

THÈSES D'ORSAY

FRÉDÉRIC PAULIN

**Topologie de Gromov équivariante, structures
hyperboliques et arbres réels**

Thèses d'Orsay, 1987

[<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1987__0214__P0_0>](http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1987__0214__P0_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses d'Orsay » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



NUMDAM

*Thèse numérisée par la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016
et diffusée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

63751

ORSAY
n^o d'ordre :

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée
pour obtenir

le titre de Docteur en Science

par

Frédéric Paulin

Sujet : Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et
arbres réels.

Soutenue le 1^{er} décembre 1987 devant la Commission d'examen

Monsieur L. SIEBENMANN, Président

Madame J. BIRMAN

Messieurs M. GROMOV

F. LAUDENBACH

F. BONAHO

Summary.

The objects we are interested in are the isometric actions of a fixed finitely generated group on metric spaces. Our aim is to study the degeneration of hyperbolic structures into real trees by purely topological methods.

We endow every set consisting of such actions with a natural topology, called the Gromov topology. This topology is based on the Hausdorff distance between metric spaces, and on the compact-open topology on the space of the actions on a given metric space. We give a canonical process to make the Gromov topology Hausdorff. By methods inspired from M. Gromov's work, we prove a sequential compactness criterion for the Gromov topology.

We show that the Gromov topology coincide with the usual topologies on the set of hyperbolic actions, and on the set of the actions on irreducible minimal real trees.

We use our compactness criterion to give a shorter and more geometric proof of two theorems. The first one is due to M. Culler and J. Morgan, and asserts that the space of real trees with small edge stabilizers is a compact space. The second theorem is due to W. Thurston, P. Shalen and J. Morgan, and deals with the compactification of the space of hyperbolic structures by real trees with small edge stabilizers.

Remerciements.

Je voudrais remercier Larry Siebenmann qui me fait l'honneur de présider cette thèse. Merci aussi à Joan Birman, qui a accepté la tâche de participer au jury de la soutenance. La lecture de quelques-uns des nombreux ouvrages de Mikhail Gromov a toujours été pour moi source de plaisir et d'émerveillement. Il est l'inspireur de beaucoup de techniques utilisées dans cette thèse. C'est un grand honneur qu'il me fait en participant à la soutenance. Merci à Francois Laudенbach, qui m'a accueilli dans le laboratoire de Topologie d'Orsay, et a su me lancer dans la voie de la recherche. Je ne ferai jamais assez l'éloge de la patience et de la gentillesse de Francis Bonahon. Mon goût pour la topologie lui doit beaucoup. Il a su me guider avec adresse tout au long de cette thèse. Je le remercie pour ses bonnes idées et ses relectures attentives. Je suis reconnaissant à Peter Shalen de l'intérêt qu'il a porté à ce travail, en particulier en acceptant d'être rapporteur de cette thèse. Plus que cela, lors de son séjour à Paris en 1984-1985, il a été pour moi un initiateur. Son cours était une illustration de la beauté des Mathématiques.

Je voudrais aussi remercier toute l'équipe de Topologie d'Orsay à l'ambiance chaleureuse et sympathique, source d'enrichissement par ses nombreuses conversations, en particulier avec Jean-Pierre Otal, Michel Boileau, Adrien Douady, Gilbert Levitt, Lucien Guillou, Emmanuel Giroux, Jean-Claude Sikorav, Michèle Audin,.... Pierre Lavaurs a lu avec une conscience tatillonne et impitoyable la version préliminaire. Beaucoup de petites erreurs lui doivent de ne plus exister.

Je dédie cette thèse à Font-Romeu, à mon papa parce que c'est le plus beau des pères, et à Christine qui m'est plus que tout.

Préambule.

Les objets avec lesquels nous allons jouer sont des espaces métriques munis d'une action par isométrie d'un certain groupe, disons Γ . Pourquoi pas, après tout ?!

Sans toujours nous en apercevoir, nous rencontrons de tels objets tous les jours. Mais ils sont en général considérés pour eux-mêmes. Nous allons plutôt essayer de les comparer, les peser, les mesurer. Pour cela, l'homme a inventé un outil fantastique, j'ai nommé la topologie. Grâce à elle, nous allons comparer les formes de nos objets, nous pourrions dire s'ils sont semblables (proches), ou fort différents d'aspect (loin l'un de l'autre). Elle va aussi nous aider à résoudre une question existentielle. Où allons-nous et vers quels horizons quand nous nous éloignons vers l'infini, bondissant d'objet en objet, tel l'isard dans les montagnes près de Font-Romeu ?

Nous allons entrer dans le vif de la comédie. Dans l'ordre d'apparition des acteurs, nous ferons connaissance avec les bouées à plusieurs places en caoutchouc non élastique, rigides, et ne permettant de nager que dans des espaces tordus (en tout cas pas sous nos latitudes et notre dimension). Nous leur ferons subir des transformations de plus en plus importantes, à l'aide de ciseaux et de colle. Elles se transformeront alors en arbres, arbres d'hiver, sans feuilles, mais avec une infinité de branches. L'alchimie permettant cette transmutation s'appelle la topologie de Gromov.

Appliquée à la collection des arbres réels de toutes essences, elle allie en annexe les vertus de l'automne et du bûcheron, et élague sans pitié pour conserver les espèces minimales.

Introduction.

Considérons un groupe Γ fixé. Nous allons nous intéresser aux actions isométriques de Γ sur les espaces métriques. Nous allons chercher une topologie naturelle sur tout ensemble donné d'actions de Γ sur des espaces métriques quelconques. Notre but est d'étudier la dégénérescence des structures hyperboliques vers les arbres réels par des moyens purement topologiques.

Prenons par exemple un groupe Γ de type fini, sans torsion, et regardons ses actions sur l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ (voir rappels Chapitre III, § 1), avec n entier supérieur ou égal à 2. L'ensemble $\mathcal{H}^n(\Gamma)$ de ces actions fidèles et discrètes modulo conjugaison est appelé l'ensemble des structures hyperboliques (de groupe fondamental Γ).

Cet espace a été beaucoup étudié. En dimension 2, il est plus connu sous le nom d'espace de Teichmüller. Il a donné lieu à une vaste littérature, par ses rapports avec la géométrie complexe (voir par exemple les travaux de R. Fricke, F. Klein, O. Teichmüller, W. Fenchel, J. Nielsen, L. V. Ahlfors, L. Bers, C. J. Earle, ...).

Citons quelques travaux les plus connus sur les structures topologiques de $\mathcal{H}^n(\Gamma)$ et leurs comportements asymptotiques. O. Teichmüller [Tei1] [Tei2] a défini une métrique sur $\mathcal{H}^2(\Gamma)$ en utilisant la géométrie complexe. W. P. Thurston construit (en dimension 2) une compactification naturelle pour l'action des difféomorphismes de $\mathbb{H}^2 / \Gamma$ par des méthodes de topologie de petite dimension [Thu1] [Thu2] (voir [FLP] pour un traitement complet). Enfin, M. Culler, P. B. Shalen, J. W. Morgan ont généralisé le problème en toutes dimensions avec des outils de géométrie algébrique [CS] [MS1] [MS2] [MO] [Mor].

Lors de la compactification, les objets que l'on rajoute à l'infini sont des actions de Γ sur des arbres réels. (Il s'agit d'une généralisation des arbres simpliciaux. Un arbre réel est par définition un espace métrique entre deux points duquel passe un arc unique, et

qui est de plus isométrique à un intervalle de $\mathbb{R}$. Voir Chapitre II, § 1.) C'est pourquoi les actions de Γ sur les espaces métriques peuvent servir de dénominateur commun.

Cherchons donc une topologie naturelle sur tout ensemble donné d'actions isométriques de Γ sur des espaces métriques.

Oublions tout d'abord l'action du groupe. L'un des premiers outils pour comparer les espaces métriques est la distance de Hausdorff (voir par exemple [Rin]). Elle fut d'abord définie entre parties d'un même espace métrique. M. Gromov en prolonge la définition [Gro2] (page 35), [Gro3] de la manière suivante :

la distance de Hausdorff D_H entre deux espaces métriques X et X' est la borne inférieure des $\varepsilon > 0$ tels qu'il existe une métrique sur la réunion disjointe $X \vee X'$, induisant les métriques initiales sur X et X' , pour laquelle X est contenu dans le ε -voisinage de X' , et X' est contenu dans le ε -voisinage de X .

La distance de Hausdorff vérifie les propriétés des distances en particulier pour les espaces métriques compacts [Gro2]. Elle peut ne pas être finie (sphère-plan), et deux espaces peuvent être à distance nulle sans être isométriques (un espace métrique non complet et son complété).

Il serait plus commode pour comparer deux espaces de trouver un moyen de passer de l'un à l'autre. Le concept le plus fort est celui d'isométrie. En le relâchant un peu, nous pouvons penser aux ε -isométries. Il s'agit des applications f entre deux espaces métriques X et Y telles que $|d(f(x), f(x')) - d(x, y)| < \varepsilon$ pour tous x, x' dans X . Mais ceci n'est pas un outil symétrique. Nous aurions besoin ou bien de deux applications, ce qui serait peu maniable, ou bien d'une bijection. Mais alors nous ne pourrions comparer que des espaces homéomorphes. C'est pourquoi nous allons nous intéresser aux objets suivants (voir aussi [CEG]).

Définition 1 : Soient X, X' deux espaces métriques. Soit $\varepsilon > 0$. Une ε -approximation entre X et X' est une relation $\mathcal{R}$ dans $X \times X'$ surjective (i.e. $pr_1(\mathcal{R}) = X$ et $pr_2(\mathcal{R}) = X'$) telle que :

$$\forall x, y \in X, \forall x', y' \in X', \quad x \mathcal{R} x' \text{ et } y \mathcal{R} y' \Rightarrow |d(x, y) - d(x', y')| < \varepsilon.$$

Intuitivement, il faut bien sûr considérer une ε -approximation comme une application surjective, perturbant la métrique de moins de ε . Nous pouvons alors définir la distance de Hausdorff-Gromov de la manière suivante.

Définition 2 : *La distance de Hausdorff-Gromov $D(X, X')$ entre deux espaces métriques X et X' est la borne inférieure des $\varepsilon > 0$ pour lesquels il existe une ε -approximation entre X et X' .*

Il ne s'agit évidemment que d'une variation mineure par rapport à la distance de Hausdorff, mais qui la rend plus maniable. La distance de Hausdorff D_H est en effet la moitié de la distance de Hausdorff-Gromov D (voir Chapitre I, § 1).

Mais la distance de Hausdorff-Gromov est mal adaptée aux espaces non compacts. Par exemple, une sphère est toujours à distance infinie du plan, ce qui contredit l'idée intuitive de la "convergence" des sphères de grand rayon vers le plan.

Quand les boules fermées de nos espaces sont compactes, une bonne notion est la notion de convergence de Hausdorff pointée [Gro3] :

une suite d'espaces pointés tend vers un espace métrique pointé si, pour tout r , la suite des boules de centre le point base et de rayon r converge pour la distance de Hausdorff-Gromov vers la boule de l'espace limite de centre le point base et de rayon r .

Cette convergence vérifie la propriété de séparation. Quand nos espaces ne sont pas localement compacts, une suite peut par contre avoir plusieurs limites.

Introduisons maintenant sur nos espaces une action par isométrie d'un groupe Γ fixé. Nous remplaçons nos boules par des compacts (arbitrairement grands). L'action du groupe permettra dans certain cas de rigidifier les comportements. En s'inspirant de la définition ci-dessus, F. Bonahon nous a suggéré la notion de convergence suivante, que nous appellerons **convergence au sens de Gromov** :

Définition 3 : *Une suite d'espaces métriques X_i munis d'une action de Γ par isométrie converge vers un espace X_∞ du même type si pour tout $\varepsilon > 0$, pour toute partie finie P de Γ , et tout compact K de X_∞ , il existe pour i suffisamment grand un compact K_i de X_i , et une ε -approximation $\mathcal{R}_i$ P -équivariante entre K et K_i au sens suivant :*

$$\forall x \in K, \forall x_i \in K_i, \forall \alpha \in P, \alpha x \in K \text{ et } x \mathcal{R}_i x_i \Rightarrow \alpha x_i \in K_i \text{ et } \alpha x \mathcal{R}_i \alpha x_i.$$

En paraphrasant, ceci signifie que pour tout compact arbitrairement grand de X_∞ et pour toute partie finie arbitrairement grande de Γ , nous pouvons trouver pour i suffisamment grand un compact dans X_i qui possède à peu près la même forme, et sur lequel l'action de la partie finie est à peu près la même.

