

THÈSES D'ORSAY

HEDI BEL HADJ SALAH

**Modélisation des transferts couplés de chaleur et de masse dans le sol,
appliquée au calcul des déperditions thermiques des bâtiments**

Thèses d'Orsay, 1990

[<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1990__0262__P0_0>](http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1990__0262__P0_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses d'Orsay » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



NUMDAM

*Thèse numérisée par la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016
et diffusée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

ORSAY
n° d'ordre : 1253

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée
Pour obtenir

Le TITRE de DOCTEUR EN SCIENCE

Spécialité : MATHEMATIQUES

PAR

Hedi BEL HADJ SALAH

SUJET : "Modélisation des transferts couplés de chaleur et de masse dans le sol,
orientée vers le calcul des déperditions thermiques des bâtiments".

soutenue le 5 Avril 1990 devant la Commission d'examen

MM. Roger TEMAM Président

Louis-Marie CHOUNET

Michel FREMOND

Bernard HERON

Claude JOURON

Gérard LABROSSE

à Emna, ma mère

à Moufida, ma femme

à la mémoire de mon père

ABSTRACT

The objective of this work is to contribute to the development of a library of models for building thermal transfers calculations (ALMETH Project) .

This work is more specially devoted to the modelisation of heat and mass transfers in the soil oriented towards heat transfer calculations between building foundations and the surrounding soil. This thesis includes an analytical study of the infiltration equation in a porous medium, and a numerical study of the system of two coupled parabolic equations for heat and mass transfer in the soil.

In the frame of this numerical study we have made use of an original technique for subdomains junction, that we have extended to the case of subdomains with different dynamics : we adapt specific time steps to each subdomain.

Avant-Propos

Cette étude a été effectuée au laboratoire R.A.M.S.E.S. (UPR 293 du C.N.R.S.) au Centre Universitaire d'Orsay. Elle a bénéficié du financement de l'Agence Française pour la Maîtrise de l'Energie (AFME) dans le cadre du projet ALMETH. De plus j'ai bénéficié d'une bourse de recherche de l'AFME, ce dont je lui suis très reconnaissant.

Monsieur le Professeur Roger TEMAM m'a accueilli en D.E.A. d'Analyse Numérique et m'a fait l'honneur de présider le Jury. Qu'il trouve ici l'expression de ma respectueuse gratitude.

Monsieur Louis-Marie CHOUNET, mon Directeur de Thèse, Responsable de l'équipe R.A.M.S.E.S., m'a accueilli dans la formation CNRS qu'il dirige ; ses collègues et lui m'ont apporté pendant de longues années, à la fois les moyens nécessaires à ma recherche (bourse, outils de recherche), les idées de base initiant ces travaux et l'encadrement indispensable à un travail se situant à cheval sur la modélisation physique et l'analyse numérique.

Ayant bénéficié d'échanges enrichissants et chaleureux avec l'ensemble de l'équipe, je tiens à exprimer ma reconnaissance et mes remerciements à Madame Claudine DANG VU (Université Paris-Sud) et à Monsieur Alain LAHELLEC (CNRS) pour leurs contributions stimulantes à mon travail et notamment pour tout ce qui concerne la décomposition de domaines et l'emboîtement temporel qui leur doit beaucoup. Je tiens également à remercier Monsieur Robert FRANCHISSEUR (CNRS) pour son aide permanente, surtout au niveau informatique, ainsi que Madame Mady MEHEUT qui a assuré la dactylographie, sur traitement de texte, de ce document complexe.

Dans le cadre du Laboratoire d'Analyse Numérique et Fonctionnelle d'Orsay, M. Bernard HERON (Université Paris-Sud) et Madame Danielle HILHORST (CNRS) ont suivi très régulièrement les développements proprement mathématiques de ce travail. Je tiens à leur exprimer ma vive gratitude pour leur soutien et leur disponibilité permanents. Bernard HERON a également été pour moi un soutien indispensable et extrêmement scrupuleux pour la rédaction de ce mémoire qui lui doit beaucoup. J'ai également bénéficié de l'environnement très enrichissant de leur Laboratoire. Je tiens aussi à remercier Madame Danielle LE MEUR, responsable administrative de ce laboratoire, qui m'a aidé pour le bon achèvement de ce travail.

Monsieur Michel FREMOND, Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Directeur de l'Unité Mixte de Recherche n° 113 LCPC-CNRS, et Monsieur Gérard LABROSSE, Professeur à l'Université Paris-Sud, ont bien voulu accepter d'être rapporteurs de ce travail ; j'ai beaucoup tiré profit de leurs remarques et suggestions et les en remercie. Monsieur Claude JOURON, Professeur à l'Université PARIS 13, a également bien voulu accepter de faire partie du Jury ; je l'en remercie vivement.

Le but de cette étude est de contribuer à la mise en place d'une bibliothèque de logiciels pour la modélisation des transferts thermiques dans l'habitat, et de développer plus spécifiquement une méthode de simulation des échanges thermique et de masse sol/bâtiment.

Pour la modélisation thermique du bâtiment, les phénomènes physiques à modéliser sont de nature diverse. Nous nous sommes intéressés à l'étude du raccordement de modules numériques traitant de lois physiques différentes et nous présentons une validation d'un modèle de raccordement faisant appel aux transferts entre composants. Les cellules – ou composants – du système thermique de l'habitat ne sont généralement pas de même inertie. Les temps caractéristiques des zones sont dans des ordres de grandeurs très différents. Nous proposons ici une approche permettant de traiter des composants d'un même système avec des pas de temps différents, adaptés à chacun d'eux. L'étude est axée sur les transferts de chaleur et de masse dans le sol pour la maîtrise des transferts de chaleur et de masse entre le bâtiment et le sol avoisinant.

Dans un premier chapitre, nous passons en revue des études récentes en thermique des sols, telles que la géothermie ou le stockage de chaleur dans le sol. Nous faisons le point sur l'état de l'art pour les méthodes d'évaluation des transferts thermiques entre le bâtiment et le sol. Dans toutes ces méthodes, les échanges de chaleur sont considérés purement conductifs et linéaires. Mais la forte variation de la conductivité thermique du sol en fonction de son degré de saturation en eau nous conduit à la prise en compte de l'état hydrique du sol pour la détermination de ses propriétés thermophysiques.

Au chapitre B, nous présentons le modèle physique de transfert de chaleur et de masse dans le sol que nous étudions. Il est basé sur la définition d'une échelle macroscopique et d'un volume élémentaire représentatif du milieu. Il ne tient pas compte des effets d'hystérésis et suppose la pression dans la phase gazeuse uniforme et égale à la pression atmosphérique. Le flux d'eau liquide est lié à la pression d'eau par la loi de Darcy. Le flux d'eau-vapeur est donné par la loi de Fick.

La substitution de ces deux lois dans l'équation de conservation de la masse nous donne l'équation suivante :

$$C_h \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = \text{div} \left(D_{mh} \vec{\text{grad}} \bar{h} + D_{mT} \vec{\text{grad}} T - K_h \vec{\text{grad}} Z \right)$$

En substituant la loi de Fourier dans l'équation de conservation de l'enthalpie, nous obtenons l'équation de la chaleur généralisée dans laquelle nous avons négligé un terme convectif ; il en résulte

l'équation suivante :

$$C_T \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} \left(D_{ch} \vec{\operatorname{grad}} h + D_{cT} \vec{\operatorname{grad}} T \right)$$

Le système de ces deux équations est complété par la loi des gaz parfaits, la loi de Kelvin et l'équation de Clapeyron d'une part et, d'autre part, par des modèles pour la détermination de la conductivité thermique équivalente du sol, de sa conductivité hydraulique et de la relation teneur en eau - pression d'eau dans le milieu.

Les bilans de masse et d'énergie à l'interface sol-atmosphère permettent d'exprimer les conditions à cette limite. Nous avons, pour la première équation, une condition de flux de masse et pour la deuxième équation, une fonction à la fois du flux de chaleur dans le sol et de T_s , où T_s est la température de surface. Ces bilans tiennent compte des rayonnements (solaire, atmosphérique et terrestre), de l'état des couches basses de l'atmosphère (vitesse du vent, température de rosée, humidité spécifique, pluie), des caractéristiques de la surface (rugosité, albédo, émissivité) et des flux dans le sol.

Au troisième chapitre nous nous intéressons à la première équation, pour une température constante, en dimension un d'espace. Cette équation est parabolique dans la zone du sol non saturée en eau ; dans la zone saturée, elle change de type et devient elliptique. L'interface entre ces deux zones est une frontière libre. Nous avons adapté une démonstration de X. Shute pour montrer que le problème relatif à cette équation munie de conditions aux limites mixtes admet une solution unique. Pour cela nous l'avons approché par une famille de problèmes admettant des solutions régulières ($\epsilon \in C^{2+\alpha}$). Nous avons utilisé le principe du maximum pour mettre en place les estimations permettant le passage à la limite. Nous montrons que la limite des solutions des problèmes approchés est solution du problème de départ. Nous montrons, par application du lemme de Gronwall que cette solution est unique.

Pour le même problème, avec des conditions aux limites fixées (ne dépendant pas du temps), nous avons montré un théorème de comparaison, ce qui nous a permis de montrer que la solution du problème converge quand t tend vers l'infini vers la solution du problème stationnaire.

Dans la première partie du quatrième chapitre, nous étudions numériquement le problème du chapitre précédent. Nous le discrétisons par une méthode aux différences finies implicite. Nous retrouvons le front d'humidité caractérisant la dynamique d'infiltration. Nous retrouvons aussi la

convergence pour les grands temps de la solution, sous condition de flux constant, vers un état stationnaire. Ce résultat est montré analytiquement au chapitre précédent. Pour des temps suffisamment grands et pour une condition de flux périodique, la solution converge vers une fonction périodique en temps.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous reprenons le système couplé que nous discrétisons encore par une méthode aux différences finies implicite. Nous utilisons la méthode de Newton pour la détermination de la température de surface à partir du bilan d'énergie. Nous résolvons le système linéaire par une méthode de relaxation par bloc. La comparaison de deux simulations, avec et sans apport d'eau à la surface, nous a permis de montrer l'impact d'un flux de masse sur les températures dans le sol.

Au chapitre E, nous reprenons le problème de raccordement de modèles pour une validation de la méthode proposée dans le cadre du G.E.R.-ALMETH. Pour cette méthode, raccorder deux cellules ayant une interface revient à joindre aux équations d'évolution de chacune des cellules une équation qui régit les états de l'interface, ce qui mène à une formulation implicite du problème : l'évolution des cellules dépend de celle de l'interface et, inversement, l'interface évolue avec les cellules. L'élimination des variables d'état des cellules dans l'équation des transferts permet de déterminer les variables d'interface et par suite les variables d'état des cellules. Cette démarche est plus coûteuse que d'autres méthodes de raccordement, mais elle permet de focaliser sur les échanges entre cellules et d'analyser la dynamique des transferts aux interfaces.

Nous traitons l'exemple d'infiltration d'eau dans le sol, du chapitre précédent, sous cette optique. Nous présentons l'algorithme utilisé pour résoudre ce problème avec division du domaine en cellules, raccordées par la méthode présentée ci-dessus. Nous retrouvons, avec précision, la solution du même problème calculée sans décomposition du domaine. La précision maintenue pour le front d'infiltration est preuve de la robustesse de la méthode de raccordement utilisée.

Au chapitre F, nous nous basons sur la même formulation pour raccorder des sous-domaines à dynamiques différentes. Ce problème est très fréquent dans l'habitat. Particulièrement dans le sol avoisinant le bâtiment, les excitations thermiques à la surface sont largement amorties en profondeur. Nous présentons une approche intermédiaire entre "négliger complètement" l'influence des zones à dynamique lente et les "prendre en compte" avec un pas de temps imposé par les zones à dynamique rapide.

Nous divisons le domaine en deux cellules à dynamiques différentes. Nous leur affectons des pas de temps de discrétisation adaptés à chacune d'entre elles. L'interface entre les deux zones évolue au cours du grand pas de temps ; nous proposons une approximation de son évolution qui donne des résultats plus précis que si nous la maintenions constante. Cette approche est récurrente. Nous pensons pouvoir l'étendre à un découpage en nombre plus grand de zones, ce qui permet un gain de temps calcul appréciable sans perte significative de précision sur la solution.

Enfin le couplage de transfert de chaleur au transfert de masse dans le sol est un choix très coûteux en temps calcul, surtout pour un passage en dimension d'espace supérieure. La décomposition en sous-domaines, avec le parallélisme qui peut en découler, et la technique d'emboîtement en temps, bien qu'elles ne soient pas très faciles à paralléliser, peuvent rendre le problème numériquement abordable et rentabiliser son intégration dans les logiciels de thermique de l'habitat.

CHAPITRE A

LA THERMIQUE DU SOL POUR LA THERMIQUE DU BATIMENT

A.I - THERMIQUE DU BATIMENT ET ECONOMIES D'ENERGIE

A.II - ETUDES RECENTES EN THERMIQUE DES SOLS

- A.II.1 - Le stockage de chaleur dans le sol
- A.II.2 - Les stockages géothermiques
- A.II.3 - Autres études d'hygrothermique des sols

A.III - LA THERMIQUE DES SOLS POUR LA CONCEPTION THERMIQUE DES BATIMENTS

- A.III.1 - Règles de calcul des déperditions thermiques (CSTB)
- A.III.2 - Méthode utilisée dans le logiciel CALECO-DOE.2
- A.III.3 - Méthode utilisée dans BILBO et BILGA
- A.III.4 - Méthode utilisée dans CUMALI-DOE.2
 - A.III.4.a - *Les facteurs de réponse*
 - A.III.4.b - *Le calcul des transferts dans le sol*
- A.III.5 - L'analyse modale
- A.III.6 - Remarques générales

A.I - THERMIQUE DU BATIMENT ET ECONOMIES D'ENERGIE

L'effort d'économie d'énergie a pris beaucoup d'importance en Europe depuis la crise pétrolière de 1974. Les secteurs de l'industrie, du transport, et des bâtiments sont devenus plus économes en énergie ; l'utilisation de cette dernière pour le chauffage devient rationnelle et fait ainsi appel de plus en plus aux connaissances de base en thermique du bâtiment.

Dans les bâtiments, les économies sont potentiellement importantes. Les pertes thermiques d'un pavillon de 100 m² par degré d'écart avec l'extérieur et par m³ de son volume sont passées de 1,6 W en 1974 à 0,94 W en 1982 [NAU-84]. L'objectif était de ramener la consommation individuelle des bâtiments à sa moitié entre 1974 et 1985. La nouvelle réglementation de 1989 abaisse ce seuil à 0,71 W. L'amélioration a jusqu'à présent porté sur trois axes :

- L'enveloppe du bâtiment

Les parois des bâtiments sont de plus en plus isolées. Des efforts bénéfiques ont porté sur l'amélioration des isolants et sur la manière de les utiliser. L'introduction de serres, l'utilisation du double vitrage et l'industrialisation des vitres à faible émissivité ont amélioré l'apport en énergie solaire et ont diminué les pertes de chaleur. Des innovations, comme le mur TROMBE, sont énergétiquement très rentables en climat méditerranéen [BOU-89].

- Les systèmes de production et de récupération d'énergie

L'utilisation de procédés, comme la récupération de chaleur sur l'air vicié et sur les produits de combustion, est une opération rentable dans le bâtiment et surtout pour le tertiaire [DEB-80]. Les pompes à chaleur ont connu une nette amélioration. Plusieurs générations ont vu le jour ; leur coefficient de performance (COP) a nettement progressé.

Les capteurs solaires et les modes de stockage d'énergie ont fait l'objet de nombreuses études. Des progrès importants ont été réalisés au niveau de leur rendement.

– L'optimisation du chauffage et l'aide à la conception des bâtiments : l'entrée de l'outil informatique

L'utilisation systématique de nouvelles techniques de chauffage et de préservation d'énergie a parfois conduit à des périodes de surchauffe des bâtiments. Il s'est donc posé le problème de l'optimisation du chauffage et de l'enveloppe du bâtiment. Une telle tâche doit se baser sur une modélisation des transferts mis en jeu et des systèmes énergétiques mis en œuvre. Pour cela l'outil informatique est indispensable vu la complexité des systèmes mis en jeu. Ainsi différentes générations de logiciels de thermique du bâtiment ont vu le jour depuis 75. On trouve parmi eux de bons outils d'aide à la décision et à la conception des bâtiments et même de bons outils de recherche. Ils intègrent l'essentiel des connaissances sur les transferts thermiques au sein du bâtiment. Cependant, outre la validation de beaucoup de modèles utilisés, beaucoup de phénomènes restent à étudier et à intégrer dans ces logiciels de conception thermique des bâtiments.

L'analyse du comportement des usagers en fonction du climat interne du bâtiment et des notions comme le confort sont loin d'être intégrés dans ces logiciels. D'autre part les progrès en économie d'énergie au niveau du bâtiment restent peu homogènes. Par exemple les pertes thermiques vers le sol n'ont pas beaucoup diminué depuis 75. Leur pourcentage par rapport aux pertes totales du bâtiment est passé en moyenne, pour un pavillon, de 17 % à 22 % entre 1974 et 1982. Ceci est d'autant plus étonnant que l'on s'est par ailleurs beaucoup intéressé à la thermique des sols de 75 à 85.

A.II - ETUDES RECENTES EN THERMIQUE DES SOLS

La crise de l'énergie a suscité en effet diverses études techniques conduisant à améliorer la modélisation thermique des sols. Il s'agissait en général de projets pilotes visant à stocker de la chaleur dans le sol. Ces études ont stimulé des recherches sur la modélisation des transferts de chaleur et de masse dans le sol, qui ont été un point de départ pour notre étude. Nous les passons en revue.

1 - Le stockage de chaleur dans le sol

L'énergie solaire pour le chauffage des bâtiments n'est généralement pas utilisée directement au moment où elle est collectée. Il peut être envisagé de la stocker pendant la journée pour la consommer la nuit, ou même l'utiliser au cours de la saison de chauffage alors qu'elle est captée au cours des autres saisons.

Plusieurs études ont été faites pour développer des procédés de stockage de chaleur dans le sol. Que ce stockage se fasse en lit de roches, dans un réseau de tuyaux enterrés, dans un bassin d'eau enterré ou dans la nappe phréatique, il reste très dépendant des transferts dans le sol avoisinant. En effet, une bonne partie de l'énergie est dissipée dans le sol au cours du stockage. Pendant l'extraction de chaleur, le pompage pourrait dépasser le stock lui-même et s'étendre au sol qui l'entoure : d'où l'importance de la modélisation de la diffusion de chaleur dans la zone de sol entourant le stockage même [DAN-87].

2 - Les stockages en nappe ou géothermiques

Ce type de stockage consiste à utiliser les nappes phréatiques, ou le sous-sol profond pour le stockage thermique en général de longue durée; on distingue au moins trois secteurs où les enjeux énergétiques sont importants :

2-a Nappes peu profondes

Cette technique consiste à utiliser les nappes phréatiques peu profondes comme source froide de pompe à chaleur. L'intérêt de cette source est que sa température permet d'avoir un bon coefficient de performance de la pompe d'une part et que cette température est peu variable d'autre part.

2-b La géothermie classique

L'application la plus importante réside dans l'exploitation directe pour le chauffage de la chaleur de nappes chaudes du sous-sol profond (> 1000 m). Elle est notamment utilisée en Région Parisienne (nappe de DOGGER à 70 C) où elle a donné lieu à de nombreuses installations [ADN-89].

Suivant la profondeur et en fonction de la température atteinte, l'énergie récupérée peut être utilisée pour le chauffage des bâtiments ou – si la température dépasse 200°C – pour la production d'électricité.

2-c La géothermie sèche

Il existe aussi des installations expérimentales visant à récupérer la chaleur des roches chaudes à très grandes profondeurs (2000 à 4000 m), en injectant de l'eau dans cette matrice rocheuse, puis en la récupérant.

3 - Autres études d'hygrothermiques des sols

Les gradients de température induisent des gradients d'humidité non négligeables surtout dans la zone superficielle du sol. En effet, la température dans cette zone est très variable. Il est donc nécessaire de tenir compte du couplage entre le transfert d'humidité et de chaleur pour étudier l'évaporation dans le sol, ou le transfert de chaleur latente avec les basses couches de l'atmosphère.

Qu'il s'agisse de climatologie, ou d'agriculture, il apparaît nécessaire de tenir compte des transferts de chaleur dans le sol pour étudier les échanges de chaleur et de masse entre le sol et l'atmosphère.

D'autres problèmes, tels que la propagation des polluants et des substances chimiques dans le sol, ou le stockage des déchets nucléaires, dépendront de la nature et de la prépondérance des autres échanges dans le milieu.

Tous ces problèmes ont suscité une abondante littérature scientifique centrée sur la modélisation hygrothermique des sols.

A.III - LA THERMIQUE DES SOLS POUR LA CONCEPTION THERMIQUE DES BATIMENTS

Revenant au problème posé à la fin du § A.I, nous avons essayé de dresser un inventaire des modèles adoptés pour prendre en compte les transferts sol/bâtiment dans la modélisation des

transferts thermiques d'un bâtiment. Nous avons récapitulé cet inventaire de méthodes de conception thermique du bâtiment dans le Tableau A.1 dû en partie à notre collègue du CSTB, Jacques MARTIN [MAR-84]. Cet inventaire recouvre à la fois des méthodes simplifiées (méthodes réglementaires) et des logiciels de simulation détaillée (à pas de temps horaire) comme CALECO-DOE.2.

Auteur	Utilisation	Régime	Méthode de calcul	dimension	limite inf.	limite sup.	année	Source
ACHARD		variable	facteurs de réponse				83	MAR-84
MITALAS	méthode simplifiée	permanent + coef. de R.V	basée sur des éléments finis	2			83	-
BOILEAU	-	permanent	analytique	2			68	-
SWINTON	-	-	corrélation	2			81	-
METZ	-	variable	différences finies	3			83	-
KUSUDA	-	-	facteurs de réponse	3			83	-
CLAESON	-	-	différences finies	3			80	-
MARTIN	méthode simplifiée	permanent	éléments finis	2 et 3	T = Cste à 10 m	T = Cste	84	-
BILBO	logiciel	variable	différences finies	1	T sinus.	T = temp. du bât.	86	FAU-86
CALECO	-	-	résistance équivalente	1	moyenne mensuelle	-	80	DOE-82
CUMALI	-	-	facteurs de réponse	2	T : Cste à 7 m	T = temp variable	81	CUM-81

Tableau A.1 – *Inventaire de méthodes de calcul des transferts thermiques dans le sol, adaptées à des calculs de déperdition thermique du bâtiment*

1 - Règles de calcul des déperditions thermiques (CSTB : [MAR-84], [MAR-85] et [LEB-86])

Le but de ces règles – mises au point par le CSTB dans un but normatif – est d'exprimer les pertes thermiques du plancher, des murs enterrés et des fondations du bâtiment vers le sol en terme de coefficients de déperdition. La méthode utilisée consiste à résoudre un problème bidimensionnel de conduction pure en régime stationnaire dans la configuration géométrique présentée à la Figure A.1. Cette configuration sera le point de départ de notre étude.

La résolution est faite par une méthode aux éléments finis. Des études paramétriques ont permis d'exprimer les coefficients K_{pn} , K_{pe} de déperdition du plancher et les coefficients K_{mn} , K_{me} de déperdition du mur enterré, respectivement vers la nappe et vers l'extérieur, en fonction des paramètres traduisant la géométrie du problème (P , Z , D), les rapports caractéristiques des températures ($TINE = T_I - T_N / T_I - T_F$) et les natures des composants (λ : la conductivité thermique du sol, R_1 et R_2 : les résistivités du plancher et du mur). Un modèle tridimensionnel a servi pour estimer l'erreur commise en prenant un modèle bidimensionnel.

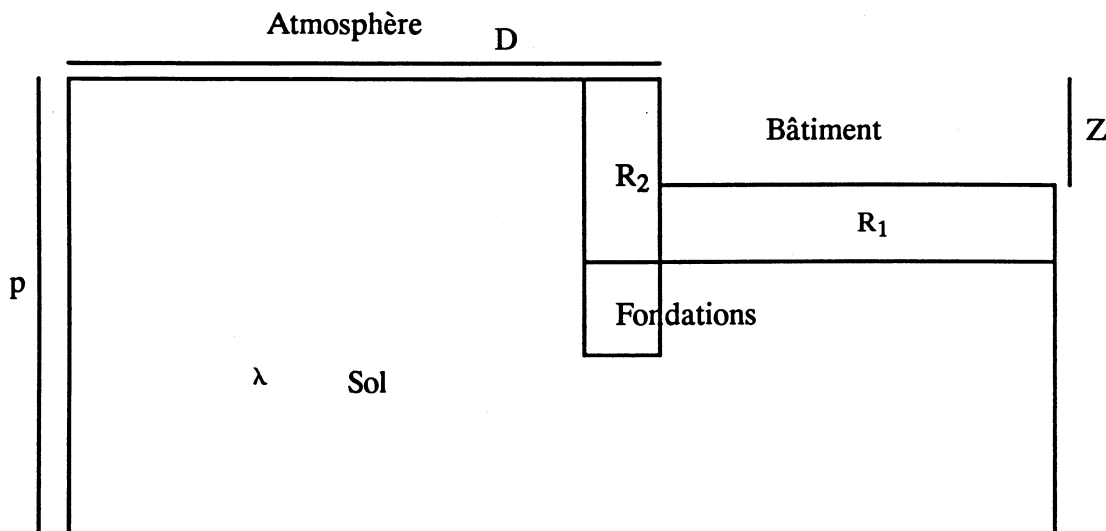


Figure A.1 : configuration de bâtiment enterré, étudiée en bidimensionnel par J. MARTIN (CSTB), pour l'établissement des règles de calcul de déperdition thermique [MAR .84]

2 - Méthode utilisée dans le logiciel CALECO-DOE.2

Le logiciel DOE.2 [diffusé en France sous le label CALECO après adaptation par l'équipe RAMSES] est un outil de référence aux USA. Il réalise une simulation à pas de temps horaire des

transferts thermiques dans un bâtiment. Le bilan d'énergie d'un local est établi par facteurs de réponse et facteurs de pondération [DOE-82] à pas de temps horaire.

A chaque pas de temps (1 h.) la contribution instantanée du sol aux pertes du local est donnée par la formule simple suivante :

$$Q = \frac{U}{e} (T_s - T_i)$$

- U est la conductivité thermique de la paroi multicouche, d'épaisseur e, en contact avec le sol ;
- T_i , la température du local en contact avec le sol ;
- T_s , la température du sol prise égale – mois par mois – à une valeur de référence caractéristique du site.

Ce bilan énérgitique " réel " est alors calculé a partir des pertes " instantannées " par convolu-
tion avec une série de facteurs de pondérations tenant compte de la composition du plancher et des
couches superficielles du sol sous le bâtiment.

3 - Méthode utilisée dans BILBO et BILGA [FAU-86]

Roland FAUCONNIER et ses collaborateurs, de la Fédération Nationale du Bâtiment, ont
développé dans les années (80-85) deux logiciels, BILBO et BILGA, de conception thermique du
Bâtiment. Ils ont écrit un manuel [FAU-86] explicitant les principaux algorithmes de ces logiciels.
En ce qui concerne les échanges avec le sol, les transferts sont évalués par différences finies dans un
modèle monodimensionnel, homogène et purement conductif. La condition à la limite inférieure
est une température sinusoïdale donnée dans les Figures A.2 extraites de [FAU-86] :

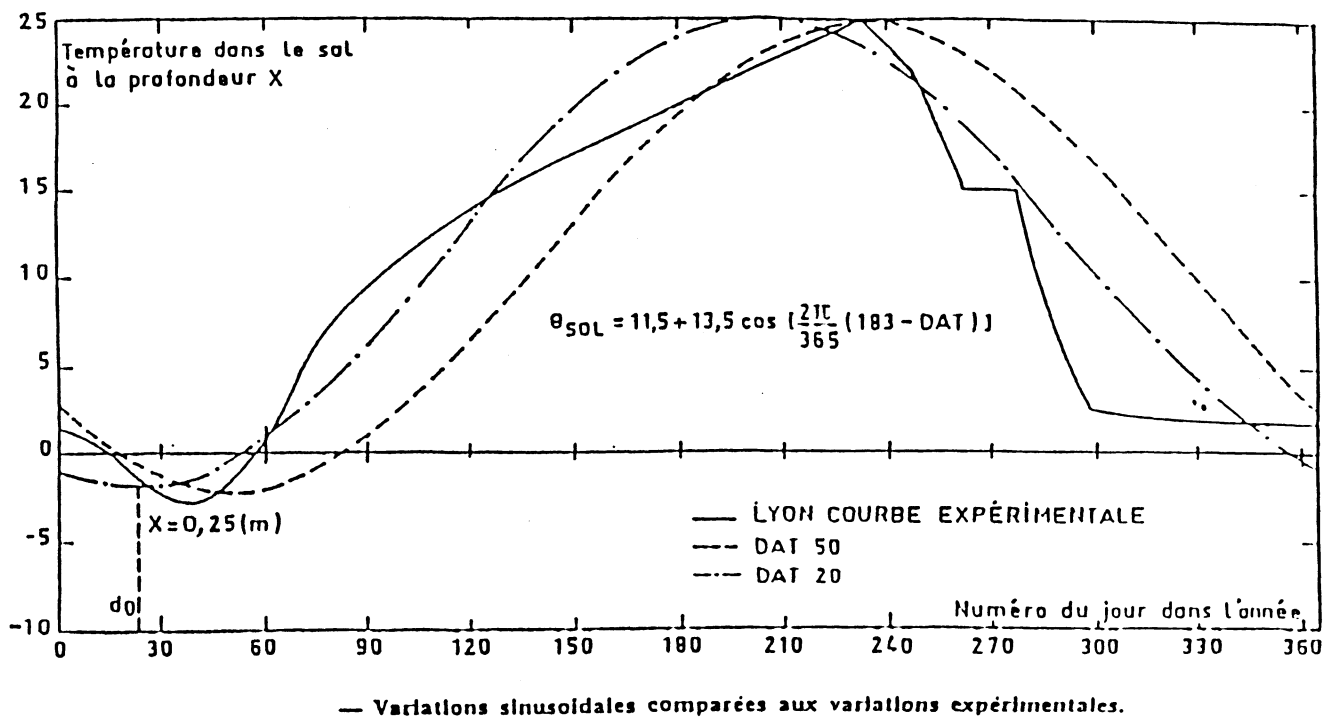
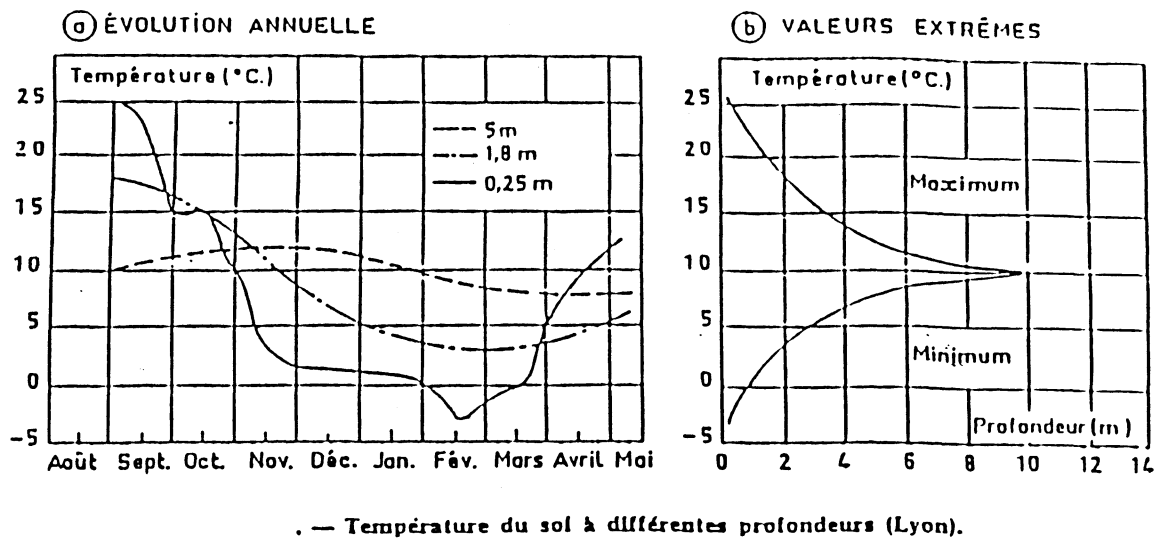
$$T_{sol} = T_{Msol} + A_{Tsol} \cos \left(\frac{2 \pi}{365} [183 - d_0] \right)$$

avec : T_{Msol} : température moyenne sur l'année à la profondeur E_{p0}

A_{Tsol} : amplitude des variations annuelles à la profondeur E_{p0}

d_0 : nombre de jours séparant le 1er Janvier à la date de la température minimale
annuelle à la profondeur E_{p0}

E_{p0} : épaisseur du sol prise en compte dans les calcul



Figures A.2 Courbes extraites du manuel d'algorithmes de la Fédération du bâtiment [FAU -86]

- en haut : exemples de températures caractéristiques de sol au long de l'année (Lyon)
- en bas : essai de lissage des variations de température de sol (Lyon)

4 - Méthode utilisée dans le module spécialisé de DOE.2 [CUM-81]

Nous avons présenté au § 2 la méthode standard de DOE.2. Dans les années 80-81, CUMALI et ses associés ont adapté une méthode de calcul plus évoluée [CUM-81], basée sur le pré-calcul d'une série de facteurs de réponse à pas de temps hebdomadaire, caractérisant le transfert thermique entre les fondations du bâtiment et le sol profond supposé être à température uniforme (dédiée des données météorologiques du site). Ceci permet d'intégrer le calcul des pertes par le sol dans le schéma d'ensemble des calculs de pertes par les murs qui se fait aussi par facteurs de réponse.

4.a Facteurs de réponse d'une surface

La définition sera donnée dans un cas simple : on a un mur de surfaces S_1 et S_2 , de températures respectives T_1 et T_2 . Il est question de trouver des fonctions du temps X , Y et Z telles que l'on peut écrire :

$$q_1(t) = X * T_1(t) + Y * T_2(t)$$

$$q_2(t) = Y * T_1(t) + Z * T_2(t)$$

q_1 et q_2 sont les flux respectifs aux surfaces S_1 et S_2

X traduit la réponse de la surface S_1 pour une excitation à la surface S_1

Z traduit la réponse de la surface S_2 pour une excitation à la surface S_2

Y " " " S_1 (ou S_2) " S_2 (ou S_1)

En pratique, on a plutôt des fonctions discrètes avec des incréments correspondant aux pas de temps et on a :

$$q_1^m = \sum_{n=-\infty}^{n=m} T_1^n X_{m-n} + \sum_{n=-\infty}^{n=m} T_2^n Y_{m-n}$$

$$q_2^m = \sum_{n=-\infty}^{n=m} T_1^n Y_{m-n} + \sum_{n=-\infty}^{n=m} T_2^n Z_{m-n}$$

Les X_i , Y_i et Z_i sont appelés facteurs de réponse des surfaces S_1 et S_2 .

