qui prouve que la suite $S(t,s)b_n$ converge vers $S(t,s)b$ pour la topologie faible de H^2 .

Enfin, puisque B_2 est un ensemble borné absorbant, $\omega(B_2)$ peut-être défini de la façon suivante:

$b \in \omega(B_2)$ si et seulement si il existe deux suites $N_n \in \mathbb{N}$ et $b_n \in (H^2(0,L))^2$ telles que

$$\left[\begin{array}{l} N_n \longrightarrow \infty \\ S(N_n\tau, 0)b_n \text{ converge faiblement dans } (H^2(0,L))^2 \end{array} \right. \quad (2.61)$$

quand n tend vers l'infini, ie

$$S(N_n\tau, 0)b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \text{ faible dans } H^2.$$

Or, $S(\tau, 0)$ étant faiblement continue dans H^2 ,

on a $S((N_n + 1)\tau, 0)b_n \longrightarrow S(\tau, 0)b$ faible H^2

et donc $S(\tau, 0)\omega(B_2) \subset \omega(B_2)$.

En changeant τ en $-\tau$, on déduit que $S(\tau, 0)\omega(B_2) = \omega(B_2)$ et par (2.11), on obtient alors (2.59).

2.4. L'attracteur universel.

Avant de définir l'attracteur universel, rappelons que la topologie faible de $(H^2(0, L))^2$ est métrisable sur tout ensemble borné B de $(H^2(0, L))^2$ -et donc en particulier sur B_2 -; on note δ la distance associée définie pour X et Y sous ensembles de B_2 , par

$$\delta(X, Y) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \delta(x, y) \quad (2.62)$$

Concernant la proposition 2.4, on peut faire la remarque suivante: si on choisit un ensemble borné B non vide de $(H^2(0, L))^2$, on peut de la même façon qu'en (2.58) définir $\omega(B)$ qui aura alors la propriété d'être lui aussi non vide, invariant sous l'effet du flot $S(t, s)$ et inclu dans B_2 .

De plus, d'après la définition 2.2 du borné absorbant, il est clair que

$$\omega(B) \subset \omega(B_2)$$

impliquant alors le caractère "maximal" de $\omega(B_2)$.

D'où le théorème suivant:

Théorème 2.1:

L'ensemble

$$\mathcal{A} = \omega(B_2) \quad (2.63)$$

satisfait aux propriétés suivantes:

$$\bullet \mathcal{A} \text{ est borné et faiblement fermé dans } (H^2(0, L))^2 \quad (2.64)$$

$$. S(m\tau, 0)\mathcal{A} = \mathcal{A}, \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad (2.65)$$

$$. \forall t, s \in \mathbb{R}, \text{ pour tout borné } B \text{ de } (H^2(0, L))^2 \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \delta(S(t+m\tau, s)B, S(t, 0)\mathcal{A}) = 0 \quad (2.66)$$

Remarques:

1. La propriété (2.66) a bien un sens puisque

$$S(m\tau, 0)B \subset B_2 \subset (H^2(0, L))^2$$

$$\text{et } \mathcal{A} \subset B_2 \subset (H^2(0, L))^2.$$

2. L'ensemble $\mathcal{A}$ vérifiant les propriétés (2.64) à (2.66) est un ensemble maximal (au sens de l'inclusion); il est appelé attracteur et il attire et capture toutes les trajectoires solutions du problème.

3. L'attracteur $\mathcal{A}$ défini en (2.63) est connexe pour la topologie faible de H^2 , puisque B_2 est connexe (car convexe) et compact pour cette topologie. (on pourra par exemple consulter le lemme 2.1 (T)).

4. L'injection de H^2 dans H^1 étant compacte, la propriété (2.64) est vérifiée aussi par rapport à la topologie forte de H^1 . Ainsi, quelque soit B ensemble borné de $(H^2(0, L))^2$, l'ensemble $S(m\tau, 0)B$ converge vers $\mathcal{A}$ (pour $m \rightarrow \infty$), pour la norme de H^1 .

5. L'unicité d'un ensemble $\mathcal{A}$ vérifiant les propriétés (2.64) à (2.66) est alors évidente; c'est la raison pour laquelle l'ensemble $\mathcal{A}$ est appelé attracteur universel.

Preuve du théorème (2.1):

Les propriétés (2.64) et (2.65) résultent de la proposition 2.4; cette démonstration est issue de l'article de J.M. Ghidaglia et R. Temam ([G.T2]).

Montrons la propriété (2.66), par contradiction:

Supposons qu'il existe deux suites $N_n \in \mathbb{Z}$ et $b_n \in B$, telles que $\forall t, s \in \mathbb{R}$,

$$N_n \longrightarrow \infty \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty$$

et

$$d(S(t+N_n\tau, s)b_n, S(t; 0)\mathcal{A}) \geq \varepsilon_0 > 0 \quad (2.67)$$

quelque soit ε_0 indépendant de n .

D'après la définition de B_2 -(2.57)-, la quantité

$$S(t+N_n\tau, 0)b_n \in B_2 \text{ et est donc bornée dans } (H^2(0, L))^2.$$

On peut donc supposer qu'il existe un élément b de B_2 tel que

$$d(S(t+N_n\tau, 0)b_n, b) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty$$

En écrivant

$$S(t+N_n\tau, s)b_n = S(t, 0) \circ S(p_n\tau, 0) \circ S(q_n\tau, s)b_n$$

$$\text{où } p_n = \left\lfloor \frac{N_n}{2} \right\rfloor \text{ et } q_n = N_n - p_n$$

On constate que $S(q_n\tau, s)b_n$ rentre dans le borné absorbant B_2 pour n suffisamment grand et donc

$$b \in S(t, 0)\omega(B_2) = S(t, 0)\mathcal{A}$$

ce qui contredit (2.67) et achève la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

- [B] H. BREZIS
Analyse fonctionnelle.
Masson. (1987)
- [C.F.T] P. CONSTANTIN, C. FOIAS, R. TEMAM
Attractors representing turbulent flows.
Memoirs of A.M.S- Vol 53- N° 314, 1985.
- [G1] J.M. GHIDAGLIA
Weakly damped forced Korteweg de Vries equations behave
as a finite dimensional dynamical system in the long
time.
*Jour. of differential equations - Vol 74 - N°2 -
August 88.*
- [G2] J.M. GHIDAGLIA
Finite dimensional behaviour for weakly damped driven
Schrödinger equations.
*Ann. Inst. Henri Poincaré - Vol 5 - N°4, 1988 -
p 365-405.*
- [G.T1] J.M. GHIDAGLIA, R. TEMAM
Attractors for damped nonlinear hyperbolic equations.
Jour. de math. pures et app. 66, 1987 - p 273, 319.
- [G.T2] J.M. GHIDAGLIA, R. TEMAM
Periodic dynamical system with application to
Sine - Gordon equations: estimates on the fractal
dimension of the universal attractor.
Contemporary Mathematics - Vol 99, 1989.
- [G.T3] J.M. GHIDAGLIA, R. TEMAM
Long time behavior for partly dissipative equations :
the slightly compressible 2D - Navier - Stokes
equations.
Asymptotic Analysis 1 (1988) 23-49 North-Holland.

- [H1] A. HARAUX
Systèmes dynamiques dissipatifs et applications.
Masson.
- [H2] J. HALE
Ordinary Differential Equations
Wiley. Intersciences
- [L] J.L. LIONS
Contrôlabilité exacte. Perturbations et stabilisation
de systèmes distribués.
Tome 1. Masson. Paris. 1988.
- [T] R. TEMAM
Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and
physics.
Springer Verlag - A.M.S. - 68 .