Cette convergence permet de définir une topologie sur tout ensemble $\mathcal{E}$ d'espaces métriques munis d'une action de Γ .

Définition 4 : Soit X un élément de $\mathcal{E}$. Soient un compact K de X , une partie finie P de Γ et $\varepsilon > 0$. Notons $V_X(K, P, \varepsilon)$ l'ensemble des éléments X' de $\mathcal{E}$ tels qu'il existe un compact K' dans X' et une ε -approximation P -équivariante (fermée) $\mathcal{R}$ entre K et K' .

Les $V_X(K, P, \varepsilon)$ forment une base d'ouverts de X pour une topologie sur $\mathcal{E}$ (voir Chapitre I, § 1), que nous appellerons **topologie de Gromov**.

La topologie de Gromov n'est pas forcément séparée. Par exemple, un espace métrique muni de l'action triviale de Γ est indiscernable (Chapitre I, § 1) de l'espace réduit à un point. Si les espaces possèdent de très fortes propriétés de minimalité, de convexité et d'homogénéité, nous avons un résultat partiel (voir définitions Chapitres I et IV) :

Théorème (Chapitre IV, § 2) : Soit Γ un groupe dénombrable. Donnons nous un ensemble $\mathcal{E}$ d'espaces de longueur X complets strictement convexes, dans lesquels l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points est compacte. Nous supposons de plus que ces espaces sont munis d'une action isométrique de Γ minimale et irréductible (i.e. ne fixant pas de point à l'infini), dont l'ensemble limite possède au moins deux points distincts. Nous identifions deux éléments de $\mathcal{E}$ s'il existe une isométrie de l'un dans l'autre commutant avec les actions.

Alors la topologie de Gromov sur $\mathcal{E}$ est séparée.

Regardons nos deux exemples, les arbres réels et les structures hyperboliques. Alors la topologie de Gromov coïncide dans les cas non dégénérés avec les topologies usuelles définies de la manière suivante :

(1) Notons $\mathcal{T}(\Gamma)$ l'ensemble des actions de Γ sur les arbres réels, minimales (i.e. pas de sous-arbres invariants propres) et irréductibles (i.e. pas de bout (au sens de Feudenthal) fixe par tout le groupe).

Dans [MS1] [CM] [MO], l'ensemble $\mathcal{T}(\Gamma)$ est muni de la **topologie des axes**, définie comme suit. Si Γ agit sur T , la distance de translation de $\gamma \in \Gamma$ est

$$l_T(\gamma) = \inf_{x \in T} d(x, \gamma x).$$

La topologie des axes sur $\mathcal{T}(\Gamma)$ est la topologie la plus grossière qui rend continues les fonctions $T \rightarrow l_T(\gamma)$. En fait, la restriction aux actions minimales irréductibles est précisément destinée à rendre cette topologie séparée. En d'autres termes, elle fait en sorte que deux actions qui ont les mêmes distances de translation soient isométriques (voir Chapitre II, § 5).

***Théorème (Chapitre II, § 5) :** La topologie de Gromov et la topologie des axes coïncident sur $\mathcal{T}(\Gamma)$.*

La topologie de Gromov décrit de manière plus géométrique la “forme” d'un arbre T muni d'une action de Γ . En particulier, pour les actions réductibles elle est beaucoup plus fine que la topologie des axes.

(2) Regardons maintenant le cas des actions hyperboliques. Notons Γ un groupe de type fini. Soit $R(\Gamma, \text{Isom}(\mathbb{H}^n))$ l'ensemble des actions isométriques de Γ sur $\mathbb{H}^n$. Nous le munissons de la topologie (dite usuelle) de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{H}^n$ des images par les actions d'une famille fixée de générateurs de Γ .

Notons $R/C(\Gamma, \text{Isom}(\mathbb{H}^n)) = R(\Gamma, \text{Isom}(\mathbb{H}^n)) / \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ le quotient topologique de $R(\Gamma, \text{Isom}(\mathbb{H}^n))$ par l'action par conjugaison de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ (voir [CS] [Mor]).

L'ensemble $R(\Gamma, \text{Isom}(\mathbb{H}^n))$ peut aussi être muni de la topologie de Gromov. Nous appellerons encore topologie de Gromov sur $R/C(\Gamma, \text{Isom}(\mathbb{H}^n))$ la topologie de Gromov quotient.

***Théorème (Chapitre III, § 1) :** La topologie de Gromov sur $R/C(\Gamma, \text{Isom}(\mathbb{H}^n))$ est la même que la topologie usuelle.*

Les deux exemples, arbres réels et structures hyperboliques, font partie d'une catégorie bien particulière d'espaces métriques. Leurs géodésiques vérifient de très bonnes conditions.

Rappelons qu'une géodésique d'un espace métrique est un plus court chemin entre deux points. K. Menger [Men] et H. Busemann [Bus1][Bus2][Bus3] ont analysé la structure des espaces munis de géodésiques vérifiant certains axiomes. S'intéressant aux propriétés métriques des variétés riemanniennes, M. Gromov [Gro1][Gro2] a par la suite introduit la notion d'espace de longueur (voir Chapitre I, § 2).

Il s'agit d'espaces métriques tels que par deux points passe une courbe de longueur minimale, égale à la distance entre ces deux points.

Par exemple, d'après le théorème de Hopf-Rinow, les variétés riemanniennes complètes sont des espaces de longueur. Les arbres réels sont par définition des espaces de longueur.

Nous allons nous servir d'une certaine classe d'espaces métriques définis par M. Gromov [Gro1], les espaces convexes (voir Chapitre I, § 2).

Ce sont les espaces où la distance entre les points courants de deux géodésiques est une fonction convexe.

Ils vérifient donc de bonnes propriétés d'unicité de géodésiques minimisantes. Par exemple, les variétés riemanniennes simplement connexes à courbure sectionnelle négative ou nulle, et les arbres réels sont convexes. Cette propriété n'est pas fermée, et il nous faudra la renforcer en une convexité stricte uniforme (voir Chapitre I, § 2 et § 3).

Pour la convergence de Hausdorff pointée, M. Gromov a montré [Gro2] [Gro3] un critère de compacité. En utilisant sa démonstration, nous montrons un critère de compacité (séquentielle) pour les espaces métriques convexes munis d'une action de Γ .

Théorème (Chapitre I, § 3, § 4) : Soit $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces de longueur complets, uniformément convexes. Soit Γ un groupe dénombrable agissant par isométrie sur les X_i . Supposons qu'il existe un point x_i dans X_i tel que :

pour toute partie finie P de Γ , les enveloppes convexes fermées des images de x_i par P admettent pour tout $\varepsilon > 0$, un recouvrement par des boules de rayon ε , de cardinal uniformément borné.

Alors il existe une sous-suite convergente vers un espace convexe pour la convergence au sens de Gromov.

Nous appliquerons ce critère à nos exemples favoris. Si $\mathbf{E}$ est un ensemble d'espaces métriques, alors son projectifié $\mathbf{PE}$ est le quotient de $\mathbf{E}$ où nous identifions deux espaces dont les métriques sont homothétiques.

Une première application de ce critère aux arbres réels nous permettra de redémontrer un théorème de M. Culler et J. Morgan [CM]. Les résultats préliminaires (Chapitre II, Sections 1 à 5) ont été établis indépendamment de ceux de [CM]. Nous ne nous sommes aperçus que tout récemment que R. Alperin et H. Bass [AB] ont aussi étudié la géométrie des axes de translation et de la fonction distance de translation.

Théorème (Chapitre II, § 6) : Soit Γ un groupe de type fini, contenant un groupe libre de rang 2. Soit $\mathbf{ST}(\Gamma)$ l'espace des arbres réels non réduits à un point, munis d'une action minimale de Γ , telle que les stabilisateurs d'arêtes ne contiennent pas de groupe libre de rang 2, modulo isométries équivariantes.

Alors $\mathbf{PST}(\Gamma)$ est compact pour la topologie de Gromov.

En particulier, quand Γ est un groupe d'isométries hyperboliques, discret et sans torsion, l'espace des arbres minimaux à stabilisateurs d'arêtes presque abéliens est projectivement compact.

Enfin, nous démontrons de manière simple et conceptuelle (voir Chapitre III) un résultat de J. Morgan [Mor] sur la compactification de l'espace des structures hyperboliques. Nos résultats recoupent certains des travaux de M. Bestvina [Bes] effectués indépendamment.

Notons Γ un groupe de type fini sans torsion, contenant un groupe libre de rang 2. Une première étape nous dit que les actions de Γ modulo conjugaison sur $\mathbb{H}^n$ sont “projectivement séquentiellement relativement compactes” parmi toutes les actions de Γ . La limite est de plus un arbre réel. Il s'agit d'une simple application du critère et de la formule de Gauss-Bonnet. Pour montrer que les hypothèses du critère sont vérifiées, il faut trouver un point base. Dans l'Annexe, nous montrons comment l'obtenir de manière constructive en dimension 2.

Théorème (Chapitre III, § 2) : Soit Γ un groupe de type fini. Toute suite d'éléments de $\mathbf{P}(R(\Gamma, \text{Isom}(\mathbb{H}^n)))$ admet une sous-suite convergente au sens de Gromov vers un élément de cet ensemble, ou vers une action projectivée de Γ sur un arbre réel.

Si les actions sont discrètes et fidèles, alors l'arbre limite est de plus à petits stabilisateurs (i.e. le stabilisateur d'une arête ne contient pas de groupe libre à deux générateurs). C'est là que nous voyons toute la puissance des relations (ϵ -approximations). Celles-ci permettent en particulier de mettre en évidence le rôle joué par les commutateurs. Le seul résultat important utilisé est le lemme de Margulis (voir Chapitre III, § 2).

Théorème (Chapitre III, § 2) : Soit Γ un groupe de type fini sans torsion contenant un groupe libre de rang deux. Un arbre réel limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{PH}^n(\Gamma)$ est à petits stabilisateurs.

La topologie de Gromov permet de voir cette convergence de manière géométrique et naturelle. Les axes de translations dans $\mathbb{H}^n$ “tendent” vers les axes de translation dans l'arbre réel limite (voir Chapitre IV, § 3).

A cause des propriétés de courbure, l'espace $\mathcal{PH}^n(\Gamma)$ muni de la topologie de Gromov est canoniquement homéomorphe à $\mathcal{H}^n(\Gamma)$. Nous obtenons donc une compactification de $\mathcal{H}^n(\Gamma)$, qui coïncide avec celles obtenues par W. Thurston [Thu1] et P. Shalen-J. Morgan [MS1] (voir Annexe, § 3).

Théorème (Chapitre III, § 2) : Soit Γ un groupe de type fini sans torsion, contenant un groupe libre de rang 2. Alors l'ensemble $\mathcal{PH}^n(\Gamma) \cup \mathcal{PST}(\Gamma)$ muni de la topologie de Gromov est compact.

Chapitre 1.

Toutes nos actions sur les espaces métriques seront des actions isométriques à gauche.

1 Généralités sur la topologie de Gromov.

Nous avons en introduction énoncé certains faits élémentaires sur la topologie de Gromov. Nous en donnons ici les démonstrations pour nous familiariser avec les approximations. Nous nous fixons un groupe Γ quelconque. Nous noterons dans cette section $\mathbf{E}$ un ensemble quelconque d'espaces métriques munis d'une action de Γ .

Le premier lemme nous dit que la distance de Hausdorff-Gromov D (Introduction, Définition 2) est équivalente à la distance de Hausdorff D_H (voir Introduction).