4.b Le calcul des transferts dans le sol

Dans le calcul de CUMALI, les transferts entre le bâtiment et le sol sont calculés sous les hypothèses suivantes:

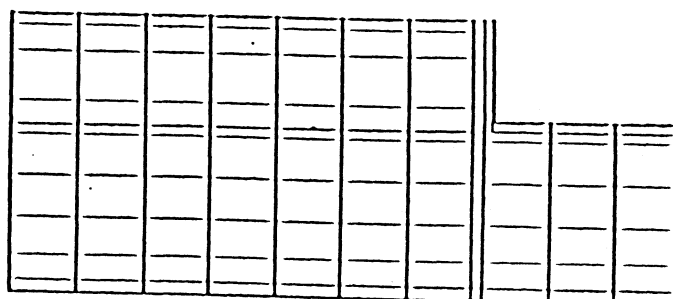
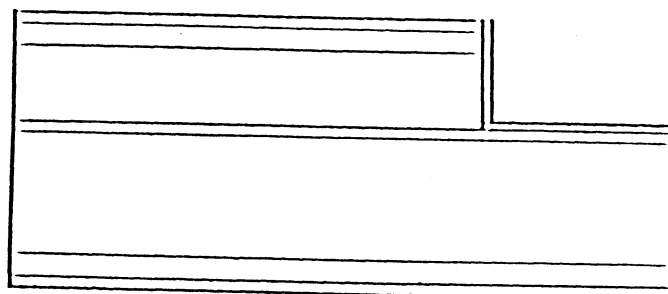
- les échanges dans le sol sont purement conductifs
- les caractéristiques thermophysiques du sol, des murs et du plancher sont constantes
- la température du sol profond est supposée constante
- l'action de l'extérieur est gouvernée par la température de surface qui est fonction :

de la température de l'air,

des radiations solaires,

de l'absorptivité du sol,

du coefficient de surface des transferts de chaleur



Figures A.3 : Maillage en éléments finis de la zone de sol sous le bâtiment ,pour le calcul des facteurs de réponse du sol [CUM 81]

Ce préprocesseur résout l'équation de la chaleur (purement conductive) sur un domaine bidimensionnel (Fig. A.3) par une méthode aux éléments finis puis calcule les facteurs de réponse des quatre surfaces mises en jeu.

5 - L'analyse modale [MOK-88]

Un modèle réduit basé sur l'analyse modale a été mis en place. L'étude est faite sous les hypothèses suivantes :

- le sol est supposé homogène
- les transferts sont purement conductifs
- l'équation de conduction est linéaire
- les caractéristiques thermophysiques du système sont invariantes dans le temps

L'équation de conduction est discrétisée en espace par des éléments finis irréguliers sur un domaine bidimensionnel dont la forme géométrique est donnée à la Figure A.1. Le système linéaire résultant sera réécrit dans la base de ses vecteurs propres (ou modes propres). Il est montré que ces vecteurs propres sont orthogonaux et que les valeurs propres sont négatives. Si w_i est la valeur propre associée au vecteur propre V_i , alors $\tau_i = \frac{1}{|w_i|}$ est le temps caractéristique de ce mode. Il caractérise la vitesse d'évolution de sa réponse thermique. Suivant la précision voulue, une gamme de temps caractéristiques sera retenue pour approcher la solution du problème. Les modes (ou vecteurs propres) correspondant aux temps caractéristiques retenus seront les nouveaux degrés de liberté du problème, d'où le nom de modèle réduit.

6 – Remarques générales

Du passage en revue qui précède on tire les remarques suivantes : les transferts dans le sol sont considérés comme purement conductifs. Certains auteurs avancent l'argument que les transferts convectifs ne dépassent pas 10 % des transferts conductifs [REC-82] ; ceci n'est pas évident au niveau des couches superficielles, vu le fort gradient de température qui pourrait avoir lieu au cours de la journée. De plus les propriétés thermophysiques du sol et surtout sa conductivité dépendent fortement du degré de saturation en eau du sol. La Fig. A.4 due à VAN DUIN [VAN-63] illustre bien ce phénomène.

Or dans les méthodes utilisées pour l'évaluation des transferts dans le sol, la conductivité du sol est prise constante, ce qui ne permet pas de prendre en compte la présence d'une nappe phréatique peu profonde, ni l'impact d'une période pluvieuse. Notre travail a donc pour but d'intégrer à terme la prise en compte des transferts de masse dans le sol pour la simulation numérique des transferts sol-bâtiment. Le chapitre suivant va nous permettre de donner les bases de notre modèle des transferts hygrothermiques dans le sol.

Conductivité thermique

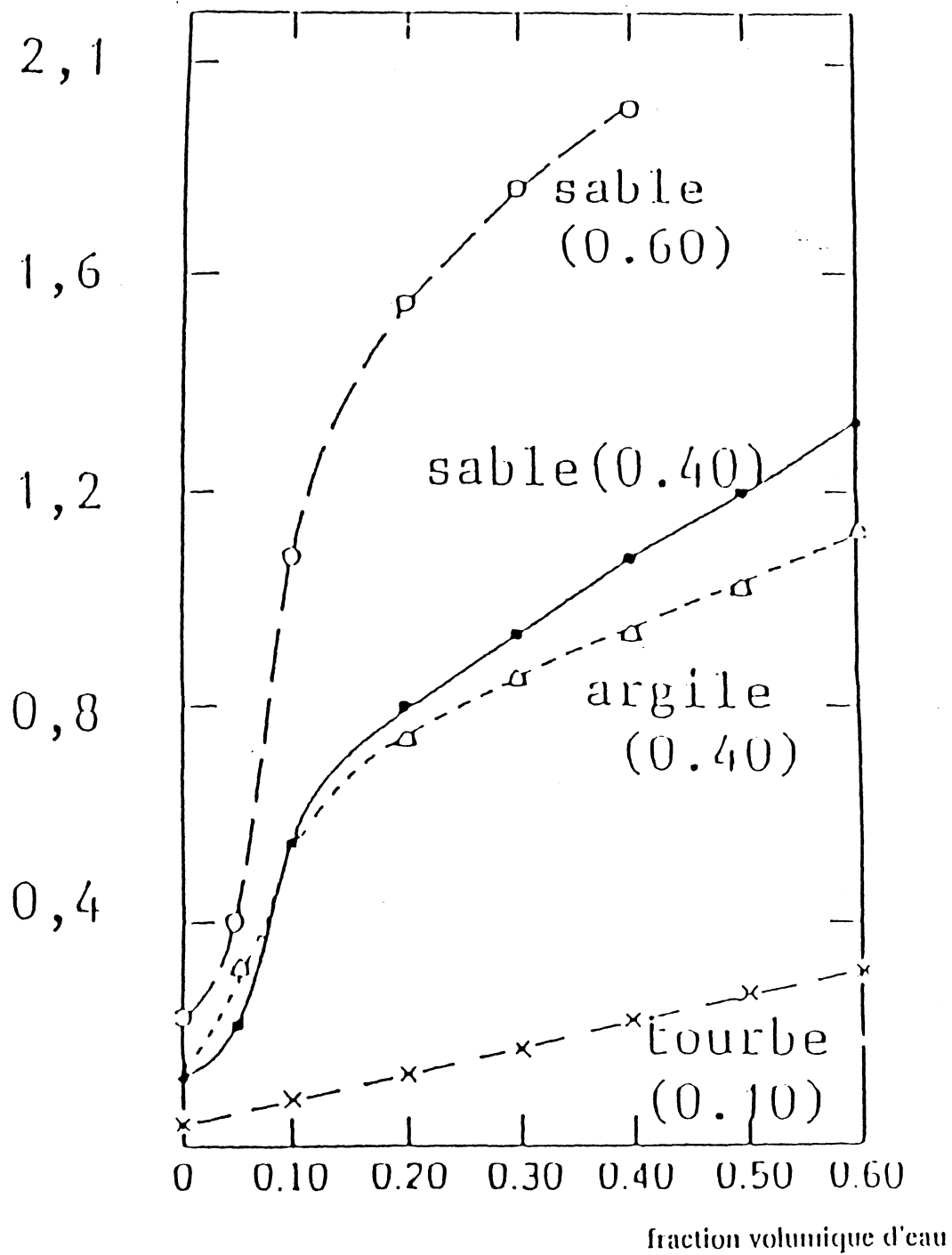


Figure A.4 Conductivité thermique du sol en ordonnées, versus la fraction volumique d'eau en abscisses pour différents types de sol [VAN - 63]

CHAPITRE B

MODELISATION DES TRANSFERTS DANS LE SOL

B-I - L'ECHELLE PROPRE DU MILIEU POREUX

B-II - L'APPROCHE PUREMENT CONDUCTIVE

- B.II.1 - Les hypothèses
- B.II.2 - L'équation de conservation de l'énergie
- B.II.3 - L'équation de transport
- B.II.4 - L'équation résultante

B.III - TRANSFERT DE CHALEUR ET DE MASSE

- B.III.1 - Les hypothèses
- B.III.2 - Les grandeurs utilisées
- B.III.3 - Les variables d'état
- B.III.4 - Les lois de conservation
- B.III.5 - Les équations de transfert
- B.III.6 - Le système résultant
- B.III.7 - Détermination des coefficients thermohydrauliques

B.IV - LES TRANSFERTS ENTRE LE SOL ET L'ATMOSPHERE

- B.IV.1 - Les transferts convectifs
- B.IV.2 - Le rayonnement net à la surface
 - 2-a *Le rayonnement solaire global*
 - 2-b *Le rayonnement terrestre*
 - 2-c *Le rayonnement atmosphérique*
- B.IV.3 - Les bilans à la surface
 - 3-a Bilan d'énergie
 - 3-b Bilan de masse

B.IV.4 - Les données

4-a *Les données météorologiques*

4-b *Les caractéristiques de la surface*

B.V - DES MODELES PLUS FINS

B.V.1 - Prise en compte de la pression dans la phase gazeuse

B.V.2 - Prise en compte de la variabilité spatiale

B-I - L'ECHELLE PROPRE DU MILIEU POREUX

Le sol est un milieu poreux constitué de trois phases : solide, liquide et gaz. Les phénomènes qui se déroulent au sein de chacune des phases sont bien décrits par les équations classiques de la mécanique des fluides, de la thermique et de la thermodynamique. Mais la détermination des différentes variables en tout point de chacune des phases se heurte à des difficultés relevant de la complexité géométrique de la phase solide et de la méconnaissance des aires interfaciales, d'où l'idée de définir une échelle dite macroscopique par opposition à l'échelle microscopique qui est celle des pores. Cette nouvelle échelle est basée sur la définition d'un volume élémentaire représentatif (VER) dont les dimensions sont intermédiaires entre les dimensions des pores et celles des hétérogénéités macroscopiques (les fissures, par exemple).

Au niveau de l'échelle macroscopique, le sol est considéré comme un milieu continu fictif. Les équations régissant les phénomènes dans ce milieu continu – bien qu'elles soient généralement d'origine empirique – sont choisies pour obéir aux principes généraux de la dynamique des fluides et de la thermodynamique.

Les grandeurs phénoménologiques utilisées au niveau du VER n'ont pas nécessairement la même signification qu'au niveau microscopique ; la pression dans la loi de Darcy par exemple est une grandeur macroscopique qui n'a pas de sens au niveau de la phase solide.

Le passage de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique peut être basé sur des considérations statistiques en supposant le milieu poreux aléatoire. Il peut aussi être basé sur une intégration des équations microscopiques sur le volume élémentaire représentatif. Dans ce cas, des hypothèses simplificatrices sur la géométrie de la matrice solide (périodicité) sont prises pour pouvoir effectuer l'intégration.

Les grandeurs phénoménologiques issues de cette intégration sont des valeurs moyennées des variables locales.

B.II - L'APPROCHE PUREMENT CONDUCTIVE

Elle est basée sur le concept de volume élémentaire représentatif (VER) évoqué ci-dessus. On ajoute les hypothèses suivantes :

1 – Les hypothèses

- 1) Le sol est composé de trois phases : solide, liquide, gaz
- 2) La phase solide est rigide, homogène et isotrope
- 3) Les deux phases fluides sont immobiles
- 4) Les chaleurs massiques des trois phases sont constantes

2 – L'équation de conservation de l'énergie

Elle est exprimée en terme d'enthalpie et s'écrit, compte-tenu des hypothèses précédentes :

$$\frac{\partial (\varrho H)}{\partial t} = - \operatorname{div} (\vec{J}_c) \quad (\text{B . II . 1})$$

avec : $\vec{J}_c$, densité de flux de chaleur

ϱ , masse volumique du VER

H, enthalpie

moyennant

$$C_T = \varrho \frac{\partial H}{\partial T}$$

on a :

$$C_T \frac{\partial T}{\partial t} = - \operatorname{div} (\vec{J}_c) \quad (\text{B . II . 2})$$

3 – L'équation de transport

La loi de Fourier à l'échelle macroscopique permet d'écrire :

$$\vec{J}_c = -\lambda \operatorname{grad} T \quad (\text{B . II . 3})$$

où λ est la conductivité thermique équivalente du milieu. On trouve une discussion des méthodes proposées pour son évaluation au § B.III.7.

4 – L'équation résultante

En substituant l'équation (B.II.3) dans l'équation (B.II.2), on a :

$$C_r \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\lambda \vec{\operatorname{grad}} T \right) \quad (\text{B.II.4})$$

De plus si le degré de saturation en eau des pores est homogène, λ sera indépendante de sa position dans le milieu et (B.II.4) s'écrira :

$$C_r \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \operatorname{div} \vec{\operatorname{grad}} T \quad (\text{B.II.5})$$

C'est le modèle dénommé purement conductif ; il est utilisé dans CUMALI [CUM-81] cité dans le chapitre précédent et dans beaucoup d'autres applications [CAN-88], [PET-85].

B.III – TRANSFERTS DE CHALEUR ET DE MASSE

1 – Les hypothèses

La modélisation est faite sous les hypothèses suivantes :

- 1 – Le sol est constitué de trois phases : solide, liquide, gaz.
- 2 – La phase solide est rigide, homogène et isotrope à l'échelle du VER. Ces propriétés thermophysiques sont indépendantes de la température. Il n'y a pas de réaction chimique entre le solide et les fluides en présence.
- 3 – La phase liquide est formée de l'eau pure incompressible et indilatable
- 4 – La phase liquide est supposée continue dans l'espace des pores
- 5 – La phase gazeuse est formée d'air et de vapeur d'eau, supposés être deux gaz parfaits, en équilibre thermodynamique.
- 6 – La phase gazeuse est à pression uniforme, égale à la pression atmosphérique.
- 7 – les chaleurs massiques des différentes phases sont constantes dans la gamme des températures de cette étude.
 $0^\circ < T < 100^\circ\text{C}$

8 – on néglige :

- a) les forces d'origines osmotique et électrique appliquées sur l'eau liquide ;
- b) les effets d'hystérésis ;
- c) les effets dynamiques ;
- d) le transfert par rayonnement ;
- e) la teneur en masse d'eau-vapeur devant celle de l'eau-liquide :

$$\rho_v \eta_v \ll \rho_l \eta_l$$

2 – Les grandeurs utilisées

– Masses volumiques [kg/m³]

ρ_o = masse du solide/volume du solide

ρ_l = masse volumique de l'eau liquide

ρ_v = masse volumique de la vapeur d'eau

– Teneur volumique [m³/m³]

- des pores = porosité = ϵ_o = volume des pores/volume total

- du solide = $\eta_o = 1 - \epsilon_o$; η_o = volume du solide/volume total

- du liquide : η_l = volume du liquide/volume total

- du gaz : η_g = volume du gaz/volume total

- en vapeur d'eau condensable : $\eta'_v = \frac{\rho_v}{\rho_l} \eta_g$

3 – Les variables d'état

Pour le transfert de chaleur, l'état du sol est exprimé en terme de température T en °C ;
 $0 < T < 100$. Les transferts de masse sont exprimés en teneur en eau η_l qui traduit le degré de saturation en eau des pores. Ils peuvent aussi être exprimés en terme de pression d'eau ; en effet si P_l est la pression de la phase liquide, P_{at} la pression de la phase gazeuse supposée égale à la pression atmosphérique et P_c la pression capillaire, on a :

$$P_c + P_l = P_{at}$$

Alors

$$\frac{-P_c}{\rho_l g} = \frac{P_l - P_{at}}{\rho_l g}$$

et

$$h = \frac{-P_c}{\rho_l g}$$

exprimée en mètres est dite pression d'eau du sol. h n'est pas indépendante de la température ; elle est donc rapportée à une température de référence T_o par la relation

$$h(\eta_l, T_0) = h(\eta_l, T) \frac{\sigma_l(T_0)}{\sigma_l(T)}$$

où $\sigma_l(T)$ est la tension superficielle de l'eau.

$\bar{h}(\eta_l) = h(\eta_l, T_0)$ est indépendante de T et définit d'une manière unique le degré de saturation du sol.

h est prise comme variable d'état. Elle sera négative dans les zones non saturées et positive ou nulle dans les zones saturées.

4 – Les lois de conservation

a – Conservation de la masse :

Au niveau de chacune des deux phases fluides (liquide, gaz), on a pour $i = l$ ou v :

$$\frac{\partial(\rho_i \eta_i)}{\partial t} + \text{div} \left(\rho_i \eta_i \vec{U}_i \right) = I_i \quad (\text{B.III.1})$$

avec I_i : taux de production de la phase i

$\vec{J}_i = \rho_i \eta_i \vec{U}_i$: densité du flux de l'espèce i

La conservation de la masse se traduit par :

$$I_l + I_v = 0$$

En posant $\vec{J}_l + \vec{J}_v = \vec{J}_m$ et en sommant les deux équations ($i = l$ et $i = v$), on a :

$$\frac{\partial(\rho_l \eta_l + \rho_v \eta_v)}{\partial t} + \text{div}(\vec{J}_m) = 0$$

Par l'hypothèse (1-8.e), on a :

$$\rho_l \eta_l + \rho_v \eta_v \approx \rho_l \eta_l$$

et on peut écrire :

$$\frac{\partial \eta_l}{\partial t} = \frac{-1}{\rho_l} \operatorname{div} \vec{J}_m \quad (\text{B.III.2})$$

b – Conservation de l'énergie :

Elle est exprimée en terme d'enthalpie et s'écrit :

$$\frac{\partial(\rho \eta H)}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \eta H \vec{U}) = - \operatorname{div} \vec{J}_c + I_c \quad (\text{B.III.3})$$

I_c est un terme de source de chaleur

$\vec{J}_c$ est le flux de chaleur

$$\rho \eta H = \rho_0 \eta_0 H_0 + \rho_l \eta_l H_l + \rho_v \eta_v H_v$$

$$\rho \eta H \vec{U} = H_l \vec{J}_l + H_v \vec{J}_v$$

avec $\frac{\partial H_i}{\partial T} = c_i$ est la capacité calorifique de la phase i

et $H_v - H_l = L_v$ est la chaleur latente de vaporisation

Moyennant

$$C_T = \rho_0 \eta_0 c_0 + \rho_l \eta_l c_l + \rho_v \eta_v c_v$$

et l'équation (B.III.1) pour $i = l, v$ on a

$$C_T \frac{\partial T}{\partial t} = - \operatorname{div} (\vec{J}_c) - (c_v \vec{J}_v + c_l \vec{J}_l) \operatorname{grad} T + I_l L_v + I_c \quad (\text{B.III.4})$$

Il découle de l'équation (B.III.2) et de l'hypothèse (1-8.e) que

$$I_l = - \operatorname{div} \vec{J}_v$$

et par suite

$$\begin{aligned} I_l L_v &= - L_v \operatorname{div} (\vec{J}_v) \\ &= - \operatorname{div} (L_v \vec{J}_v) + \frac{\partial L_v}{\partial T} \vec{J}_v \operatorname{grad} T \end{aligned}$$

$$= - \operatorname{div} (L_v \vec{J}_v) + (c_v - c_l) \vec{J}_v \operatorname{grad} T$$

ainsi l'équation (B.III.4) s'écrit :

$$C_T \frac{\partial T}{\partial t} = - \operatorname{div} (\vec{J}_c + L_v \vec{J}_v) - c_l \vec{J}_m \operatorname{grad} T + I_c \quad (\text{B.III.5})$$

5 – Les équations de transport

a – Transport de masse :

Le flux d'eau liquide est donné par la loi de Darcy généralisée :

$$\vec{J}_l = - \rho_l K_h \operatorname{grad}(h - Z) \quad (\text{B.III.6})$$

qui s'écrit

$$\vec{J}_l = - \rho_l K_h \left(\frac{\partial h}{\partial h} \operatorname{grad}(\bar{h}) + \frac{\partial h}{\partial T} \operatorname{grad} T - \operatorname{grad} Z \right) \quad (\text{B.III.7})$$

avec $K_h = K_h(h, T)$ est la conductivité hydraulique du sol

Z est la distance à la surface du sol, comptée positivement vers le bas

Pour la vapeur d'eau, la loi de Stefan généralise la loi de Fick aux milieux poreux et on a :

$$\vec{J}_v = - D_v \operatorname{grad} \rho_v$$

qui s'écrit

$$\vec{J}_v = - D_v \left(\frac{\partial \rho_v}{\partial h} \operatorname{grad}(\bar{h}) + \frac{\partial \rho_v}{\partial T} \operatorname{grad} T \right) \quad (\text{B.III.8})$$

avec D_v : diffusivité moléculaire de la vapeur d'eau dans le milieu poreux et donc

$$\vec{J}_m = - \rho_l \left(D_{mh} \operatorname{grad} \bar{h} + D_{mT} \operatorname{grad} T - K_h \operatorname{grad} Z \right) \quad (\text{B.III.9})$$

avec :

$$D_{mh} = K_h \frac{\partial h}{\partial h} + \frac{D_v}{\rho_l} \frac{\partial \rho_v}{\partial h}$$

$$D_{mT} = K_h \frac{\partial h}{\partial T} + \frac{D_v}{Q_l} \frac{\partial Q_v}{\partial T}$$

b – Transport de chaleur

Le flux de chaleur est donné par la loi de Fourier :

$$\vec{J}_c = -\lambda \vec{\text{grad}} T \quad (\text{B.III.10})$$

où λ est la conductivité calorifique du milieu poreux.

Il est possible de faire appel à la thermodynamique des processus irréversibles pour retrouver les expressions de $\vec{J}_m$ et $\vec{J}_c$ au lieu de partir des lois ci-dessus [BEN-82].

6 – Le système résultant

En substituant les équations de transport dans les lois de conservation, on trouve le système suivant :

$$C_h \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = \text{div} \left(D_{mh} \vec{\text{grad}} \bar{h} + D_{mT} \vec{\text{grad}} T - K_h \vec{\text{grad}} Z \right) \quad (\text{B.III.11})$$

$$C_T \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} \left(D_{ch} \vec{\text{grad}} \bar{h} + D_{cT} \vec{\text{grad}} T \right) + I_c + Q_l c_l \vec{\text{grad}} T \left(D_{mh} \vec{\text{grad}} \bar{h} + D_{mT} \vec{\text{grad}} T - K_h \vec{\text{grad}} Z \right) \quad (\text{B.III.12}) \text{ où}$$

$$C_h = \frac{\partial \eta_l}{\partial \bar{h}} \quad \text{est la capacité hydraulique du sol}$$

$$D_{mh} = K_h \frac{\partial h}{\partial \bar{h}} + \frac{D_v}{Q_l} \frac{\partial Q_v}{\partial \bar{h}}$$

$$D_{mT} = K_h \frac{\partial h}{\partial T} + \frac{D_v}{Q_l} \frac{\partial Q_v}{\partial T}$$

$$D_{ch} = L_v D_v \frac{\partial Q_v}{\partial \bar{h}}$$

$$D_{cT} = \lambda + L_v D_v \frac{\partial Q_v}{\partial T}$$

K_h : conductivité hydraulique du sol

L_v : chaleur latente de vaporisation

I_c : terme de source

Pour le calcul de ces coefficients, on a besoin en plus des relations donnant $\eta_l (\bar{h})$ et

$K_{th} (\bar{h})$, de calculer $\frac{\partial q_v}{\partial \bar{h}}$ et $\frac{\partial q_v}{\partial T}$.

La loi des gaz parfaits, appliquée à la vapeur d'eau et à l'air, nous donne q_v par :

$$q_v = \frac{P_v}{R_v T}.$$

La loi de Kelvin exprime P_v par :

$$P_v = P_{vs} (T) \exp \left(\frac{g}{R_v} \frac{h}{T} \right) \quad (\text{B.III.13})$$

où P_{vs} est la pression de vapeur saturante. Elle ne dépend que de la température.

Par l'équation de Clapeyron on écrit :

$$\frac{d P_{vs} (T)}{dT} = P_{vs} (T) \frac{L_v}{R_v T^2}. \quad (\text{B.III.14})$$

Dans le système ci-dessus, l'humidité peut s'exprimer en fonction de la teneur en eau η_l ou de la

teneur en eau pondérale $\omega = \frac{\rho_l \eta_l}{\rho_0}$ au lieu de la pression d'eau $\bar{h}$ mais dans tous les cas la

connaissance de $\eta_l (\bar{h})$ reste nécessaire.

7 – Détermination des coefficients thermo-hydrauliques du sol

a – Les coefficients thermiques

La conductivité

Le calcul de la conductivité thermique à l'échelle de VER nécessite, en plus de la connaissance des teneurs volumiques de chacune des phases, la détermination de la conductivité de la phase solide et les aires interfaciales. La conductivité de la phase solide est généralement calculée par une moyenne géométrique des conductivités de ses constituants :

$$\lambda_s = \Pi_i \lambda_i^{x_i}$$

avec λ_i : conductivité du constituant i

x_i : sa fraction volumique

Les aires interfaciales sont prises en compte par des facteurs de forme basés sur des hypothèses simplificatrices de la forme des composants de la phase solide et de la façon dont ils sont rangés. Parmi les modèles très répandus, celui de DE VRIES suppose que la phase solide est formée par des ellipsoïdes plongés dans la phase continue (liquide ou air). Dans d'autres modèles, la conductivité est calculée par la moyenne géométrique :

$$\lambda = \Pi_\alpha \lambda_\alpha^{x_\alpha}$$

où λ_α et x_α sont respectivement la conductivité et la fraction volumique de la phase α . D'autres expressions de la conductivité sont d'origine empirique obtenue par régression sur des données expérimentales. Dans le cas d'un sol sec, la résistance de contact entre particules solides est prise en compte par une lame d'air en série avec la phase solide. On trouve dans [FAR-81] une comparaison de treize modèles avec une analyse de leurs domaines de validité pour aboutir à une procédure plus générale sélectionnant le modèle adapté à chaque situation.

Capacité calorifique volumique

Elle est généralement exprimée par :

$$C_T = \rho_0 \eta_0 c_0 + \rho_l \eta_l c_l$$

avec c_l est la chaleur spécifique de l'eau liquide,

c_0 est la chaleur spécifique de la phase solide calculée elle aussi par la formule :

$$c_0 = \sum \frac{\rho_i}{\rho_0} c_i$$

ρ_i et c_i étant respectivement la masse volumique et la chaleur spécifique du constituant i de la phase solide.

Diffusivité de la vapeur d'eau dans les pores

Le calcul de D_v , diffusivité moléculaire de la vapeur d'eau dans le milieu poreux, dépend des caractéristiques de ce dernier.

La géométrie des pores est exprimée par un facteur de tortuosité ζ généralement pris égal à 0,67.

Si $(\vec{\nabla T})_p$ est le gradient de température à l'échelle des pores et si $\vec{\nabla T}$ est le gradient de T à l'échelle des V.E.R., alors le rapport $\chi = \frac{(\vec{\nabla T})_p}{\vec{\nabla T}}$ doit être estimé pour pouvoir passer du gradient de température au sein des pores qui apparaît dans l'équation (B.III.8) au gradient à l'échelle du V.E.R. qui apparaît dans le système final. Enfin une fonction de η_l traduit la dépendance de la diffusivité D_v par rapport à la teneur volumique de la phase gazeuse.

On a ainsi :

$$D_{vh} = \frac{1}{\rho_l} \nu_v \frac{P_a}{P_a - P_v} f(\eta_s) \zeta \frac{\partial \rho_v}{\partial h}$$

$$D_{vT} = \frac{1}{\rho_l} \nu_v \frac{P_a}{P_a - P_v} f(\eta_s) \chi \frac{\partial \rho_v}{\partial T}$$

où ν_v est la diffusivité moléculaire de la vapeur d'eau dans l'air libre.

b – Les coefficients hydrauliques

Deux relations sont nécessaires pour calculer les coefficients de l'équation (B.III.11), l'une pour exprimer la pression d'eau en fonction de la teneur en eau à fin de calculer la capacité hydraulique

$C_h = \frac{\partial \eta_l}{\partial h}$, et l'autre pour calculer la conductivité hydraulique $K_h(\bar{h})$. Outre ceux d'origine expérimentale, beaucoup de modèles empiriques et semi-empiriques sont proposés pour ces relations. Pour leur dépendance en température, on retient les deux relations suivantes :

$$\frac{h(\eta_l, T)}{\sigma_l(T)} = \frac{h(\eta_l, T_0)}{\sigma_l(T_0)}$$

et

$$K_h(\eta_l, T) \cdot \nu_l(T) = K_h(\eta_l, T_0) \cdot \nu_l(T_0)$$

où $\nu_l (T)$ est la viscosité cinématique de l'eau ; $\sigma_l (T)$ est sa tension superficielle .

En plus de la forte dépendance en $\bar{h}$ – dépendance exponentielle – et la forte non linéarité que cela entraîne sur l'équation étudiée, le phénomène d'hystérésis est présent au niveau de ces deux relations. Pour les relations proposées, on a les deux limites suivantes :

$$\lim_{\bar{h} \rightarrow -\infty} \frac{\eta'_l (\bar{h})}{K_{lh} (\bar{h})} = + \infty$$

$$\lim_{\bar{h} \rightarrow 0^+} \frac{\eta'_l (\bar{h})}{K_{lh} (\bar{h})} = 0^+$$

où $\eta'_l (\bar{h})$ est la dérivée par rapport à $\bar{h}$ de la fonction η_l ;

Cela implique que l'équation de transfert de masse dégénère à l'interface entre zone sèche ($\eta_l \leq \eta_{lc}$) et zone humide d'une part, et entre zone saturée et zone non saturée d'autre part. Cette équation présente une frontière libre au niveau de la limite de la zone saturée. Elle change de type et devient elliptique dans la zone saturée alors qu'elle est parabolique en milieu non saturé. (η_{lc} est la teneur en eau critique, c'est la teneur à laquelle la phase liquide n'est plus continue)

B.IV – LES TRANSFERTS ENTRE LE SOL ET L'ATMOSPHERE

Pour étudier les transferts entre le sol et l'atmosphère, on est amené à distinguer les bilans radiatifs à la surface d'une part et les transferts convectifs dans les couches basses de l'atmosphère d'autre part.

1 - Les transferts convectifs

On s'intéresse à l'étude des transferts convectifs entre le sol et la partie de l'atmosphère qui correspond à quelques dizaines de mètres d'altitude. La modélisation de ces transferts est envisagée sous les hypothèses suivantes :

- 1 - L'écoulement d'air est turbulent, stationnaire, horizontalement homogène et à flux vertical constant.
- 2 - On néglige les effets des forces de pression, de Coriolis et de flottabilité, ainsi que les effets des flux radiatifs et de l'humidité sur les mécanismes de turbulence.

On néglige les flux d'origine moléculaire devant les flux d'origine turbulente.

3 - La vitesse moyenne de l'air est parallèle à une direction fixe (horizontale) prise comme axe des x ; l'axe des z est vertical.

On s'intéresse à l'écoulement moyen. Les équations de conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement et de l'humidité sont écrites en fonction des quantités moyennes. On utilise les diffusivités turbulentes K_m , K_h , K_v introduites par analogie aux diffusivités moléculaires et la vitesse de frottement u^* :

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

où τ est la contrainte de cisaillement appliquée par la surface du sol sur l'écoulement d'air.

ρ est la masse volumique de l'air

Les équations de conservation s'écrivent alors

$$K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = - (u^*)^2 \quad (\text{B.IV.1})$$

$$K_h \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = - \frac{H}{\rho C_p} \quad (\text{B.IV.2})$$

$$K_v \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = - \frac{E}{\rho} \quad (\text{B.IV.3})$$

où $\bar{u}$ est la vitesse moyenne de l'air

$\bar{T}$ est la température moyenne de l'air

$\bar{q}$ est l'humidité spécifique de l'air

H est le flux de chaleur sensible

C_p est la chaleur spécifique de l'air (air + vapeur d'eau)

E est le flux d'évaporation de l'eau

Pour déterminer les coefficients de diffusivité turbulente, on suppose en plus que le gradient vertical de température est nul. C'est l'hypothèse d'atmosphère neutre. On introduit, via le modèle de Prandtl, les longueurs de mélanges suivantes :

$$L_m = K_m z$$

$$L_h = K_h z$$

$$L_v = K_v z$$

qui vérifient :

$$K_m = - L_m^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

$$L_h = L_m L_h \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

$$K_v = L_m L_v \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

Ce qui permet d'écrire, moyennant :

$$T^* = - \frac{H}{\rho c_p u^*} \quad \text{et} \quad q^* = - \frac{E}{\rho u^*} ,$$

les équations de conservation sous les formes suivantes :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u^*}{K_m z}$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = \frac{T^*}{K_h z}$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = \frac{q^*}{K_v z} .$$

On intègre ces équations entre les altitudes z_0 et z_a où z_a est le niveau auquel sont prises les mesures atmosphériques (entre 2 et 15 m) et z_0 est la hauteur de rugosité. C'est la hauteur à laquelle on se permet d'écrire $u(z_0) = 0$; $T(z_0) = T_s$ et $q(z_0) = q_s$. T_s et q_s sont respectivement la température et l'humidité spécifique de la surface du sol. On a ainsi :

$$\frac{\bar{u}(z_a)}{u^*} = \frac{1}{K_m} \text{Log} \left(\frac{z_a}{z_0} \right)$$

$$\frac{\bar{T}(z_a) - \bar{T}_s}{T^*} = \frac{1}{K_h} \text{Log} \left(\frac{z_a}{z_0} \right)$$

$$\frac{\bar{q}(z_a) - \bar{q}_s}{q^*} = \frac{1}{K_v} \text{Log} \left(\frac{z_a}{z_0} \right).$$

En remplaçant u^* , T^* et q^* par leurs expressions en fonction de u , on arrive à :

$$H = \rho c_p h_h (\bar{T}_s - \bar{T}(z_a)) \quad (\text{B.IV.1})$$

$$E = \rho h_h (\bar{q}_s - \bar{q}(z_a)) \quad (\text{B.IV.2})$$

$$\text{avec} \quad h_h = \frac{K_h K_m \bar{u}}{\left(\text{Log} \frac{z_a}{z_0} \right)^2} \quad \text{et} \quad h_v = \frac{K_v K_m \bar{u}}{\left(\text{Log} \frac{z_a}{z_0} \right)^2}.$$

Ainsi la détermination des constantes K_m , K_h , K_v et la longueur de rugosité z_0 suffisent pour exprimer la chaleur sensible H et la quantité évaporée E en fonction des données météorologiques au niveau z_a .

On remarque enfin que des modèles plus fins pour les transferts convectifs dans l'atmosphère peuvent tenir compte de la stratification thermique de ce dernier [DUN-82]. Dans de tels modèles, les coefficients d'échanges h_h et h_v dépendent fortement du flux de chaleur sensible H à travers la longueur d'Obukhov qui caractérise l'état de stratification de la couche de surface [REC-82]. La prise en compte de cette non linéarité est très coûteuse pour ce que l'on veut faire.