Lemme 1.1 : Pour tous les espaces métriques (X, d) et (X', d') , nous avons

$$D(X, X') = 2 D_H(X, X').$$

Démonstration : Soit $\epsilon > 0$ et δ une métrique sur la réunion disjointe $X \vee X'$ induisant les métriques d sur X et d' sur X' , telle que X est contenu dans le ϵ -voisinage de X' , et X' est contenu dans le ϵ -voisinage de X . Alors la relation définie par $x \mathcal{R} x'$ si et seulement si $\delta(x, x') < \epsilon$ est une 2ϵ -approximation entre X et X' .

Réciproquement, donnons nous une ϵ -approximation $\mathcal{R}$ entre X et X' . Nous allons construire une distance δ sur la réunion disjointe $X \vee X'$, qui induit les métriques d et d' respectivement sur X et X' , telle que X est contenu dans le $\epsilon/2$ -voisinage de X' , et X' est contenu dans le $\epsilon/2$ -voisinage de X .

Si $x \in X, x' \in X'$, nous notons $\delta(x, x')$ la borne inférieure des sommes

$$d(x, y) + d'(x', y') + \varepsilon/2,$$

pour $y \in X, y' \in X'$ tels que $y \mathcal{R} y'$.

Posons aussi, pour $x, z \in X$, et $x', z' \in X'$

$$\delta(x', x) = \delta(x, x'), \quad \delta(x, z) = d(x, z) \quad \text{et} \quad \delta(x', z') = d'(x', z').$$

Montrons que la fonction δ ainsi définie sur $(X \vee X') \times (X \vee X')$ est une métrique. Comme $\delta(x, x') = \varepsilon/2$ pour tous $x \in X$ et $x' \in X'$ avec $x \mathcal{R} x'$, nous aurons prouvé notre lemme.

La fonction δ est symétrique par construction. La séparation découle de la minoration $\delta(x, x') \geq \varepsilon/2$ pour $x \in X$ et $x' \in X'$. Quant à l'inégalité triangulaire, nous avons aisément les inégalités $\delta(x, x') \leq d(x, z) + \delta(z, x')$ et $\delta(x, x') \leq \delta(x, z') + d'(z', x')$ pour $x, z \in X$, et $x', z' \in X'$. En utilisant les symétries des définitions, il suffit donc de montrer que pour $x, z \in X$, et $x' \in X'$, nous avons $d(x, z) \leq \delta(x, x') + \delta(z, x')$.

Or pour tous $y, t \in X$ et $y', t' \in X'$ tels que $y \mathcal{R} y'$ et $t \mathcal{R} t'$, nous avons :

$$\begin{aligned} \delta(x, x') + \delta(z, x') &= [d(x, y) + d'(x', y') + \varepsilon/2] + [d(z, t) + d'(x', t') + \varepsilon/2] \\ &\geq d(x, y) + d(z, t) + [d'(y', t') + \varepsilon] \\ &\geq d(x, y) + d(z, t) + d(y, t) \\ &\geq d(x, z). \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Sur la collection des espaces métriques, la distance de Hausdorff-Gromov est donc symétrique, et vérifie l'inégalité triangulaire. Cela peut aussi se voir en "composant" les approximations : soit $\mathcal{R}_1$ une relation entre X et Y , et $\mathcal{R}_2$ une relation entre Y et Z ; alors la relation composée $\mathcal{R}$ est définie par

$$x \mathcal{R} z \Leftrightarrow \exists y \in Y, x \mathcal{R}_1 y \text{ et } y \mathcal{R}_2 z.$$

Rappelons que deux espaces compacts sont à distance de Hausdorff-Gromov nulle si et seulement s'ils sont isométriques. Ceci découle du lemme précédent et du résultat analogue pour D_H (voir [Gro2] page 37).

Pour la Définition 4 de l'Introduction, il nous faut montrer que les $V_X(\varepsilon, P, K)$ forment bien une base d'ouverts d'une topologie sur l'ensemble $\mathbf{E}$. Nous dirons qu'une relation $\mathcal{R}$ entre K et K' est **fermée** si elle est fermée en tant que partie de $K \times K'$.

Lemme 1.2 : Soit X un élément de $\mathcal{E}$. Soient un compact K de X , une partie finie P de Γ et $\varepsilon > 0$. Notons $V_X(K, P, \varepsilon)$ l'ensemble des éléments X' de $\mathcal{E}$ tels qu'il existe un compact K' dans X' et une ε -approximation P -équivariante fermée $\mathcal{R}$ entre K et K' .

Les $V_X(K, P, \varepsilon)$ forment une base d'ouverts pour une topologie sur $\mathcal{E}$.

Démonstration : Si Y appartient à $V_X(\varepsilon, P, K) \cap V_{X'}(\varepsilon', P', K')$, alors cette intersection contient $V_Y(\inf(\eta, \eta'), P \cup P', C \cup C')$ où η, C sont définis de la manière suivante. La partie C de Y est un compact tel qu'il existe une ε -approximation P -équivariante fermée $\mathcal{R}$ entre K et C . Le réel $\eta > 0$ est tel que

$$\sup\{ |d(x, y) - d(c, d)| \} < \varepsilon - \eta,$$

où la borne supérieure est prise sur les x, y de K et c, d de C tels que $x \mathcal{R} c$ et $y \mathcal{R} d$. Nous définissons η' et C' de manière similaire.

Notons que s'il existe une ε -approximation P -équivariante entre un compact K de X et un compact K' de X' , et une ε' -approximation P' -équivariante entre K' et un compact K'' de X'' , alors la relation composée est une $(\varepsilon + \varepsilon')$ -approximation $(P \cap P')$ -équivariante entre K et K'' . CQFD

Nous pouvons en fait affaiblir la condition de P -équivariance (Introduction, Définition 3) pour une ε -approximation dans la définition de la topologie de Gromov, en la remplaçant par celle de (ε, P) -équivariance, au sens suivant.

Définition 1.3 : Soient K et K' deux compacts contenus respectivement dans X et X' , deux espaces métriques munis d'une action de Γ . Soient $\varepsilon > 0$ et P une partie de Γ . Une relation $\mathcal{R}$ entre K et K' est dite (ε, P) -équivariante si

$$\forall x \in K, \forall x', y' \in K', \forall \gamma \in P, \quad \gamma x \in K, x \mathcal{R} x' \text{ et } \gamma x \mathcal{R} y' \Rightarrow d(\gamma x', y') < \varepsilon.$$

Il est clair qu'une ε -approximation P -équivariante est (ε, P) -équivariante. Réciproquement, nous avons le résultat suivant :

Remarque 1.4 : Soient K et K' deux compacts contenus respectivement dans X et X' , espaces métriques munis d'une action de Γ . Soient $\varepsilon > 0$ et P une partie finie de Γ .

S'il existe une $\varepsilon/3$ -approximation fermée $\mathcal{R}$ entre K et K' , qui est $(\varepsilon/3, P)$ -équivariante, alors il existe une ε -approximation P -équivariante fermée entre K et un sous-espace compact K'' de X' , avec $K' \subset K'' \subset K' \cup PK'$.

Démonstration : Si R est une relation entre X et X' , et K une partie de X , nous noterons $R(K) = \{x' \in X' / \exists x \in K, x R x'\}$.

Notons $\mathcal{R}^*$ la relation entre K et X' définie par $\forall x \in X, \forall x' \in X', x \mathcal{R}^* x'$ si et seulement si

- (1) $x \in K, x' \in K'$ et $x \mathcal{R} x'$
ou (2) $x = \gamma y, x' = \gamma y'$, avec $y \in K, y' \in K', \gamma \in P$, et $y \mathcal{R} y'$.

Posons $K'' = \mathcal{R}^*(K)$. Alors K'' est compact, car

$$K'' = \mathcal{R}(K) \cup \bigcup_{\gamma \in P} \gamma \mathcal{R}(K \cap \gamma^{-1}K)$$

Par construction, $\mathcal{R}^*$ est une relation surjective, fermée et P -équivariante entre K et K'' . De plus, si $x, y \in K, x', y' \in K', \gamma, \beta \in P$, et si $\gamma x, \beta y \in K, x \mathcal{R} x', y \mathcal{R} y'$, alors montrons que

$$|d(\gamma x, \beta y) - d(\gamma x', \beta y')| \leq \varepsilon.$$

En effet, donnons nous $v', w' \in K'$ tels que $\gamma x \mathcal{R} v'$ et $\beta y \mathcal{R} w'$. Alors

$$|d(\gamma x, \beta y) - d(\gamma x', \beta y')| \leq |d(\gamma x, \beta y) - d(v', w')| + d(\gamma x', v') + d(w', \beta y') \leq \varepsilon.$$

Avec les deux autres cas similaires, ceci montre que $\mathcal{R}^*$ est une ε -approximation. CQFD

Remarque 1.5 : Soit X un espace métrique muni d'une action de Γ . Soient $\varepsilon > 0$ et P une partie de Γ . Il existe une ε -approximation (ε, P) -équivariante fermée entre K et K' pour tous compacts K et K' de X tels que K est contenu dans le $\varepsilon/2$ -voisinage de K' , et K' est contenu dans le $\varepsilon/2$ -voisinage de K .

Démonstration : Une telle relation entre K et K' est définie par :

$$x \in K \text{ est en relation avec } x' \in K' \text{ si et seulement si } d(x, x') \leq \varepsilon/2. \text{ CQFD}$$

La proposition suivante est une conséquence des remarques précédentes.

Proposition 1.6 : Si le groupe Γ est dénombrable, et si X est séparable (i.e contient une partie dénombrable dense), alors X possède une base dénombrable de voisinages.

Démonstration : Notons $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de parties finies de X , croissante pour l'inclusion et de réunion dense et stable par l'action de Γ . Montrons que les ouverts $V_X(r, P, K_i)$, pour les rationnels r strictement positifs, les parties finies P de Γ et les entiers $i \in \mathbb{N}$, forment une base de voisinages de X .

Donnons nous un compact K de X , une partie finie P de Γ et $\varepsilon > 0$. Recouvrons K par un nombre fini de boules ouvertes de rayon $\varepsilon/12$. Chacun des centres de ces boules est à distance strictement inférieure à $\varepsilon/12$ d'un point de l'un des K_i . Notons K' la partie finie de X constituée par ces derniers points. Alors K est contenu dans le $\varepsilon/6$ -voisinage de K' , et K' est contenu dans le $\varepsilon/6$ -voisinage de K . De plus, $K' \cup PK'$ est contenu dans l'un des K_i , pour i suffisamment grand.

D'après les Remarques 1.4 et 1.5, il existe une ε -approximation P -équivariante fermée entre K et un sous-espace compact K'' de X , avec K'' contenu dans K_i . Soit r un rationnel avec $0 < r < \varepsilon$. Supposons qu'il existe une r -approximation P -équivariante fermée entre K_i et un sous-espace compact K^* d'un espace métrique X^* , muni d'une action de Γ .

Montrons alors que $V_X(r, P, K_i) \subset V_X(2\varepsilon, P, K)$. Ceci découle de la dernière remarque de la démonstration du Lemme 1.2 et de la remarque suivante.

Soient X et X' des espaces métriques munis d'une action de Γ . S'il existe une ε -approximation P -équivariante fermée entre un compact K de X et un compact de X' , alors pour tout compact A contenu dans K , il existe une ε -approximation P -équivariante fermée entre A et un compact de X' . CQFD

La démonstration précédente permet aussi de montrer que, dans la définition de la topologie de Gromov, nous pouvons en fait nous restreindre aux compacts qui sont des parties finies de nos espaces.

Nous notons $\mathcal{E}$ un ensemble donné d'actions de Γ sur des espaces métriques.

Proposition 1.7 : *Soit $X \in \mathcal{E}$. Les ouverts $V_X(\varepsilon, P, K)$ pour les $\varepsilon > 0$, les parties finies P de Γ , et les parties finies K de X , forment une base de voisinages de X pour la topologie de Gromov. CQFD*

Nous avons vu en Introduction (voir aussi Chapitre IV) que la topologie de Gromov n'est pas forcément séparée.

Définition 1.8 : *Soit $\mathcal{E}$ un espace topologique. Deux objets appartenant à $\mathcal{E}$ sont indiscernables si tout voisinage de l'un rencontre tout voisinage de l'autre.*

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble donné d'actions de Γ sur des espaces métriques. Deux éléments de $\mathcal{E}$ qui sont isométriques par une isométrie commutant avec les actions sont en particulier indiscernables. Ils seront en général identifiés.

Observons que si C est un sous-espace de X invariant par Γ , tout voisinage de C pour la topologie de Gromov contient X . Donc X est indiscernable de C .

Si X est un espace métrique muni d'une action de Γ , son complété $\hat{X}$ est naturellement muni d'une unique action de Γ prolongeant l'action sur X . Les espaces X et $\hat{X}$ sont alors indiscernables (pour la topologie de Gromov). Plus précisément, l'un est contenu dans tout voisinage de l'autre, d'après ce qui précède. Si l'un est limite pour la convergence au sens de Gromov d'une suite d'espaces métriques munis d'une action de Γ , alors l'autre est aussi limite de cette suite.

Nous serons donc amenés à supposer que tous nos espaces sont complets. Il s'agit là d'un résultat analogue au fait que la distance de Hausdorff-Gromov entre un espace métrique et son complété est nulle.

2 Espaces de longueur et espaces convexes.

Pour que la topologie de Gromov vérifie de bonnes propriétés, nous serons amenés à nous restreindre à certains espaces métriques.

Sauf mention contraire, et pour les raisons indiquées dans la section précédente, nous nous intéresserons uniquement aux espaces métriques complets.

Donnons quelques définitions motivées par les deux exemples que nous avons en vue, les arbres réels et les structures hyperboliques.

Rappelons qu'une **courbe** (ou chemin) entre deux points x et y d'un espace métrique X est une application continue de $[0, 1]$ dans X , qui envoie 0 sur x et 1 sur y . Un **arc** est un chemin injectif.

Définition 2.1 : Une courbe entre deux points d'un espace métrique dont la longueur est égale à la distance entre ces points est appelée *géodésique*.

Un espace métrique est un **espace de longueur** si pour toute paire de points, il existe une géodésique entre ces deux points.

Cette définition diffère légèrement de celle donnée en [Gro2]. Voir [Bus1] [Bus2] [Gro2] pour la définition de la longueur d'une application continue d'un intervalle de réels dans un espace métrique X . Si $\psi : [0, 1] \rightarrow X$ est une courbe, sa longueur est la borne supérieure des $\sum d(\psi(t_i), \psi(t_{i+1}))$ pour les subdivisions $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = 1$. Remarquons que celle-ci peut être $+\infty$.

La longueur de toute courbe entre deux points d'un espace métrique est évidemment supérieure à la distance entre ces deux points. Une géodésique entre deux points d'un espace métrique est un arc. Un sous-arc d'une géodésique est une géodésique entre ses extrémités.

Par extension, nous appellerons aussi géodésique une application continue d'un intervalle fermé non compact de $\mathbb{R}$ dans un espace métrique dont la restriction à tout intervalle compact est une géodésique au sens précédent.

Dans un espace métrique, si z est un point d'une géodésique entre x et y , alors nous avons $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$. Si $\psi : [0, 1] \rightarrow X$ est une géodésique d'un espace métrique X , alors l'application de $[0, 1]$ dans $[0, L]$, où $L = d(\psi(0), \psi(1))$ est la longueur de ψ , qui à t associe $d(\psi(0), \psi(t))$ est continue par l'inégalité triangulaire, strictement croissante d'après la remarque précédente et le fait que ψ est un arc, donc un homéomorphisme sur son image.

Les géodésiques seront donc toutes paramétrées par abscisse curviligne, c'est-à-dire que $d(\psi(s), \psi(s')) = |s - s'|$ (voir [Bus2]).

D'après le théorème de Hopf-Rinow, les variétés riemanniennes complètes sont des espaces de longueur. Les arbres réels sont des espaces de longueur. C'est une conséquence immédiate de leur définition (voir Chapitre II, § 1).

Remarquons que le complété d'un espace de longueur n'est pas forcément un espace de longueur. Il vérifie une propriété plus faible : la distance entre deux points est la borne inférieure des longueurs des courbes entre ces deux points (voir [Gro2] § 1).

Par exemple, considérons l'“échelle” de $\mathbb{R}^2$ formée des demi-droites ouvertes $]0, +\infty[\times \{0\}$ et $]0, +\infty[\times \{1\}$, et des segments $\{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Elle est munie de la métrique qui en fait un espace de longueur, et coïncide avec les métriques originales sur les deux demi-droites et sur les segments verticaux. Son complété est obtenu en rajoutant les deux points $(0, 0)$ et $(0, 1)$, et n'est pas un espace de longueur.

Définition 2.2 : *Un espace de longueur X est dit **fortement convexe** si pour toute paire de géodésiques $f : [a, b] \rightarrow X$ et $g : [c, d] \rightarrow X$, l'application de $[a, b] \times [c, d]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(t_1, t_2) \rightarrow d(f(t_1), g(t_2))$ est convexe.*

Une partie P d'un espace de longueur X est dite **convexe** si toute géodésique de X , dont les extrémités appartiennent à P , est contenue dans P . Bien sûr, une partie convexe d'un espace de longueur fortement convexe est un espace de longueur fortement convexe pour la métrique induite.

Un espace fortement convexe est **uniquement géodésique** (i.e. deux points peuvent être joints par une et une seule géodésique). Il est de plus contractile. La rétraction sur un point se fait le long des rayons géodésiques issus de ce point (voir définition dans le Chapitre IV).

Nous noterons $[x, y]$ l'unique géodésique entre deux points x, y d'un espace qui est uniquement géodésique.

Par exemple, une variété riemannienne est fortement convexe si et seulement si elle est simplement connexe et à courbure sectionnelle négative ou nulle [Gro1]. Un arbre réel est fortement convexe.

Remarque 2.3 : *Soit X un espace fortement convexe. Soient x et y deux points à distance plus petite que ε de x' et y' respectivement. Alors la géodésique entre x et y est contenue dans le ε -voisinage de la géodésique entre x' et y' , et vice-versa.*

En particulier, l'adhérence d'une partie convexe de X est encore une partie convexe.

Cette remarque permet aussi de montrer que le complété d'un espace fortement convexe est encore fortement convexe.

Notons que la propriété d'être un espace de longueur est fermée pour la distance de Hausdorff-Gromov entre espaces métriques compacts (voir [Gro2] § 1).

Ceci n'est plus vrai si les espaces ne sont pas localement compacts. Par exemple, considérons l'"échelle" complétée (voir paragraphe précédant la Définition 2.2) dans $\mathbb{R}^2$ formée des demi-droites $[0, +\infty[\times \{0\}$ et $[0, +\infty[\times \{1\}$, et des segments $\{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Ce n'est pas un espace de longueur. C'est pourtant la limite de la suite des espaces de longueur X_n , où X_n est la réunion des demi-droites $[0, +\infty[\times \{0\}$ et $[0, +\infty[\times \{1\}$, et des segments $\{\frac{1}{k}\} \times [0, 1]$ avec k entier compris entre 1 et n .

Par contre, la propriété de convexité forte n'est pas fermée pour la distance de Hausdorff-Gromov entre espaces métriques compacts.

En effet, notons d_1 la métrique euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et d_0 la distance induite par la norme

$$|| (x, y) || = |x| + |y|.$$

Notons d_ε la distance $\varepsilon d_1 + (1 - \varepsilon) d_0$ pour tout ε dans $[0, 1]$. Puisqu'il s'agit d'une métrique induite par une norme, les segments de droites sont des géodésiques entre leurs extrémités.

Si $\varepsilon \neq 0$, la métrique d_ε est convexe. En effet, il y a d'abord unicité des géodésiques: si y n'appartient pas au segment de droite entre x et z , alors $d_\varepsilon(x, y) + d_\varepsilon(y, z) > d_\varepsilon(x, z)$. La formule explicite montre alors que la distance entre deux géodésiques est convexe.

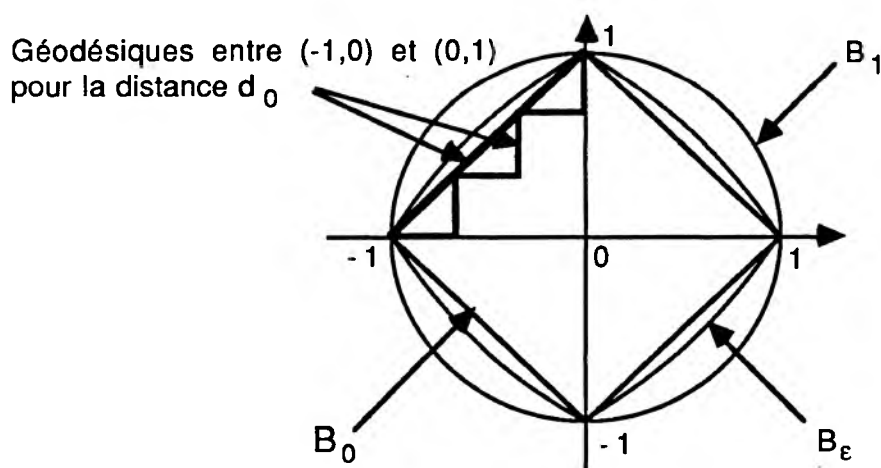


Figure 1.

Soit B_ϵ la boule unité de d_ϵ centrée en 0, munie de la métrique d_ϵ (voir Figure 1). Alors B_ϵ tend vers B_0 pour la distance de Hausdorff-Gromov. Mais d_0 n'est pas uniquement géodésique.

Soit X un espace métrique et K un compact de X . Pour tout point x de X , il existe au moins un point de K , minimisant la distance de X à un point de K . Ce point est appelé **une projection** de x sur K . Nous avons le résultat suivant qui est dû à H. Busemann [Bus2] :

Remarque 2.4 : Soit X un espace métrique et K un compact de X . Supposons que tout point x de X admette une unique projection $p(x)$ sur K . Alors p est une application continue de X dans K .

Démonstration : Si x_n tend vers x , soit v une valeur d'adhérence de la suite des $p(x_n)$ dans le compact K . Supposons que v est limite de la suite extraite $p(x_{n_i})$.

Alors $d(x_{n_i}, p(x))$ tend vers $d(x, p(x))$ et $d(x_{n_i}, p(x_{n_i}))$ tend vers $d(x, v) \geq d(x, p(x))$. Comme $d(x_{n_i}, p(x_{n_i})) \leq d(x_{n_i}, p(x))$, nous en déduisons que $d(x, v) = d(x, p(x))$, donc que $v = p(x)$. CQFD

La notion suivante est due à M. Gromov. Elle est légèrement plus forte que la définition originale de [Gro1].

Définition 2.5 : Un espace fortement convexe X est dit **strictement convexe** s'il vérifie :

<1> Pour tout x de X , pour tout convexe fermé C de X , il existe une et une seule projection $p(x)$ de x sur C (i.e. $p(x) \in C$ minimise la distance de x à un point de C).

<2> Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $0 \leq \delta < 1$ tel que, pour tout convexe fermé C de X , la projection $p : X \rightarrow C$ ainsi définie vérifie :

pour toute courbe γ dans X , telle que $d(\gamma, C) \geq \epsilon$, alors $\text{long}(p(\gamma)) \leq \delta \text{ long}(\gamma)$.

Définition 2.6 : Soit X un espace strictement convexe. Nous appellerons un **module de convexité stricte** de X toute application $\epsilon \rightarrow \delta_\epsilon$ de $]0, +\infty[$ dans $[0, 1[$ vérifiant la propriété <2> ci-dessus .

Par exemple, une variété riemannienne à courbure sectionnelle $K \leq -\varepsilon < 0$, est strictement convexe (voir par exemple [Gro1] [Gro4]). Un arbre réel est évidemment strictement convexe. L'application nulle est un module de continuité de tout arbre réel.

Dans le cas où l'espace est localement compact, l'existence d'une projection est immédiate. En effet, dans un espace de longueur localement compact, les boules fermées sont compactes ([Gro2] pages 5-6).

De plus, dans une variété riemannienne fortement convexe, une sphère ne contient pas de géodésique, et la propriété <1> est vérifiée.

La propriété <2> nous dit en particulier que la projection sur un convexe fermé est contractante (i.e. diminue les distances).