2 – Le rayonnement net à la surface

C'est le flux résultant du rayonnement solaire global, du rayonnement atmosphérique et du rayonnement terrestre, respectivement notés R_G , R_{at} et R_t , et on a :

$$R_N = (1 - a) R_G + \epsilon_s R_{at} - R_t$$

où R_N est le rayonnement net

a et ϵ_s sont respectivement l'albédo de la surface et son émissivité.

a – Rayonnement solaire global : R_G

C'est la résultante verticale des rayonnements solaires direct et diffus. Sa valeur instantanée peut varier entre 0 et 1200 W.m^{-2} . C'est une grandeur disponible dans les fichiers météorologiques standards. En l'absence de ces données, on peut utiliser des formules empiriques et semi-empiriques pour l'estimer ([KON-69] cité par [REC-82]).

b – Le rayonnement terrestre

Le sol émet un rayonnement propre d'origine thermique. Il est donné par la loi de Stefan :

$$R_s = \epsilon_s \sigma T_s^4$$

où σ est la constante de Stefan

T_s et ϵ_s sont respectivement la température en °K de la surface et son émissivité

c – Le rayonnement atmosphérique

L'atmosphère émet un rayonnement de grande longueur d'onde dont la valeur dépend de la teneur de l'air en vapeur d'eau et en gaz carbonique. Des relations plus ou moins empiriques ont été proposées pour exprimer ce rayonnement en fonction de la pression partielle de la vapeur d'eau et la température de l'air au voisinage du sol. On prend comme exemple celle de BRUTSAERT [BRU-75] ; elle s'écrit :

$$R_{at} = 1.24 \left(\frac{P_{va}}{T_a} \right)^{\frac{1}{7}} \sigma T_a^4$$

où P_{va} est la pression partielle de la vapeur d'eau (mb) à une altitude $z_a = 2\text{m}$ (altitude de la mesure météo)

T_a est la température en °K de l'air à $z_a = 2\text{m}$

σ est la constante de Stefan

La nébulosité et la nature des nuages peuvent être prises en compte par des corrections sur les constantes utilisées dans la formule précédente.

3 – Les bilans à la surface

a – Bilan d'énergie

La surface du sol est assimilée à un plan de capacité calorifique nulle. On prend en compte la chaleur de changement de phase, la chaleur sensible échangée avec l'air, la chaleur échangée avec le sol et le rayonnement net à la surface qui résulte du rayonnement solaire global, du rayonnement

atmosphérique et du rayonnement terrestre. Le bilan s'écrit :

$$R_N = J_{ch} + H + L_v E \quad (\text{B.IV.3})$$

où : R_N est le rayonnement net arrivant à la surface

J_{ch} est le flux de chaleur qui va de la surface vers le sol

H est le flux de chaleur sensible qui va de la surface vers l'atmosphère

L_v est la chaleur latente de changement de phase perdue par la surface

E est la masse d'eau évaporée à la surface

La température de surface T_s est le résultat d'un équilibre entre ces quatre types de transferts.

b – Bilan de masse

La conservation de l'eau se traduit par l'équation suivante à la surface :

$$J_p = E + J_s + J_r \quad (\text{B.IV.4})$$

La quantité d'eau tombée à la surface est partagée au plus en trois parties : E est la quantité évaporée, J_r est la partie qui ruisselle et J_s est le flux d'eau pénétrant le sol. Le flux d'eau liquide peut provenir de la pluie ou de la condensation nocturne.

Si $J_p = 0$, alors $J_r = 0$ et $E + J_s = 0$.

4 – Les données

Pour la détermination de la température de surface et de la quantité d'eau évaporée, on a besoin en plus de la connaissance des flux dans le sol, des données météorologiques et des caractéristiques de la surface.

a – Les données météorologiques

Pour évaluer la quantité de chaleur sensible, on doit connaître la vitesse du vent et la température de l'air.

La quantité d'eau évaporée est fonction de l'humidité spécifique de l'air qui est calculée à partir de la pression partielle de la vapeur d'eau. Celle-ci est prise égale à la pression de vapeur saturante à la température de rosée.

Pour évaluer le rayonnement net, on a également besoin de la température de l'air et de la pression partielle de vapeur d'eau, en plus du rayonnement solaire global qui résulte des rayonnements solaires direct et diffus.

La variation de ces grandeurs est de l'ordre de la minute, alors que les données disponibles ne sont généralement qu'horaires pour les rayonnements et trihoraires pour les autres, ce qui nous amène, en l'absence de données plus précises, à faire des interpolations sur les données existantes.

b – Les caractéristiques de la surface

La surface participe dans le bilan par sa longueur de rugosité, son albédo et son émissivité, qui dépendent de l'humidité de la surface et sont sensibles à la présence d'une couverture neigeuse ou végétale par exemple.

B.V – DES MODÈLES PLUS FINIS

1 – Prise en compte de la pression dans la phase gazeuse

Dans ce qui précède, par l'hypothèse (B.III.1– 6), la pression de la phase gazeuse est considérée uniforme, égale à la pression atmosphérique.

A.DEGIOVANNI et C.MOYNE [DEG-87] développent un modèle de transport simultané de chaleur et de masse prenant en compte la pression en phase gazeuse comme variable. Ils aboutissent à un système de la forme suivante :

$$m_{11} \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} \left(K_{11} \vec{\text{grad}} T + K_{12} \vec{\text{grad}} X + K_{13} \vec{\text{grad}} P \right)$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \text{div} \left(K_{21} \vec{\text{grad}} T + K_{22} \vec{\text{grad}} X + K_{23} \vec{\text{grad}} P + \frac{K_1}{v_1} \frac{Q_1}{Q_0} \vec{g} \right)$$

$$m_{31} \frac{\partial T}{\partial t} + m_{32} \frac{\partial X}{\partial t} + m_{33} \frac{\partial P}{\partial t} = \text{div} \left(K_{31} \vec{\text{grad}} T + K_{32} \vec{\text{grad}} X + K_{33} \vec{\text{grad}} P \right)$$

où T est la température, P est la pression et X est la fraction massique de l'eau rapportée à la masse anhydre du solide. Cette formulation passe par l'écriture des équations de mouvement de la vapeur d'eau et de l'air séparément. Elle met en évidence l'importance des mouvements induits par le gradient de pression totale en phase gazeuse.

2 – Variabilité spatiale

En toute rigueur, un sol n'est jamais homogène. Il apparaît une grande variabilité spatiale de sa texture, de sa structure et, par suite, de ses propriétés hydrodynamiques. Une description stochastique des paramètres caractéristiques du sol doit s'ajouter à la modélisation déterministe des transferts. Une telle description pourrait être basée sur une analyse géostatistique, mais le coût d'acquisition des informations nécessaires – les distances caractéristiques – devient vite prohibitif. En faisant appel à la théorie de simulation des milieux poreux [BRU-84] qui s'appuie sur les caractéristiques dimensionnelles de l'équation reliant la pression à la tension superficielle de l'eau et de l'équation de Navier-Stokes, la variabilité spatiale des propriétés hydrodynamiques sera exprimée à l'aide d'un unique paramètre appelé facteur d'échelle. La géométrie interne du sol sera en tout point semblable. Des simulations basées sur cette approche ([BRU-84], [VAU-84]) ont mis en évidence l'intérêt que peut apporter cette modélisation surtout pour des études sur des grands domaines. Mais le caractère stochastique de ce facteur d'échelle fait que sa détermination est encore coûteuse.

CHAPITRE C

ETUDE ANALYTIQUE DE L'EQUATION D'INFILTRATION

C.I – INTRODUCTION

C.II – RESULTAT D'EXISTENCE

- C.II.1 – Reformulation du problème
- C.II.2 – Définition d'une solution faible du problème
- C.II.3 – Hypothèses sur les fonctions C , K et u_0
- C.II.4 – Existence d'une solution faible

C.III – UNICITE DE LA SOLUTION

C.IV – CONVERGENCE VERS LA SOLUTION DU PROBLEME STATIONNAIRE

- C.IV.1 – Solution stationnaire
- C.IV.2 – Sous-solution, sur-solution
- C.IV.3 – Théorème de comparaison
- C.IV.4 – Convergence vers la solution du problème stationnaire

I – Introduction

On s'intéresse au problème d'infiltration d'eau dans un milieu poreux non saturé – le sol – sous condition de flux à la surface.

On ne tient pas compte du gradient de température. L'écoulement est supposé isotherme. Par substitution de la loi de Darcy dans l'équation de continuité, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta(h(x, t)) = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(h(x, t)) \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} - D(h(x, t)) \right) \quad (\text{C.I.1})$$

où θ est la teneur en eau volumique

h est la pression d'eau dans le milieu poreux

x est la coordonnée verticale comptée positivement vers le bas

$D(h) = k_o \theta(h)$ où $k(\theta)$ est la conductivité hydraulique du milieu.

Dans la zone non saturée ($h < 0$) l'équation (C.I.1) est parabolique. Du fait que

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\theta'(h)}{D(h)} = 0$, cette équation dégénère à l'interface entre zone saturée ($h \geq 0$) et zone

non saturée. Elle présente une frontière libre entre ces deux zones et change de type pour devenir elliptique dans la région saturée[HUL-86]. De même, cette équation dégénère encore à l'interface

entre zone sèche ($\theta \leq 0$) et zone humide du fait que $\lim_{h \rightarrow -\infty} \frac{\theta'(h)}{D(h)} = +\infty$.

L'équation (C.I.1) munie de conditions aux limites mixtes et d'un état initial donne lieu au problème (P_0) suivant sur l'ouvert $Q_T = \Omega \times]0, T[$ où $\Omega =]0, 1[$

$$(P_0) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \theta(h(x, t)) = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(h(x, t)) \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} - D(h(x, t)) \right) \quad (\text{C.I.1}) \\ \left[D(h) \frac{\partial h}{\partial x} - D(h) \right] (0, t) = -D(\omega(t)) \quad \text{pour } t \in]0, T[\quad (\text{C.I.2}) \\ h(1, t) = a \in]-\infty, 0] \quad \text{pour } t \in]0, T[\quad (\text{C.I.3}) \\ h(x, 0) = h_0(x) \quad \text{pour } x \in]0, 1[\quad (\text{C.I.4}) \end{array} \right.$$

où $D(\omega(t))$ traduit le flux admissible à la surface et vérifie $0 \leq D(\omega(t)) \leq D(0)$. La condition (C.I.3) correspond à une pression d'eau constante à $x = 1$.

Dans la deuxième partie, on donne au problème (P_0) une nouvelle formulation (P) et on adapte une démonstration due à S.XIAO et al. [XIAO-84] pour l'existence d'une solution de ce problème (P). On démontre dans la troisième partie l'unicité de cette solution et dans la quatrième on démontre que si $D(\omega(t)) = D(\omega) = D$ alors la solution de (P) converge quand t tend vers l'infini vers la solution du problème stationnaire associé à (P).

II – Résultat d'existence

II.1 – Reformulation du problème (P_0)

On pose

$$G(h) = \int_{-\infty}^h D(s) ds$$

$$u(x, t) = G(h(x, t))$$

et

$$u_s = G(0) = \int_{-\infty}^0 D(s) ds$$

Alors D étant strictement positive, on peut écrire : $h(x, t) = G^{-1}(u(x, t))$

Les équations (C.I.1) et (C.I.2) deviennent alors :

$$(\theta \circ G^{-1}(u))' \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} (D \circ G^{-1}(u)) \quad (\text{C.II.1})$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} - D \circ G^{-1}(u) \right] (0, t) = -D(\omega(t)) \quad (\text{C.II.2})$$

On définit : $K(s) = D \circ G^{-1}(s)$

$$C(s) = \int_0^s K^p(r) (\theta \circ G^{-1})'(r) dr \quad \text{pour } p \geq 1$$

et

$$A(s) = \int_0^s \frac{C'(r)}{K^p(r)} dr \quad (\text{C.II.3})$$

Il en découle alors que :

$$C'(s) = K^p(s) (\theta \circ G^{-1})'(s)$$

et

$$A'(s) = \frac{C'(s)}{K^p(s)} \quad (\text{C.II.4})$$

Le problème (P₀) se met alors sous la forme (P) suivante :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(A(u))}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial(K(u))}{\partial x} \quad \text{pour } (x, t) \in Q_T \quad (\text{C.II.5}) \\ \left[\frac{\partial u}{\partial x} - K(u) \right] (0, t) = -K(\lambda(t)) \quad \text{pour } t \in]0, T[\quad (\text{C.II.6}) \\ u(1, t) = \bar{u} \in]0, u_s] \quad \text{pour } t \in]0, T[\quad (\text{C.II.7}) \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{pour } x \in]0, 1[\quad (\text{C.II.8}) \end{array} \right.$$

où

$$\lambda(t) = G(\omega(t))$$

$$\bar{u} = G(a)$$

$$u_0(x) = G(h_0(x))$$

II.2 – Définition d'une solution faible du problème

Définition 1

Une fonction $u(x, t)$ définie sur Q_T est dite solution faible du problème (P) si elle satisfait :

i) Moyennant une redéfinition éventuelle de u sur un ensemble de mesure nulle,

$$C(u) \in \mathcal{C}(\overline{Q_T})$$

$$\text{ii) } u \in L^\infty(0, T, H^1(\Omega)) \quad \text{et} \quad u(1, t) = \bar{u} \quad \text{pour } t \in]0, T[$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } & \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - K(u) \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dt - \int_0^T \int_0^1 A(u) \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dt \\ &= \int_0^1 A(u_0(x)) \phi(x, 0) dx + \int_0^T K(\lambda(t)) \phi(0, t) dt \end{aligned} \quad (\text{C.II.9})$$

pour tout $\phi \in H^1(Q_T) \cap \mathcal{C}(\overline{Q_T})$ vérifiant :

$$\phi(1, \cdot) = 0 \quad \text{et} \quad \phi(\cdot, T) = 0$$

II.3 – Hypothèses sur les fonctions C, K et u_0

On étudie le problème (P) pour des fonctions K et C vérifiant les propriétés suivantes :

$$(K1) \quad K \text{ est lipschitzienne sur }]-\infty, +\infty[$$

$$(K2) \quad K(s) \equiv 0 \quad \text{pour } s \in]-\infty, 0]$$

$$K(s) \equiv K(u_s) \quad \text{pour } s \in [u_s, +\infty[$$

$$(K3) \quad K'(s) \geq c_0 > 0 \quad \text{pour } s \in]0, u_s[$$

$$(K4) \quad \text{Il existe } \sigma_0 \in]0, u_s[\text{ tel que } K(s) \text{ a une dérivée seconde continue dans }]-\infty, \sigma_0[$$

$$(C1) \quad C \in \mathcal{C}^1(]-\infty, +\infty[) \cap \mathcal{C}^2(]-\infty, \sigma_0[)$$

$$(C2) \quad C(s) \equiv 0 \quad \text{pour } s \in]-\infty, 0]$$

$$C(s) \equiv 1 \quad \text{pour } s \in [u_s, +\infty[$$

$$(C3) \quad C'(s) > 0 \quad \text{pour } s \in]0, u_s[$$

$$(KC1) \quad (K'(s))^2 = O\left(\frac{C'(s)}{K^p(s)}\right) \quad \text{pour } s \in [0, M_0]$$

avec M_0 donné par (U2)

$$(KC2) \quad \frac{C'(s)}{K^p(s)} \in L^1(0, M_0)$$

La condition initiale u_0 vérifie :

$$(U1) \quad u_0 \text{ est lipschitzienne sur } [0, 1]$$

$$(U2) \quad u_0 \text{ est positive bornée et } M_0 \text{ est un nombre tel que}$$

$$0 \leq u_0(x) \leq M_0 \quad \text{et} \quad u_s \leq M_0$$

$$(U3) \quad u_0 \text{ est dérivable en zéro et } u'_0(0) - K(u_0(0)) = -K(\lambda(0))$$

$$u_0(1) = \bar{u}$$

II.4 – Existence d'une solution faible

Théorème 1

Si les fonctions K , C et u_0 vérifient les hypothèses énumérées dans (II.3), le problème (P) admet au moins une solution faible.

Principe de la démonstration

Puisque $\lim_{s \rightarrow u_s} \frac{1}{A'(s)} = +\infty$ le problème étudié est à coefficients non bornés.

Pour contourner cette difficulté, nous approchons uniformément sur les compacts les fonctions u_0 , C , K et par suite A , par des fonctions régulières u_{0n} , C_n , K_n et A_n de sorte que

$$\frac{1}{A_n'(s)} \in L^\infty.$$

Nous utilisons le principe du maximum pour montrer que des solutions régulières des problèmes (P_n) – correspondant à ces fonctions approchées – sont bornées indépendamment de n .

De plus les fonctions u_{0n} , C_n et K_n peuvent être choisies telles que les problèmes (P_n) vérifient les hypothèses du théorème de Fokina [FOK- 75] (théorème 2, page 91) et admettent donc des solutions $u_n \in C^{2+\alpha}(\bar{Q}_T)$.

Nous montrons – encore par le principe du maximum – que $\frac{\partial u_n}{\partial x}$ est borné indépendamment de n .

Enfin, nous obtenons par extractions successives une sous-suite de $\{ u_n \}$ qui converge vers une fonction u , et nous montrons que celle-ci est une solution faible du problème (P).

Les problèmes (P_n) auront la forme suivante :

$$(P_n) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(A_n(u_n))}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - \frac{\partial(K_n(u_n))}{\partial x} \quad \text{pour } (x, t) \in Q_T \quad (C.II.10) \\ \left[\frac{\partial u_n}{\partial x} - K_n(u_n) \right] (0, t) = -K_n(\lambda(t)) \quad \text{pour } t \in]0, T[\quad (C.II.11) \\ u_n(1, t) = \bar{u} \in]0, u_s] \quad \text{pour } t \in]0, T[\quad (C.II.12) \\ u_n(x, 0) = u_{0n}(x) \quad \text{pour } x \in]0, 1[\quad (C.II.13) \end{array} \right.$$

II.4.1–Estimation a priori sur une solution régulière .

Lemme 1

Si u_n est une solution C^2 du problème (P_n) avec $0 \leq u_{0n} \leq M_0 + \frac{1}{n}$,

et $0 \leq \lambda(t) \leq M_0$,

et si l'opérateur $-\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{A'_n(u_n)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{K'_n(u_n)}{A'_n(u_n)} \frac{\partial}{\partial x}$ est uniformément

parabolique à coefficients bornés alors

$0 \leq u_n \leq M_0 + \frac{1}{n}$ dans Q_T .

Démonstration

Vu les hypothèses du lemme 1 et puisque $u_n(1, t) = \bar{u} > 0$ alors s'il existe (x, t) tel que $u_n(x, t) < 0$, par le principe du maximum [PRO-67] il existe $t_0 \in]0, T[$ tel que $u_n(0, t_0) < 0$ et $\frac{\partial u_n}{\partial x}(0, t_0) > 0$.

Or $\frac{\partial u_n}{\partial x}(0, t_0) = -K_n(\lambda(t_0)) + K_n(u_n(0, t_0)) > 0$ est en contra-

diction avec $\lambda(t_0) \geq 0 > u_n(0, t_0)$ et le fait que K_n est croissante.

Ainsi $0 \leq u_n$.

De même puisque $u_{0n} \leq M_0 + \frac{1}{n}$ et $\bar{u} \leq u_s \leq M_0$, s'il existe (x, t) tel que

$u_n(x, t) > M_0 + \frac{1}{n}$ alors il existe $t_1 \in]0, T[$ vérifiant

$u_n(0, t_1) > M_0 + \frac{1}{n}$ et $\frac{\partial u_n}{\partial x}(0, t_1) < 0$ c'est-à-dire

$-K_n(\lambda(t_1)) + K_n(u_n(0, t_1)) < 0$ ce qui est en contradiction avec le fait que K_n est croissante et $\lambda(t_1) \leq M_0 \leq u_n(0, t_1)$.

II.4.2 – Existence de la solution du problème approché

On commence par mettre (P_n) sous la forme (P_{nF}) à laquelle on pourra appliquer le théorème de Fokina.

(P_{nF}) s'écrit :

$$(P_{nF}) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} = a(t, x, v, \frac{\partial v}{\partial x}) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b(t, x, v, \frac{\partial v}{\partial x}) \quad \text{dans } Q_T \quad (C.II.16) \\ v(0, t) = f_1(t, v) \quad \text{pour } t \in]0, T[\quad (C.II.17) \\ v(1, t) = 0 \quad \text{pour } t \in]0, T[\quad (C.II.18) \\ v(x, 0) = 0 \quad \text{pour } x \in]0, 1[\quad (C.II.19) \end{array} \right.$$

où

$$a(t, x, v, \frac{\partial v}{\partial x}) = \frac{1}{A'_n(v + u_{0n})}$$

$$b(t, x, v, \frac{\partial v}{\partial x}) = \frac{1}{A'_n(v + u_{0n})} \left(u''_{0n} - K'_n(v + u_{0n}) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + u'_{0n} \right) \right)$$

$$f_1(t, v) = -K(\lambda(t)) + K_n(v(0, t) + u_{0n}(0)) - u'_{0n}(0)$$

$$v(x, t) = u_n(x, t) - u_{0n}(x)$$

Il suffit alors de doter les fonctions K_n , C_n et u_{0n} de "bonnes" propriétés pour garantir les hypothèses du théorème de Fokina et conclure que (P_n) admet une solution $u_n(x, t) \in C^{2+\alpha}(Q_T)$ avec $\alpha \in]0, 1[$ (α dépend de n).

Construction des fonctions approchées K_n , C_n , u_{0n} et A_n

Pour se placer dans les conditions du théorème de Fokina, il suffit que K_n , C_n et u_{0n} possèdent les propriétés ci-dessous :

Les propriétés de K_n

- (K1n) - $K_n \in C^2(\mathbb{R})$
- (K2n) - $K_n(s)$ converge uniformément sur tout borné de $\mathbb{R}$ vers $K(s)$ quand n tend vers l'infini
- (K3n) - $\frac{1}{n} \leq K_n(s)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$
- (K4n) - K_n est strictement croissante et il existe une constante M_2 telle que :

$$0 < K'_n(s) \leq M_2 \quad \text{pour tout } n \geq 1 \quad \text{et } s \in \mathbb{R}$$

Les propriétés de C_n

- (C1n) - $C_n \in C^2(\mathbb{R})$
- (C2n) - $C_n(s)$ converge uniformément sur tout borné de $\mathbb{R}$ vers $C(s)$ quand n tend vers l'infini
- (C3n) - $C'_n(s)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $C'(s)$ quand n tend vers l'infini
- (C4n) - Il existe une constante M_1 telle que :

$$\frac{1}{n} \leq C'_n(s) \leq M_1 \quad \text{pour tout } n \geq 1 \quad \text{et } s \in \mathbb{R}$$

Les propriétés de u_{0n}

$$(U1n) - u_{0n} \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$$(U2n) - 0 \leq u_{0n}(x) \leq M_0 + \frac{1}{n} \text{ pour tout } x \in [0, 1]$$

$$(U3n) - u_{0n}(x) \text{ converge uniformément sur } [0, 1] \text{ vers } u_0(x) \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini}$$

$$(U4n) - \text{Il existe une constante } M_3 \text{ telle que :}$$

$$u'_{0n}(x) < M_3 \text{ pour tout } x \in [0, 1] \text{ et pour tout } n \geq 1$$

$$(U5n) - u''_{0n}(1) - K'_n(u_{0n}(1)) = 0$$

et

$$u'_{0n}(0) - K_n(u_{0n}(0)) = -K_n(\lambda(0))$$

Enfin on définit

$$A_n(s) = \frac{1}{n} + \int_0^s \frac{C'_n(r)}{K_n^p(r)} dr \quad (C.II.20)$$

Construction de K_n

Soit $\sigma_1 \in]0, \sigma_0[$; (σ_0 a été introduit en (K4)) et n tel que $\sigma_1 + \frac{2}{n} \leq \sigma_0$

Nous posons :

$$K_n(s) = (\chi_n + \tilde{K}_n^p(s))^{\frac{1}{p}}$$

où $\tilde{K}_n(s)$ est donné par :

$$\tilde{K}_n(s) = \begin{cases} K(s) & \text{si } s \leq \sigma_1 \\ K(s) + f_n(s) & \text{si } \sigma_1 \leq s \leq \sigma_1 + \frac{1}{n} \\ (K(s) + \frac{1}{n}(s - \sigma_1)^+) * \varrho_n(s) & \text{si } s \geq \sigma_1 + \frac{1}{n} \end{cases}$$

et $\chi_n(s)$ une fonction de classe C^2 croissante de $\frac{1}{n}$ en $-\infty$ à $\frac{2}{n}$ en 0 et constante au delà ; par exemple :

$$\chi_n(s) = \begin{cases} \frac{1 + e^{s^3}}{n} & \text{si } s \leq 0 \\ \frac{2}{n} & \text{si } s \geq 0 \end{cases}$$

avec

$$f_n(s) = a_n (s - \sigma_1)^3 + \beta_n (s - \sigma_1)^4 + \gamma_n (s - \sigma_1)^5$$

a_n , β_n et γ_n étant choisis de façon que $\bar{K}_n(s)$ soit $\mathcal{C}^2$ au point $\sigma_1 + \frac{1}{n}$

et $q_n(s) = n \varrho(ns)$ où $\varrho \in \mathcal{D}([-1, 0])$

vérifie $\varrho \geq 0$ et $\int \varrho(s) ds = 1$

On vérifie que puisque $K'(s) \geq c_0 > 0$ pour $s \in]0, u_s[$ (hyp (K3)) il existe une constante c_n telle que $K'_n(s) \geq c_n > 0$ pour tout $s \in [0, +\infty[$.

Construction de C_n

Nous définissons $C_n(s)$ par : $C_n(s) = \frac{1}{n} s + \bar{C}_n(s)$

avec pour $\bar{C}_n(s)$ une définition voisine de celle de $\bar{K}_n(s)$

$$\bar{C}_n(s) = \begin{cases} C(s) & \text{si } s \leq \sigma_1 \\ C(s) + g_n(s) & \text{si } \sigma_1 \leq s \leq \sigma_1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ C * \varrho_n(s) & \text{si } s \geq \sigma_1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

où

$$g_n(s) = a_n (s - \sigma_1)^3 + b_n (s - \sigma_1)^4 + d_n (s - \sigma_1)^5$$

et ϱ_n sera la même fonction utilisée pour la construction de K_n

Construction de u_{0n}

Nous construisons une fonction v_{0n} égale à u_0 sur $] \frac{2}{n}, 1 - \frac{2}{n} [$; sur $] -\infty, \frac{1}{n} [$, v_{0n} est une fonction affine de pente égale à $K_n(u_{0n}(0) + \frac{1}{n}) - K_n(\lambda(0))$ passant par $u_0(0)$ en zéro. Sur $] 1 - \frac{1}{n}, +\infty [$, v_{0n} est constante et égale à $\bar{u}$. Sur chacun des intervalles $] \frac{1}{n}, \frac{2}{n} [$ et $] 1 - \frac{2}{n}, 1 - \frac{1}{n} [$ v_{0n} est prolongée par continuité par une fonction affine.

La fonction u_{0n} est la régularisée de v_{0n}

$$u_{0n}(x) = \frac{1}{n} + \varrho_{k(n)} * v_{0n}(x) ; \quad k(n) \geq 2n$$

et

$$v_{0n}(x) = \begin{cases} a_1 x + b_1 & \text{pour } x \leq \frac{1}{n} \\ a_2 x + b_2 & \text{pour } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ u_0(x) & \text{pour } \frac{2}{n} \leq x \leq 1 - \frac{2}{n} \\ a_3 x + b_3 & \text{pour } 1 - \frac{2}{n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ u_0(1) = \bar{u} & \text{pour } x \geq 1 - \frac{1}{n} \end{cases}$$

où

$$a_1 = K_n(u_{0n}(0) + \frac{1}{n}) - K_n(\lambda(0))$$

$$b_1 = u_0(0)$$

$$a_2 = -(a_1 + n b_1) + n u_0(\frac{2}{n})$$

$$b_2 = \frac{2}{n} (a_1 + n b_1) - u_0(\frac{2}{n})$$

$$a_3 = n(\bar{u} - u_0(1 - \frac{2}{n}))$$

et

$$b_3 = (2 - n)\bar{u} + (n - 1)u_0(1 - \frac{2}{n})$$

La fonction v_{0n} est lipschitzienne sur $[0, 1]$ parce que u_0 l'est. En choisissant q_n telle que

$$q_n(s) = n q(ns), \quad q \in \mathcal{D}([-1, 1]),$$

$$q \geq 0, \quad q(x) = q(-x) \quad \text{et} \quad \int q(s) ds = 1$$

$$\text{et en posant } u_{0n}(x) = \frac{1}{n} + q_{k(n)} * v_{0n}(x); \quad k(n) \geq 2n,$$

nous avons u_{0n} qui vérifie les propriétés (U1n) à (U5n) souhaitées.

De plus si $u_1 \leq u_2$ sur $[0, 1]$ et en choisissant $k(n) = \max(2n, E(M_2 + 1))$

alors $u_{1n} \leq u_{2n}$ sur $[0, 1]$

II.4.3 – Propriétés de la solution approchée

Lemme 2

Si $0 \leq u_{0n} \leq M_0 + \frac{1}{n}$ et si $0 \leq \lambda(t) \leq M_0$ alors il existe une constante M_5 telle que pour tout n , $u_n(x, t)$ solution de (P_n) vérifie $\left| \frac{\partial u_n}{\partial x} \right| \leq M_5$ (C.II.21)

Démonstration

Posons $v = \frac{\partial u_n}{\partial x} - K_n(u_n)$; il vient alors $\frac{\partial(A_n(u_n))}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}$ qui donne par dérivation, par rapport à x

$$A'_n(u_n) \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \left(\frac{A''_n(u_n)}{A'_n(u_n)} \frac{\partial u_n}{\partial x} + K'_n(u_n) \right) \frac{\partial v}{\partial x}$$

D'après la définition de A_n , les hypothèses sur A_n , C_n et le Lemme 1, nous avons

$$A'_n(u_n) \geq \frac{1}{n K_n^2(M_0 + \frac{1}{n})} > 0$$

et puisque u_n est de classe C^2 , il existe M_n tel que

$$\left| \frac{A''_n(u_n)}{A'_n(u_n)} \frac{\partial u_n}{\partial x} + K'_n(u_n) \right| \frac{1}{A'_n(u_n)} \leq M_n \quad \forall (x, t) \in Q_T$$

Le principe du maximum s'applique et montre que v prend son maximum sur le bord parabolique du domaine Γ_T de Q_T .

$$\Gamma_T = \{0, 1\} \times [0, T] \cup [0, 1] \times \{0\}$$

et

$$\max_{\overline{Q_T}} |v(x, t)| = \max_{\Gamma_T} |v(x, t)|$$

Or nous avons d'une part

$$|v(x, 0)| = |u'_{0n}(x) - K_n(u_{0n}(x))| \leq M_3 + M_2(M_0 + \frac{1}{n})$$

et d'autre part

$$v(0, t) = -K_n(\lambda(t))$$

d'où

$$\sup_{t \in [0, T]} |v(0, t)| \leq K_n(M_0) \leq M_2(M_0 + \frac{1}{n})$$

ce qui fait que

$$\max_{\overline{Q_T}} |v(x, t)| \leq \max \left[M_3 + M_2(M_0 + \frac{1}{n}), \sup_{t \in [0, T]} v(1, t) \right]$$

Il reste donc à majorer $v(1, t)$ pour finir la démonstration du lemme 2. Pour cela nous étudions

$$w^\pm(x, t) = \frac{L}{M_2} \exp(2 M_2 x) + L(x-1) \pm (u_n(x, t) - \bar{u})$$

où

$$L = \max(M_3, M_0 + 1)$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} A'_n(u_n) \frac{\partial w^\pm}{\partial t} - \frac{\partial^2 w^\pm}{\partial x^2} + K'_n(u_n) \frac{\partial w^\pm}{\partial x} &= \\ &= -4 L M_2 \exp(2 M_2 x) + L K'_n(u_n) (2 \exp(2 M_2 x) + 1) = \\ &= L M_2 \exp(2 M_2 x) \left(-4 + \frac{K'_n(u_n)}{M_2} (2 + \exp(-2 M_2 x)) \right) \leq \\ &\leq -L M_2 \exp(2 M_2 x) \leq 0 \end{aligned}$$

$$\text{car } K'_n(s) \leq M_2$$

Le maximum de $w^\pm$ est donc atteint sur le bord parabolique de Q_T

Vu que

$$w^\pm(1, t) = \frac{L}{M_2} \exp(2 M_2)$$

$$w^\pm(0, t) = \frac{L}{M_2} - L \pm (u_n(0, t) - \bar{u})$$

$$\leq \frac{L}{M_2} \leq \frac{L}{M_2} \exp(2 M_2)$$

$$w^\pm(x, 0) = \frac{L}{M_2} \exp(2 M_2 x) + L(x-1) \pm (u_n(x, 0) - \bar{u})$$

$$= \frac{L}{M_2} \exp(2 M_2 x) + (x-1) \left(L \pm \frac{u_n(x, 0) - \bar{u}}{(x-1)} \right)$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{L}{M_2} \exp(2 M_2 x) \leq \\ &\leq \frac{L}{M_2} \exp(2 M_2). \end{aligned}$$

$w^\pm$ est maximale en $(1, t)$ pour tout $t \in [0, T]$ avec $\frac{\partial w^\pm}{\partial x}(1, t) \geq 0$.

Il en découle que

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial x}(1, t) \right| \leq L(1 + 2 \exp(2 M_2))$$

et

$$\begin{aligned} |v(1, t)| &= \left| \frac{\partial u_n}{\partial x}(1, t) + K_n(\bar{u}) \right| \\ &\leq L(1 + 2 \exp(2 M_2)) + M_2(M_0 + \frac{1}{n}) \end{aligned}$$

d'où la majoration de v

$$\max_{\overline{Q_T}} |v(x, t)| \leq \max [L(1 + 2 \exp(2 M_2)) + M_2(M_0 + 1), M_3 + M_2(M_0 + 1)]$$

et finalement

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, t) \right| &\leq 2 M_2(M_0 + 1) + \max [L(1 + 2 \exp(2 M_2)), M_3] \\ &\text{pour tout } (x, t) \in Q_T \end{aligned}$$

Lemme 3

Il existe une sous-suite de u_n et une fonction $u(x, t)$ telles que la sous-suite converge faiblement

vers u dans $L^2(0, T, H^1(\Omega))$

De plus u vérifie

$$0 \leq u \leq M_0 \tag{C.II.22}$$

et

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \leq M_5 \tag{C.II.23}$$

presque partout dans Q_T .

Démonstration

Il découle directement des deux lemmes précédents que u_n reste dans un borné de $L^\infty(0, T, H^1(\Omega))$ et a fortiori de $L^2(0, T, H^1(\Omega))$

Dans ce qui suit on appelle encore u_n la sous-suite extraite de u_n qui converge faiblement vers u dans $L^2(0, T, H^1(\Omega))$

Lemme 4

$C_n(u_n(x, t))$ est uniformément lipschitzienne en x et uniformément holdérienne continue (d'exposant $1/2$) en t dans $\overline{Q_T}$.