Elle sera en général utilisée pour ε fixé, valant 1 par exemple. Mais elle possède un intérêt aussi pour les ε petits : elle évite que les espaces possèdent de petits endroits “plats”. Nous n'aurions pas suffisamment d'estimations locales, en particulier dans le cas non localement compact (voir Chapitre IV, Lemme 2.2).

Si δ_ε est associé à ε par un module de convexité stricte, alors δ_ε convient aussi pour tout $\varepsilon' \geq \varepsilon$.

La propriété <2> implique la notion de δ -hyperbolicité de [Gro4] (voir Chapitre IV, Définition 2.4 et Proposition 2.5).

Le critère de compacité que nous allons démontrer s'applique essentiellement à des espaces strictement convexes.

3 Critère de compacité pour la topologie de Gromov.

Les hypothèses du critère de compacité reposeront essentiellement sur les notions suivantes.

Définition 3.1 : *Un ε -réseau d'un espace métrique X est une partie Z de X telle que tout point de X est à distance inférieure ou égale à ε d'un point de Z .*

Définition 3.2 : Une famille $\{K_\alpha\}$ d'espaces métriques compacts est dite **uniformément compacte** si :

- les diamètres des K_α sont uniformément bornés,
- pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tout α , il existe dans K_α un ε -réseau de cardinal inférieur ou égal à N .

Remarquons que si les compacts K_α sont des espaces de longueur vérifiant la seconde propriété, alors leurs diamètres sont uniformément bornés.

Définition 3.3 : Une famille $\{X_\alpha\}$ d'espaces métriques est dite **uniformément convexe** si les espaces X_α sont strictement convexes et possèdent un module de convexité stricte ne dépendant pas de α .

Par exemple, toute famille d'arbre réels (voir Chapitre II, Définition 1.1) est uniformément convexe, d'après les remarques suivant la Définition 2.5. Toute famille $\{X_\alpha\}$ de variétés riemanniennes à courbure sectionnelle $K_\alpha \leq -\varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$ ne dépendant pas de α , est uniformément convexe.

Voici quelques résultats préliminaires en vue du critère de compacité.

Lemme 3.4 : Soit X un espace strictement convexe. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mu > 0$, ne dépendant que d'un module de convexité stricte, tel que pour tout chemin γ de $x \in X$ à $y \in X$ de longueur λ vérifiant $\lambda - d(x, y) \leq \mu$, alors tout point z de γ est à distance inférieure ou égale à ε de la géodésique A entre x et y .

Démonstration : Supposons que la distance de z à A soit strictement supérieure à ε . Alors il existe une partie du chemin γ , de longueur $\geq \varepsilon$, à distance de A supérieure à $\varepsilon/2$. Soit δ le réel associé à $\varepsilon/2$ par un module de convexité stricte. Rappelons qu'une géodésique de A est une partie convexe de A .

Alors la longueur de γ est supérieure à $d(x, y) + (1 - \delta) \varepsilon$. CQFD

Ce lemme permet de montrer le résultat suivant. Tout d'abord, si $\mathcal{R}$ est une relation entre deux ensembles X_1 et X_2 , et si Z est une partie de X_1 , nous appellerons **image** de Z par $\mathcal{R}$ dans X_2 l'ensemble $\text{pr}_2(\text{pr}_1^{-1}(Z) \cap \mathcal{R})$.

Proposition 3.5 : Soit $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques compacts uniformément convexes. Supposons qu'elle tende vers un espace de longueur compact X_∞ pour la distance de Hausdorff-Gromov. Alors X_∞ est strictement convexe.

Démonstration : Montrons tout d'abord le lemme suivant.

Lemme 3.6 : Les géodésiques dans X_i tendent uniformément vers les géodésiques dans X_∞ , au sens ci-dessous.

Fixons nous une ε_i -approximation $\mathcal{R}_i$ entre X_∞ et X_i avec ε_i tendant vers 0 quand i tend vers $+\infty$. Notons G_∞ une géodésique de X_∞ , d'extrémités x_∞ et y_∞ . Pour $t \in [0, 1]$, notons $z_\infty(t)$ le point de G_∞ tel que $d(x_\infty, z_\infty(t)) = t d(x_\infty, y_\infty)$. Soient x_i et y_i des images par $\mathcal{R}_i$ respectivement de x_∞ et y_∞ . Notons $z_i(t)$ le point de la géodésique entre x_i et y_i tel que $d(x_i, z_i(t)) = t d(x_i, y_i)$.

Alors pour i suffisamment grand, uniformément en les géodésiques G_∞ de X_∞ , toute image de $z_\infty(t)$ est proche de $z_i(t)$.

Démonstration du Lemme 3.6 : Donnons nous un $\varepsilon > 0$. Notons $z_\infty^i(t)$ une image de $z_\infty(t)$ par $\mathcal{R}_i$. Appelons w_i sa projection sur la géodésique entre x_i et y_i . D'après le Lemme 3.4, nous avons $d(z_\infty^i(t), w_i) \leq \varepsilon$ dès que $\varepsilon_i < \mu/3$, car

$$d(x_i, z_\infty^i(t)) + d(z_\infty^i(t), y_i) - d(x_i, y_i) < 3 \varepsilon_i.$$

Nous pouvons supposer que w_i appartient à la géodésique $[x_i, z_i(t)]$, quitte à permuter x_i et y_i (et aussi x_∞ et y_∞). Alors

$$\begin{aligned} d(w_i, z_i(t)) &= d(x_i, z_i(t)) - d(x_i, w_i) \\ &\leq t d(x_i, y_i) - [d(x_i, z_\infty^i(t)) - d(z_\infty^i(t), w_i)] \\ &< t [d(x_\infty, y_\infty) + \varepsilon_i] - [d(x_\infty, z_\infty(t)) - \varepsilon_i] + \varepsilon \\ &= t d(x_\infty, y_\infty) - t d(x_\infty, y_\infty) + (1+t) \varepsilon_i + \varepsilon \\ &\leq 2 \varepsilon_i + \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $d(z_i(t), z_\infty^i(t)) < 3\varepsilon$ dès que $\varepsilon_i < \inf\{\mu/3, \varepsilon/2\}$. CQFD

Nous déduisons en particulier de ce lemme que l'espace X_∞ est uniquement géodésique.

En effet, supposons qu'il existe deux géodésiques G_∞ et G'_∞ entre les points x_∞ et y_∞ de X_∞ . Pour $t \in [0, 1]$, notons $z_\infty(t)$ le point de G_∞ tel que $d(x_\infty, z_\infty(t)) = t d(x_\infty, y_\infty)$, et

$z'_\infty(t)$ le point de G'_∞ tel que $d(x_\infty, z'_\infty(t)) = t d(x_\infty, y_\infty)$. Alors avec des notations semblables à celles du lemme précédent,

$$d(z'_\infty(t), z_\infty(t)) < d(z'^1_\infty(t), z^1_\infty(t)) + \varepsilon_i \leq d(z'^1_\infty(t), w_i) + d(w_i, z^1_\infty(t)) + \varepsilon/2 \leq 7 \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0, les géodésiques G_∞ et G'_∞ sont donc confondues.

Maintenant X_∞ est fortement convexe, car un graphe limite (au sens de Hausdorff-Gromov) d'une suite de graphes de fonctions convexes est convexe.

Assertion : Soit X un espace strictement convexe. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mu > 0$ ne dépendant que d'un module de convexité stricte de X , tel que :

pour tout convexe C de X et pour tout point x de X , alors tout point z de C vérifiant

$$d(z, x) - d(p(x), x) \leq \mu$$

est à distance $\leq \varepsilon$ de la projection $p(x)$.

En effet, notons $[t, y]$ la géodésique entre deux points t et y de X . Alors la projection d'un point z' de $[x, p(x)]$ sur C est aussi $p(x)$. Puisque les projections diminuent les distances, la longueur du segment $[z, z']$ est supérieure à $d(z, p(x))$. Par conséquent, la projection du point z sur $[x, p(x)]$ est précisément $p(x)$. Par un raisonnement similaire à celui de la démonstration du Lemme 3.4, si le point z est trop loin de $p(x)$, alors la distance $d(z, x)$ est bien plus grande que $d(p(x), x)$.

Remarquons que l'existence d'une projection sur un convexe fermé de X_∞ est assurée par la compacité. L'unicité de cette projection découle de l'assertion précédente appliquée aux X_i .

Soit γ une courbe et C un convexe fermé de X_∞ , avec $d(\gamma, C) \geq \varepsilon$. Pour tout $\eta > 0$, pour i suffisamment grand, il existe alors une courbe γ_i dans X_i à distance $\geq \varepsilon - \eta$ d'un convexe C_i telle que

$$| \text{long}(\gamma_i) - \text{long}(\gamma) | \leq \eta$$

$$| \text{long}(p(\gamma_i)) - \text{long}(p(\gamma)) | \leq \eta.$$

La courbe γ_i est la géodésique par morceaux entre des “relevés” des points d'un réseau fini de la courbe γ . De même, C_i est l'enveloppe convexe de “relevés” des points d'un réseau fini du compact C .

Ceci achève de montrer le résultat. CQFD

Le lemme suivant nous dit (en schématisant) quels sont les espaces qui sont “limites” d'espaces strictement convexes dont un module de convexité stricte tend uniformément

vers 0. Il nous servira dans les Chapitres II et III, pour montrer qu'une limite d'arbres réels est un arbre réel, et qu'une limite d'espaces hyperboliques convenablement normalisés est aussi un arbre réel.

Lemme 3.7 : Soient $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces uniformément convexes. Soit X_∞ un espace fortement convexe. Supposons qu'il existe une suite μ_i tendant vers 0 telle que pour tout triangle $\{a_i, b_i, c_i\}$ dans X_i , tout point de l'un des trois côtés est à distance inférieure ou égale à μ_i de l'un des deux autres côtés.

Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout compact K de X_∞ , il existe une ε -approximation entre K et un compact K_i de X_i pour tout i suffisamment grand.

Alors X_∞ est un arbre réel (voir Chapitre II, Définition 1.1).

Démonstration : En utilisant le Lemme 3.4 et un raisonnement semblable à celui de la fin de la Proposition 3.5, tout point de X_∞ admet une unique projection sur toute géodésique compacte.

Il suffit alors de vérifier qu'un espace fortement convexe X , tel que :

- tout côté d'un triangle est contenu dans la réunion des deux autres,
- tout point admet une unique projection sur toute géodésique compacte,

est un arbre réel.

Rappelons que dans un espace uniquement géodésique, un point z appartient à la géodésique $[x, y]$ d'extrémités x et y , si et seulement si $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$.

Supposons qu'il existe un arc continu ψ allant de x à y dans X , distinct de la géodésique $[x, y]$. Quitte à raccourcir cette géodésique, nous pouvons supposer que ψ ne rencontre $[x, y]$ qu'en x et y . Nous paramétrons ψ par $t \in [0, 1]$. Nous notons $]x, y[$ la géodésique $[x, y]$ privée de ses extrémités, et p la projection de X sur $[x, y]$, qui est continue d'après la Remarque 2.4.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un élément t_* de $[0, 1]$ tel que $p \circ \psi(t_*) \in]x, y[$. Notons t_∞ la borne supérieure de la composante connexe du fermé $(p \circ \psi)^{-1}(p \circ \psi(t_*))$ contenant t_* . Alors $p \circ \psi(t_\infty) = p \circ \psi(t_*)$, donc $t_\infty \neq 1$. Par conséquent, il existe une suite $t_i \in]t_\infty, 1[$ tendant vers t_∞ et vérifiant $p \circ \psi(t_i) \neq p \circ \psi(t_\infty)$.