Démonstration

L'estimation immédiate

$$\left| \frac{\partial C_n(u_n(x, t))}{\partial x} \right| \leq \left| C'_n(u_n) \frac{\partial u_n}{\partial x} \right| \leq M_5 M_1 \quad (\text{C.II.24})$$

prouve que $C_n(u_n)$ est uniformément lipschitzienne en x dans $\overline{Q_T}$. Le second point découle directement du résultat de Van Duyn [VAN-82] une fois établie l'estimation (C.II.25) un peu technique. Par définition de A_n , nous avons :

$$A'_n(u_n) \frac{\partial u_n}{\partial t} = \frac{C'_n(u_n)}{K_n^p(u_n)} \frac{\partial u_n}{\partial t} = \frac{1}{K_n^p(u_n)} \frac{\partial C_n(u_n)}{\partial t}$$

d'où

$$\frac{1}{K_n^p(u_n)} \frac{\partial C_n(u_n)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - \frac{\partial (K_n(u_n))}{\partial x}$$

En multipliant cette équation par $K_n^p(u_n)$ et en l'intégrant sur

$[a, b] \times [t_1, t_2] \subset Q_T$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_a^b [C_n(u_n(x, t_2)) - C_n(u_n(x, t_1))] dx &= \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b K_n^p(u_n) \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} dx dt \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b K_n^p(u_n) \frac{\partial K_n(u_n)}{\partial x} dx dt \end{aligned}$$

Compte tenu de

$$K_n^p(u_n) \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_n^p(u_n) \frac{\partial u_n}{\partial x} \right) - p K_n^{p-1} K_n'(u_n) \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2$$

nous avons :

$$\begin{aligned} \int_a^b [C_n(u_n(x, t_2)) - C_n(u_n(x, t_1))] dx &= \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \left[K_n^p(u_n) \frac{\partial u_n}{\partial x} \right] dx dt \\ &- p \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b K_n^{p-1} K_n'(u_n) \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 dx dt - \frac{1}{p+1} \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b \frac{\partial K_n^{p+1}(u_n)}{\partial x} dx dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[K_n^p(u_n) \frac{\partial u_n}{\partial x} \right](b, t) - \left[K_n^p(u_n) \frac{\partial u_n}{\partial x} \right](a, t) dt \\ &- p \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b K_n^{p-1} K_n'(u_n) \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 dx dt - \\ &- \frac{1}{p+1} \int_{t_1}^{t_2} [K_n^{p+1}(u_n(b, t)) - K_n^{p+1}(u_n(a, t))] dt \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b [C_n(u_n(x, t_2)) - C_n(u_n(x, t_1))] dx \right| &\leq 2 M_5 M_2 (M_0 + 1) |t_2 - t_1| + \\ &p M_3^2 M_2^p (M_0 + 1)^{p-1} |t_2 - t_1| + \frac{2 M_2^{p+1}}{p+1} (M_0 + 1)^{p+1} |t_2 - t_1| \end{aligned}$$

que nous écrivons

$$\left| \int_a^b [C_n(u_n(x, t_2)) - C_n(u_n(x, t_1))] dx \right| \leq M_6 |t_2 - t_1| \quad (\text{C.II.25})$$

En posant $f(x) = C_n(u_n(x, t_2)) - C_n(u_n(x, t_1))$ nous avons

$$|f'(x)| \leq 2 M_1 M_5 \text{ d'après (C.II.24) et } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M_6 |t_2 - t_1| \text{ d'après}$$

(C.II.25)

Par application directe de la proposition ci-dessous [VAN - 82], il existe une constante M_7 indépendante de n et telle que pour tout t_2, t_1 dans $]0, T[$:

$$|f(x)| = |C_n(u_n(x, t_2)) - C_n(u_n(x, t_1))| \leq M_7 |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}}$$

Proposition :

soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ ayant les propriétés suivantes :

$$i) |f'| \leq A \quad \text{sur} \quad [0, 1]$$

$$ii) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \varepsilon \quad \text{pour tous } a, b \in [0, 1]$$

$$\text{alors } |f(x)| \leq \text{Max} \left(2\varepsilon, \sqrt{2A\varepsilon} \right) \quad \text{pour tout } x \in [0, 1]$$

Lemme 5

On peut extraire une sous-suite de $C_n(u_n)$ qui converge vers une fonction v dans $\mathcal{C}^\beta(\overline{Q}_T)$

avec $\beta \in]0, \frac{1}{2}[$ et $v \in \mathcal{C}^{0+\frac{1}{2}}(\overline{Q}_T)$

Démonstration

Le lemme 5 est une conséquence directe du lemme 4 et du fait que $C_n(u_n)$ est bornée uniformément : $|C_n(u_n)| \leq M_1(M_0 + 1)$.

Lemme 6

Il existe une fonction $\tilde{K}(x, t)$ dans $L^2(Q_T)$ et une sous-suite de $K_n(u_n)$ qui converge faiblement vers $\tilde{K}(x, t)$ dans $L^2(Q_T)$.

Démonstration

Le lemme 6 découle directement du fait que $K_n(u_n) \leq M_2(M_0 + 1)$

Lemme 7

Il existe une fonction $\tilde{A}(x, t)$ dans $L^2(Q_T)$ et une sous-suite de $A_n(u_n)$ qui converge faiblement vers $\tilde{A}(x, t)$ dans $L^2(Q_T)$.

Démonstration

$$A_n(u_n) = \frac{1}{n} + \int_0^{u_n} \frac{C'_n(r)}{K_n^p(r)} dr$$

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} |A_n(u_n)|^2 dx dt &= \int_{Q_T} \left| \frac{1}{n} + \int_0^{u_n(x,t)} \frac{C'_n(s)}{K_n^p(s)} ds \right|^2 dx dt \\ &\leq T \left(1 + \left\| \frac{C'_n}{K_n^p} \right\|_{L^1(0, M_0+1)} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{M_0+1} \frac{C'_n(r)}{K_n^p(r)} dr &= \int_0^{\sigma_1} \frac{C'_n(r)}{K_n^p(r)} dr + \int_{\sigma_1}^{M_0+1} \frac{C'_n(r)}{K_n^p(r)} dr \\ &\leq \int_0^{\sigma_1} \frac{\frac{1}{n} + C'(r)}{\frac{1}{n} + K^p(r)} dr + \int_{\sigma_1}^{M_0+1} \frac{C'_n(r)}{K^p(\sigma_1)} dr \\ &\leq \sigma_1 + \left\| \frac{C'}{K^p} \right\|_{L^1(0, \sigma_1)} + M_1 \frac{M_0 + 1 - \sigma_1}{K^p(\sigma_1)} \\ &\leq M_8 \end{aligned}$$

et alors

$$\int_{Q_T} |A_n(u_n)|^2 dx dt \leq T (1 + M_8)^2 = M_9$$

II.4.3 Convergence vers une solution faible du problème**Lemme 8**

La fonction $v(x, t)$ du lemme 5 est égale à $C(u)$ presque partout dans $\overline{Q_T}$. u étant la fonction définie au lemme 3.

Lemme 9

Les fonctions u du lemme 3 et $\tilde{A}$ du lemme 7 vérifient $\tilde{A}(x, t) = A(u(x, t))$ presque partout dans $\overline{Q_T}$.

Lemme 10

Les fonctions u du lemme 3 et $\tilde{K}$ du lemme 6 vérifient $\tilde{K}(x, t) = K(u(x, t))$ presque partout dans $\overline{Q_T}$.

Démonstration du lemme 8

Nous vérifions que $0 \leq v(x, t) \leq 1$ ce qui permet d'écrire

$$\overline{Q_T} = \mathfrak{D}_1 \cup \mathfrak{D}_2 \cup \mathfrak{D}_3$$

où

$$\mathfrak{D}_1 = \{ (x, t) \in \overline{Q_T} \text{ et } 0 < v(x, t) < 1 \}$$

$$\mathfrak{D}_2 = \{ (x, t) \in \overline{Q_T} \text{ et } v(x, t) = 1 \}$$

$$\mathfrak{D}_3 = \{ (x, t) \in \overline{Q_T} \text{ et } v(x, t) = 0 \}.$$

Nous montrons l'égalité de v et de $C(u)$ pp sur chacun de ces trois ensembles.

1 - L'égalité sur $\mathfrak{D}_1$

Soit $(x_0, t_0) \in \mathfrak{D}_1$ et soit $\delta > 0$ tel que $2\delta \leq v(x, t) \leq 1 - 2\delta$.

Notons $\mathfrak{B}_r = \{ (x, t) \in Q_T \text{ et } |x - x_0| + |t - t_0| < r \}$; il existe $\varrho > 0$ et N_0

tels que pour tous $(x, t) \in \overline{\mathfrak{B}_\varrho}$ et $n \geq N_0$ nous ayons

$$\delta \leq C_n(u_n(x, t)) \leq 1 - \delta.$$

Comme C_n est strictement monotone dérivable elle admet un inverse (C_n^{-1}) également monotone dérivable et $M(\delta) = \sup \{ (C_n^{-1})' / n \geq 1, \delta \leq s \leq 1 - \delta \}$ est fini du fait que $C_n'(s)$ converge uniformément vers $C'(s)$ et que $C_n'(s) > 0$ sur $]0, u, [$.

Montrons que $\{u_n\}$ est une suite de cauchy dans $\mathcal{C}(\overline{\mathfrak{B}_\varrho})$.

Nous avons

$$\begin{aligned} |u_{n1}(x, t) - u_{n2}(x, t)| &= |C_{n1}^{-1}(C_{n1}(u_{n1}(x, t))) - C_{n2}^{-1}(C_{n2}(u_{n2}(x, t)))| \\ &\leq |C_{n1}^{-1}(C_{n1}(u_{n1}(x, t))) - C_{n1}^{-1}(C_{n2}(u_{n2}(x, t)))| + \\ &\quad + |C_{n1}^{-1}(C_{n2}(u_{n2}(x, t))) - C_{n2}^{-1}(C_{n2}(u_{n2}(x, t)))|. \end{aligned}$$

Or, d'une part

$$|C_{n_1}^{-1}(C_{n_1}(u_{n_1}(x,t))) - C_{n_1}^{-1}(C_{n_2}(u_{n_2}(x,t)))| \\ \leq M(\delta) |(C_{n_1}(u_{n_1}(x,t))) - C_{n_2}(u_{n_2}(x,t))|$$

d'autre part il existe N_2 tel que pour $n_1, n_2 > N_2$ nous ayons $\|C_{n_1} - C_{n_2}\|_{L^\infty(0,u_s)} \leq \frac{\delta}{2}$ et

dans ce cas $C_{n_1}(u_{n_2}) \in [\frac{\delta}{2}, 1 - \frac{\delta}{2}]$ d'où

$$|C_{n_1}^{-1}(C_{n_2}(u_{n_2}(x,t))) - C_{n_2}^{-1}(C_{n_2}(u_{n_2}(x,t)))| = \\ = |C_{n_1}^{-1}(C_{n_2}(u_{n_2}(x,t))) - u_{n_2}(x,t)| = \\ = |C_{n_1}^{-1}(C_{n_2}(u_{n_2}(x,t))) - C_{n_1}^{-1}(C_{n_1}(u_{n_2}(x,t)))| \\ \leq M(\frac{\delta}{2}) |C_{n_2}(u_{n_2}(x,t)) - C_{n_1}(u_{n_2}(x,t))| \\ \leq M(\frac{\delta}{2}) \max_{r \in [0, u_s]} |C_{n_2}(r) - C_{n_1}(r)|$$

pour tous $n_1, n_2 > N_2$.

Puisque $\{C_n\}$ et $\{C_n(u_n)\}$ sont de Cauchy dans $\mathcal{C}([0, u_s])$ et $\mathcal{C}(\overline{Q}_T)$ respectivement, il apparait que $\{u_n\}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}(\overline{\mathfrak{B}}_\rho)$ et donc converge vers une limite u^* dans $\mathcal{C}(\overline{\mathfrak{B}}_\rho)$.

Or $\{u_n\}$ converge faiblement vers u dans $L^2(Q_T)$ donc $u^*(x,t) = u(x,t)$ pp dans $\mathfrak{B}_\rho$.

Par ailleurs de la majoration

$$|v - c(u^*)| \leq |v - c_n(u_n)| + |c_n(u_n) - c(u_n)| + |c(u_n) - c(u^*)|$$

nous déduisons facilement que $v = C(u^*)$ et donc que $v(x,t) = C(u(x,t))$ pp dans $\mathfrak{B}_\rho$ et par suite sur $\mathfrak{D}_1$ tout entier puisque le point (x_0, t_0) a été choisi arbitrairement.

2 - L'égalité sur $\mathfrak{D}_2$

Si $\mathfrak{D}_2$ est de mesure nulle il n'y a rien à démontrer. Sinon pour $\varepsilon \in]0, 1/2[$ nous définissons l'ouvert

$$P_\varepsilon = \{(x, t) \in \overline{Q}_T \text{ et } v(x, t) > 1 - \varepsilon\}.$$

Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$; puisque $C_n(u_n)$ converge vers v dans $\mathcal{C}^0(\overline{Q}_T)$; il existe $N = N(\varepsilon)$ tel

que pour tout $n > N$, $C_n(u_n(x,t)) > 1 - 2\varepsilon$ pour tout $(x,t) \in P_\varepsilon$ et

$$u_n(x,t) = C_n^{-1}(C_n(u_n(x,t))) \geq C_n^{-1}(1 - 2\varepsilon).$$

Nous savons que le cône des fonctions positives ou nulles de L^2 est faiblement fermé. La suite des fonctions positives ou nulles $\{ u_n(x, t) - C_n^{-1}(1 - 2\varepsilon) \}$ converge faiblement dans $L^2(P_\varepsilon)$ vers $u(x, t) - C^{-1}(1 - 2\varepsilon)$; donc $u(x, t) \geq C^{-1}(1 - 2\varepsilon)$ et $C(u(x, t)) \geq 1 - 2\varepsilon$ p.p dans P_ε et a fortiori p.p dans $\mathfrak{D}_2$. En prenant une suite $\{\varepsilon_n\}$ qui tend vers zéro nous déduisons à la limite que $C(u(x, t)) = 1 = v(x, t)$ p.p dans $\mathfrak{D}_2$.

3 - L'égalité sur $\mathfrak{D}_3$

Nous procédons de la même manière qu'en 2. Pour $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$ nous introduisons l'ouvert

$$\mathfrak{B}_\varepsilon = \{ (x, t) \in \overline{Q}_T \text{ et } v(x, t) < \varepsilon \}.$$

Pour $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ donné il existe $N = N(\varepsilon)$ tel que pour tout $n > N$, $C_n(u_n(x, t)) < 2\varepsilon$

et donc $u_n(x, t) \leq C_n^{-1}(2\varepsilon)$ pour tout $(x, t) \in \mathfrak{B}_\varepsilon$.

A nouveau le passage à la limite dans $L^2(\mathfrak{B}_\varepsilon)$ donne $u \leq C^{-1}(2\varepsilon)$ p.p dans $\mathfrak{B}_\varepsilon$.

$u \leq C^{-1}(2\varepsilon)$ p.p dans $\mathfrak{B}_\varepsilon$ donne $u \leq C^{-1}(2\varepsilon)$ p.p dans $\mathfrak{D}_3$ quelque soit $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$

d'où $u \leq 0$ p.p dans $\mathfrak{D}_3$ (et même $u = 0$ p.p dans $\mathfrak{D}_3$) et $C(u(x, t)) = 0 = v(x, t)$ p.p dans $\mathfrak{D}_3$.

Nous avons bien $C(u) = v$ p.p dans $\overline{Q}_T$.

Les démonstrations des lemmes 9 et 10 sont peu différentes de celle du lemme 8.

En conclusion, nous avons par le lemme 3 $0 \leq u \leq M_0$ et $\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \leq M_5$.

Par les lemmes 5 et 8 nous avons $v(x, t) = C(u(x, t))$ p.p dans $\overline{Q}_T$; v et C étant continues nous pouvons redéfinir u sur un ensemble de mesure nulle pour que $C(u(x, t))$ soit continue sur $\overline{Q}_T$ et $v(x, t) = C(u(x, t))$ p.p dans $\overline{Q}_T$.

Puisque u_n est une solution classique de (P_n) nous avons

$$\iint_{Q_T} \frac{\partial(A_n(u_n))}{\partial t} \phi = \iint_{Q_T} \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - \frac{\partial(K_n(u_n))}{\partial x} \right) \phi \quad \text{pour}$$

$$\phi \in H^1(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T) \text{ vérifiant}$$

$$\phi(1, \cdot) = 0 \quad \text{et} \quad \phi(\cdot, T) = 0$$

alors

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} - K_n(u_n) \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dt - \int_0^T \int_0^1 A_n(u_n) \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dt &= \\ = \int_0^1 A_n(u_{0n}(x)) \phi(x, 0) dx + \int_0^T K_n(\lambda(t)) \phi(0, t) dt. \end{aligned}$$

Par les lemmes 3, 6 et 10 nous avons la convergence quand n tend vers l'infini de

$$\int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} - K_n(u_n) \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dt \quad \text{vers} \quad \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - K(u) \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dt$$

Les lemmes 7 et 9 permettent d'avoir la limite $\int_0^T \int_0^1 A(u) \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dt$ pour le terme

$$\int_0^T \int_0^1 A_n(u_n) \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dt \quad \text{et la limite} \quad \int_0^1 A(u_0(x)) \phi(x, 0) dx \quad \text{pour le terme}$$

$$\int_0^1 A_n(u_{0n}(x)) \phi(x, 0) dx \quad \text{quand } n \text{ tend vers l'infini.}$$

Enfin le terme $\int_0^T K_n(\lambda(t)) \phi(0, t) dt$ converge quand n tend vers l'infini vers

$$\int_0^T K(\lambda(t)) \phi(0, t) dt \quad \text{puisque } K_n \text{ converge uniformément vers } K.$$

La limite u est donc une solution faible du problème (P) .

Remarque 1

Par redéfinition de $C(u)$ sur un ensemble de mesure nulle, nous obtenons $C(u) \in \mathcal{C}(\overline{Q}_T)$.

Nous pouvons prendre $0 \leq u_0 \leq u_s$ et $M_0 = u_s$,

d'où $0 \leq u \leq u_s$.

C étant bijective bicontinue de $[0, u_s]$ sur $[0, 1]$, nous pouvons écrire, pour ce même u ,

$u(x, t) = C^{-1}(C(u(x, t)))$ et il vient $u \in \mathcal{C}(\overline{Q}_T)$.

III – Unicité de la solution

Théorème

Le problème (P) a au plus une solution faible.

Démonstration du théorème

Si u_1 et u_2 sont deux solutions distinctes du problème (P) associées aux mêmes conditions initiales et aux limites, alors il existe $t_0 < T$ vérifiant

$$t_0 = \sup \{ s / u_1(x, t) = u_2(x, t) \text{ pp dans } Q_s \}$$

Par définition de la solution faible, pour $i = 1, 2$ et pour tout

$$\phi \in H^1(Q_T) \cap C(\overline{Q_T}), \quad \phi(1, \cdot) = 0 \quad \text{et} \quad \phi(\cdot, T) = 0$$

nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} - K(u_i) \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dt - \int_0^T \int_0^1 A(u_i) \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dt &= \\ &= \int_0^1 A(u_0(x)) \phi(x, 0) dx + \int_0^T K(\lambda(t)) \phi(0, t) dt \end{aligned}$$

En faisant la différence entre les deux équations correspondant à u_1 et u_2 , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dt - \int_0^T \int_0^1 (K(u_1) - K(u_2)) \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dt &= \\ &= \int_0^T \int_0^1 (A(u_1) - A(u_2)) \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dt \end{aligned}$$

Pour $t_1 \in]t_0, T[$ nous définissons η par

$$\eta(x, t) = \begin{cases} \int_{t_1}^t (u_1(x, s) - u_2(x, s)) ds & \text{si } 0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & \text{si } t_1 \leq t \leq T \end{cases}$$

Puisque u_1 et $u_2 \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ nous avons $\eta \in H^1(0, T; H^1(\Omega))$ et

en particulier $\eta \in H^1(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$

De plus $\eta(1, t) = 0$ Pour $t \in]0, T[$ et $\eta(x, t) = 0$ pour tout

$x \in \Omega =]0, 1[$ et tout $t \geq t_1$ ce qui permet de prendre $\phi = \eta$ d'où

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \int_0^1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} dx dt &= \int_{t_0}^T \int_0^1 (K(u_1) - K(u_2)) \frac{\partial \eta}{\partial x} dx dt = \\ &= \int_{t_0}^T \int_0^1 (A(u_1) - A(u_2)) \frac{\partial \eta}{\partial t} dx dt. \end{aligned}$$

Or nous avons

$$\int_{t_0}^T \int_0^1 (A(u_1) - A(u_2)) \frac{\partial \eta}{\partial t} dx dt = - \int_{t_0}^T \int_0^1 (A(u_1) - A(u_2)) (u_1 - u_2) dx dt$$

et en effectuant l'intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \int_0^1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} dx dt &= - \int_{t_0}^T \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}(x, t_0) \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}(x, 0) \right)^2 dx \end{aligned}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} - \int_{t_0}^T \int_0^1 (K(u_1) - K(u_2)) \frac{\partial \eta}{\partial x} dx dt &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}(x, 0) \right)^2 dx + \\ &+ \int_{t_0}^T \int_0^1 (A(u_1) - A(u_2)) (u_1 - u_2) dx dt. \end{aligned}$$

L'inégalité d'YOUNG conduit à

$$- \int_{t_0}^T \int_0^1 (K(u_1) - K(u_2)) \frac{\partial \eta}{\partial x} dx dt \leq \varepsilon \int_{t_0}^T \int_0^1 (K(u_1) - K(u_2))^2 dx dt +$$

$$+ \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 dx dt$$

avec ε reel positif quelconque.

Nous utilisons le fait que

$$(K'(s))^2 = O\left(\frac{C'(s)}{K^2(s)}\right) \quad \text{pour } s \in [0, M_0]$$

et nous appliquons le lemme de GILDING [GIL - 77] pour établir

Lemme

Pour tout $M > 0$ il existe une constante $C = C(M) > 0$ telle que

$$|K(s_1) - K(s_2)|^2 \leq C(s_1 - s_2)(A(s_1) - A(s_2))$$

quelque soient $s_1, s_2 \in [0, M]$

Nous déduisons alors qu'il existe C tel que

$$\int_0^T \int_0^1 (K(u_1) - K(u_2))^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_0^1 (A(u_1) - A(u_2))(u_1 - u_2) dx dt$$

et en choisissant $\varepsilon = \frac{1}{2C}$ il vient

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_0^1 (K(u_1) - K(u_2)) \frac{\partial \eta}{\partial x} dx dt = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}(x, 0) \right)^2 dx + \int_0^T \int_0^1 (A(u_1) - A(u_2))(u_1 - u_2) dx dt \\ & \leq \frac{1}{2C} \int_0^T \int_0^1 (K(u_1) - K(u_2))^2 dx dt + \frac{C}{2} \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 dx dt \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (A(u_1) - A(u_2))(u_1 - u_2) dx dt + \frac{C}{2} \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 dx dt \end{aligned}$$

et par suite nous avons

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}(x, 0) \right)^2 dx + \int_0^T \int_0^1 (A(u_1) - A(u_2))(u_1 - u_2) dx dt$$

$$\leq C \int_{t_0}^T \int_0^1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 dx dt \quad (\text{C.III.1})$$

Compte tenu de la monotonie de A il s'ensuit que

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} (x, 0) \right)^2 dx \leq C \int_{t_0}^T \int_0^1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 dx dt \equiv C \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 dx dt$$

puisque $\eta \equiv 0$ au delà de t_1 .

Or, pour $0 \leq t \leq t_1$

$$\eta(x, t) = \xi(x, t_1) - \xi(x, t)$$

avec

$$\xi(x, t) = \int_0^t (u_1(x, s) - u_2(x, s)) ds$$

et en particulier

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}(x, 0) = \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t_1).$$

Il est immédiat que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 dx dt &\leq 2 \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t_1) \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) \right)^2 \right] dx dt \\ &\leq 2(t_1 - t_0) \int_0^1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t_1) \right)^2 dx + 2 \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx dt \quad (\text{C.III.2}) \end{aligned}$$

et nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t_1) \right)^2 dx &\equiv \int_0^1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}(x, 0) \right)^2 dx \\ &\leq 2C(t_1 - t_0) \int_0^1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t_1) \right)^2 dx + 2C \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx dt \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $t_1 \in]t_0, T_1[$ avec $T_1 = \min(t_0 + \frac{1}{4C}, T)$

pour avoir $C(t_1 - t_0) \leq \frac{1}{4}$ et

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} (x, t_1) \right)^2 dx \leq 4 C \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} (x, t) \right)^2 dx dt \quad (\text{C.III.3})$$

Posons

$$Y(t) = \int_{t_0}^t \int_0^1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} (x, \tau) \right)^2 dx d\tau$$

nous avons

$$Y'(t) = \int_0^1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} (x, t) \right)^2 dx$$

et d'après (C.III.3)

$$\frac{d}{dt} (Y(t) \exp(-4 C t)) \leq 0 \text{ pour tout } t \in]t_0, T_1[$$

d'où

$$0 \leq Y(t) \leq Y(t_0) \exp(4 C (t - t_0)) = 0$$

c'est à dire

$$\int_{t_0}^t \int_0^1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} (x, \tau) \right)^2 dx d\tau = 0 \text{ pour tout } t \in]t_0, T_1[$$

En reportant dans (C.III.2) nous obtenons

$$\int_{t_0}^t \int_0^1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} (x, \tau) \right)^2 dx d\tau = 0 \text{ pour tout } t \in]t_0, T_1[$$

ce qui implique au vu de (C.III.1) que

$$\int_{t_0}^T \int_0^1 (A(u_1) - A(u_2))(u_1 - u_2) dx dt = 0.$$

A étant strictement croissante et continue, nous en déduisons que $u_1 = u_2$

sur $\Omega \times]t_0, T_1[$ ce qui est en contradiction avec la définition de t_0 et par conséquent

$$u_1 = u_2 \text{ sur } Q_T.$$

Remarque 2

Il existe un unique $u \in L^\infty(0, +\infty; H^1(\Omega))$ et $C(u) \in \mathcal{C}([0, +\infty[; \mathcal{C}(\overline{\Omega}))$ telque $u|_{[0,T]}$ est l'unique solution faible du problème posé dans Q_T .

IV – Convergence vers la solution du problème stationnaire

Dans tout ce qui suivra, la fonction $\lambda(t)$ sera constante et $\lambda(t) = \lambda$.

IV.1 Solution stationnaire

Nous associons au problème (P) le problème (P_s) suivant :

$$(P_s) \begin{cases} u'' - K(u) = 0 & \text{sur }]0, 1[& \text{(C.IV.1)} \\ (u' - K(u))(0) = -K(\lambda) & & \text{(C.IV.2)} \\ u(1) = \bar{u} \in]0, u_s] & & \text{(C.IV.3)} \end{cases}$$

Définition 1

Une fonction u est dite solution stationnaire de (P) si elle est solution de (P_s) .

Théorème 1

Le problème (P_s) admet une solution unique sur $]0, 1[$.

Démonstration

K est lipschitzienne alors $u' - K(u) = -K(\lambda)$ admet une solution unique vérifiant $u(1) = \bar{u}$

Théorème 2

Si $K(\bar{u}) - K(\lambda) = 0$ alors $u = \bar{u}$ est la solution de (P_s) , sinon u est strictement monotone.

Si $K(\bar{u}) - K(\lambda) > 0$ alors u est strictement convexe.

Si $K(\bar{u}) - K(\lambda) < 0$ alors u est strictement concave.

Démonstration

Si $K(\bar{u}) - K(\lambda) > 0$ alors $u'(1) > 0$.

S'il existe $x_0 \in]0, 1[$ tel que $u'(x_0) = 0$ alors $v(x) \equiv u(x)$ et $v(x) \equiv u(x_0)$ sont solutions du problème $(\tilde{P})$

$$(\tilde{P}) \quad \begin{cases} v' - K(v) = -K(\lambda) & \text{sur }]0, 1[\\ v(x_0) = u(x_0) \end{cases}$$

L'unicité de la solution implique que $u(x) \equiv u(x_0)$ sur $[0, 1]$ alors $u'(1) = 0$: contradiction.

Donc $u'(x) > 0$ sur $[0, 1]$. (C.IV.5)

K est lipschitzienne, elle est donc absolument continue et

$$K(s+h) - K(s) = \int_s^{s+h} K'(\tau) d\tau > 0 \quad \text{si } h > 0 \quad \text{puisque } K'(\tau) > 0$$

K est donc strictement croissante ; vu (C.IV.5), $K(u)$ est alors strictement croissante et u est strictement convexe. De même si $K(\bar{u}) - K(\lambda) < 0$ alors u est strictement décroissante et strictement concave.

IV.2 Sous-solution, sur-solution

Définition 2

u_1 est dite sous solution du problème (P) si pour tout $\phi \in H^1(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$, vérifiant $\phi \geq 0$, $\phi(1, \cdot) = 0$ et $\phi(\cdot, T) = 0$ nous avons

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - K(u_1) \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dt - \int_0^T \int_0^1 A(u_1) \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dt \\ & \leq \int_0^1 A(u_1(x, 0)) \phi(x, 0) dx - \int_0^T \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - K(u_1) \right) \phi(0, t) dt \end{aligned}$$

$$\text{ii)} \quad \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - K(u_1) \right)(0, t) \geq -K(\lambda(t)) \quad \text{pour } t \in]0, T[$$

$$\text{iii)} \quad u_1(1, t) \leq \bar{u} \quad \text{pour } t \in]0, T[$$

$$\text{iv)} \quad u_1(x, 0) \leq u_0(x) \quad \text{pour } x \in]0, 1[$$

Définition 3

u_2 est dite sur solution du problème (P) si pour tout $\phi \in H^1(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$,

vérifiant $\phi \geq 0$, $\phi(1, \cdot) = 0$ et $\phi(\cdot, T) = 0$

nous avons

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - K(u_2) \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dt - \int_0^T \int_0^1 A(u_2) \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dt \\ & \geq \int_0^1 A(u_2(x, 0)) \phi(x, 0) dx - \int_0^T \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - K(u_2) \right) \phi(0, t) dt \end{aligned}$$

$$\text{ii)} \quad \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - K(u_2) \right)(0, t) \leq -K(\lambda(t)) \quad \text{pour } t \in]0, T[$$

$$\text{iii)} \quad u_2(1, t) \geq \bar{u} \quad \text{pour } t \in]0, T[$$

$$\text{iv)} \quad u_2(x, 0) \geq u_0(x) \quad \text{pour } x \in]0, 1[$$

Nous avons le lemme suivant :

Lemme 1

Si $0 \leq u_0 \leq u_*$ et si $0 \leq \lambda \leq u_*$ alors les fonctions $u_1 \equiv 0$ et $u_2 \equiv u_*$ sur Q_T sont respectivement une sous-solution et une sur-solution du problème (P).

Démonstration

La vérification du lemme est évidente

IV.3 – Théorème de comparaison

Soient les problèmes (P₁) et (P₂) ci-dessous :

$$(P1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(A(u))}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial(K(u))}{\partial x} \quad \text{pour } (x, t) \in Q_T \quad (C.II.5) \\ \left[\frac{\partial u}{\partial x} - K(u) \right] (0, t) = -K(\lambda(t)) \quad \text{pour } t \in]0, T[\\ u(1, t) = \bar{v}_1 \in]0, u_s] \quad \text{pour } t \in]0, T[\\ u(x, 0) = v_1(x) \quad \text{pour } x \in]0, 1[\end{array} \right.$$

$$(P2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(A(u))}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial(K(u))}{\partial x} \quad \text{pour } (x, t) \in Q_T \quad (C.II.5) \\ \left[\frac{\partial u}{\partial x} - K(u) \right] (0, t) = -K(\lambda(t)) \quad \text{pour } t \in]0, T[\\ u(1, t) = \bar{v}_2 \in]0, u_s] \quad \text{pour } t \in]0, T[\\ u(x, 0) = v_2(x) \quad \text{pour } x \in]0, 1[\end{array} \right.$$

Théorème 3

Si u_1 et u_2 sont respectivement les solutions de (P1) et (P2) avec $\bar{v}_1 \leq \bar{v}_2$ et $v_1 \leq v_2$ pp sur $]0,1[$ alors $u_1 \leq u_2$ pp dans Q_T .

Démonstration du théorème 3

Nous revenons aux approximations des problèmes (P1) et (P2) par les problèmes $(P1_n)$ et $(P2_n)$ qui ont été introduites à la partie II. Ces approximations sont relatives aux mêmes fonctions A_n, K_n, C_n et v_{1n} ou v_{2n} (pour u_{0n})

Si u_{1n} et u_{2n} sont les deux solutions de $(P1_n)$ et $(P2_n)$, alors pour tout

$\phi \in H^1(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ vérifiant

$\phi \geq 0$, $\phi(1, \cdot) = 0$ et $\phi(\cdot, T) = 0$

nous avons

$$\int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} (u_{1n} - u_{2n}) - (K_n(u_{1n}) - K_n(u_{2n})) \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dt - \int_0^T \int_0^1 (A_n(u_{1n}) - A_n(u_{2n})) \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dt$$

$$= \int_0^1 (A_n(u_{1n}(x, 0)) - A_n(u_{2n}(x, 0))) \phi(x, 0) dx$$

et par intégration par parties nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_{1n} - u_{2n}) - \frac{\partial}{\partial x} (K_n(u_{1n}) - K_n(u_{2n})) \right) \phi dx dt - \\ - \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (A_n(u_{1n}) - A_n(u_{2n})) \phi dx dt = 0 \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_{1n} - u_{2n}) - \frac{\partial}{\partial x} (K_n(u_{1n}) - K_n(u_{2n})) - \frac{\partial}{\partial t} (A_n(u_{1n}) - A_n(u_{2n})) = 0$$

pp dans Q_T

Nous posons

$$v = u_{1n} - u_{2n},$$

$$E(x, t) = \int_0^1 K'_n(\theta u_{1n}(x, t) + (1-\theta) u_{2n}(x, t)) d\theta$$

$$F(x, t) = \int_0^1 A'_n(\theta u_{1n}(x, t) + (1-\theta) u_{2n}(x, t)) d\theta$$

d'où

$$E(x, t) v = K_n(u_{1n}(x, t)) - K_n(u_{2n}(x, t))$$

$$F(x, t) v = A_n(u_{1n}(x, t)) - A_n(u_{2n}(x, t))$$

et nous pouvons écrire

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} (Ev) - \frac{\partial}{\partial t} (Fv) = 0 \quad \text{pp sur } Q_T$$

ce qui nous conduit au problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - E \frac{\partial v}{\partial x} - \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} \right) v - F \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x} - Ev \right) (0, t) = 0 \\ v(1, t) \leq 0 \\ v(x, 0) \leq 0 \end{array} \right.$$

E et F sont bornées et $F > 0$, il suffit alors de montrer que $\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t}$ est borné pour déduire que le maximum de la solution v de ce problème est atteint sur le bord parabolique Γ_T de Q_T .

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \int_0^1 K'_n (\theta u_{1n}(x,t) + (1-\theta) u_{2n}(x,t)) \left(\theta \frac{\partial u_{1n}}{\partial x} + (1-\theta) \frac{\partial u_{2n}}{\partial x} \right) d\theta$$

$K_n \in C^2(\mathbb{R})$, u_n est borné et $|\frac{\partial u_n}{\partial x}| < M_s$ alors $\frac{\partial E}{\partial x}$ est borné.

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \int_0^1 A''_n (\theta u_{1n}(x,t) + (1-\theta) u_{2n}(x,t)) \left(\theta \frac{\partial u_{1n}}{\partial t} + (1-\theta) \frac{\partial u_{2n}}{\partial t} \right) d\theta$$

nous avons d'une part $A_n \in C^2(\mathbb{R})$ puisque $A'_n(s) = \frac{C'_n(s)}{K_n^2(s)}$ et

$$C_n \in C^2(\mathbb{R}), \text{ d'autre part } \frac{\partial u_{1n}}{\partial t} = \frac{1}{A'_n(u_{1n})} \frac{\partial^2 u_{1n}}{\partial x^2} - \frac{K'_n(u_{1n})}{A'_n(u_{1n})} \frac{\partial u_{1n}}{\partial x}$$

avec $C'_n > \frac{1}{n}$ et K_n borné, $\frac{\partial u_{1n}}{\partial t}$, $\frac{\partial u_{2n}}{\partial t}$ et par suite $\frac{\partial F}{\partial t}$ sont bornés.