Soient w et z deux points de X qui se projettent sur $[x, y]$ en deux points distincts. D'après notre hypothèse sur les triangles, la géodésique entre w et z est constituée de trois arcs consécutifs : de la géodésique de w à $p(w)$, de la géodésique de $p(w)$ à $p(z)$, et de la géodésique de $p(z)$ à z . Pour voir ceci, regarder les côtés du triangle $\{w, p(w), p(z)\}$,

puis ceux du triangle $\{w, p(z), z\}$. Remarquer aussi que la géodésique entre un point v et sa projection $p(v)$ ne rencontre la géodésique $[x, y]$ qu'en $p(v)$.

$$\text{Donc } d(w, z) = d(w, p(w)) + d(p(w), p(z)) + d(p(z), z').$$

Maintenant,

$$d(\psi(t_i), \psi(t_\infty)) = d(\psi(t_i), p \circ \psi(t_i)) + d(p \circ \psi(t_i), p \circ \psi(t_\infty)) + d(p \circ \psi(t_\infty), \psi(t_\infty)).$$

Or $d(\psi(t_i), \psi(t_\infty))$ tend vers 0 quand i tend vers $+\infty$. Donc $d(p \circ \psi(t_\infty), \psi(t_\infty)) = 0$, et $\psi(t_\infty)$ appartient à $]x, y[$, ce qui est une contradiction. CQFD

Dans toute la suite de la section 3, nous notons Γ un groupe dénombrable quelconque. Les définitions suivantes nous serviront aussi dans les Chapitres II et IV.

Définition 3.8 : *Un espace de longueur muni d'une action de Γ est dit **minimal** si ses seuls sous-ensembles convexes fermés invariants par Γ sont $\emptyset$ et lui-même. Un **cœur convexe** d'un espace de longueur muni d'une action de Γ est un convexe fermé invariant non vide, minimal pour l'inclusion.*

Remarquons que tout espace est indiscernable (Définition 1.8) d'un éventuel cœur convexe pour la topologie de Gromov.

Dans le Chapitre IV, nous donnons des hypothèses assez simples qui entraînent l'existence d'un cœur convexe unique, et certaines propriétés de séparation après avoir identifié un espace et son cœur convexe.

Remarquons que M. Gromov [Gro3] construit aussi des isométries à la limite, de la manière suivante. Considérons une suite d'espaces de longueur localement compacts ayant une limite au sens de Hausdorff pointé (voir Introduction). Après extraction éventuelle, une suite d'isométries qui ne bougent pas trop les points bases “converge” vers une isométrie de l'espace limite.

Pour les espaces de longueur pointés, complets et localement compacts, la définition de la convergence de Hausdorff pointée utilise l'existence de compacts canoniques, à savoir les boules centrées au point base.

Pour les espaces fortement convexes munis d'une action de Γ , les candidats sont les compacts enveloppes convexes des images par les parties finies de Γ d'un point

convenablement choisi. Une des raisons pour prendre des compacts qui dépendent de l'action de Γ est un problème de convergence d'actions "partielles".

Définition 3.9 : Soit X un espace de longueur. Si Z est une partie de X , nous appellerons *enveloppe convexe* de Z dans X , et nous noterons $\text{Conv}_X(Z)$, le plus petit convexe fermé contenant Z .

On appelle *espace Γ -convexe* un espace de longueur X complet, fortement convexe, muni d'une action isométrique de Γ , dans lequel l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points est compacte.

Il existe une manière récursive de construire l'enveloppe convexe d'une partie Z d'un espace fortement convexe X . Notons $C_1(Z)$ la réunion des géodésiques entre les points de Z . Pour $n \geq 1$, soit $C_{n+1}(Z)$ la réunion des géodésiques entre les points de $C_n(Z)$. Notons $C(Z)$ la réunion des $C_n(Z)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors $\text{Conv}_X(Z)$ est égal à l'adhérence de $C(Z)$. En effet, $C(Z)$ est convexe, et contenu dans tout convexe contenant Z .

Nous appellerons $C_n(Z)$ le **n -squelette** de l'enveloppe convexe $\text{Conv}_X(Z)$.

Lemme 3.10 : Donnons nous K un espace métrique compact, et $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de parties de K , dont la réunion a pour adhérence K . Alors pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout n suffisamment grand, le ε -voisinage de Y_n est égal à K .

En particulier, si X est un espace Γ -convexe et Z une partie finie de X . Alors pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout n suffisamment grand, le ε -voisinage du n -squelette de $\text{Conv}_X(Z)$ contient $\text{Conv}_X(Z)$.

Démonstration : Pour tout $\varepsilon > 0$, l'espace compact K admet un recouvrement fini par des boules $\{B_i\}_{i=1\dots m}$ de rayons $\varepsilon/2$. Choisissons pour tout i un élément y_i de la réunion des Y_n , qui est à distance inférieure ou égale à $\varepsilon/2$ du centre de B_i .

Pour tout n suffisamment grand, Y_n contient tous les y_i , et satisfait à la condition souhaitée. CQFD

Remarquons que le complété $\hat{X}$ d'un espace de longueur X fortement convexe, muni d'une action de Γ , dans lequel l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points est compacte, est un espace Γ -convexe.

En effet, si nous nous donnons un nombre fini de points $\{\hat{x}_i\}_{i=1\dots m}$ de $\hat{X}$, l'enveloppe convexe $\hat{C}$ des $\{\hat{x}_i\}_{i=1\dots m}$ est fermée, donc complète. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des points $\{x_i\}_{i=1\dots m}$ dans X , tels que $d(\hat{x}_i, x_i) < \varepsilon/2$ pour $i = 1\dots m$.

Alors tout point de $\hat{C}$ est à distance inférieure ou égale à $\varepsilon/2$ d'un point de l'enveloppe convexe C des $\{x_i\}_{i=1,\dots,m}$. Ceci découle de la Remarque 2.3, de la construction récursive des enveloppes convexes et du fait que C est compact. Le compact C admet de plus un recouvrement fini par des boules ouvertes de rayon $\varepsilon/2$. Mais alors les boules ouvertes de rayon ε centrées aux mêmes points recouvrent $\hat{C}$. CQFD

Voici l'énoncé du critère de compacité.

Théorème 3.11 : *Soit $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces Γ -convexes uniformément convexes. Supposons qu'il existe des points $x_i \in X_i$ tels que, pour toute partie finie P de Γ , la famille de compacts $\{\text{Conv}_{X_i}(Px_i)\}$ est uniformément compacte. Alors il existe une sous-suite de $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ qui tend vers un espace Γ -convexe X_∞ pour la convergence au sens de Gromov.*

Remarquons que ce critère est un critère de compacité séquentielle. Nous serons amenés à montrer que la topologie de Gromov sur certains ensembles que nous considérons est métrisable.

Mais le principe de la démonstration est d'utiliser le principe d'extraction diagonale. Il doit être possible de modifier légèrement cette démonstration, en utilisant le théorème de Tykhonov. Nous obtiendrions ainsi un critère de compacité sur tout ensemble d'espaces Γ -convexes, du moins après l'avoir rendu séparé.

Les hypothèses de convexité ne sont peut-être pas vraiment nécessaires. Dans les espaces de longueur généraux, nous avons défini des sous-espaces convexes (voir le paragraphe suivant la Définition 2.2). Les hypothèses du critère de compacité seraient alors que les enveloppes convexes des images en nombre fini du point base sont uniformément compactes. La démonstration copierait alors celle de M. Gromov, en faisant converger les actions partielles sur des réseaux par considération des distances relatives.

4 Démonstration du critère de compacité.

Soit P une partie finie de Γ . D'après la démonstration du critère de compacité de [Gro2] page 63, quitte à extraire une sous-suite, les compacts $\text{Conv}_i(P) = \text{Conv}_{X_i}(P x_i)$ tendent vers un espace de longueur compact $K_\infty(P)$ pour la distance de Hausdorff-Gromov.

Fixons nous une suite croissante P_k de parties finies de Γ , dont la réunion est égale à Γ . Nous supposons que P_0 est réduit à l'élément neutre e du groupe. Fixons nous pour tout k et pour i suffisamment grand une $\epsilon_{k,i}$ -approximation $\mathcal{R}_{k,i}$ entre $K_\infty(P_k)$ et $\text{Conv}_i(P_k)$, avec $\epsilon_{k,i}$ tendant vers 0 quand $i \rightarrow +\infty$.

Pour i suffisamment grand, les adhérences des images de $\text{Conv}_i(P_k)$ dans $K_\infty(P_{k+1})$ par la relation $\mathcal{R}_{k+1,i}$ définissent une suite de compacts dans $K_\infty(P_{k+1})$. Mais l'ensemble des sous-espaces compacts d'un même espace métrique compact est compact pour la distance de Hausdorff-Gromov (voir par exemple [Gro2]). Comme dans [Gro2], nous pouvons donc supposer, quitte à extraire, que cette suite de compacts converge. Or deux espaces compacts à distance de Hausdorff-Gromov nulle sont isométriques.

Nous pouvons donc supposer, après extraction diagonale de la suite $\{X_i\}$, que $K_\infty(P_{k+1}) \supset K_\infty(P_k)$ de telle sorte que les adhérences des images de $\text{Conv}_i(P_k)$ dans $K_\infty(P_{k+1})$ par la relation $\mathcal{R}_{k+1,i}$ convergent vers $K_\infty(P_k)$ quand i tend vers $\rightarrow +\infty$.

Soit alors Y_∞ la réunion des compacts $K_\infty(P_k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. D'après la Proposition 3.5, l'espace Y_∞ est fortement convexe. Il suffit en effet de remarquer que les $K_\infty(P_k)$ sont strictement convexes, et que les inclusions $K_\infty(P_k) \subset K_\infty(P_{k+1})$ préservent les structures de longueur. Ceci montre au passage que l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points est compacte.

Nous voulons maintenant construire une action de Γ sur Y_∞ . Nous posons $\{x_\infty\} = K_\infty(P_0)$.

Soit $\gamma \in \Gamma$. Pour tout $k \geq k_\gamma$, la partie P_k contient γ . Choisissons un $y_{k,i}(\gamma)$ dans $K_\infty(P_k)$ tel que $y_{k,i}(\gamma) \mathcal{R}_{k,i} \gamma x_i$. Puisque $K_\infty(P_k)$ est compact, quitte à extraire, nous pouvons supposer que $y_{k,i}(\gamma)$ tend vers un $y_{k,\infty}$ quand $i \rightarrow \infty$. Les points $y_{m,\infty}$ de Y_∞ sont

en fait contenus dans un même compact, à savoir $K_\infty(P_{k_\gamma})$. En effet, le point $y_{k+1,i}(\gamma)$ tend à appartenir à $K_\infty(P_k)$ quand $i \rightarrow \infty$. Quitte à extraire la suite des $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, nous pouvons supposer que $y_{k,\infty}$ tend vers y_∞ quand $k \rightarrow \infty$. Nous posons alors $\gamma.x_\infty = y_\infty$.

Par extraction diagonale, nous définissons ainsi $\gamma.x_\infty$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Il est clair que $e.x_\infty = x_\infty$. En posant $\beta(\gamma.x_\infty) = (\beta\gamma).x_\infty$, nous définissons une action isométrique de Γ sur $\{\gamma.x_\infty, \gamma \in \Gamma\}$.

Soit $\gamma \in \Gamma$, et P une partie finie de Γ . Notons $\text{Conv}_\infty(P)$ l'enveloppe convexe de Px_∞ dans Y_∞ . Pour prolonger l'action de γ , nous allons montrer qu'il existe une isométrie γ_P de $\text{Conv}_\infty(P)$ sur $\text{Conv}_\infty(\gamma P)$ qui coïncide avec γ sur Px_∞ .

Lemme 4.1 : *Soit $\gamma \in \Gamma$, et P une partie finie de Γ . Il existe une isométrie γ_P de $\text{Conv}_\infty(P)$ sur $\text{Conv}_\infty(\gamma P)$ qui coïncide avec γ sur Px_∞ .*

L'idée de la démonstration est simple (voir Figure 2). Pour k entier suffisamment grand, P_k contient P et γP . Alors $\text{Conv}_\infty(P)$ et $\text{Conv}_\infty(\gamma P)$ sont contenues dans $K_\infty(P_k)$. Par la presque-isométrie $\mathcal{R}_{k,i}$, nous remontons $\text{Conv}_\infty(P)$ dans X_i , puis nous appliquons l'isométrie γ de X_i , puis nous redescendons dans Y_∞ . Si nous aboutissons dans $\text{Conv}_\infty(\gamma P)$, nous obtenons ainsi une presque isométrie entre $\text{Conv}_\infty(P)$ et $\text{Conv}_\infty(\gamma P)$. En utilisant le théorème d'Ascoli, nous extrayons quand $i \rightarrow +\infty$ et quand $k \rightarrow +\infty$ pour obtenir l'isométrie souhaitée.

Le problème principal consiste à garder trace des “sommets” $\gamma.x_\infty$ de $\text{Conv}_\infty(P)$.

Démonstration du Lemme 4.1 : Notons $\text{Conv}_\infty^n(P)$ (resp. $\text{Conv}_i^n(P)$) le n -squelette de l'enveloppe convexe $\text{Conv}_\infty(P)$ (resp. $\text{Conv}_i(P)$).

Lemme 4.2 : *Soient $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour k suffisamment grand, puis pour i suffisamment grand, tout point de l'image de $\text{Conv}_\infty^n(P)$ par $\mathcal{R}_{k,i}$ est à distance inférieure ou égale à ε de $\text{Conv}_i^n(P)$, et tout point de $\text{Conv}_i^n(P)$ est à distance inférieure ou égale à ε de cette image.*

Démonstration : Supposons k suffisamment grand pour que, pour tout i suffisamment grand et tout $\beta \in P$, nous ayons $\beta \in P_k$ et

$$d(\beta x_\infty, y_{k,i}(\beta)) \leq \varepsilon/4n,$$

où $y_{k,i}(\beta) \in \text{Conv}_\infty(P_k)$ est le point qui a servi (voir début de la section) à la construction de βx_∞ . Supposons de plus i suffisamment grand pour que $\varepsilon_{k,i} \leq \inf\{\mu/3, \varepsilon/4n\}$ où μ est associé à $\varepsilon/4n$ par le Lemme 3.4.

Montrons par récurrence sur s que :

(1) tout point de l'image par $\mathcal{R}_{k,i}$ de $\text{Conv}_\infty^s(P)$ est à distance inférieure ou égale à $s\varepsilon/n$ d'un point de $\text{Conv}_i^s(P)$,

(2) tout point de $\text{Conv}_i^s(P)$ est à distance inférieure ou égale à $s\varepsilon/n$ d'un point de cette image.

Soient $\alpha, \beta \in P$. Notons $z^{k,i}(\alpha)$ et $z^{k,i}(\beta)$ deux images par $\mathcal{R}_{k,i}$ de respectivement αx_∞ et βx_∞ . Notons R^i l'image par $\mathcal{R}_{k,i}$ dans X_i de la géodésique $[\alpha x_\infty, \beta x_\infty]$.

D'après la Remarque 2.3, tout point de la géodésique $[z^{k,i}(\alpha), z^{k,i}(\beta)]$ est à distance inférieure ou égale à $\varepsilon/4n + \varepsilon_{k,i} \leq \varepsilon/2n$ d'un point de la géodésique $[\alpha x_i, \beta x_i]$, et réciproquement.

Tout point w^i de R^i vérifie :

$$d(z^{k,i}(\alpha), w^i) + d(w^i, z^{k,i}(\beta)) - d(z^{k,i}(\alpha), z^{k,i}(\beta)) \leq 3 \varepsilon_{k,i} \leq \mu.$$

D'après le Lemme 3.4, tout point de R^i est donc à distance inférieure ou égale à $\varepsilon/4n$ d'un point de $[z^{k,i}(\alpha), z^{k,i}(\beta)]$. Ceci montre la première assertion pour les 1-squelettes.

Réciproquement, prenons une subdivision de pas $\varepsilon/4n$ de $[\alpha x_\infty, \beta x_\infty]$. Projetons leurs images par $\mathcal{R}_{k,i}$ sur $[z^{k,i}(\alpha), z^{k,i}(\beta)]$. Puisque les projections diminuent les distances, nous obtenons un réseau de $[z^{k,i}(\alpha), z^{k,i}(\beta)]$, de pas $\leq \varepsilon/4n + \varepsilon_{k,i}$. Donc tout point de $[z^{k,i}(\alpha), z^{k,i}(\beta)]$ est à distance $\leq 1/2 (\varepsilon/4n + \varepsilon_{k,i}) + \varepsilon/4n \leq \varepsilon/2n$ d'un point de R^i . Ceci montre la seconde assertion pour les 1-squelettes.

Maintenant, chaque niveau ajoute l'erreur du niveau précédent et l'erreur du niveau 1. CQFD

Lemme 4.3 : Soient $\varepsilon', \varepsilon > 0$ et $\{u_1, \dots, u_m\}$ un ε -réseau de $\text{Conv}_\infty(P)$. Soit k un entier suffisamment grand. Alors pour i suffisamment grand, nous avons la propriété suivante :

il existe un $(\varepsilon + \varepsilon')$ -réseau $\{z_1, \dots, z_m\}$ de $\text{Conv}_\infty(\gamma P)$ dépendant de (k, i) tel que

$$|d(u_j, u_k) - d(z_j, z_k)| \leq \varepsilon' \text{ et}$$

si $u_j \mathcal{R}_{k,i} u_j^i$ et si $z_j \mathcal{R}_{k,i} z_j^i$, alors $d(\gamma u_j^i, z_j^i) \leq \varepsilon'$.

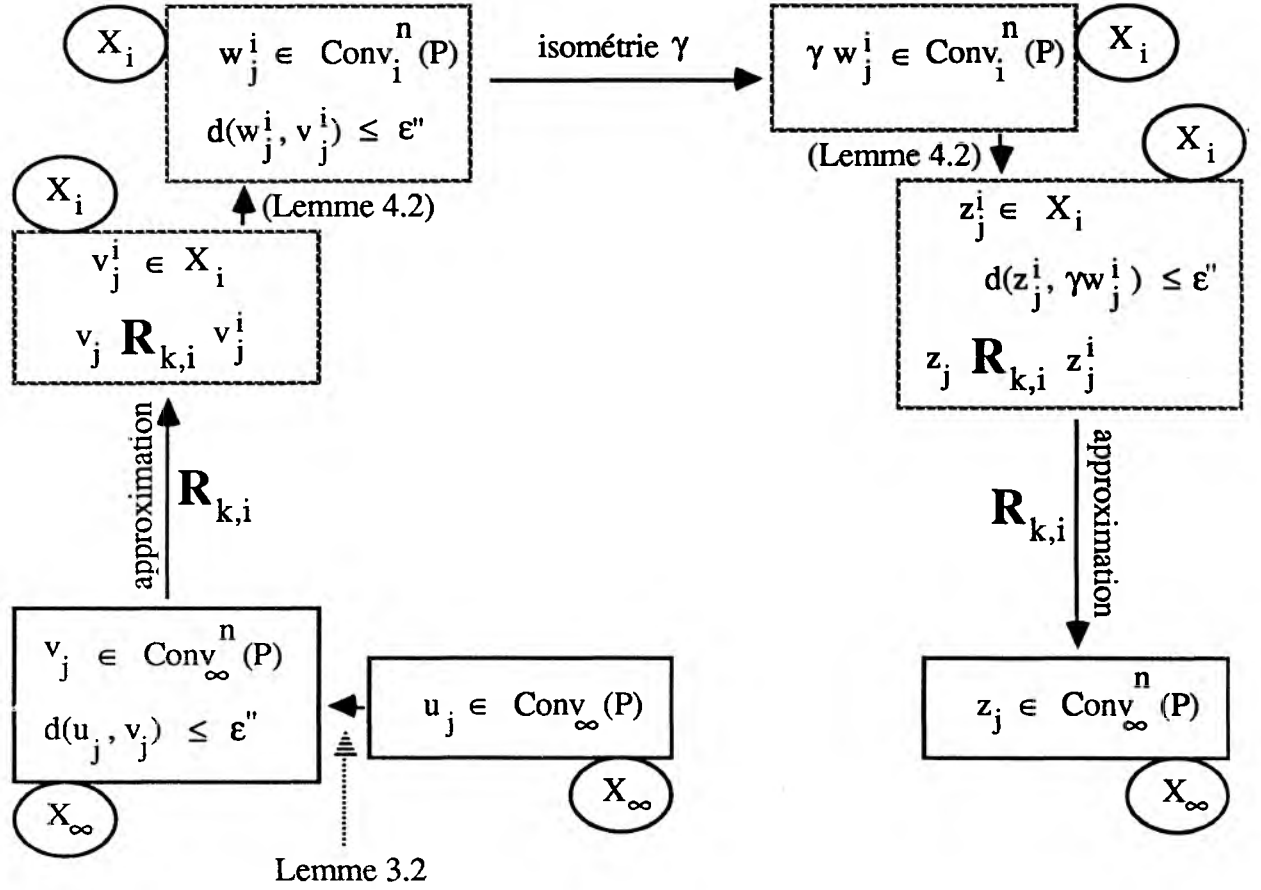


Figure 2.

Démonstration : Prenons ε'' suffisamment petit devant ε' . Soit n un entier tel que les ε'' -voisinages de $\text{Conv}_\infty^n(P)$ et $\text{Conv}_\infty^n(\gamma P)$ contiennent respectivement $\text{Conv}_\infty(P)$ et $\text{Conv}_\infty(\gamma P)$, d'après le Lemme 3.10. Soit $j \in \{1, \dots, m\}$.

Il existe donc $v_j \in \text{Conv}_\infty^n(P)$, à distance inférieure à ε'' de u_j . Notons v_j^i une image de v_j par $\mathcal{R}_{k,i}$. D'après le Lemme 4.2, pour k suffisamment grand, et pour tout i suffisamment grand, il existe $w_j^i \in \text{Conv}_i^n(P)$ à distance inférieure à ε'' de v_j^i .

L'isométrie γ de X_i respecte les n -squelettes des enveloppes convexes. Donc le point γw_j^i appartient à $\text{Conv}_i^n(\gamma P)$.

Appliquons alors la partie réciproque du Lemme 4.2. Pour k suffisamment grand, il existe un point $z_j \in \text{Conv}_\infty^n(\gamma P)$ dont une des images par $\mathcal{R}_{k,i}$, disons z_j^i , est à distance inférieure à ε'' de γw_j^i . (Voir Figure 2.)

Notons que $\mathcal{R}_{k,i}$ est une ε'' -approximation pour i suffisamment grand, et γ une isométrie. En faisant une petite chasse dans le diagramme, il est facile de voir que les conditions sont remplies. CQFD

Maintenant, nous appliquons des techniques dues à M. Gromov. Nous nous fixons un ε -réseau $\{w_1, \dots, w_m\}$. Les points $z_j = z_j(i, k, \varepsilon')$ définis ci-dessus dépendent à la fois de i , de k et de ε' . Nous extrayons quand i tend vers $+\infty$. Les points $z_j(i, k, \varepsilon')$ convergent alors vers des points $z_j(k, \varepsilon')$. Nous extrayons quand k tend vers $+\infty$. Les points $z_j(k, \varepsilon')$ convergent alors vers des points $z_j(\varepsilon')$. En prenant ε' de la forme $1/n$, la suite $z_j(\varepsilon')$ à valeurs dans le compact $\text{Conv}_\infty(\gamma P)$, converge quitte à extraire vers un point que nous noterons γw_j .

Sur le ε -réseau $\{w_1, \dots, w_m\}$, nous avons ainsi défini une application γ qui conserve les distances.

Nous prenons ensuite des réseaux finis croissants, en quantité dénombrable, dont la réunion est dense dans $\text{Conv}_\infty(P)$. Nous extrayons diagonalement pour définir leurs images. En complétant par densité, nous définissons une isométrie (surjective d'après le Lemme 4.3) γ_P de $\text{Conv}_\infty(P)$ sur $\text{Conv}_\infty(\gamma P)$, induisant γ sur $P.x_\infty$.

Ceci termine la preuve du Lemme 4.1. CQFD

Remarquons que si $P' \supset P$, alors $\gamma_{P'}$ induit γ_P entre $\text{Conv}_\infty(P)$ et $\text{Conv}_\infty(\gamma P)$.

Notons X_∞ la réunion des compacts $\text{Conv}_\infty(P)$ pour P parties finies de Γ . Nous avons ainsi défini une isométrie γ de X_∞ dans lui-même. Nous extrayons pour tous les $\gamma \in \Gamma$, de manière à avoir à notre disposition des réseaux satisfaisant les conditions du Lemme 4.3 pour toute partie finie d'éléments de Γ .