Le principe du maximum s'applique à v en sorte que

$$\max_{\overline{Q}_T} v = \max_{\Gamma_T} v.$$

Or, nous avons déjà $v(x, 0) \leq 0$ et $v(1, t) \leq 0$, il s'ensuit que si

$$\max_{\Gamma_T} v = M > 0 \text{ il existe } t_0 \in [0, T] \text{ tel que } v(0, t_0) = M;$$

alors $\frac{\partial v}{\partial x}(0, t_0) \leq 0$; mais

$$(-E v)(0, t_0) = -M.E(0, t_0) < 0 \quad \text{car} \quad E > 0$$

et donc

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} - E v \right)(0, t_0) < 0$$

ce qui est en contradiction avec

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} - E v \right)(0, t) = 0.$$

Ainsi

$$\max_{\overline{Q_T}} v = \max_{\Gamma_T} v \leq 0$$

donc $v \leq 0$ sur Q_T c'est à dire $u_{1n} \leq u_{2n}$ sur Q_T .

Comme il existe des sous suites de $\{u_{1n}\}$ et de $\{u_{2n}\}$ qui convergent faiblement dans $L^2(Q_T)$ respectivement vers u_1 et u_2 nous pouvons conclure que $u_1 \leq u_2$ pp dans Q_T .

Corollaire 1

Sous les hypothèses du théorème 3 et si $0 \leq v_i \leq u_s$ pour $i = 1, 2$ pp sur $]0, 1[$ alors $u_1 \leq u_2$ partout dans $]0, 1[$.

Démonstration

Au vu de la remarque 1 (section II) il vient que u_1 et u_2 sont continues.

IV.4-Convergence vers la solution du problème stationnaire

Nous associons au problème (P) les deux problèmes (P1) et (P2) correspondant respectivement à $u_0 \equiv 0$ et $u_0 \equiv u_s$.

Nous notons u la solution de (P), $\underline{u}$ la solution de (P1) et $\overline{u}$ celle de (P2). D'après le lemme 3 section II (nous avons choisis $M_0 = u_s$) nous savons que $0 \leq \overline{u} \leq u_s$ et

$0 \leq \underline{u} \leq u_s$ dans Q_T et plus précisément nous avons le lemme suivant

Lemme 2

Soit u la solution du problème (P) associé à une condition initiale u_0 telle que

$$0 \leq u_0 \leq u_s,$$

pp sur $]0, 1[$ alors

$$0 \leq \underline{u} \leq u \leq \overline{u} \leq u_s, \quad \text{dans } Q_T$$

$\underline{u}(x, \cdot)$ est croissante (en t) dans $]0, 1[$

$\overline{u}(x, \cdot)$ est décroissante (en t) dans $]0, 1[$

Démonstration

D'abord $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ est une conséquence directe du théorème 3 et de son corollaire.

Nous associons au problème (P1) le problème (P_τ) de condition initiale $u_{0\tau}(x) = \underline{u}(x, \tau)$.

Nous avons $0 \leq \underline{u}(x, \tau) = u_{0\tau}(x)$.

Si u_τ est la solution de (P_τ) , alors $\underline{u}(x, t) \leq u_\tau(x, t)$.

Or $u_\tau(x, t) = \underline{u}(x, t + \tau)$

Nous avons donc $\underline{u}(x, t) \leq \underline{u}(x, t + \tau)$ alors $\underline{u}(x, \cdot)$ est croissante (en t).

Nous démontrons de la même manière que $\bar{u}$ est décroissante, ce qui est utile pour prouver le théorème suivant.

Théorème 4

Si $u(x, t)$ est la solution du problème (P) et $u^*(x)$ est la solution du problème stationnaire (P_s) associé à (P) alors pour tout $x \in]0, 1[$ nous avons $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = u^*(x)$.

Démonstration

De ce qui précède, nous déduisons que pour tout $x \in [0, 1]$, il existe $\bar{w}(x)$ et $\underline{w}(x)$ deux fonctions telles que $\bar{u}(x, t)$ converge vers $\bar{w}(x)$ et $\underline{u}(x, t)$ converge vers $\underline{w}(x)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Il suffit donc de montrer que $\bar{w}$ et $\underline{w}$ sont toutes deux solution stationnaire de (P) pour déduire que $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = u^*(x) = \bar{w}(x) = \underline{w}(x) \quad \forall x \in [0, 1]$, ce qui achève la démonstration du théorème 4.

Nous avons déjà

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{u}(x, t) = \underline{w}(x) \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{u}(x, t) = \bar{w}(x) \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$|\underline{u}(x, t)| \leq u_\tau$$

et

$$|\bar{u}(x, t)| \leq u_\tau$$

alors par le théorème de convergence dominée, nous pouvons conclure que

$$\begin{aligned} \|\underline{u}(\cdot, t) - \underline{w}(\cdot)\|_{L^p(\Omega)} &\longrightarrow 0 \\ t &\longrightarrow +\infty \end{aligned}$$

et

$$|\bar{u}(\cdot, t) - \bar{w}(\cdot)|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0$$

$$t \longrightarrow +\infty$$

pour $1 \leq p < +\infty$.

A est continue donc $A(\bar{u}(\cdot, t))$ converge vers $A(\bar{w}(\cdot))$

$A(\bar{u}(\cdot, t)) \leq A(u_t)$ (A croissante positive) alors $A(\bar{u}(\cdot, t))$ converge vers $A(\bar{w}(\cdot))$ dans $L^2(\Omega)$ fort, quand t tend vers $+\infty$.

De la même manière, $A(\underline{u}(\cdot, t))$ converge vers $A(\underline{w}(\cdot))$ dans $L^2(\Omega)$ fort.

La fonction K étant elle aussi croissante et continue, nous avons

$K(\bar{u}(\cdot, t))$ converge vers $K(\bar{w}(\cdot))$ dans $L^2(\Omega)$ fort

et $K(\underline{u}(\cdot, t))$ converge vers $K(\underline{w}(\cdot))$ dans $L^2(\Omega)$ fort.

De la majoration $|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x, t)| < M_5$, nous déduisons que $\bar{u}(\cdot, t)$ est borné dans $H^1(\Omega)$;

par suite $\bar{w} \in H^1(\Omega)$ et $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(\cdot, t)$ converge vers $\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}$ dans $L^2(\Omega)$ faible. Nous avons le résultat analogue pour $\underline{u}$ et $\underline{w}$.

Puisque u est une solution faible du problème (P) pour tout T et pour tout

$$\phi \in H^1(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$$

vérifiant $\phi(1, \cdot) = 0$ et $\phi(\cdot, T) = 0$

$$\begin{aligned} \text{nous avons } & \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - K(u) \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dt - \int_0^T \int_0^1 A(u) \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dt = \\ & = \int_0^1 A(u_0(x)) \phi(x, 0) dx + \int_0^T K(\lambda) \phi(0, t) dt \end{aligned}$$

En particulier pour $\phi = \xi v$ avec $\xi \in \mathcal{D}(0, T)$ et $v \in C(0, 1)$ tel que

$v(1) = 0$ et $v' \in L^2(0, 1)$ nous avons

$$\int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - K(u) \right) v' \xi dx dt - \int_0^T \int_0^1 A(u) v \xi' dx dt =$$

$$= \int_0^T K(\lambda) v(0) \xi(t) dt$$

et par suite

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - K(u) \right) v' dx \right) \xi dt + \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^1 A(u) v dx \right) \xi dt = \\ = \int_0^T K(\lambda) v(0) \xi(t) dt \end{aligned}$$

Il en découle que

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - K(u) \right) v' dx + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 A(u) v dx = K(\lambda) v(0)$$

au sens des distributions sur $]0, +\infty[$.

Nous prenons $\psi \in \mathcal{D}(0, 1)$ avec $\int_0^1 \psi(\sigma) d\sigma \neq 0$.

Nous multiplions l'équation ci-dessus par $\psi(\tau-t)$ et nous l'intégrons entre t et $t+1$; il vient alors

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - K(u) \right) v' \psi(\tau-t) dx d\tau + \int_t^{t+1} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^1 A(u) v \right) \psi(\tau-t) dx d\tau = \\ = \int_t^{t+1} K(\lambda) v(0) \psi(\tau-t) d\tau. \end{aligned}$$

En intégrant par parties le deuxième terme du membre de gauche, la même équation s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - K(u) \right) v' \psi(\tau-t) dx d\tau - \int_t^{t+1} \int_0^1 A(u) v \psi'(\tau-t) dx d\tau = \\ = \int_t^{t+1} K(\lambda) v(0) \psi(\tau-t) d\tau \end{aligned}$$

Le changement de variable de τ en $\sigma = \tau-t$ donne

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - K(u) \right) (x, \sigma+t) \right) v'(x) \psi(\sigma) dx d\sigma -$$

$$- \int_0^1 \int_0^1 (A(u)(x, \sigma + t)) v(x) \psi'(\sigma) dx d\sigma = \int_0^1 K(\lambda) v(0) \psi(\sigma) d\sigma.$$

Or

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - K(\bar{u}) \right)(x, \sigma + t) \right) v'(x) \psi(\sigma) dx d\sigma &= \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - K(\bar{w}) \right) \right) v'(x) \psi(\sigma) dx d\sigma \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 \int_0^1 (A(\bar{u})(x, \sigma + t)) v(x) \psi'(\sigma) dx d\sigma &= \\ &= \int_0^1 (A(\bar{w})) v(x) dx \int_0^1 \psi'(\sigma) d\sigma = 0 \end{aligned}$$

et nous avons donc

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - K(\bar{w}) \right) \right) v'(x) \psi(\sigma) dx d\sigma - \int_0^1 K(\lambda) v(0) \psi(\sigma) d\sigma = 0$$

Puisque $\int_0^1 \psi(\sigma) d\sigma \neq 0$ il découle que

$$\int_0^1 \left(\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - K(\bar{w}) \right) \right) v'(x) dx - K(\lambda) v(0) = 0$$

pour tout $v \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ et $v(1) = 0$.

Si en particulier $v \in \mathfrak{D}(\Omega)$ alors

$$\int_0^1 \left(\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - K(\bar{w}) \right) \right) v'(x) dx = 0$$

ce qui implique que $\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} K(\bar{w}) = 0$ au sens de $\mathfrak{D}'(\Omega)$ et donc que

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - K(\bar{w}) = C_1 \text{ une constante.}$$

En prenant de nouveau $v \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ et $v(1) = 0$ nous obtenons

$$-C_1 v(0) - K(\lambda) v(0) = 0 \text{ ce qui implique que}$$

$$C_1 = -K(\lambda)$$

et finalement nous avons

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - K(\bar{w}) = -K(\lambda)$$

Comme l'application trace

$$\begin{aligned} \gamma : H^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ v &\longrightarrow v(1) \end{aligned}$$

est linéaire continue et que $\bar{u}$ converge vers $\bar{w}$ pour la topologie faible de $H^1(\Omega)$, le passage à la limite dans

$\gamma(\bar{u}(\cdot, t)) = \bar{u}(1, t) = \bar{u}$ entraîne que $\gamma(\bar{w}) = \bar{w}(1) = \bar{u}$ et donc $\bar{w}$ est solution de (P_s) .

Nous montrons de la même manière que $\underline{w}$ est aussi solution de (P_s) .

CHAPITRE D

ETUDE NUMERIQUE DU SYSTEME EN DIMENSION 1 D'ESPACE.

D.I - INFILTRATION D'EAU DANS LE SOL SOUS CONDITION DE FLUX

D.I.1 – Le problème à étudier

D.I.2 – Discrétisation du problème par un schéma aux différences finies

D.I.3 – Quelques résultats numériques

3-a Les résultats de Vauclin

3-b Infiltration sous condition de flux variable

3-c Comportement asymptotique

D.II - LE SYSTEME D'EQUATIONS DE TRANSFERTS COUPLES DE CHALEUR ET DE MASSE

D.II.1 – Le système à approcher

D.II.2 – Evaluation de la température de surface

D.II.3 – Le schéma de discrétisation du problème et la méthode de résolution du système linéaire par relaxation

D.II.4 – Résultats numériques

D.I - INFILTRATION D'EAU DANS UN SOL SOUS CONDITION DE FLUX

1 - Le problème étudié

Nous considérons l'équation (B.III.11) avec un gradient de température nul ; elle s'écrit alors :

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(h) \left(\frac{\partial h}{\partial x} - 1 \right) \right) \quad \text{pour } (x,t) \in]0, L[\times]0, T[\quad (\text{D.I.1})$$

Nous lui associons les conditions aux limites suivantes :

$$\left(K(h) \left(\frac{\partial h}{\partial x} - 1 \right) \right) (0, t) = -K(\lambda(t)) \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T, \quad (\text{D.I.2})$$

$$h(L, t) = h_1 \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T, \quad (\text{D.I.3})$$

où h_1 est constante,

et l'état initial

$$h(x, 0) = h_0(x) \quad \text{pour } x \in]0, L[. \quad (\text{D.I.4})$$

2 - Discrétisation par différences finies

2-1 Discrétisation de l'équation

Pour I et N entiers naturels, nous définissons $\Delta x = L/I$ et $\Delta t = T/N$.

Nous utilisons la notation $h_i^n = h(i \Delta x, n \Delta t)$ pour $1 \leq i \leq I$ et $0 \leq n \leq N$.

En choisissant $\theta \in]0, 1]$, nous discrétisons l'équation (D.I.1) par le schéma aux différences finies centrées ci dessous

$$\begin{aligned} C_i^n \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} &= \theta \left(K_{i+1/2}^n \frac{h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1}}{\Delta x^2} - K_{i-1/2}^n \frac{h_i^{n+1} - h_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) \\ &+ (1 - \theta) \left(K_{i+1/2}^n \frac{h_{i+1}^n - h_i^n}{\Delta x^2} - K_{i-1/2}^n \frac{h_i^n - h_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right) \\ &- \frac{(K_{i+1/2}^n - K_{i-1/2}^n)}{\Delta x} \end{aligned} \quad (\text{D.I.5})$$

ce qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 - \theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} K_{i-1/2}^n h_{i-1}^{n+1} + \left(C_i^n + \theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (K_{i+1/2}^n + K_{i-1/2}^n) h_i^{n+1} \right) - \theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} K_{i+1/2}^n h_{i+1}^{n+1} = \\
 + C_i^n h_i^n + (1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (K_{i-1/2}^n h_{i-1}^n - (K_{i+1/2}^n + K_{i-1/2}^n) h_i^n + K_{i+1/2}^n h_{i+1}^n) \\
 - \frac{\Delta t}{\Delta x} (K_{i+1/2}^n - K_{i-1/2}^n) \quad (D.I.6)
 \end{aligned}$$

équivalente à l'écriture ci-dessous :

$$a_i h_{i-1}^{n+1} + b_i h_i^{n+1} + c_i h_{i+1}^{n+1} = y_i \quad (D.I.7)$$

avec

$$a_i = - \theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} K_{i-1/2}^n$$

$$c_i = - \theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} K_{i+1/2}^n$$

$$b_i = C_i^n - (a_i + c_i)$$

et

$$\begin{aligned}
 y_i = C_i^n h_i^n + (1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (K_{i-1/2}^n h_{i-1}^n - (K_{i+1/2}^n + K_{i-1/2}^n) h_i^n + K_{i+1/2}^n h_{i+1}^n) \\
 - \frac{\Delta t}{\Delta x} (K_{i+1/2}^n - K_{i-1/2}^n)
 \end{aligned}$$

2.2 Discrétisation des conditions aux limites

A la limite supérieure, nous avons un flux appliqué à $\frac{\Delta x}{2}$ qui s'écrit :

$$K_{1/2}^n \left(\frac{h_1^{n+1} - h_0^{n+1}}{\Delta x} - 1 \right) = -K(\lambda^{n+1})$$

Nous avons alors

$$C_1^n \frac{h_1^{n+1} - h_1^n}{\Delta t} = \frac{\theta}{\Delta x} \left(K_{3/2}^n \frac{h_2^{n+1} - h_1^{n+1}}{\Delta x} + K(\lambda^{n+1}) \right) - \frac{K_{3/2}^n}{\Delta x} \\ + \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} \left(K_{3/2}^n \frac{h_2^n - h_1^n}{\Delta x} + \frac{K_{1/2}^n}{K_{1/2}^{n-1}} K(\lambda^n) \right)$$

ce qui se met sous la forme (D.I.7) avec

$$a_1 = 0$$

$$c_1 = -\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} K_{3/2}^n$$

$$b_1 = C_1^n - c_1$$

et

$$y_1 = C_1^n h_1^n + (1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} K_{3/2}^n (h_2^n - h_1^n) \\ + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(-K_{3/2}^n + \theta K(\lambda^{n+1}) + (1 - \theta) \frac{K_{1/2}^n}{K_{1/2}^{n-1}} K(\lambda^n) \right)$$

A la limite inférieure nous avons $i = I$ et

$$h_I^{n+1} = h_I^n = h_1$$

alors

$$a_{I-1} = -\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} K_{I-3/2}^n$$

$$c_{I-1} = 0$$

$$b_{I-1} = C_{I-1}^n + \theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (K_{I-3/2}^n + K_{I-1/2}^n)$$

et

$$y_{I-1} = C_{I-1}^n h_{I-1}^n + (1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (K_{I-3/2}^n h_{I-2}^n - (K_{I-3/2}^n + K_{I-1/2}^n) h_{I-1}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} K_{I-1/2}^n h_1 \\ - \frac{\Delta t}{\Delta x} (K_{I-1/2}^n - K_{I-3/2}^n)$$

et nous avons le système linéaire suivant à résoudre

$$A \cdot H = Y \quad (D.I.8)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & & & \\ & & a_i & b_i & c_i \\ & & & & \cdot & c_{I-2} \\ & & & & a_{I-1} & b_{I-1} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{I-1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{I-1} \end{bmatrix}$$

Les valeurs des $K_{i+1/2}^n$ seront calculées par moyennes géométriques entre K_i^n et K_{i+1}^n ce qui est cohérent avec la variation exponentielle de K en fonction de h .

Bilan de masse

Moyennant la définition de $C(h)$, l'équation (D.I.1) peut s'écrire

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(h) \left(\frac{\partial h}{\partial x} - 1 \right) \right).$$

En l'intégrant sur $]0, L[\times]0, t[$, il vient

$$\begin{aligned} \int_0^L \eta_i(t) dx - \int_0^L \eta_i(0) dx &= \int_0^t \left[K(h) \left(\frac{\partial h}{\partial x} - 1 \right) \right] (L) d\tau \\ &- \int_0^t \left[K(h) \left(\frac{\partial h}{\partial x} - 1 \right) \right] (0) d\tau. \end{aligned}$$

De même, l'intégration de l'équation (D.I.2) sur $]0, t[$ donne

$$\int_0^t \left[K(h) \left(\frac{\partial h}{\partial x} - 1 \right) \right] (0) d\tau = - \int_0^t K(\lambda(\tau)) d\tau$$

Nous regardons à l'issue de chaque itération la quantité

$$\begin{aligned} BIL(t) &= 1 - \left\{ \int_0^L \eta_i(t) dx - \int_0^L \eta_i(0) dx \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t \left[K(h) \left(\frac{\partial h}{\partial x} - 1 \right) \right] (L) d\tau \right\} / \left\{ \int_0^t K(\lambda(\tau)) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Ces quantités sont calculées par intégration numérique.

3 – Quelques résultats numériques

Dans un premier temps la simulation a été faite avec les mêmes données expérimentales que VAUCLIN [VAU-79], à savoir :

- un flux constant à la surface $K(\lambda(t)) = 0,536$ (correspondant à $22,92 \cdot 10^{-3} \text{ Kg/m}^2\text{s}$)
- une pression d'eau constante $h_1 = -0,342 \text{ m}$ à la profondeur $L = 0,94 \text{ m}$
- une pression d'eau initiale $h_0(x)$ linéairement croissante avec la profondeur et allant de $h_0(0) = -1,116 \text{ m}$ à la surface à $h_0(L) = -0,342 \text{ m}$ à la profondeur $L = 0,94 \text{ m}$

Le sol considéré est un sable dont les caractéristiques hydrodynamiques données dans [VAU-79], sont :

$$K_h(\eta_l) = A_1 \exp(B_1 \eta_l) + A_2 \eta_l^{B_2}$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad A_1 &= 0,50341 \times 10^{-3} & B_1 &= 0,28781 \times 10^2 \\ A_2 &= 0,82918 \times 10^4 & B_2 &= 5,6593 \end{aligned}$$

et

$$\eta_l(h) = \frac{\alpha(\eta_s - \eta_r)}{\alpha + |100h|^\beta} + \eta_r$$

où

η_s est la teneur en eau à la saturation

η_r " " " résiduelle

$$\alpha = 1608.92 \quad \text{et} \quad \beta = 2.1773$$

Dans ce qui suit, conformément à (D.I.2), les flux perdus par le sol vers l'atmosphère sont comptés positivement, les apports d'eau sont donc comptés négativement. Les Figure D.1 et D.2 donnent la pression d'eau en fonction de la profondeur à des temps différents, et l'évolution de la pression d'eau à un point donné pour trois profondeurs (22 cm, 42 cm et 67 cm) permettant de visualiser l'évolution du front d'infiltration. La Figure D.3 présente le résidu de bilan de masse établi au paragraphe précédent. Ce résidu ne servira pas dans le calcul de la solution, il n'est qu'un test "global" de la consistance du schéma. L'importance relative de sa valeur pour les premières

itérations est causée par la non compatibilité des conditions aux limites avec la condition initiale.

Pour un sol de mêmes caractéristiques et pour une même condition à la limite inférieure, nous prenons une nouvelle condition initiale $h_1(x)$ croissante linéairement de $-0,4$ m à la surface jusqu'à $-0,342$ m à $L = 0,94$ m et on fait deux simulations pour des flux constants à la surface : le flux $K(\lambda(t)) = 0,536$ et $K(\lambda(t)) = 0,01$. La Figure D.4 montre le comportement des deux solutions à des grands temps, la deuxième solution montre un profil d'assèchement du sol.

La quatrième simulation est conduite en appliquant un flux périodique–semi sinusoïdal, comme le montre la Figure D.5. La Figure D.6 donne la pression d'eau en fonction de la profondeur à des temps différents. La Figure D.7 permet de comparer la pression d'eau en fonction de la profondeur pour un flux périodique à un temps t_1 ($t_1 = 10^4$ s) à la solution obtenue au même temps t_1 mais sous condition de flux constant (cf : la première simulation), le flux intégré étant le même à cet instant pour les deux simulations. Le temps $t = 10^4$ s. correspond à un temps où le flux périodique est nul à la surface, le temps $t = 9250$ s. correspond à un flux périodique maximal à la surface. On constate qu'au delà d'une certaine profondeur (30 cm), les variations du flux à la surface sont fortement amorties.

Pour des grands temps, la solution de cette simulation est périodique, comme le montrent les Figures D.8 à D.11. La Figure D.8 donne les courbes de niveau de la pression en fonction du temps sur une durée de 5 périodes. La Figure D.9 donne l'évolution de la pression en quelques points du domaine. Ces deux courbes montrent bien le caractère périodique de la solution. Pour mieux le mettre en évidence, nous faisons la différence $h(x,t) - h(x,t + n T_1)$, où T_1 est la période égale à 10^3 s. La Figure D.10 représente le maximum de la différence en fonction de la profondeur $\| h(x, \cdot) - h(x, \cdot + n T_1) \|_{L^\infty(0, T_1)}$, la Figure D.11 donne le maximum de la différence en fonction du temps sur une durée de T_1 : $\| h(\cdot, t) - h(\cdot, t + n T_1) \|_{L^\infty(0, L)}$. Les valeurs du flux ont été normalisées par la conductivité hydraulique de saturation.

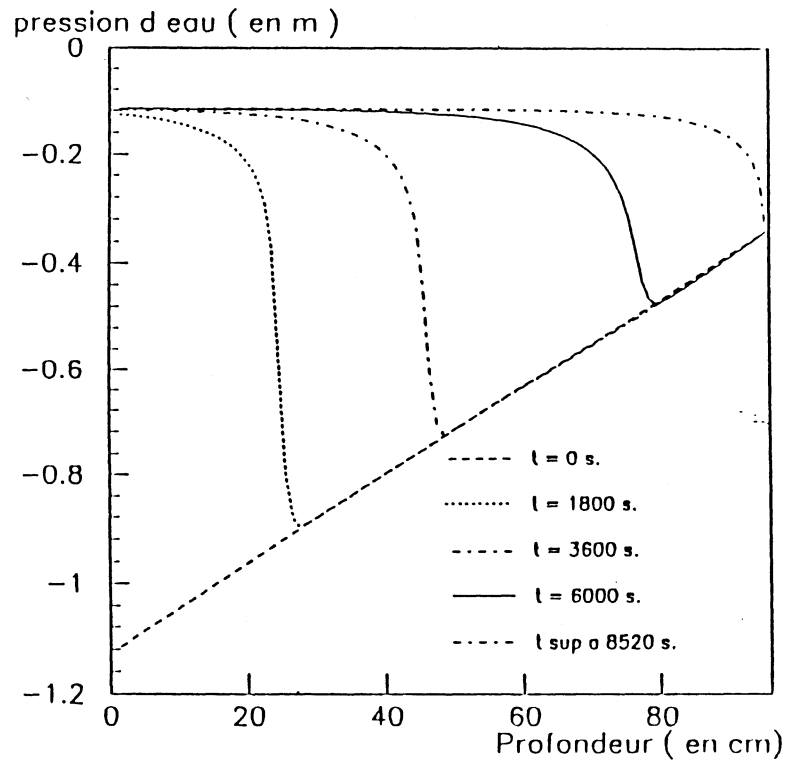


Figure D.1 : Evolution de la pression d'eau dans le sol en fonction de la profondeur..

$$(K(\lambda(t)) = 0.536 \text{ correspondant à } 22.92 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}^2\text{s})$$

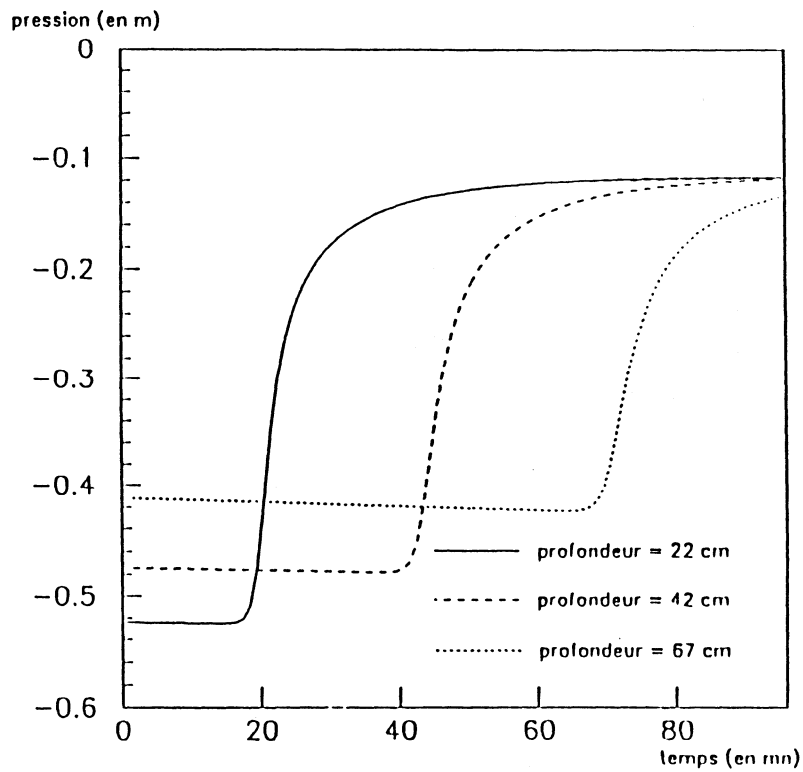


Figure D.2 : Evolution de la pression d'eau dans le sol à un point donné
au cours de l'infiltration.

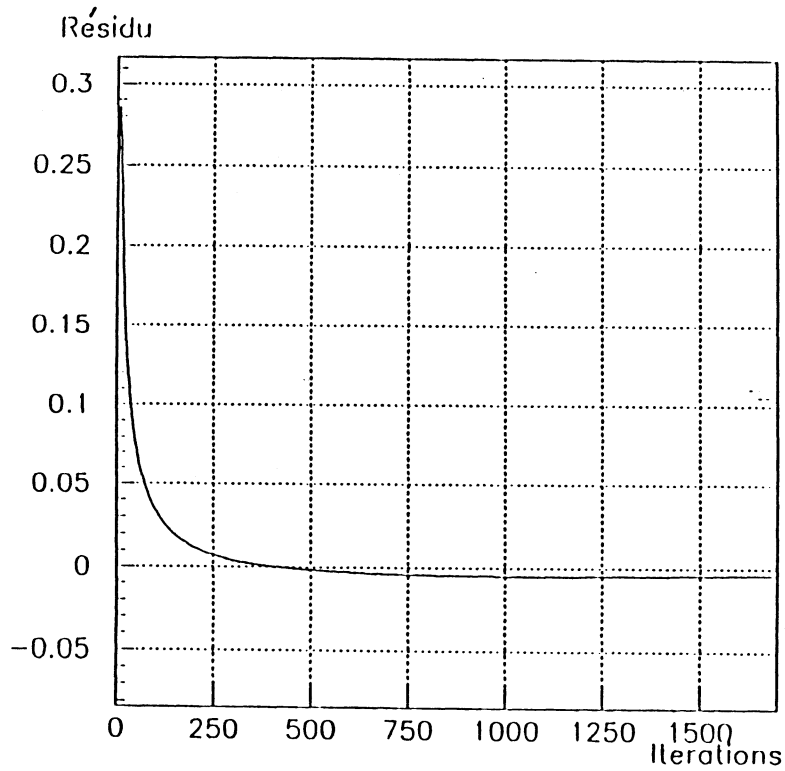


Figure D.3 : Bilan de masse : la somme des flux comparée à la variation du stock.

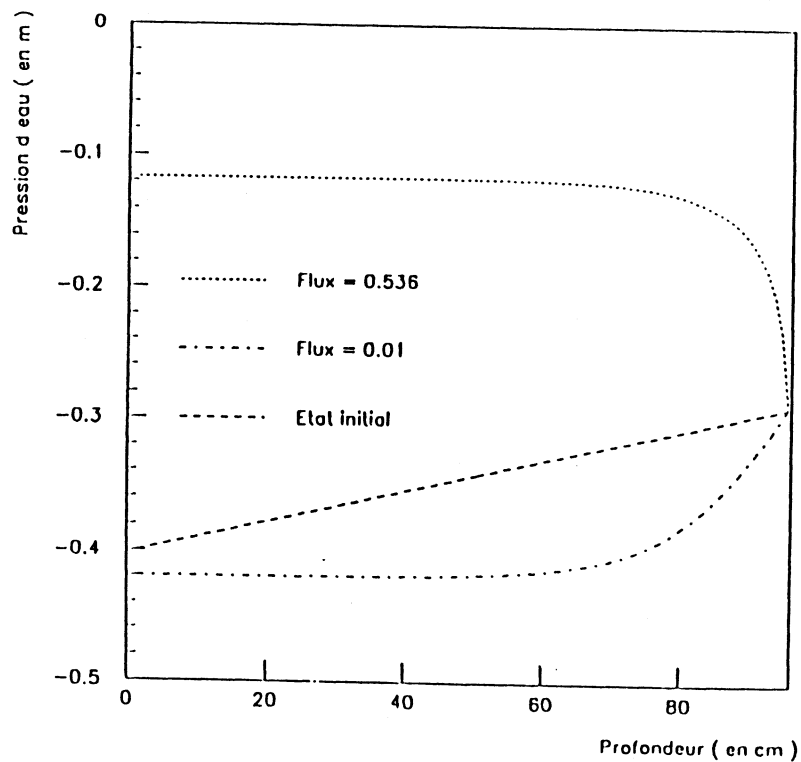


Figure D.4 : Comportement asymptotique de la solution pour des flux constants à la surface.

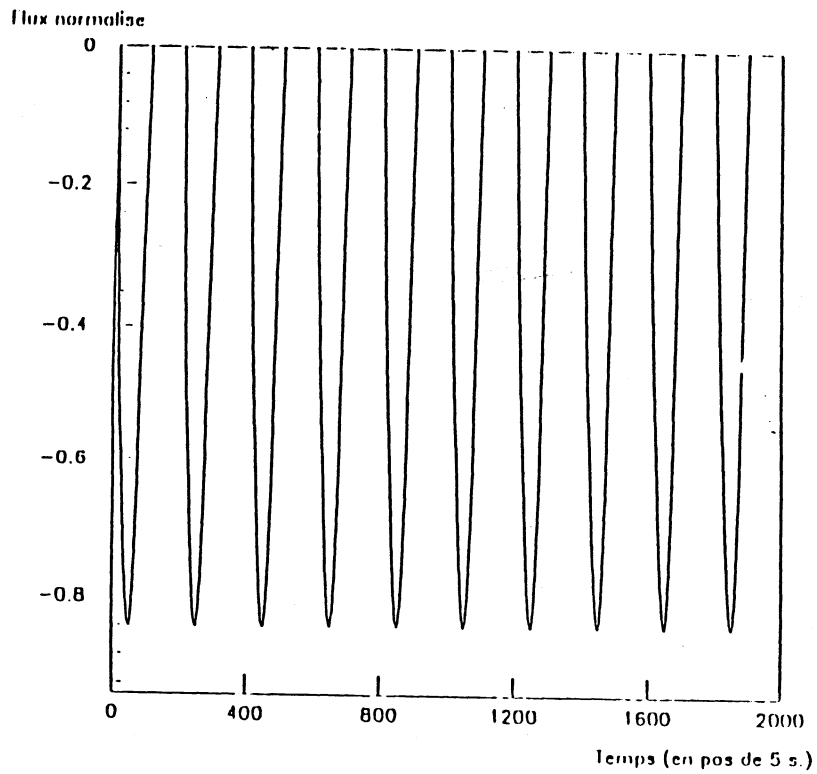


Figure D.5 : Allure du flux ($-K(\lambda)$) à la surface.

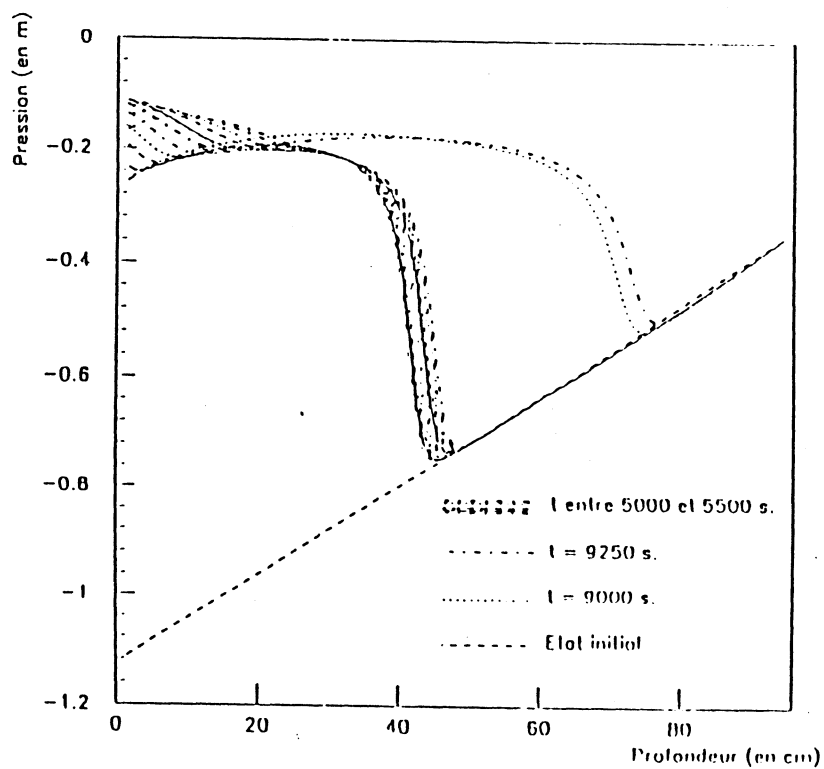


Figure D.6 : La pression d'eau dans le sol en fonction de la profondeur
sous condition de flux périodique à la surface

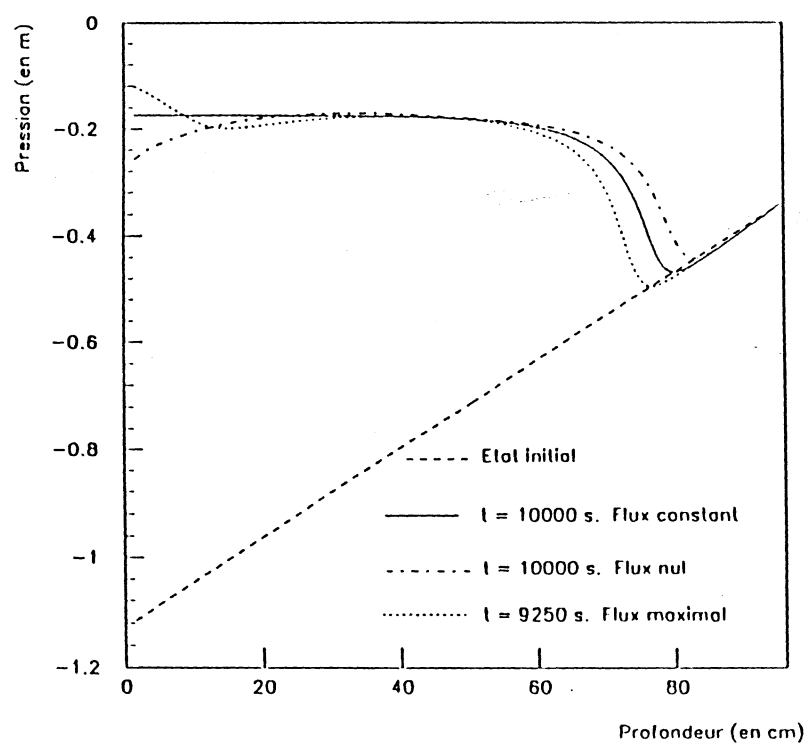


Figure D.7 : Comparaison des pressions d'eau obtenues sous conditions de flux constant et flux périodique

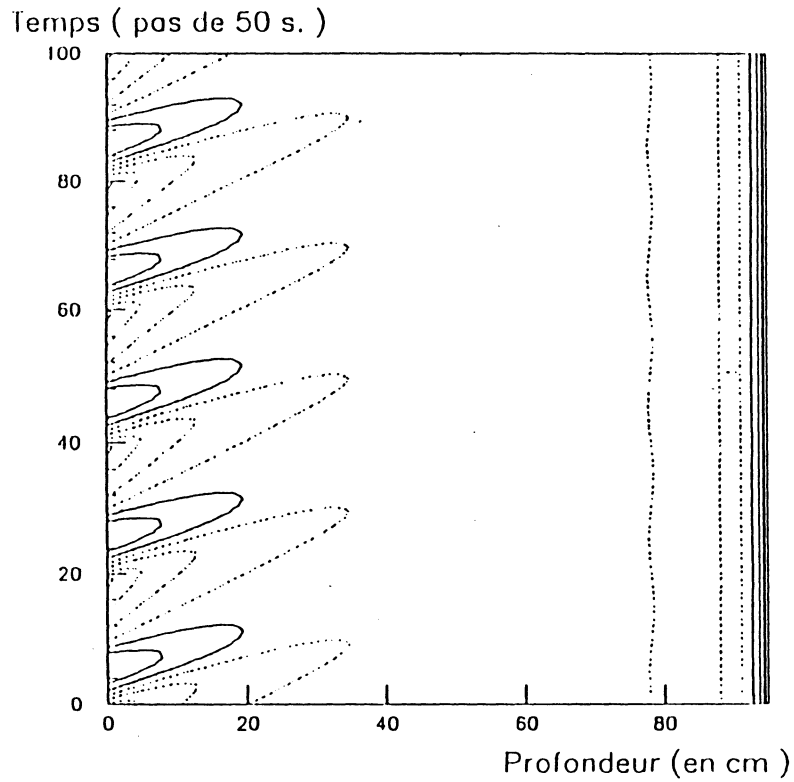


Figure D.8 : Courbes de niveau de la pression pour des grands temps et sous une condition de flux périodique

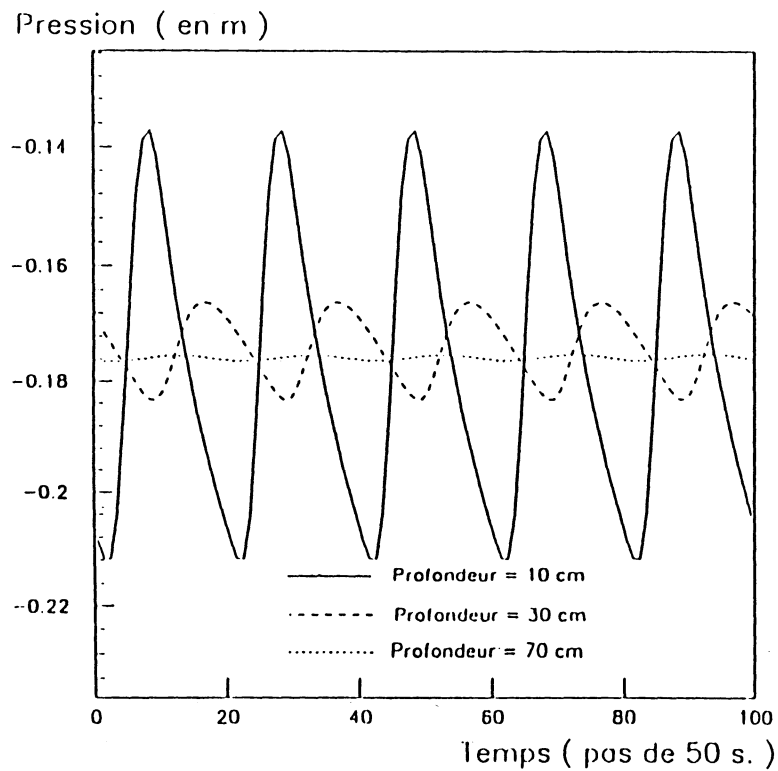


Figure D.9 : Evolution de la pression à différentes profondeurs, après un grand temps, sous une condition de flux périodique.

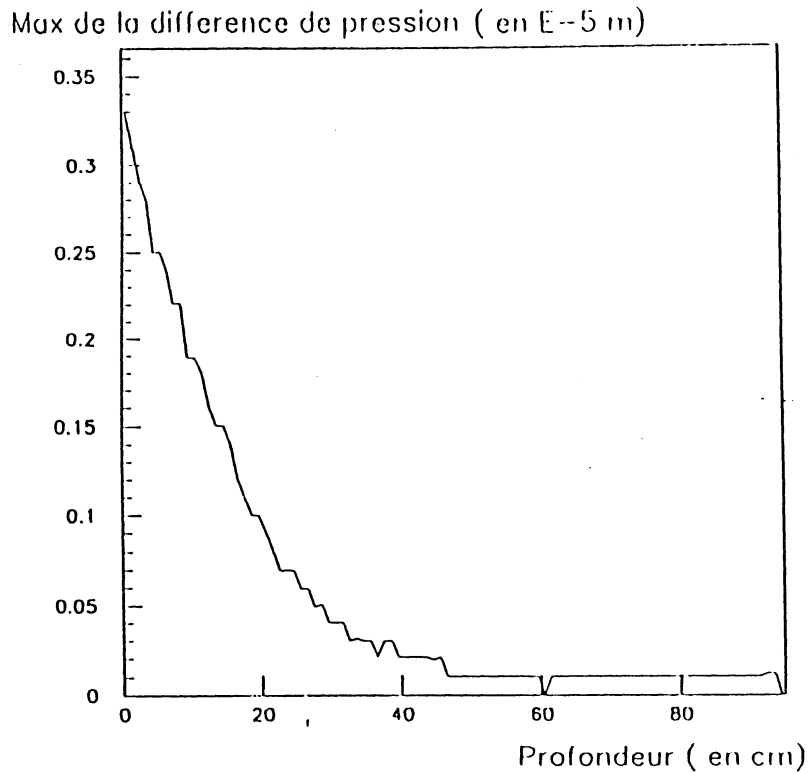


Figure D.10 : La variation de $\| h(x, \cdot) - h(x, \cdot + n T_1) \|_{L^\infty(0, \tau_1)}$
en fonction de la profondeur

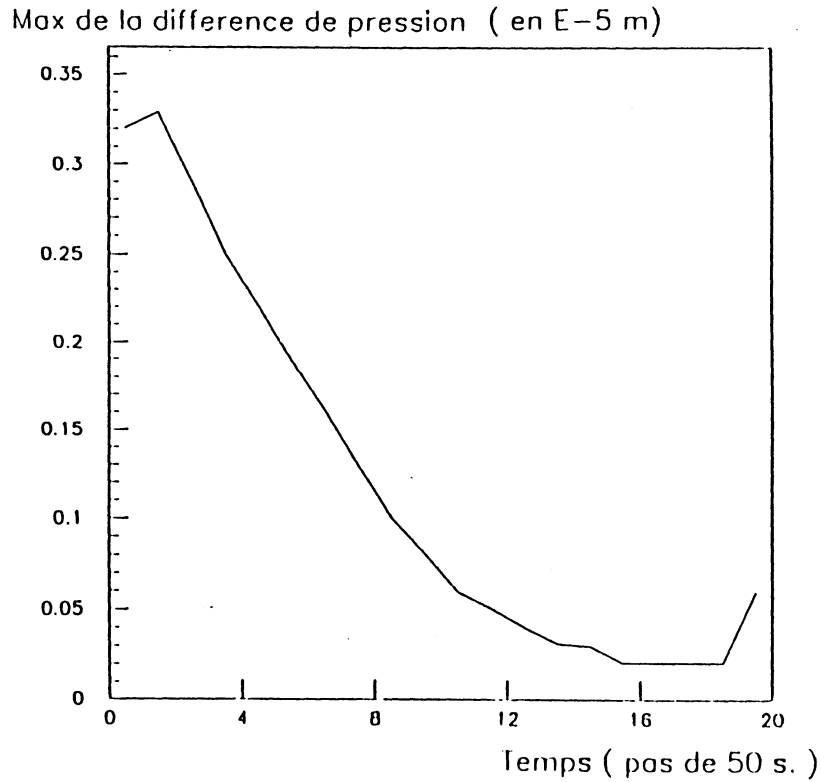


Figure D.11 : La variation de $\| h(\cdot, t) - h(\cdot, t + n T_1) \|_{L^\infty(0, L)}$
en fonction du temps au cours d'une période

D.II - LE SYSTEME D'EQUATIONS DE TRANSFERTS COUPLES DE CHALEUR ET DE MASSE

1 - Le système à approcher

Nous reprenons le système des équations (B.III.11) et (B.III.12) où nous ne tenons pas compte du troisième terme du membre de droite ; négligeable devant le premier [REC-82], [DUN-82].

Les deux équations s'écrivent donc de la façon suivante :

$$A(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(B(h) \frac{\partial h}{\partial x} + C(h, T) \frac{\partial T}{\partial x} - D(h) \right) \quad \text{pour } (x, t) \in]0, L[\times]0, T[\quad (\text{D.II.1})$$

$$E(h) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(F(h, T) \frac{\partial h}{\partial x} + G(h, T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad \text{pour } (x, t) \in]0, L[\times]0, T[\quad (\text{D.II.2})$$

Nous gardons les mêmes conditions initiales et aux limites pour la première équation que dans (D.I) à savoir :

$$\left(B(h) \frac{\partial h}{\partial x} + C(h, T) \frac{\partial T}{\partial x} - D(h) \right) (0, t) = -D(\lambda(t)) \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T \quad (\text{D.II.3})$$

$$h(L, t) = h_1 \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T \quad (\text{D.II.4})$$

$$h(x, 0) = h_0(x) \quad \text{pour } x \in]0, L[$$

Pour la seconde équation nous prenons les conditions aux limites :

$$T(0, t) = T_s(t) \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T$$

$$T(L, t) = T_1 \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T$$

et pour condition initiale :

$$T(x, 0) = T_0(x) \quad \text{pour } x \in]0, L[.$$

2 – Evaluation de la température de surface

Nous utilisons la méthode de Newton pour trouver la température de surface T_s qui satisfait l'équation de bilan (B.IV.3) : $R_N = J_{ch} + H + L_v E$

Pour cela nous posons : $f(T_s) = J_{ch} + H + L_v E - R_N$

et nous itérons suivant la formule suivante :

$$T_s^{n+1} = T_s^n - \frac{f(T_s^n)}{f'(T_s^n)}$$

Le calcul de $f'(T_s)$ sera effectué à partir des formules ci-dessous :

$$\frac{\partial R_N}{\partial T_s} = -\frac{\partial R_t}{\partial T_s} = -4 \sigma \epsilon_s T_s^3$$

$$\frac{\partial H}{\partial T_s} = \rho C_p h$$

$$\frac{\partial J_{ch}}{\partial T_s} = \frac{G_{1/2}^n}{\Delta x}$$

et puis comme E est relié à q_s par la relation (B.IV.2),

$$q_s = 0.622 \frac{P_v}{P_a - 0.378 P_v}$$

et vu les relations (B.II.13) et (B.II.14) nous avons alors :

$$\frac{\partial q_s}{\partial T_s} = \frac{0.622 P_a P_v (T_s, h_s)}{(P_a - 0.378 P_v)^2 R_v T_s} \left[\frac{L_v - g h_s}{T_s} + g \frac{\partial h_s}{\partial T_s} \right]$$

3 – Le schéma de discrétisation du problème et la méthode de résolution du système linéaire

3.1 – Le schéma de discrétisation

Avec les mêmes définitions de Δt , Δx et avec les mêmes notations $h_i^n = h(i \Delta x, n \Delta t)$ et

$T_i^n = T(i \Delta x, n \Delta t)$ avec $1 \leq i \leq I$ et $0 \leq n \leq N$, nous posons :

$$A_i^n \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} = \theta \frac{M_{i+1/2}^{n+1} - M_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{\tilde{M}_{i+1/2}^n - \tilde{M}_{i-1/2}^n}{\Delta x} - \frac{D_{i+1/2}^n - D_{i-1/2}^n}{\Delta x} \quad (D.II.5)$$

$$E_i^n \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \theta \frac{N_{i+1/2}^{n+1} - N_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{\tilde{N}_{i+1/2}^n - \tilde{N}_{i-1/2}^n}{\Delta x} \quad (D.II.6)$$

où

$$M_{i+1/2}^{n+1} = B_{i+1/2}^n \frac{h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1}}{\Delta x} + C_{i+1/2}^n \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_i^{n+1}}{\Delta x}$$

$$\tilde{M}_{i+1/2}^n = B_{i+1/2}^n \frac{h_{i+1}^n - h_i^n}{\Delta x} + C_{i+1/2}^n \frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{\Delta x}$$

$$N_{i+1/2}^{n+1} = F_{i+1/2}^n \frac{h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1}}{\Delta x} + G_{i+1/2}^n \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_i^{n+1}}{\Delta x}$$

$$\tilde{N}_{i+1/2}^n = F_{i+1/2}^n \frac{h_{i+1}^n - h_i^n}{\Delta x} + G_{i+1/2}^n \frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{\Delta x}$$

ce qui s'écrit encore sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} a_{i,i-1} h_{i-1}^{n+1} + a_{i,i} h_i^{n+1} + a_{i,i+1} h_{i+1}^{n+1} \\ \beta_{i,i-1} T_{i-1}^{n+1} + \beta_{i,i} T_i^{n+1} + \beta_{i,i+1} T_{i+1}^{n+1} = u_i^n \end{aligned} \quad (D.II.7)$$

$$\begin{aligned} \delta_{i,i-1} h_{i-1}^{n+1} + \delta_{i,i} h_i^{n+1} + \delta_{i,i+1} h_{i+1}^{n+1} \\ \gamma_{i,i-1} T_{i-1}^{n+1} + \gamma_{i,i} T_i^{n+1} + \gamma_{i,i+1} T_{i+1}^{n+1} = v_i^n \end{aligned} \quad (D.II.8)$$

avec

$$a_{i,i-1} = -\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} B_{i-1/2}^n$$

$$a_{i,i} = A_i^n + \theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (B_{i-1/2}^n + B_{i+1/2}^n)$$

$$a_{i,i+1} = -\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} B_{i+1/2}^n$$

$$\beta_{i,i-1} = -\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} C_{i-1/2}^n$$

$$\beta_{i,i} = \theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (C_{i-1/2}^n + C_{i+1/2}^n)$$

$$\beta_{i, i+1} = -\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} C_{i+1/2}^n$$

$$\delta_{i, i-1} = -\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} F_{i-1/2}^n$$

$$\delta_{i, i} = \theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (F_{i-1/2}^n + F_{i+1/2}^n)$$

$$\delta_{i, i+1} = -\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} F_{i+1/2}^n$$

$$\gamma_{i, i-1} = -\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} G_{i-1/2}^n$$

$$\gamma_{i, i} = E_i^n + \theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (G_{i-1/2}^n + G_{i+1/2}^n)$$

$$\gamma_{i, i+1} = -\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} G_{i+1/2}^n$$

$$u_i^n = A_i^n h_i^n + (1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{M}_{i+1/2}^n - \tilde{M}_{i-1/2}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (D_{i+1/2}^n - D_{i-1/2}^n)$$

$$v_i^n = E_i^n T_i^n + (1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{N}_{i+1/2}^n - \tilde{N}_{i-1/2}^n)$$

Au niveau du nœud $i = I-1$, nous avons :

$$h_I^{n+1} = h_I^n = h_1 \quad \text{et} \quad T_I^{n+1} = T_I^n = T_1$$

dès lors nous pouvons écrire :

$$\alpha_{I-1, I} = \beta_{I-1, I} = \delta_{I-1, I} = \gamma_{I-1, I} = 0$$

avec pour second membre :

$$\begin{aligned} u_{I-1}^n &= A_{I-1}^n h_{I-1}^n + (1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{M}_{I-1/2}^n - \tilde{M}_{I-3/2}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (D_{I-1/2}^n - D_{I-3/2}^n) \\ &\quad + \theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} B_{I-1/2}^n h_1 + \theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} C_{I-1/2}^n T_1 \end{aligned}$$

$$v_{i-1}^n = E_{i-1}^n T_{i-1}^n + (1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{N}_{i-1/2}^n - \tilde{N}_{i-3/2}^n) \\ + \theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} G_{i-1/2}^n h_1 + \theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} F_{i-1/2}^n T_1$$

Considérons maintenant le nœud $i = 1$; la condition à la limite (D.II.3) discrétisée peut s'écrire sous la forme suivante

$$M_{1/2}^{n+1} - D_{1/2}^n = -D(\lambda^{n+1})$$

au temps $(n+1)\Delta t$ et sous la forme

$$\tilde{M}_{1/2}^n - D_{1/2}^n = -D(\lambda^n)$$

et au temps $n\Delta t$.

Pour $i = 1$, l'équation (D.II.5) devient alors :

$$A_1^n \frac{h_1^{n+1} - h_1^n}{\Delta t} = \theta \frac{M_{3/2}^{n+1} + D(\lambda^{n+1})}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{\tilde{M}_{3/2}^n + D(\lambda^n)}{\Delta x} - \frac{D_{3/2}^n}{\Delta x}$$

ou encore sous la forme suivante :

$$\alpha_{1,1} h_1^{n+1} + \alpha_{1,2} h_2^{n+1} + \beta_{1,1} T_1^{n+1} + \beta_{1,2} T_2^{n+1} = u_1^n$$

avec

$$\alpha_{1,1} = A_1^n + \theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} B_{3/2}^n$$

$$\alpha_{1,2} = -\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} B_{3/2}^n$$

$$\beta_{1,1} = \theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} C_{3/2}^n$$

$$\beta_{1,2} = -\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} C_{3/2}^n$$

et

$$u_1^n = A_1^n h_1^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\theta D(\lambda^{n+1}) + (1 - \theta) (\tilde{M}_{3/2}^n + D(\lambda^n)) - D_{3/2}^n)$$

Pour l'équation (D.II.6), nous pouvons écrire en $i = 1$:

$$E_1^n \frac{T_1^{n+1} - T_1^n}{\Delta t} = \theta \frac{N_{3/2}^{n+1} - N_{1/2}^{n+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{\tilde{N}_{3/2}^n - \tilde{N}_{1/2}^n}{\Delta x}$$

La condition à la limite (D.II.3) s'écrit :

$$B_{1/2}^n \frac{h_1^{n+1} - h_0^{n+1}}{\Delta x} + C_{1/2}^n \frac{T_1^{n+1} - T_0^{n+1}}{\Delta x} - D_{1/2}^n = -D(\lambda^{n+1})$$

$$B_{1/2}^n \frac{h_1^n - h_0^n}{\Delta x} + C_{1/2}^n \frac{T_1^n - T_0^n}{\Delta x} - D_{1/2}^n = -D(\lambda^n)$$

nous avons alors :

$$N_{1/2}^{n+1} = (G_{1/2}^n - C_{1/2}^n \frac{F_{1/2}^n}{B_{1/2}^n}) \frac{T_1^{n+1} - T_0^{n+1}}{\Delta x} + \frac{F_{1/2}^n}{B_{1/2}^n} (-D(\lambda^{n+1}) + D_{1/2}^n)$$

$$\tilde{N}_{1/2}^n = (G_{1/2}^n - C_{1/2}^n \frac{F_{1/2}^n}{B_{1/2}^n}) \frac{T_1^n - T_0^n}{\Delta x} + \frac{F_{1/2}^n}{B_{1/2}^n} (-D(\lambda^n) + D_{1/2}^n)$$

En reportant ces relations dans l'équation (D.II.6) nous arrivons à la forme suivante :

$$\delta_{1,1} h_1^{n+1} + \delta_{1,2} h_2^{n+1} + \gamma_{1,1} T_1^{n+1} + \gamma_{1,1} T_1^{n+1} = v_1^n$$

où

$$\delta_{1,1} = \theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} F_{3/2}^n$$

$$\delta_{1,2} = -\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} F_{3/2}^n$$

$$\gamma_{1,1} = E_1^n + \theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (G_{1/2}^n + G_{3/2}^n - C_{1/2}^n \frac{F_{1/2}^n}{B_{1/2}^n})$$

$$\gamma_{1,2} = -\theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} G_{3/2}^n$$

$$v_1^n = E_1^n T_1^n + (1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{N}_{3/2}^n - \tilde{N}_{1/2}^n) +$$

$$\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ T_1^n (G_{1/2}^n - C_{1/2}^n \frac{F_{1/2}^n}{B_{1/2}^n}) + \frac{F_{1/2}^n}{B_{1/2}^n} (-D(\lambda^{n+1}) + D_{1/2}^n) \right\}$$

Le système des équations (D.II.7) et des équations (D.II.8) se met donc sous la forme matricielle

suivante :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \quad (\text{D.II.9})$$

où les blocs A, B, C et D sont les matrices tridiagonales correspondant respectivement aux éléments $\{\alpha_{ij}\}$, $\{\beta_{ij}\}$, $\{\delta_{ij}\}$ et $\{\gamma_{ij}\}$ avec $i - 1 \leq j \leq i + 1$ et h, T, U et V sont les vecteurs d'éléments respectivement $\{h_i^{n+1}\}$, $\{T_i^{n+1}\}$, $\{u_i^n\}$, $\{v_i^n\}$ avec $1 \leq i \leq I$

Pour la résolution du système (D.II.9) nous utilisons un schéma itératif suivant l'algorithme de relaxation par blocs ci-dessous :

$$\left\{ \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} h^{k+1} \\ T^{k+1} \end{bmatrix} = \left\{ \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right) \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} h^k \\ T^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$$

ce qui s'écrit :

$$D \cdot T^{k+1} = (1 - \omega) D \cdot T^k - \omega C \cdot h^k + \omega V \quad (\text{D.II.10})$$

$$A \cdot h^{k+1} = -\omega B \cdot T^{k+1} + (1 - \omega) A \cdot h^k + \omega U \quad (\text{D.II.11})$$

La résolution du système (D.II.9) pour un pas de temps reviendra donc à itérer jusqu'à convergence sur la résolution des deux systèmes tridigonaux (D.II.10) et (D.II.11).

4 – Résultats numériques

On donne ci-dessous les résultats de deux simulations sur une période de 24 heures, pour un sol de mêmes caractéristiques hydrodynamiques que la partie (D.I).

Pour la première simulation, on prend comme condition initiale pour l'équation de la chaleur généralisée une température constante $T_0(x) = 1$ et pour la condition limite inférieure une température fixe $T_0(L) = 1$. A la limite supérieure on fait un bilan d'énergie qui permet de déterminer la

température de surface comme cela est précisé au paragraphe (D.II.2). Les données nécessaires pour ce bilan proviennent d'un fichier de données météorologiques réelles interpolées.

Pour l'équation de transfert de masse, on prend comme condition initiale une pression linéairement croissante en fonction de la profondeur et allant de $-1,116$ m à la surface à $-0,342$ m à la limite inférieure, pression qui sera fixée au cours du temps en ce point $h_0(L) = -0,342$ m. A la limite supérieure, le flux de masse correspond à la quantité évaporée, ou condensée, calculée à partir du bilan d'énergie à la surface. La Figure D.12 donne l'évolution de ce flux au cours d'une période de simulation de 24 heures. Les Figures D.13 et D.14 donnent respectivement l'évolution de la pression de la couche superficielle et les courbes de niveau de pression d'eau dans le sol pendant une journée de simulation. Les Figures D.15 et D.16 représentent l'évolution de la température de la couche superficielle et les courbes de niveau de température d'eau dans le sol au cours de la même période de simulation.

Nous ajoutons ensuite au flux de masse utilisé à la première simulation, un flux constant égal à $0,07$ pendant 2 heures, entre 10 h et midi. La Figure D.17 donne l'allure de ce flux. Les Figures D.18 et D.19 permettent de comparer, respectivement, l'évolution des pressions des couches superficielles et de leurs températures dans les deux simulations. Enfin, la Figure D.20 donne les courbes de niveau des pressions correspondant à la deuxième simulation et la Figure D.21 donne une comparaison entre les deux simulations pour les courbes de niveau de la température.

Les courbes D.19 et D.21 montrent bien l'impact non négligeable des apports en eau à la surface sur l'évolution de la température dans les premières couches de sol. La prise en compte du couplage est donc à préconiser chaque fois que les premières couches de sol interviennent dans le problème physique.

Flux de masse

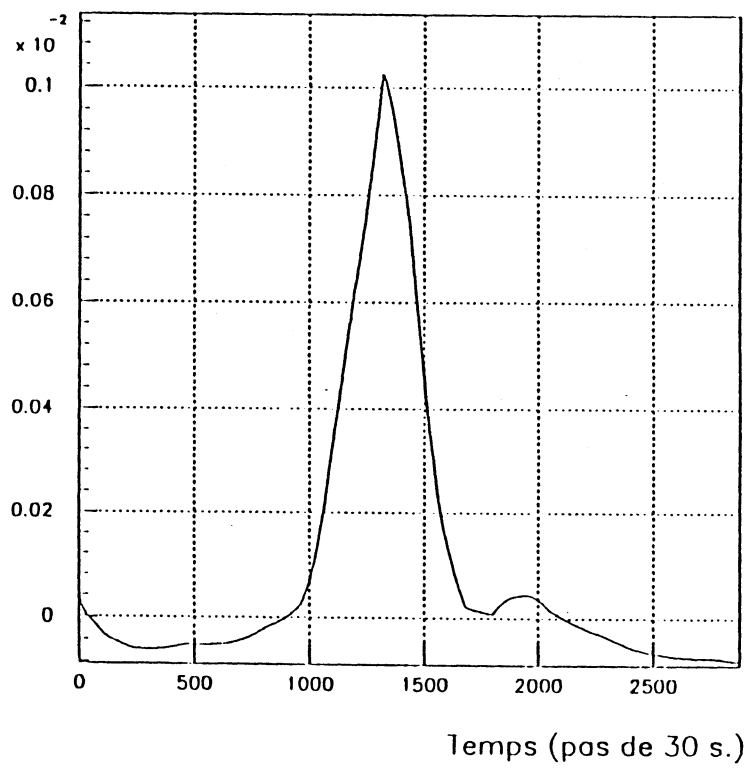


Figure D.12 : Evolution du flux de masse à la surface au cours d'une journée de simulation.

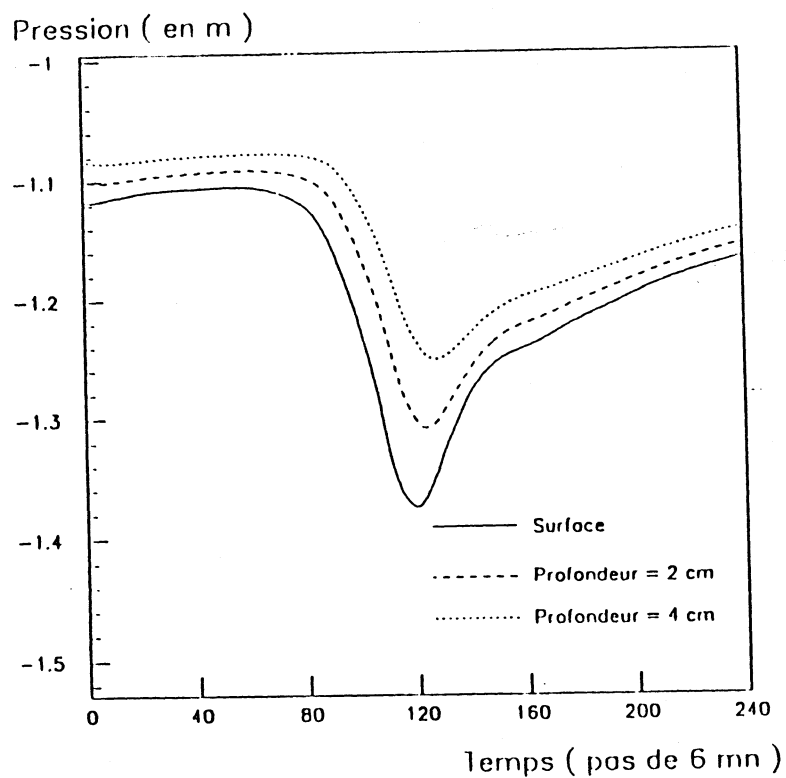


Figure D.13 : Evolution de la pression d'eau à la couche superficielle.

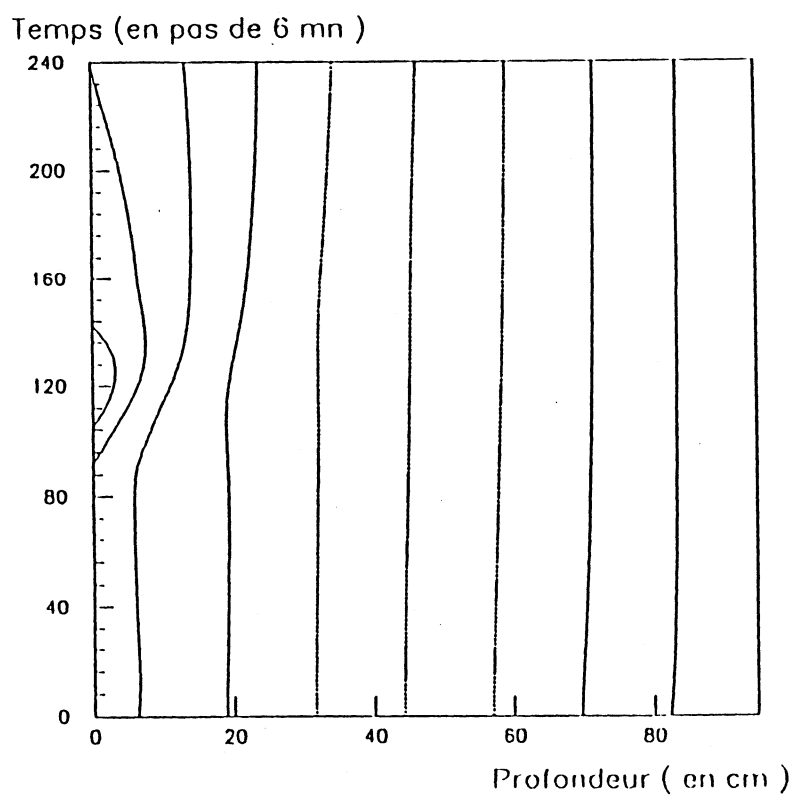


Figure D.14 : Courbes de niveau de pression d'eau dans le sol,
pendant une journée de simulation.

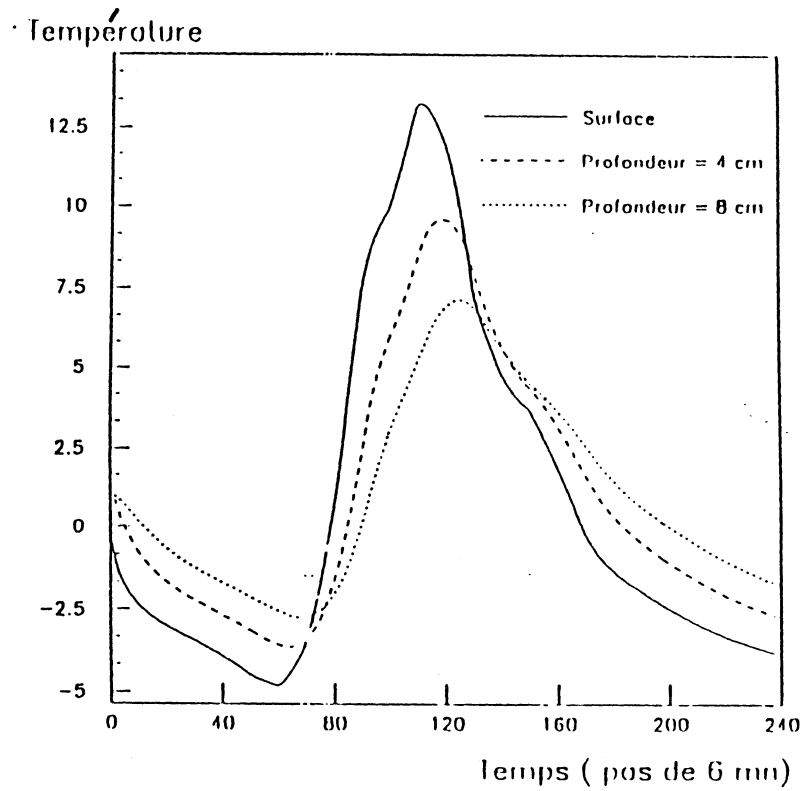


Figure D.15 : Evolution de la température des couches superficielles
au cours de 24 h de simulation.

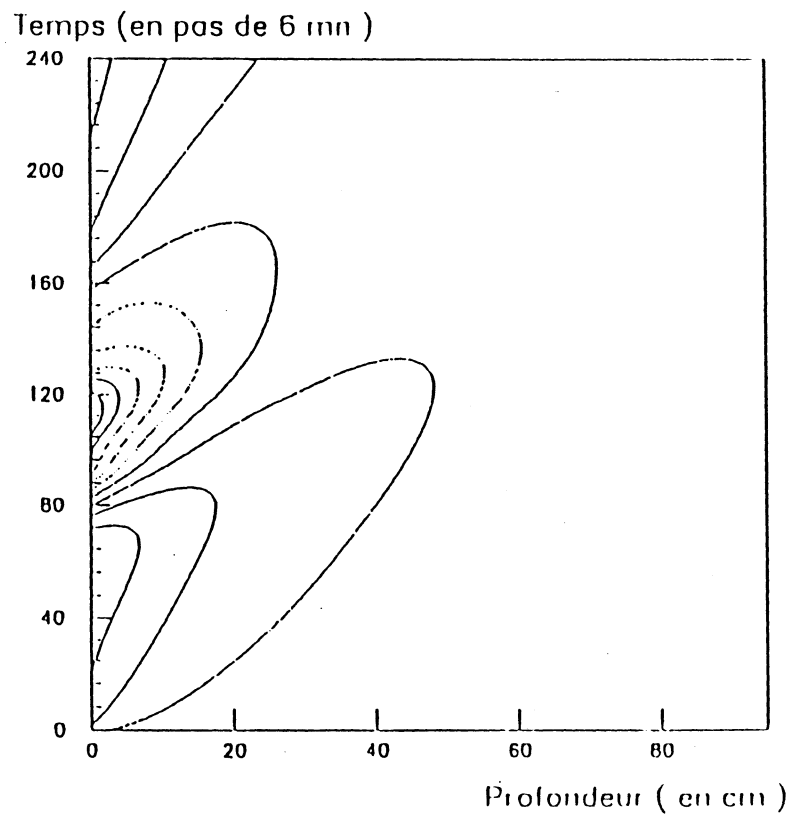


Figure D.16 : Courbes de niveau des températures dans le sol, au cours
de 24 h de simulation

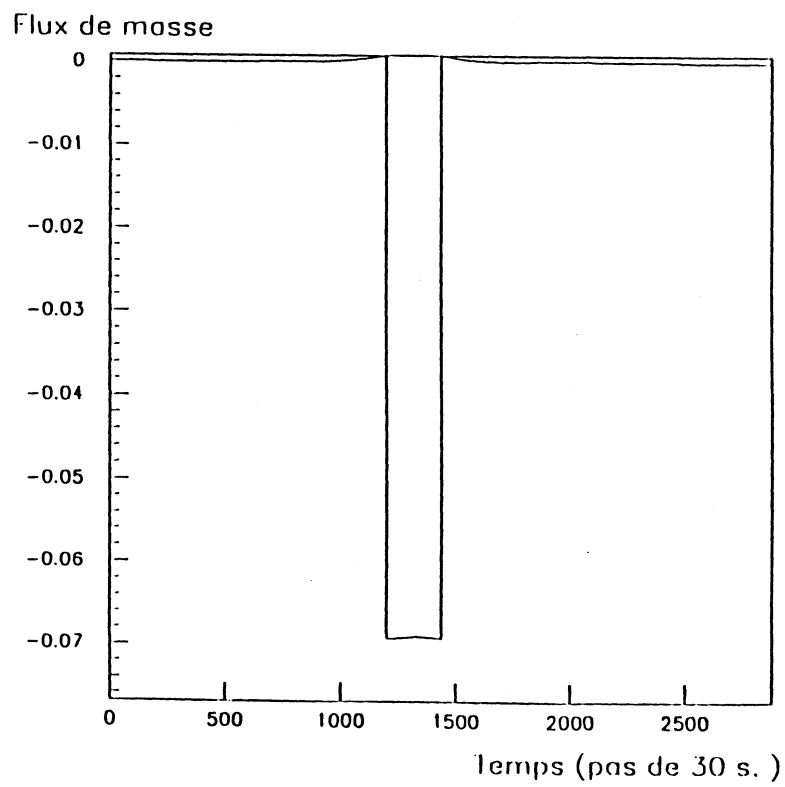


Figure D.17 : Flux de masse utilisé lors de la seconde simulation.

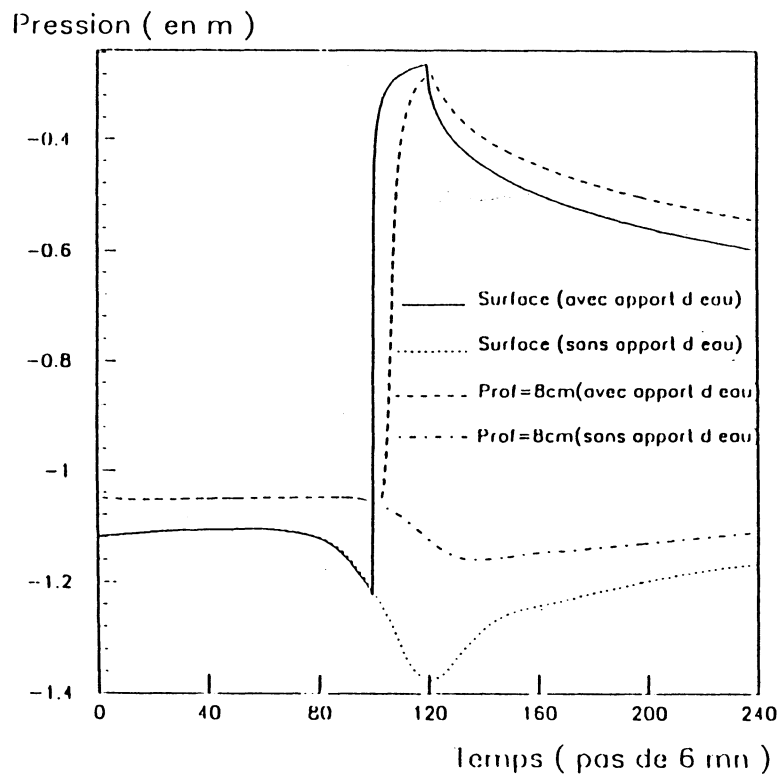


Figure D.18 : Evolution des pressions d'eau à la couche superficielle.

Comparaison entre les deux simulations.

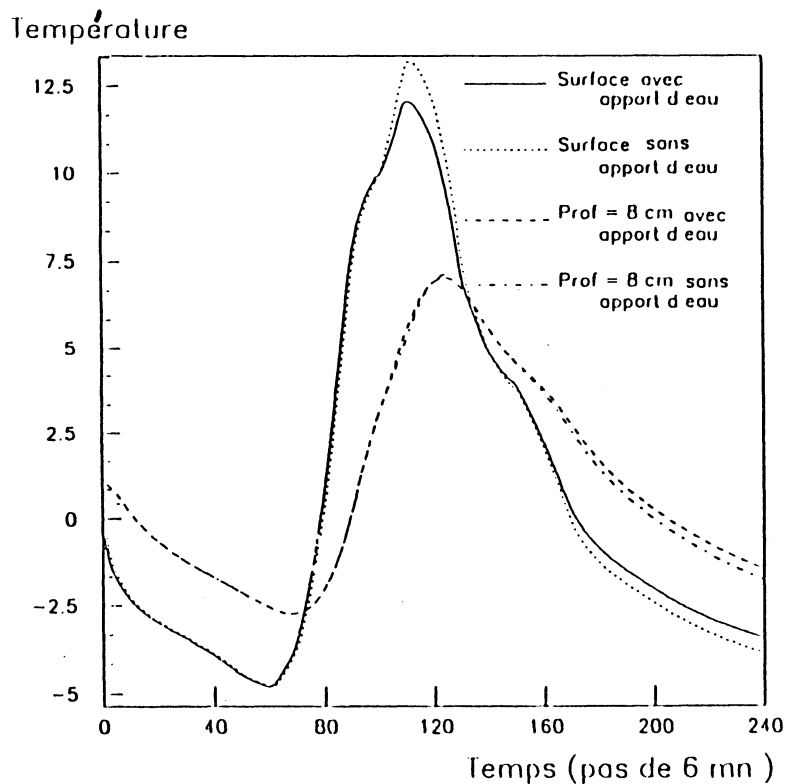


Figure D.19 : Evolution des températures à la couche superficielle.

Comparaison entre les deux simulations.

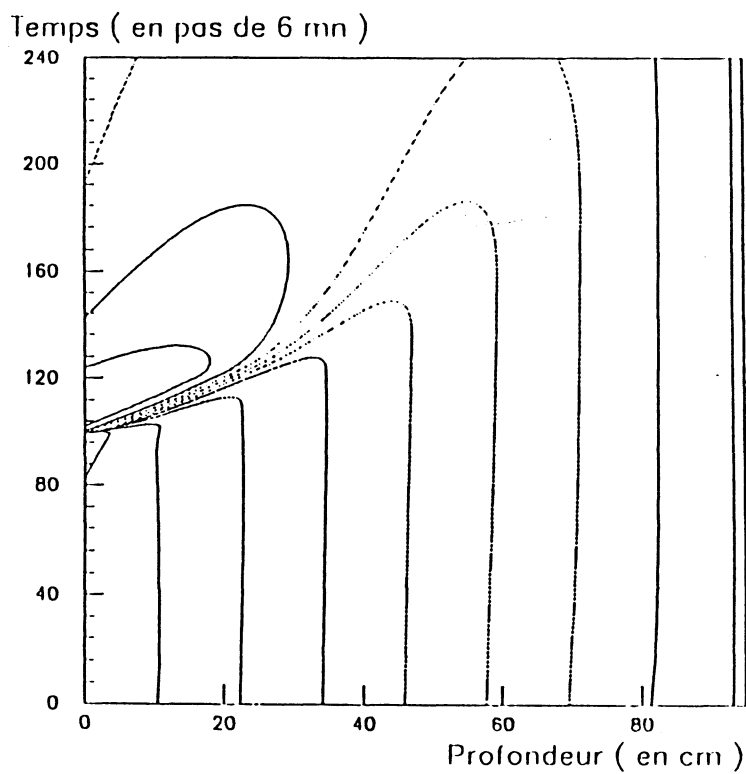


Figure D.20 : Courbes de niveau de pression d'eau dans le sol,
pour la seconde de simulation.

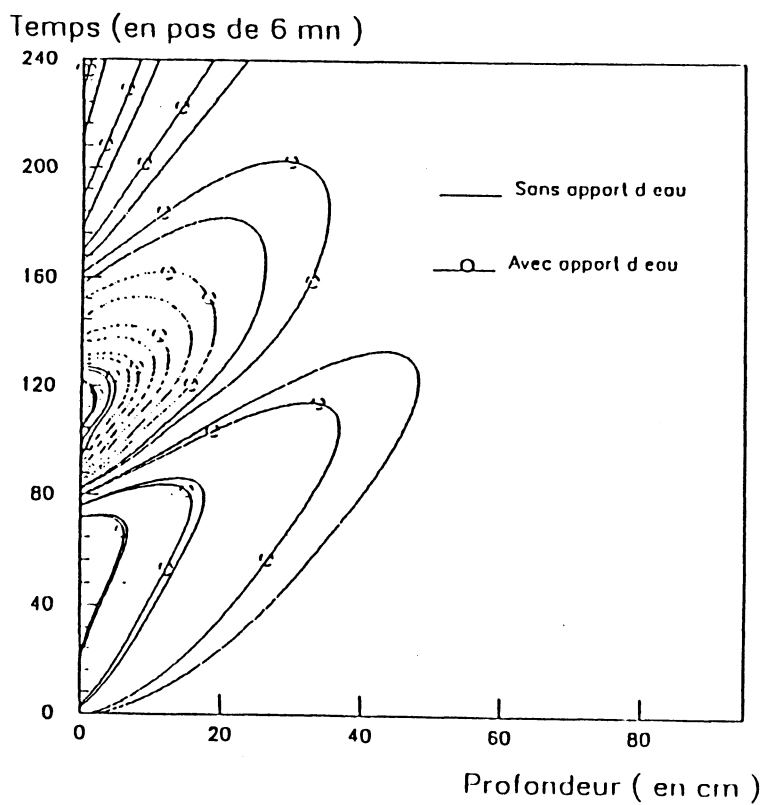


Figure D.21 : Comparaison entre les deux simulations des courbes
de niveau des températures.

CHAPITRE E

PROBLEMATIQUE DU RACCORDEMENT

E.I – INTRODUCTION

E.II – LE PROBLEME PHYSIQUE DE RACCORDEMENT

E.III – LE FORMALISME D'EVOLUTION PAR TRANSFERT

E.IV – FORMALISME DU RACCORDEMENT

E.IV.1 – Forme générale des équations

E.IV.2 – Forme discrète du problème

E.IV.3 – Les étapes de la résolution

E.V – APPLICATION AU PROBLEME DE TRANSFERT DE MASSE DANS LE SOL

E.VI – CONCLUSION

E.I – INTRODUCTION

La méthode numérique mise en œuvre sera orientée par un a priori d'analyse physique que nous allons exposer et qui conduit à l'émergence d'une problématique dite de "raccordement".

Le formalisme général répondant à cette perspective sera brièvement exposé et servira de cadre pour étendre la résolution de notre problème.

Ainsi la résolution du système d'équations modélisant les transferts de chaleur et de masse dans le sol aura un double intérêt :

- fournir des méthodes numériques robustes permettant d'enrichir une bibliothèque de thermique de bâtiment ;
- servir de test au cadre général d'analyse physique souhaité par les acteurs du projet ALMETH.

E.II – LE PROBLEME PHYSIQUE DE RACCORDEMENT

Le développement d'outils logiciels de modélisation thermique du système bâtiment en interaction avec son environnement met en évidence de nombreuses difficultés liées à son hétérogénéité.

A l'échelle macroscopique de nombreux phénomènes de natures physiques diverses sont présents : échanges radiatifs, convection, diffusion, transferts couplés de chaleur et de masse. Les matériaux qui en sont le siège sont de natures et de géométries très diverses.

Il n'existe pas, à l'heure actuelle, de méthode numérique homogène permettant de traiter pratiquement l'ensemble des lois physiques impliquées. Cette analyse a conduit les concepteurs de logiciels à utiliser systématiquement le concept de modularité. L'idée est de fournir un ensemble de paquets logiciels adaptés chacun à un type de phénomène bien particulier. La modélisation concrète d'un projet consiste alors à instancier ces paquetages avec les paramètres physiques et géométriques du projet, soit par programmation directe, soit par l'utilisation d'interfaces plus ou moins évoluées (DOE.2, TRNSYS, BLAST, TAS) .

Le procédé permet à des thermiciens d'éviter l'apprentissage approfondi des nombreuses méthodes numériques souvent complexes à mettre en œuvre. Pour citer l'un des meilleurs exemples, [MODULEF], développé à l'INRIA, utilise cette modularité systématiquement alors même que

l'homogénéité numérique est assurée par l'utilisation des éléments finis.

Cependant, la mise en œuvre de cette technique de modularité conduit à des difficultés liées en particulier aux systèmes hétérogènes fortement couplés, ceux où la dynamique du comportement global dépend autant du couplage entre les éléments et les phénomènes que de l'évolution propre de chacun d'eux. Il est alors nécessaire de faire apparaître clairement la dynamique des équations de couplage en plus des modèles phénoménologiques classiques.

Ainsi, pour ces systèmes, la notion de modularité conduit à un problème d'interface et à des lois de couplages aux interfaces.

E.III – LE FORMALISME D'EVOLUTION PAR TRANSFERT

L'analyse précédente a conduit le GER ALMETH à choisir un formalisme fondé sur l'analyse des couplages permettant de raccorder les modèles élémentaires qui constituent un système global. Ce formalisme permet en plus de spécifier les inter-influences des modèles élémentaires.

Il est basé sur une expression canonique de modèles d'évolution – dits équations de cellules – et de modèles spécifiques de couplages – dits équations de transferts.

L'expression physique est fortement orientée par la thermodynamique des processus irréversibles.

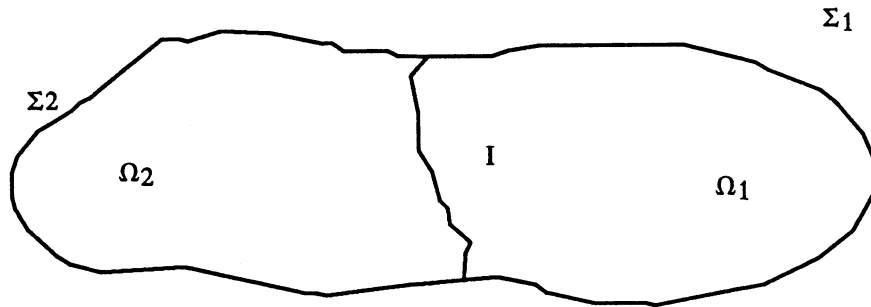
Les processeurs de cellules sont des modèles d'état linéarisés sur chaque intervalle de temps. Leur expression découplée – c'est-à-dire à conditions aux limites constantes – correspond à des problèmes aux limites classiques. Le raccordement est effectué par l'adjonction des variables physiques d'interface contraintes par l'équation des transferts, et modifiant les processeurs de cellules pour assurer le couplage dynamique.

Dans le paragraphe suivant, nous donnerons brièvement le schéma général conduisant aux équations canoniques ainsi que leur résolution implicite. Nous en donnons plus loin l'application aux problèmes traités dans cette thèse .

E.IV – FORMALISME DU RACCORDEMENT [GRA-89]

1. Forme générale des équations

On considère le problème de deux cellules Ω_1 et Ω_2 ayant une interface I et des conditions aux limites indépendantes Σ_1 et Σ_2 .



L'équation d'évolution découplée de chaque cellule $i = 1,2$ est supposée de la forme :

$$K_i \frac{\partial \eta_i}{\partial t} = G_i (\eta_i (t) , \bar{\Sigma}_i (t) , t) \quad (\text{E.IV.1})$$

où η_i représente l'état du domaine Ω_i ; $\bar{\Sigma}_i$ représente les conditions aux limites sur $\partial\Omega_i$

Le raccordement s'effectue en faisant dépendre les conditions aux limites de l'interface des états des cellules connectées : soit Φ_I une fonction d'état de l'interface I ; elle sera contrainte par les lois physiques aux cellules Ω_1 et Ω_2 via une équation que l'on supposera de la forme :

$$C_I \frac{\partial \Phi_I}{\partial t} = F_I (\eta_1 , \eta_2 , \Phi_I , \Sigma_1 , \Sigma_2 , t) \quad (\text{E.IV.2})$$

L'évolution des états des cellules sera régie par des équations de la forme :

$$C_i \frac{\partial \eta_i}{\partial t} = T_i (\eta_i , \Sigma_i , \Phi_I , t) \quad (\text{E.IV.1})$$

où la variable dépendante Φ_I apparaît en plus des conditions aux limites indépendantes Σ_i . Cette forme de raccordement assure bien la modularité ; chaque cellule ne "voit" que des conditions aux limites ou des variables d'interface.

Le couplage dynamique est assuré puisque, à chaque instant, Φ_I évolue en fonction de l'évolution des états η_i qui sont eux-mêmes dépendants de Φ_I . On aboutit à une formulation implicite du système. On étend sans difficulté cette formulation à un système de n cellules raccordées par des variables d'interface. On peut aussi définir des interfaces couplant un nombre quelconque de cellu-

les.

2. Forme discrète du problème

Dans le cas où les équations ont été discrétisées, les vecteurs des équations (E.IV.1), (E.IV.2) et (E.IV.3) sont de dimensions finies et les opérateurs sont représentés par des matrices. La forme canonique des équations est alors, pour une cellule i :

$$A_i \delta\eta_i + B_i \delta\Phi = \Gamma_i \quad (\text{E.IV.4})$$

et pour les transferts

$$\sum_i C_i \delta\eta_i + D \delta\Phi = \Omega \quad (\text{E.IV.5})$$

3. Les étapes de la résolution

La résolution est conduite, par élimination des variables d'état des cellules $\delta\eta_i$, ce qui donne :

$$[D - \sum_i C_i A_i^{-1} B_i] \delta\Phi = \Omega - \sum_i C_i A_i^{-1} \Gamma_i \quad (\text{E.IV.6})$$

ce qui permet de déterminer $\delta\Phi$, d'où l'on tire pour une cellule i :

$$\delta\eta_i = A_i^{-1} \Gamma_i - A_i^{-1} B_i \delta\Phi \quad (\text{E.IV.7})$$

La spécificité du raccordement apparaît ainsi dans le calcul des matrices C_i et $A_i^{-1} B_i$.

L'évolution découplée de la cellule i : $\delta\eta_{i,dec}$ correspond à $\delta\Phi = 0$.

La matrice $A_i^{-1} B_i = \frac{\partial\eta}{\partial\Phi}$ donne l'influence de $\delta\Phi$ sur $\delta\eta_i$. On lui a donné le nom de matrice d'influence des variations des grandeurs d'interface – c'est-à-dire le reste du système – sur la cellule i . Pour chaque cellule i du système, la matrice $C_i A_i^{-1} B_i$ de (E.IV.6) permet d'évaluer le rôle de i pour coupler des composantes du vecteur d'interfaces. Ainsi la mise en œuvre du raccordement par le FET exige des opérations souvent coûteuses et difficiles, à savoir le calcul de $A_i^{-1} B_i$ et C_i mais en retour la structure et les trajectoires de ces matrices recèlent une information déterminante pour l'analyse des couplages.

E.V – APPLICATION AU PROBLEME DE TRANSFERT DE MASSE DANS LE SOL

Nous reprenons dans ce paragraphe l'équation d'infiltration. Le but n'étant pas de la résoudre, tâche déjà accomplie au Chapitre D – mais de servir de test pour le formalisme d'analyse de coupla-

ge présenté ci-dessus. Pour cela nous divisons le domaine en plusieurs zones et nous étudions les transferts entre elles.

Nous reprenons le problème du paragraphe (D.I) et nous découpons $]0, L[$ en I sous-domaines qui seront couplés par l'intermédiaire du choix d'une grandeur physique de couplage.

Un choix physique naturel nous conduirait à utiliser le flux d'humidité à chaque interface raccordé aux états des nœuds voisins par $\Phi_{i+1/2} = K_{i+1/2} \frac{h_{i+1} - h_i}{\Delta x}$ (ce qui correspond à l'équation E.IV.2 dans laquelle $c_i = 0$) et à écrire l'équation d'une cellule comme (E.IV.3).

Cependant, pour rester numériquement homogène à la résolution directe, nous avons préféré définir pour chaque interface un nœud du domaine.

Pour décomposer $]0, L[$ nous provoquons $I - 1$ coupures correspondantes aux nœuds k^j , $j = 1, \dots, I-1$. Le système (D.I.8) se décompose alors en I sous-systèmes linéaires. Le sous-système correspondant au sous-domaine situé entre les nœuds k^{j-1} et k^j sera alors de la forme :

$$A_j X_j + \begin{bmatrix} a_{k^{j-1}+1} x_{k^{j-1}} \\ \vdots \\ c_{k^j-1} x_{k^j} \end{bmatrix} = Y_j \quad (\text{E.V.1})$$

où X_j et Y_j sont les sous-vecteurs correspondant aux nœuds $k^{j-1} + 1, \dots, k^j - 1$

Le système (E.V.1) peut aussi s'écrire de la manière suivante :

$$A_j X_j = \tilde{Y}_j \quad (\text{E.V.2})$$

avec

$$\tilde{Y}_j = Y_j - a_{k^{j-1}+1} x_{k^{j-1}} e_1 - c_{k^j-1} x_{k^j} e_{n_j} \quad (\text{E.V.3})$$

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0) \quad \text{et} \quad e_{n_j} = (0, 0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0)$$

$n_j = k^j - k^{j-1} - 1$ est la longueur du système (E.V.1)

Le sous-système (E.V.2) est couplé aux sous-systèmes correspondant aux sous-domaines $(j - 1)$ et $(j + 1)$ par les équations

$$a_l x_{l-1} + b_l x_l + c_l x_{l+1} = y_l \quad (\text{E.V.4})$$

respectivement pour $l = k^{i-1}$ et $l = k^j$

Cette formulation correspond bien aux équations canoniques du FET (E.V.1) en tant qu'équations des I cellules, (E.V.3) en tant que I - 1 équations de transfert. La résolution des systèmes (E.V.2) ne peut pas être directe puisque $\tilde{Y}_j$ dépend explicitement de $x_{k^{i-1}}$ et x_{k^j} qui ne sont pas encore déterminées ; pour cela la résolution passe par les étapes suivantes :

i) pour chaque système j nous résolvons les trois systèmes linéaires suivants :

$$A_j X_j^1 = Y_j \quad (E.V.5)$$

$$A_j X_j^2 = e_1 \quad (E.V.6)$$

$$A_j X_j^3 = e_{n_j} \quad (E.V.7)$$

des équations (E.V.1) et (E.V.2) nous déduisons

$$X_j = X_j^1 - a_{k^{i-1}+1} x_{k^{i-1}} X_j^2 - c_{k-1} x_{k^j} X_j^3 \quad (E.V.8)$$

ii) Nous avons alors en particulier :

$$x_{k^{i-1}} = (X_j^1)_{n_j} - a_{k^{i-1}+1} x_{k^{i-1}} (X_j^2)_{n_j} - c_{k-1} x_{k^j} (X_j^3)_{n_j} \quad (E.V.9)$$

$$x_{k^{j+1}} = (X_{j+1}^1)_1 - a_{k^{j+1}} x_{k^j} (X_{j+1}^2)_1 - c_{k^{j+1}-1} x_{k^{j+1}} (X_{j+1}^3)_1 \quad (E.V.10)$$

iii) Nous substituons $x_{k^{i-1}}$ et $x_{k^{j+1}}$ dans (E.V.4), ce qui donne :

$$\begin{aligned} a_{k^j} a_{k^{i-1}+1} (X_j^2)_{n_j} x_{k^{i-1}} - [b_{k^j} - a_{k^j} c_{k-1} (X_j^3)_{n_j} - c_{k^j} a_{k^{j+1}} (X_{j+1}^2)_1] x_{k^j} + \\ + c_{k^j} c_{k^{j+1}-1} (X_{j+1}^3)_1 x_{k^{j+1}} = -y_{k^j} + a_{k^j} (X_j^1)_{n_j} + c_{k^j} (X_{j+1}^1)_1 \end{aligned} \quad (E.V.11)$$

Nous avons ainsi un système tridiagonal ne reliant que les x_{k^j} , qui correspond au système E.IV.6.

La résolution de ce système (système des couplages) permet d'explicitier les $\tilde{Y}_j$ et les X_j

E.VI – CONCLUSION

Traitement du système de transferts couplés

La décomposition du système (D.II.9) en sous-systèmes et leur raccordement par des variables de transfert (FET) ne peuvent pas être directs comme c'est le cas pour le système (D.I.8). En effet la résolution par relaxation du système (D.II.9) fait que le couplage entre sous-systèmes n'est plus explicite. Pour avoir accès à la matrice des couplages entre sous-domaines, nous sommes contraints d'utiliser une méthode directe pour la résolution des systèmes linéaires. Cela nous amène, dans notre cas, à une renumérotation des nœuds en fonction des positions des coupures. Néanmoins, et tout en résolvant par relaxation le système (D.II.9), nous avons utilisé la décomposition décrite dans IV par la résolution de chacun des deux systèmes tridiagonaux (D.II.10) et (D.II.11). Cela permet à l'algorithme d'être facilement parallélisable.

Nous reprenons la seconde simulation de D.II et nous comparons les résultats du Chapitre D.II (relatifs au système) à ceux obtenus par la méthode de décomposition. La différence entre les deux résultats inclut les erreurs d'arrondis sur tout le calcul, et reste au même ordre de grandeur, la différence ne dépassant pas $1.4 \cdot 10^{-6}$ comme le montrent les Figures E.1 et E.2. Ces dernières donnent respectivement le maximum, sur toutes les itérations et en tout point du maillage, de la différence entre les deux résultats pour la température et pour la pression.

Nombre d'opérations et temps de calcul.

Une résolution par notre méthode comprend :

- la résolution directe de 3 systèmes linéaires correspondant à la même matrice tridiagonale, donc en effectuant une seule fois la factorisation, et cela pour chaque sous-domaine ;
- la résolution du système de couplage reliant les variables d'interface : dans notre cas, il est très petit (3×3) ;
- une combinaison de trois vecteurs pour chaque sous-domaine.

Si N est la dimension du système global, nous avons un nombre total d'opérations de l'ordre de $21 N$ alors que la résolution globale est de $8 N$.

En pratique, pour 1.000 itérations correspondant à la simulation n° 1 du Chapitre D, le programme met 880 s C.P.U. pour une résolution sans décomposition en sous-domaines ; il met 903 s C.P.U. pour le même nombre d'itérations avec la méthode que nous venons de présenter ; si aucune résolution n'est effectuée, le programme met 866 s C.P.U.

La résolution avec la méthode de décomposition met donc 37 s quand la résolution globale ne met que 14 s : ce rapport (37/14) est bien en concordance avec les rapports des nombres d'opérations (21/8).

Lien avec les méthodes de sous-domaines

L'algorithme que nous avons présenté peut être classé parmi les méthodes de sous-domaines sans recouvrement. Ces méthodes sont largement utilisées pour le calcul de sous-structures [PET-86] et pour les problèmes de mécanique de fluide [DIH-84] ; [DIN-88]. La résolution est généralement effectuée par une méthode de gradient conjugué préconditionné [GOL-76] ; [GLO-88]. Nous trouvons dans [PET-86] et [DIN-88] plusieurs choix de préconditionnement de la matrice de cet algorithme, appelée matrice de complément de Schur [COT-74].

Dans notre cas, c'est la matrice du couplage qui correspond au complément de Schur. Nous avons utilisé une méthode directe pour la résolution du système de couplage, non seulement parce qu'il est de petite taille (problème monodimensionnel), mais aussi parce que nous voulons accéder à la variation directe des variables internes en fonction des variables d'interface et, inversement, la variation des variables d'interface en fonction des variables internes.

Ces informations sur le couplage global entre sous-domaines prennent une signification différente suivant la nature des variables d'interface choisies (flux ou température).

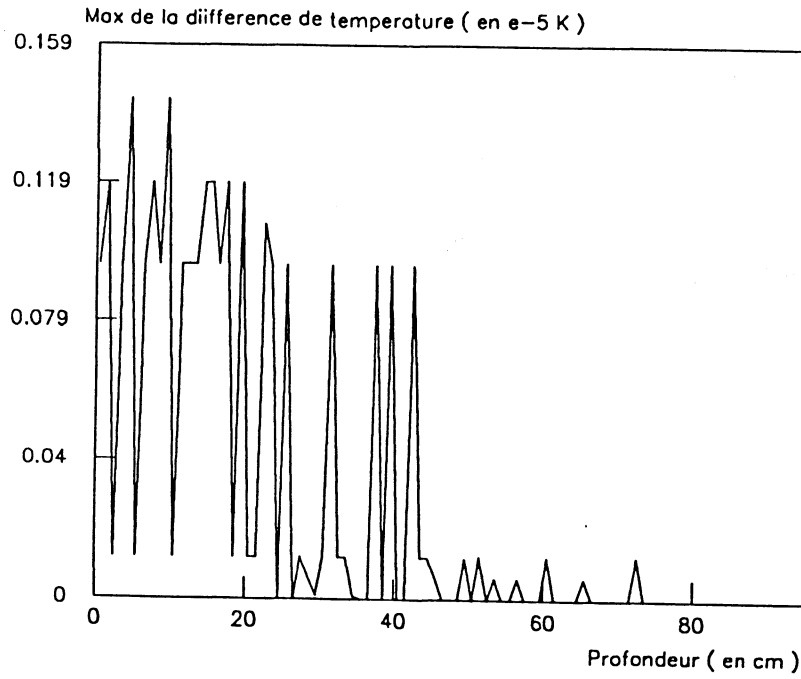


Figure E.1 : La variation de $\| T_d(x, \cdot) - T_g(x, \cdot) \|_{L^\infty(0, \tau)}$
 en fonction de la profondeur. T_d et T_g sont respectivement les résultats des
 méthodes avec et sans division du domaine.

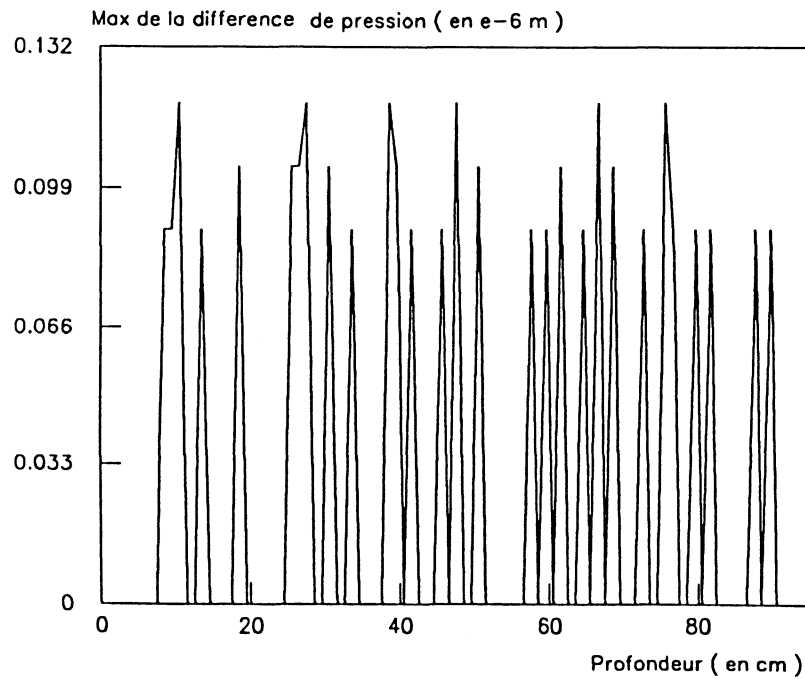


Figure E.2 : La variation de $\| h_d(x, \cdot) - h_g(x, \cdot) \|_{L^\infty(0, \tau)}$
 en fonction de la profondeur. h_d et h_g sont respectivement les résultats
 des méthodes avec et sans division du domaine.

CHAPITRE F**SOUS-DOMAINES A PAS DE TEMPS DIFFERENTS :
EMBOÎTEMENT TEMPOREL****F.I – INTRODUCTION****F.II – APERÇU BIBLIOGRAPHIQUE**

F.II.1 – Un modèle à deux dynamiques

F.II.2 – Une méthode mixte pour l'intégration en temps

F.II.3 – Un solveur explicite

F.III – LA METHODE UTILISEE

F.III.1 – Approximation des y_k

F.III.2 – Approximation des β_j

F.IV – RESULTATS NUMERIQUES

E.I – INTRODUCTION

Comme cela a été précisé au chapitre précédent, le système thermique du bâtiment en interaction avec son environnement, est décomposé en zones. Les géométries de ces zones et les caractéristiques thermophysiques de leurs constituants sont généralement différentes. Les transferts thermiques en leur sein sont de natures physiques diverses : diffusion, convection, rayonnement, transferts couplés de chaleur et de masse.

Il est donc fréquent de trouver des zones à inerties très différentes. Les temps caractéristiques de certaines zones ne sont pas dans les mêmes ordres de grandeur. En prenant l'exemple du sol au voisinage du bâtiment, une analyse spectrale faite au Centre Thermique de l'INSA de Lyon [MOK-88] a montré que les constantes de temps de certaines zones (couches superficielles du plancher) sont de l'ordre de 40 s alors que pour d'autres (plancher bas et sol immédiatement voisin), elles sont de l'ordre de 30 mn. Nous trouvons même de 130 heures à 7 ans pour les zones plus profondes.

Du fait que les données de l'ensoleillement sont déterminées à des pas de temps de l'ordre de la minute [DUF-87], les variations des températures dans les zones exposées au flux solaire sont beaucoup plus rapides que celles observées dans les autres zones. Nous retrouvons l'exemple des couches de surface du sol par rapport aux couches profondes [MOK-88] et l'exemple de la paroi extérieure d'un mur par rapport à son cœur [ESC-89] où les hautes fréquences des excitations sont complètement amorties en aval des zones soumises à la dynamique rapide des excitations.

E.II – APERCU BIBLIOGRAPHIQUE

L'idée qui vient est d'utiliser un pas de temps de discrétisation adapté à la physique de chaque zone. Nous présentons un aperçu rapide de l'utilisation de cette idée.

II.1 – Un modèle à deux dynamiques

Après une étude des variations temporelles des excitations thermiques, et une étude basée sur l'analyse nodale de la réponse du bâtiment, ESCUDERO [ESC-89] propose un découpage du sys-

tème bâtiment en deux sous-structures, correspondant à deux dynamiques, rapide et lente. Il définit un modèle correspondant aux zones à dynamique lente et un autre pour les zones à dynamique rapide. Le premier sert à bien évaluer la température d'interface entre les deux zones qui constitue la condition aux limites pour le modèle à dynamique rapide. La température d'interface, ou température de couplage, est maintenue constante au cours du grand pas de temps : pas de discrétisation des zones à dynamique lente.

II.2 – Une méthode mixte pour l'intégration en temps

T. BELYTSCHKO et al. [BEL-79] ont développé une méthode de décomposition en sous-domaines où l'intégration en temps se fait avec des pas différents suivant les régions. La résolution est explicite dans tous les sous-domaines. Pour les petits pas de temps, les valeurs aux interfaces sont obtenues par interpolation. Ces auteurs ont montré que cette méthode est stable. Ils l'ont utilisé pour des problèmes de propagation d'ondes et ont montré que les résultats sont en accord avec une solution analytique.

II.3 – Un solveur explicite

LÖHNER, MORGAN et ZIENKOWICH [LOH-84] ont développé un solveur explicite, pour des écoulements compressibles, basé sur la décomposition en sous-domaines à pas de temps adaptés. Ils estiment le pas de temps admissible pour chaque élément et mettent en place une stratégie qui permet d'affecter un sous-domaine à chaque pas de temps $\Delta t = \Delta t_{\min}, 2 \Delta t_{\min}, 4 \Delta t_{\min} \dots$ où $\Delta t_{\min}$ est le minimum des pas admissibles sur tous les éléments. Le raccordement entre régions est fait par recouvrement sur les deux éléments voisins de l'interface entre régions. Cette méthode leur a permis de diminuer le temps calcul d'un facteur plus grand que deux.

F.III – LA METHODE UTILISEE

Nous prenons l'équation de la chaleur comme problème modèle pour cette présentation. Nous considérons le problème suivant :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} C_T \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad \text{pour } (x, t) \in]0, L[\times]0, T[\\ T(0, t) = T_s(t) \quad \text{pour } t > 0 \\ T(L, t) = T_1 \quad \text{pour } t > 0 \\ T(x, 0) = T_0(x) \quad \text{pour } x \in]0, L[\end{array} \right.$$

Nous discrétisons ce problème par la méthode aux différences finies centrées que nous avons utilisée au chapitre D et nous utilisons la méthode de décomposition présentée au chapitre E. Nous nous reportons à l'étape iii) de (E.V) ; nous avons alors un système linéaire qui relie les variables d'interface et qui s'écrit :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{k^1}^{n+1} \\ T_{k^2}^{n+1} \\ T_{k^3}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1^n \\ \beta_2^n \\ \beta_3^n \end{bmatrix} \quad (\text{F.III.1})$$

où

$$\beta_j^n = -y_{kj}^n + a_{kj} (X_j^1)_{n_j}^n + c_{kj} (X_{j+1}^1)_{n_j}^n \quad (\text{F.III.2})$$

pour $j = 1, 2, 3$ et $T_{k^j}^{n+1}$ correspond aux états des interfaces k^j

L'idée est de pouvoir discrétiser le problème dans les zones (1) et (2) avec un pas de temps Δt_1 et dans les zones (3) et (4) avec un pas de temps Δt_2 où $\Delta t_2 = m\Delta t_1$. Vu l'équation (F.III.2), la détermination de β_2^n et β_3^n nécessite la détermination de $(X_3^1)_n^n$ et $(X_4^1)_n^n$ qui passe par une résolution des problèmes correspondant aux zones (3) et (4). C'est ce dernier calcul que nous voulons éviter pour les petits pas de temps. Nous approchons alors β_2^n et β_3^n pour les itérations correspondant aux petits pas de temps et nous les calculons complètement pour les grands pas de temps. le système (F.III.1) est donc résolu tous les petits pas de temps avec des valeurs approchées de β_2^n et β_3^n .

Les approximations se font en deux étapes : III.1 et III.2

III.1 – Approximation de y_i^n

Les choix de discrétisation nous permettent d'écrire :

$$a_i T_{i-1}^{n+1} + b_i T_i^{n+1} + c_i T_{i+1}^{n+1} = y_i^n \quad (\text{F.III.3})$$

où

$$a_i = -\theta \frac{\Delta t_1}{\Delta x^2} \lambda_{i-1/2}^n$$

$$c_i = -\theta \frac{\Delta t_1}{\Delta x^2} \lambda_{i+1/2}^n$$

$$b_i = C_i^n - (a_i + c_i)$$

et

$$y_i^n = C_i^n T_i^n + (1-\theta) z_i^n \quad (\text{F.III.4})$$

avec

$$z_i^n = \frac{\Delta t_1}{\Delta x^2} \left(\lambda_{i-1/2}^n T_{i-1}^n - (\lambda_{i-1/2}^n + \lambda_{i+1/2}^n) T_i^n + \lambda_{i+1/2}^n T_{i+1}^n \right)$$

Nous posons $\delta T_i^n = T_i^{n+1} - T_i^n$ alors l'équation (F.III.3) s'écrit :

$$a_i \delta T_{i-1}^n + b_i \delta T_i^n + c_i \delta T_{i+1}^n = z_i^n$$

à partir de l'expression de z_i^n , et en supposant que les coefficients restent constants au cours de $m\Delta t_1$, nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} -\theta (z_i^{n+1} - z_i^n) &= a_i \delta T_{i-1}^n + (b_i - C_i^n) \delta T_i^n + c_i \delta T_{i+1}^n \\ &= z_i^n - C_i^n \delta T_i^n \end{aligned}$$

alors :

$$z_i^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) z_i^n + \frac{1}{\theta} C_i^n \delta T_i^n \quad (\text{F.III.5})$$

Or (F.III.4) s'écrit aussi

$$y_i^{n+1} = C_i^{n+1} T_i^{n+1} + (1-\theta) z_i^{n+1} \quad (\text{F.III.6})$$

Du fait de l'hypothèse que $C_i^{n+1} = C_i^n$ en substituant (F.III.5) dans (F.III.6) nous obtenons

$$y_i^{n+1} = \frac{C_i^n}{\theta} (T_i^{n+1} + (\theta-1) T_i^n) - \frac{(1-\theta)^2}{\theta} z_i^n \quad (\text{F.III.7})$$

Cela permet donc de calculer y_i^{n+1} avec la seule connaissance de T_i^{n+1} et de z_i^n qui ne dépend que des T_{i-1}^n , T_i^n et T_{i+1}^n .

III.2 – Approximation des β_j

Les X_j^1 sont définis par l'équation (E.V.5) qui s'écrit $A_j (X_j^1)^n = Y_j^n$

Nous utilisons l'indice J pour les vecteurs relatifs aux sous-domaines J . La matrice A_j est supposée constante pendant $m \Delta t_1 = \Delta t_2$ pour les zones $J = 3, 4$ supposées lentes. Moyennant les équations (F.III.4) et (F.III.6) nous pouvons écrire :

$$Y_j^{n+1} - Y_j^n = C_j^{n+1} T_j^{n+1} - C_j^n T_j^n + (1 - \theta) (Z_j^{n+1} - Z_j^n)$$

alors vu (F.III.5) et la définition de δT_j^n nous avons

$$Y_j^{n+1} - Y_j^n = \frac{1}{\theta} C_j^{n+1} T_j^{n+1} - \frac{1}{\theta} Y_j^n \quad (\text{F.III.8})$$

Nous avons d'autre part :

$$(X_j^1)^{n+1} - (X_j^1)^n = A_j^{-1} (Y_j^{n+1} - Y_j^n)$$

Par substitution de (F.III.8), il vient :

$$(X_j^1)^{n+1} - (X_j^1)^n = \frac{1}{\theta} A_j^{-1} C_j^{n+1} T_j^{n+1} - \frac{1}{\theta} A_j^{-1} Y_j^n$$

et donc :

$$(X_j^1)^{n+1} - (X_j^1)^n = \frac{1}{\theta} A_j^{-1} C_j^{n+1} T_j^{n+1} - \frac{1}{\theta} (X_j^1)^n \quad (\text{F.III.9})$$

Hypothèse de grande constante de temps :

Nous appelons " hypothèse de grande constante de temps " le fait d'être dans une situation qui permet de considérer que

$$C_j^{-1} A_j \approx I_j \quad (\text{F.III.10})$$

Dans ce cas par substitution de (F.III.10) dans (F.III.9), il vient :

$$(X_j^1)^{n+1} - (X_j^1)^n = \frac{1}{\theta} T_j^{n+1} - \frac{1}{\theta} (X_j^1)^n$$

et par suite :

$$(X_j^1)^{n+1} = \frac{1}{\theta} T_j^{n+1} + \frac{\theta-1}{\theta} (X_j^1)^n \quad (\text{F.III.11})$$

Nous reprenons l'équation (F.III.2) et nous utilisons les estimations précédentes pour calculer les β_j^{n+1} .

Si k est l'interface entre zone lente et zone rapide, alors $(X_j^1)^{n+1}$ est déjà connu puisqu'il est dans la zone à petit pas de temps Δt_1 . Nous pouvons alors écrire, moyennant (F.III.7) et (F.III.11) :

$$\begin{aligned} \beta_j^{n+1} &= a_k [(X_j^1)^{n+1}]_n - \frac{1}{\theta} C_k^n (T_k^{n+1} + (\theta-1) T_k^n) + \frac{(1-\theta)^2}{\theta} z_k^n + \\ &+ \frac{1}{\theta} c_k (T_{k+1}^{n+1} + (\theta-1) [(X_{j+1}^1)^n]_1) \end{aligned} \quad (\text{F.III.12})$$

L'équation (F.III.3) permet d'exprimer T_{k+1}^{n+1} en fonction de T_k^{n+1} et de T_{k-1}^{n+1} qui sont déjà calculés à l'itération précédente et β_j^{n+1} est donc complètement déterminé. Une fois β_j^{n+1} calculé, nous pouvons résoudre le système (F.II.1) et déterminer les T_k^{n+2} ce qui permet d'avancer la résolution d'un petit pas de temps Δt_1 dans les zones rapides et de calculer les β_j^{n+2} . Nous itérons ce processus $(m-1)$ fois, où $m = \Delta t_2 / \Delta t_1$ et à la $m^{\text{ième}}$ itération nous effectuons un calcul complet dans toutes les zones.

Si k est une interface entre deux zones lentes, alors $(X_j^1)^{n+1}$ n'est pas déterminé et nous utilisons (F.III.11) comme pour $(X_{j+1}^1)^{n+1}$; nous pouvons écrire alors :

$$\begin{aligned} \beta_j^{n+1} = & -\frac{1}{\theta} C_{\mu}^n (T_{\mu}^{n+1} + (\theta-1) T_{\mu}^n) + \frac{(1-\theta)^2}{\theta} z_{\mu}^n + \\ & + \frac{1}{\theta} c_{\mu} (T_{\mu+1}^{n+1} + (\theta-1) [(X_{j+1}^1)^n]_1) + \frac{1}{\theta} a_{\mu} (T_{\mu-1}^{n+1} + (\theta-1) [(X_j^1)^n]_{n_j}) \end{aligned} \quad (\text{F.III.12})$$

ce qui s'écrit, moyennant (F.III.2) et (F.III.3) :

$$\beta_j^{n+1} = \frac{1}{\theta} ((\theta-1) \beta_j^n + y_{\mu}^n - (b_{\mu} + C_{\mu}^n) T_{\mu}^{n+1}) \quad (\text{F.III.13})$$

ce qui permet de passer à l'itération suivante.

Les phénomènes amortis

Nous pouvons également appliquer la résolution à plusieurs pas de temps sans pour autant que l'hypothèse de grande constante de temps soit acceptable. Dans ces conditions, nous ne pouvons pas écrire que :

$$A_j^{-1} [C_j^{n+1} T_j^{n+1}] = T_j^{n+1}$$

Or nous avons besoin pour les zones lentes des quantités

$$[A_j^{-1} [C_j^{n+1} T_j^{n+1}]]_1 \quad \text{et} \quad [A_j^{-1} [C_j^{n+1} T_j^{n+1}]]_{n_j}$$

Le choix que nous avons adopté est de les calculer explicitement une fois et de les supposer constantes au cours des $(m-1)$ autres itérations.

F.IV – RESULTATS NUMERIQUES

Nous avons appliqué la méthode à notre problème de transfert de chaleur dans le sol. Nous supposons que l'état hydrique dans le sol est stationnaire.

La Figure F.1 représente la variation de la température à la surface et à d'autres profondeurs (25, 50 cm), en fonction du temps pour une durée de simulation d'une journée. Elle montre bien l'amortissement de la température du sol en fonction de la profondeur.

En une première simulation, nous utilisons un pas de temps constant dans les 4 sous-domaines, $\Delta t_1 = 30$ s. A la seconde simulation, nous utilisons un pas de temps $\Delta t_1 = 30$ s pour les deux sous-domaines supérieurs, et $\Delta t_2 = 5 \Delta t_1$ pour les deux autres sous-domaines. Nous représentons à la Figure F.2 l'évolution de la température de l'interface, entre zones à dynamique lente et zones à dynamique rapide, en fonction du temps.

Nous faisons la différence entre les résultats de la première et de la seconde simulation et nous représentons à la Figure F.3 cette différence au niveau de l'interface en fonction du temps.

Pour illustrer l'intérêt qu'apportent les approximations utilisées, nous effectuons une simulation dans les mêmes conditions que la précédente, et nous maintenons constantes les β_j au cours des grands pas de temps.

La Figure F.4 donne les différences entre les résultats de la première et la troisième simulations, à l'interface, en fonction du temps. La comparaison des Figures F.3 et F.4 montre l'apport de précision des approximations proposées. La méthode utilisée permet donc de préserver une bonne précision tout en permettant un gain considérable de temps de calcul. A titre d'exemple, la première simulation prend 1545 s du temps C.P.U. alors que la seconde ne met que 880 s. Ce gain devient plus important si nous utilisons un découpage emboîté et plusieurs multiples de pas de temps [LAH-89]

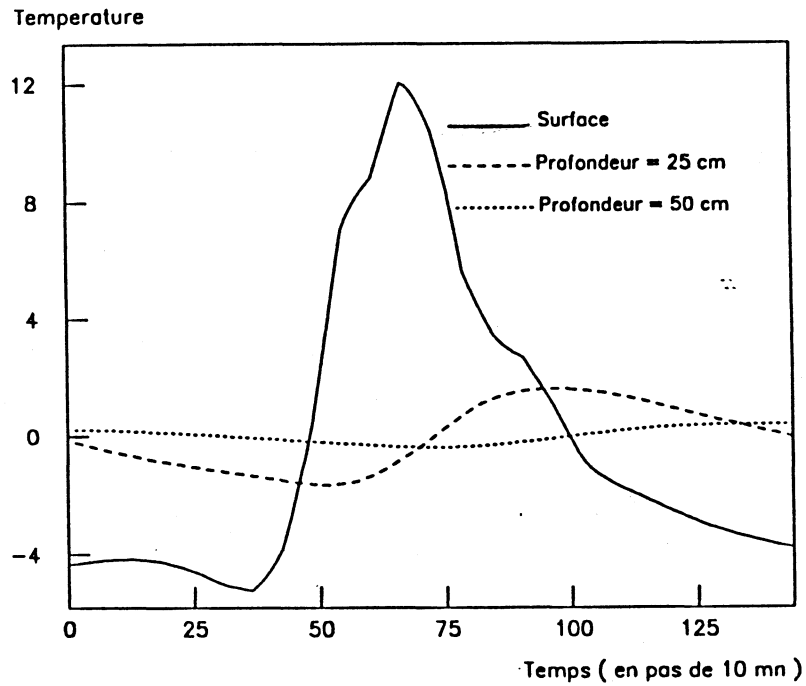


Figure F.1 : Evolution en fonction du temps de la température à différentes profondeurs.

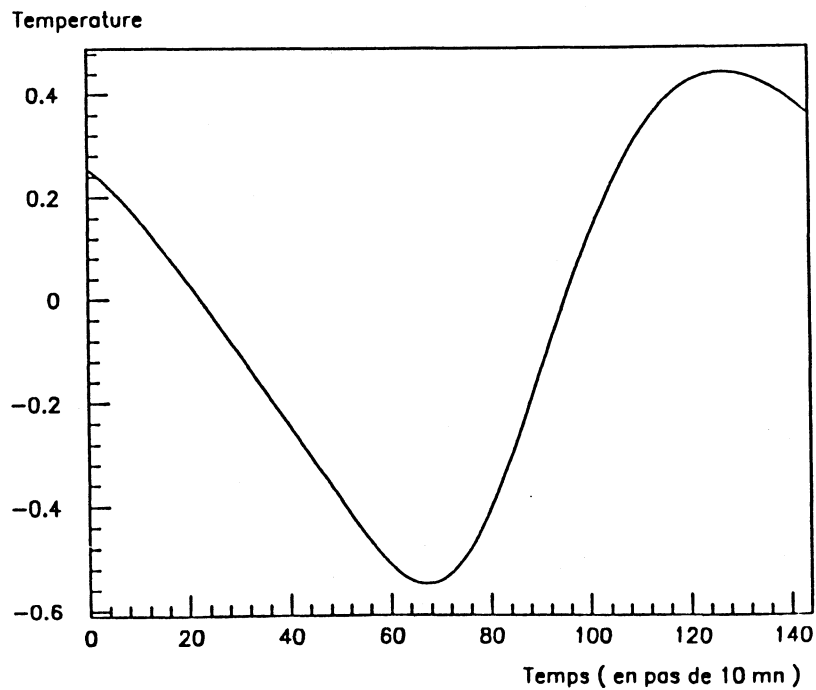


Figure F.2 : Evolution de la température à l'interface (profondeur = 0.45 m) en fonction du temps .

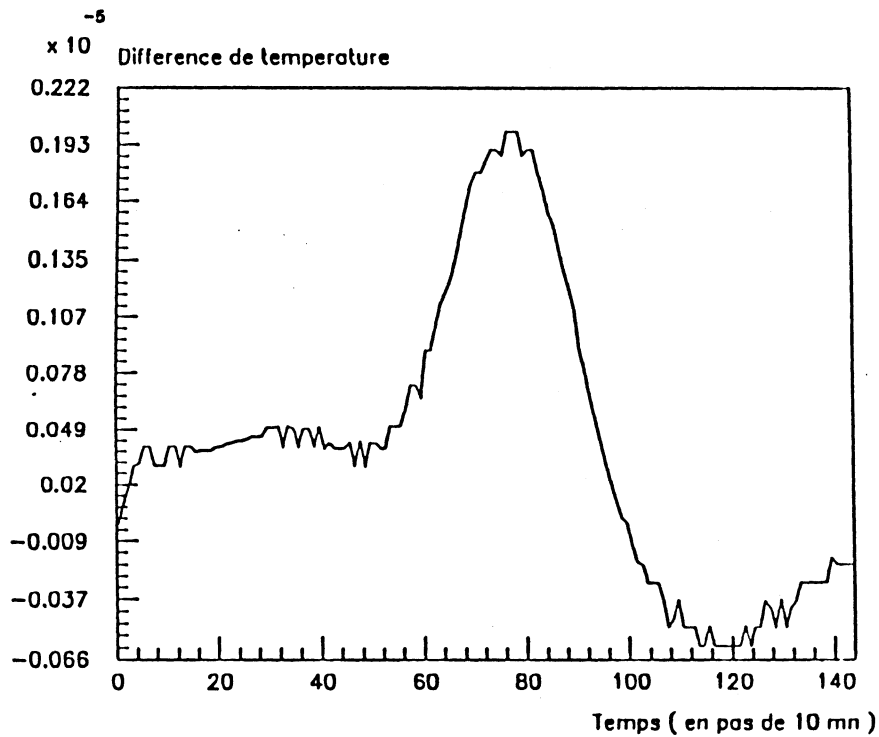


Figure F.3 : Différence des températures à l'interface (profondeur = 0.45 m) en fonction du temps .

Comparaison des résultats avec et sans emboîtement temporel

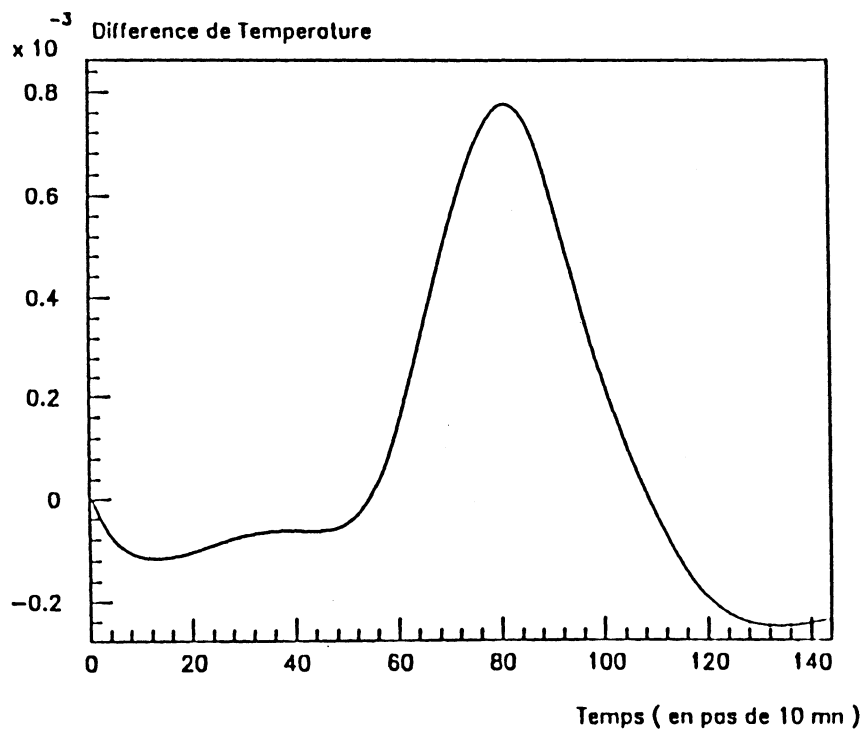


Figure F.4 : Différence des températures à l'interface (profondeur = 0.45 m) en fonction du temps .

Comparaison des résultats avec et sans emboîtement temporel à β_j constantes.

CONCLUSION

L'étude bibliographique que nous avons faite nous a conduit à mettre en évidence l'importance de la prise en compte de l'état hydrique du sol pour l'étude des transferts de chaleur entre le bâtiment et le sol avoisinant.

Nous avons donné les bases du modèle que nous avons utilisé en le situant par rapport à une large gamme de modèles existants. Une étude numérique du problème en dimension 1 d'espace nous a permis de conclure que ce modèle est un bon outil pour une étude fine de transfert énergétique entre un bâtiment et le sol.

Il permet aussi l'étude des cas pathologiques du bâtiment en relation avec les transferts de masse. Une étude analytique de l'équation de transfert de masse nous a permis de montrer que le problème est bien posé tout en mettant le point sur des cas de dégénérescence d'une part et sur certaines propriétés de la solution d'autre part.

Dans l'objectif de tester des méthodes plus générales sur ce problème-modèle, nous avons utilisé une méthode de décomposition de domaine basée sur le Formalisme d'Evolution par Transfert (F.E.T.).

Nous avons également mis au point une méthode à multi-pas de temps. La systématisation de cette méthode conjuguée avec la parallélisation massive offerte par le F.E.T. [MOR – 88] rend possible la résolution des grands systèmes thermiques qui demandaient auparavant des moyens de calcul prohibitifs.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [ADN-89] ADNOT, J., IRIS, P., DUBERNET, J.P., LECOMTE, P. et RIALHE, A. – *Méthodes globales de suivi de réseaux géothermiques*. AFME/ARMINES, n° 1.9, Avancement 87/88.
- [BEL-79] BELYTSCHKO, T., YEN, H.I. et MULLEN, R. – Mixed methods for time integration. *Comp. Meth. ; Appl. Mech.Eng.*, **17/18**, 259-275, 1979.
- [BEN-82] BENET, J.C. – Contribution à l'étude thermodynamique des milieux poreux non saturés avec changement de phase. *Thèse de Doctorat*, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, 1981.
- [BOU-89] BOUDEN, Ch. – Analyse du suivi thermique d'un pavillon solaire expérimental en région tunisoise. *Thèse de Doctorat*, Université Paris VII, 1989.
- [BRU-84] BRUNET, Y. – Modélisation des échanges sol nu-atmosphère. Essai de validation locale et influence de la variabilité spatiale du sol. *Thèse de Docteur Ingénieur*, I.N.P.G. de Grenoble, 1984.
- [BRU-75] BRUTSAERT, W. – On a derivable formula for long wave radiation from clear skies. *Water Res. Research*, **11**, 742-744, 1975.
- [CAL-79] CALLIAS, I. F. – Analyse des modèles de prévision de la conductivité hydraulique d'un sol non saturé. *Thèse de 3ème Cycle*, I.N.P. de Grenoble, 1979.
- [CAN-88] CANDAU, Y. – Thermique du bâtiment et systèmes linéaires : méthodes numériques et validations expérimentales. *Thèse de Doctorat*, Université Paris XII, 1988.
- [COT-76] COTTLE, R. – Manifestations of the Schur complement. *Linear Algebra Appl.*, **8**, 189-211, 1974.
- [CUM-81] CUMALI, Z., PAUL, D., BULL, J., MEIXEL, D. et LESTER SHEN, Jr. – Earth contact subroutine development. *Earth Contact Systems Contract*, DE – ACO3 – 805F11508, 1981.
- [DAN-87] DANG VU, C. et DELCAMBRE, B. – Etude expérimentale et modélisation d'un stockage thermique de longue durée en lit de cailloux enterré, couplé à des capteurs solaires à air. *Rev. Phys. Appl.*, **22**, 487-503, 1987.
- [DEB-80] DEBONY, P.L. – *Les économies d'énergie*. Ed. Eyrolles, 1980.
- [DEG-87] DEGIOVANNI, A. et MOYNE, C. – Conductivité thermique de matériaux poreux humides : évaluation théorique et possibilité de mesure. *Int. J. Heat & Mass Transfer*, **30**, n° 11, 2225-2245, 1987.
- [DIH-84] DIHN, Q.V., GLOWINSKI, R. et PERIAUX, J. – Solving elliptic problems by domain decomposition. Methods with applications. In "*Elliptic Problem Solvers II*", G.BIRKHOFF et A.SCHOENSTADT Ed., Academic Press, New York, pp. 395-426, 1984.

- [DIN-88] DINAND, T. – Méthodes de décomposition de domaine pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles elliptiques. *Thèse de Doctorat*, Université Paris XI, 1988.
- [DOE-82] *DOE-2 Engineers Manuel, Version 2.1A*, Lawrence Berkeley Laboratory, Energy Division, Building Energy Simulation Group.
et Los Alamos National Lab., Energy Division, Solar Energy Group, 1982.
- [DUF-87] DUFRESNE, J.L. – Etude et développement d'une procédure expérimentale pour l'identification des paramètres d'un modèle thermique de capteurs solaires à air en régime dynamique. *Thèse de Doctorat*, Université Paris VII, 1987.
- [DUN-82] DUNAND, A. – Modélisation des transferts thermiques et hydriques dans le sol. Application à l'extraction d'énergie thermique par pompe à chaleur couplée à un réseau horizontal de tuyaux enterrés. *Thèse de Docteur Ingénieur*, INP de Grenoble, 1982.
- [ESC-89] ESCUDERO, A. – Etude du comportement thermique des bâtiments. Proposition d'un modèle à deux dynamiques. *Thèse de Doctorat*, INSA de Lyon, 1989.
- [FAR-81] FAROUKI, O.T. – *Thermal properties of soils*. C.R.E.R.L. Monograph 81-1, Hanover, New-Hampshire, USA, Déc. 1981.
- [FAU-86] FAUCONNIER, R., GRELAT, A. et GUILLEMART, Ph. – *Cahier d'algorithmes BILBO et BILGA*. Union Technique Interprofessionnelle des Fédérations Nationales du Bâtiment et des Travaux Publics, 1986.
- [FOK-75] FOKINA, T.I. – One boundary-problem for a parabolic equation with strong nonlinearities. *Vestnik Moskovskogo Universiteta Matematik*, 30, n° 2, 22-28, 1975.
- [GIL-77] GILDING, B.H. – A non-linear degenerate parabolic equation. *Annali della Scu. Nar Sup. Di Pisa*, 4, 393-432, 1977.
- [GLO-88] GLOWINSKI, R., BOURGAT, J.F., LE TALLEC, P. et VIDRASCU, M. – *Variational formulation and algorithm for trace operator in domain decomposition calculations*. INRIA, rapport de recherche n° 804, Mars 1988.
- [GOL-76] GOLUB, G.H. et MEYERS, D. – The use of preconditioning over irregular regions. *Proc. 6th Int. Conf. Compt Meth. Sci.*, Engng, Versailles, France, 12-16 Déc., 1983.
- [GRA-89] GRANDPEIX, J.Y., LAHELLEC, A., BONIN, J.L., JOLY, J.L. et RIGAL, M. – Multi-model simulation : the T.E.F. approach. *Proc. of the 1989 European Simulation Multiconference*, Rome, Italy, 7-9 Juin, 1989.
- [HUL-86] HULSHOF, J. – Elliptic-parabolic problems. The interface. *Thèse de Doctorat*, Université de Leiden, Hollande, 1986.
- [KON-69] KONDRATIEV, K.Y. – *Radiation in the atmosphere*. Academic Press, New York, 1969.

- [LAH-89] LAHELLEC, A., DUFRESNE, J.L., CHOUNET, L.M., GRANDPEIX, J.Y., BEL HADJ SALAH, H. et JOLY, J.L. – An heterogeneous time stepping technique for the Transfer Evolution Formalism. *Proc. of the 1989 European Simulation Multiconference*, Rome, Italy, 7-9 Juin, 1989.
- [LEB-86] LEBRU, A., PELLETRET, R. et VINOT, B. – *Thermique des sols*. Rapport A.F.M.E., 1986.
- [LÖH-84] LÖHNER, R., MORGAN, K. et ZIENKIEWICZ, C.O. – The use of domain splitting with an explicit hyperbolic solver. *Comp., Meth. Appl. Mech. Eng.*, **45**, 313-329, 1984.
- [MAR-84] MARTIN, J. et DELCAMBRE, B. – *Thermique des sols*. Rapport A.F.M.E., 1984.
- [MAR-85] MARTIN, J. – *Thermique des sols*. Rapport A.F.M.E., 1985.
- [MOK-88] MOKHTARI, M. – Etude du comportement thermique des bâtiments en contact avec le sol par l'analyse modale. *Thèse de Doctorat*, INSA de Lyon, 1988.
- [MOR-88] MORGAN, K. et LÖHNER, K. – Domain decomposition for the simulation of transient problems in CFD. First Int. Symposium on Domain, "*Decomposition methods for partial differential equations*", SIAM, Philadelphia, 1988.
- [NAU-84] NAUDET, G. – Création d'un logiciel de recherche et d'aide à la conception en thermique du bâtiment, axé sur la simulation des systèmes énergétiques. *Thèse de 3ème Cycle*, Université Paris XII, 1984.
- [PET-85] PETIT, M. – Contribution à l'étude d'une dalle chauffante posée sur terre-plein. *Thèse de Docteur Ingénieur*, Université Paul Sabatier de Toulouse, 1985.
- [PET-86] PETTER, E.B. et OLOF, B.W. – Iterative methods for the solution of elliptic problems on regions partitioned into substructures. *SIAM J. Numer. Anal.*, **23**, n° 6, Déc. 1986.
- [PRO-67] PROTTER, H. et WEINBERGER, F. – *Maximum principles in differential equations*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1967.
- [REC-82] RECAN, M. – Simulation numérique du comportement thermique et hydrique d'un sol nu ; application à l'étude de l'évaporation par télédétection. *Thèse de Docteur Ingénieur*, INP de Toulouse, 1982.
- [VAN-63] (Référéncé par ARVIEV, J.C.) – *Caractérisation thermique des sols*. Documents INRA, Département Science des Sols, Antibes, 1980.
- [VAN-82] VAN DUYN, C.J. et PELETIER, L.S. – Non stationary filtration in partially saturated porous media. *Arch. for rat. Mech. and Anal.*, **78**(2), 173-198, 1982.
- [VAU-79] VAUCLIN, M., HAVERKAMP, R. et VACHAUD, G. – *Résolution numérique d'une équation de diffusion non linéaire*. Presse Universitaire de Grenoble, 1979.

- [VAU-84] VAUCLIN, M. et VACHAUD, G. – *Transferts hydriques dans les sols non saturés, non homogènes*. Annales des Mines, Mai-Juin 1984.
- [XIA-84] XIAO, S., HUANG, Z. et ZHOU, Ch. – The infiltration problem with constant rate in partially saturated porous media. *Acta Math. Appl. Sinica*, **1**, 1984.

Table des matières

	Page
A – LA THERMIQUE DU SOL POUR LA THERMIQUE DU BÂTIMENT	7
A.I Thermique du bâtiment et économies d'énergie	8
A.II Etudes récentes en thermique des sols	9
A.III La thermique des sols pour la conception thermique des bâtiments	11
B – MODELISATION DES TRANSFERTS DANS LE SOL	21
B.I L'échelle propre du milieu poreux	23
B.II L'approche purement conductive	24
B.III Transferts de chaleur et de masse	25
B.IV Les transferts entre le sol et l'atmosphère	34
B.V Des modèles plus fins	40
C – ETUDE ANALYTIQUE DE L'EQUATION D'INFILTRATION	42
C.I Introduction	43
C.II Résultat d'existence	44
C.III Unicité de la solution	66
C.IV Convergence vers la solution du problème stationnaire	71
D – ETUDE NUMERIQUE DU SYSTEME EN DIMENSION 1 D'ESPACE	83
D.I Infiltration d'eau dans le sol sous condition de flux	84
D.II Le système d'équations de transferts couplés de chaleur et de masse	96
E – PROBLEMATIQUE DU RACCORDEMENT	110
E.I Introduction	111
E.II Le problème physique de raccordement	111
E.III Le formalisme d'évolution par transfert	112
E.IV Formalisme du raccordement	113
E.V Application au problème de transfert de masse dans le sol	114
E.VI Conclusion	117
F – SOUS-DOMAINES A PAS DE TEMPS DIFFERENTS : EMBOÎTEMENT TEMPOREL	120
F.I Introduction	121
F.II Aperçu bibliographique	121
F.III La méthode utilisée	122
F.IV Résultats numériques	127
CONCLUSION	131