Nous avons bien défini une action isométrique de Γ sur X_∞ . En effet, le groupe Γ agit sur l'ensemble $\{\gamma.x_\infty, \gamma \in \Gamma\}$. Le résultat découle alors de la construction récursive des enveloppes convexes (voir Définition 3.9).

Il nous reste à montrer que les espaces X_i tendent bien vers X_∞ pour la topologie de Gromov. Le complété de X_∞ est aussi un espace Γ -convexe (voir section précédente) et sera aussi limite des X_i (voir section 1).

Or ceci découle des Remarques 1.4 et 1.5, en commençant par approcher un compact donné K de X_∞ par une partie d'un des réseaux finis contenu dans un $\text{Conv}_\infty(P)$ qui ont servi à la construction des isométries γ .

Ceci termine la démonstration du Théorème 3.11. CQFD

Nous définirons dans l'Annexe une topologie de Gromov “pointée” entre espaces Γ -convexes strictement convexes pointés, en exigeant que les ε -approximations “conservernt” les points bases. La technique employée dans la démonstration ci-dessus permet aussi de montrer que la topologie de Gromov “pointée” peut être rendue canoniquement séparée (voir Annexe, § 2).

Chapitre 2.

Un groupe Γ de type fini étant fixé, nous nous intéressons dans ce chapitre à l'espace des actions isométriques de Γ sur des arbres réels. Les actions seront toujours des actions isométriques à gauche.

Nous allons d'abord étudier la structure locale (§ 2) et globale (§ 3) des arbres réels. Plus précisément, nous regardons la manière relative dont sont placés les axes de translation et les points fixes de deux éléments de Γ . Ceci nous permettra de montrer (§ 4) que les actions minimales irréductibles sont en bijection avec leurs fonctions “distance de translation”. Nous montrerons (§ 4) la continuité pour la topologie des axes de certaines fonctions exprimant des propriétés géométriques des axes de translation.

Enfin, nous démontrerons (§ 5) que la topologie de Gromov et la topologie des axes coïncident sur $\mathcal{T}(\Gamma)$. Nous utiliserons (§ 6) le critère de compacité (Chapitre I, Théorème 3.11) pour montrer la compacité de $\mathcal{PST}(\Gamma)$.

Les cinq premiers paragraphes de ce chapitre a été écrit simultanément à l'article [CM], et indépendamment. Certains des résultats se retrouvent ici. Nous ne nous sommes aperçus que tout récemment que R. Alperin et H. Bass [AB] ont aussi étudié la manière relative dont sont placés les axes de translation et les points fixes de deux éléments de Γ .

1 Arbres réels.

Pour les adeptes de la combinatoire, et les informaticiens, un graphe est la donnée d'un ensemble X (les sommets), d'un ensemble Y (les arêtes) et de deux applications. La première application va de Y dans $X \times X$. Elle associe à une arête le couple de ses extrémités. La seconde est une involution de Y dans Y sans point fixe, qui échange les extrémités. Elle associe à une arête son arête inverse.

Un chemin est une suite d'arêtes, telle que la seconde extrémité d'une arête est la première extrémité de l'arête suivante. Un aller-retour est un chemin constitué d'une arête et de son arête inverse.

Un arbre est un graphe connexe (entre deux points, il passe un chemin), non vide et sans circuit (chemin d'un point à lui-même sans aller-retour).

Voir par exemple [Ser] pour d'autres informations.

Les arbres sont un moyen de lier théorie des groupes et géométrie. Les résultats de J. Stallings [Sta1] [Sta2] [Sta3], de H. Bass et J. P. Serre [Ser] sur les actions de groupes sur les arbres en sont un exemple. Ces résultats ont donné naissance à de nouvelles méthodes en théorie combinatoire des groupes (voir par exemple [CS] [Dun1] [Dun2]).

Les travaux de J. Morgan et P. Shalen [MS1] [MS2], J. Morgan [Mor], J. Morgan et J. P. Otal [MO], de M. Culler et K. Vogtmann [CV] et de W. Thurston [Thu2] en topologie de petite dimension, ont amené à définir une généralisation des arbres combinatoires, les arbres réels.

Définition 1.1 : Un arbre réel est un espace métrique T tel que pour tous x, y de T , il existe une unique arc entre x et y , qui est isométrique à un intervalle de $\mathbb{R}$. Nous noterons $[x, y]$ cet arc.

Par exemple, les 1-complexes simpliciaux connexes, simplement connexes sont des arbres réels. Les réalisations géométriques des arbres combinatoires définis plus haut le sont aussi.

La principale difficulté vient du fait qu'un arbre réel n'est pas nécessairement localement compact.

Prenons par exemple la réunion d'un peigne de Dirac sur un Cantor de l'intervalle $[0,1]$, et de cet intervalle. Munissons-le de la distance qui en fait un espace de longueur (voir Chapitre I, § 2), et qui induit la distance usuelle sur les dents du peigne et sur $[0, 1]$. Nous obtenons ainsi un arbre réel non localement compact.

Un autre exemple est l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de la distance "S.N.C.F". Celle-ci est la distance euclidienne si les deux points sont sur un même rayon issu de l'origine. Sinon, elle est égale à la somme des distances euclidiennes à l'origine sinon.

Nous serons amenés à supposer que nos arbres réels sont complets. Cela exclut les petits problèmes du type des intervalles ouverts. Ce n'est pas une restriction gênante, car le complété d'un arbre réel est encore un arbre réel. De plus, aussi bien la topologie des axes (Définition 4.4) que la topologie de Gromov (Introduction et Chapitre I, § 1) sont incapables de faire la différence entre un arbre réel muni d'une action d'un groupe et son complété.

2 Propriétés géométriques des axes de translation.

Rappelons tout d'abord des notations et résultats de l'article [MS1] de J. Morgan et P. Shalen.

Dans un espace métrique, un **segment** est par définition un sous-ensemble isométrique à un intervalle de l'espace des réels $\mathbb{R}$. Nous appellerons **rayon** un segment isométrique à $[0, +\infty[$.

Soit γ une isométrie de l'arbre réel T dans lui-même. Nous appellerons **axe de translation** de γ , et noterons A_γ un segment de T vérifiant :

- A_γ est invariant par γ et isométrique à $\mathbb{R}$,
- la restriction de γ à A_γ est une translation différente de l'identité.

La distance $d(x, \gamma x)$ ne dépend ni de l'isométrie choisie entre A_γ et $\mathbb{R}$, ni du point x de A_γ . Nous l'appellerons **distance de translation** de γ , et nous la noterons $l_T(\gamma)$, ou $l(\gamma)$ s'il n'y a pas de confusion possible.

Une isométrie de T sans point fixe dans T est dite **hyperbolique**. Une isométrie de T qui n'est pas hyperbolique est dite **elliptique**. Cette terminologie est inspirée par une analogie entre les isométries d'un arbre réel et celles de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$. Nous expliquerons cette analogie au Chapitre IV.

***Théorème 2.1 (Morgan-Shalen [MS1]) :** Soit γ une isométrie d'un arbre réel T non vide. Alors γ possède un axe de translation si et seulement si γ est hyperbolique. De plus, si A_γ est un axe de translation de γ , il est unique et*

$$l_T(\gamma) = \min \{ d(x, \gamma x) / x \in T \}$$

$$A_\gamma = \{ x \in T \mid d(x, \gamma x) = l_T(\gamma) \}.$$

Si γ est une isométrie elliptique de T , nous posons $l_T(\gamma) = 0$. Notons qu'une isométrie γ de T vérifie $l_T(\gamma) = 0$ si et seulement si T contient un point fixe de γ .

Construction 2.2 : Soit γ une isométrie hyperbolique de l'arbre réel non vide T . Une méthode de construction de l'axe de translation A_γ de γ est la suivante [MS1] :

Soit x un élément de T , et $[x, \gamma x]$ le segment entre x et γx . Alors l'intersection de $[x, \gamma x]$ et de $\gamma^{-1}([x, \gamma x])$ est un segment compact $[x, x_1]$. Il est démontré dans [MS1] que γx_1 appartient à $[x, \gamma x]$, que γx_1 n'appartient pas à $[x, x_1]$ et que le segment $[x_1, \gamma x_1]$ est contenu dans A_γ . Donc $l_T(\gamma) = d(x_1, \gamma x_1)$. (Voir Figure 1.)

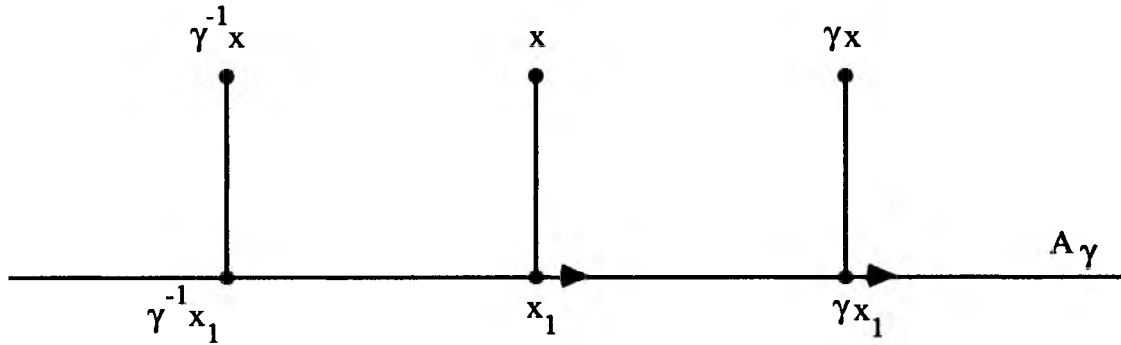


Figure 1.

Soit $y \in T$ et $\vec{v}$ le germe d'orientation en y du segment $[y, \gamma y]$ de y vers γy . Si l'image de $\vec{v}$ par γ n'est pas le germe d'orientation en γy du segment $[\gamma y, y]$ de γy vers y , alors le segment $[y, \gamma y]$ est inclus dans A_γ , et $l_T(\gamma) = d(y, \gamma y)$.

Jusqu'à la fin de cette section, nous noterons T un arbre réel fixé. Nous allons maintenant étudier la position relative des axes de translation et points fixes d'un couple d'isométries (γ, δ) de T . Nous noterons $\gamma\delta$ la composée $\gamma\delta$ des deux isométries.

Remarque 2.3 : Si γ est une isométrie hyperbolique de T , alors pour tout $n \neq 0$, γ^n est aussi hyperbolique, de même axe que γ . L'image de l'axe de translation A par une isométrie δ de T est l'axe de translation de $\delta\gamma\delta^{-1}$, et $l_T(\gamma) = l_T(\delta\gamma\delta^{-1})$.

Démonstration : L'isométrie γ^n translate sur A_γ . Par unicité (Théorème 2.1), γ^n a même axe de translation que γ . De plus, si $x \in A_\gamma$, alors

$$d(\delta x, \delta \gamma \delta^{-1} \delta x) = d(x, \gamma x) = \min_{y \in T} d(y, \gamma y) = \min_{y \in T} d(\delta^{-1} y, \gamma \delta^{-1} y) = \min_{y \in T} d(y, \delta \gamma \delta^{-1} y).$$

CQFD

Tout sous-ensemble connexe fermé de T est un sous-arbre de T . En effet, c'est un convexe (i.e. le segment joignant deux points de cet ensemble est contenu dans celui-ci) (voir Chapitre I, § 2). Soient A et B deux parties connexes de T . Supposons A et B fermées, non vides, et d'intersection vide. Alors il existe un unique segment compact $a = [x, y]$ tel que $A \cap a = \{x\}$ et $B \cap a = \{y\}$. Nous l'appellerons **arc connectant** entre A et B . Le point x est par définition la **projection** de B sur A .

***Remarque 2.4 :** Si x, y, z sont des points de T , alors $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$ si et seulement si y appartient au segment $[x, z]$.*

En particulier, l'ensemble des points fixes d'une isométrie elliptique de T est un fermé connexe.

De plus, si δ est une isométrie elliptique de T , alors le milieu du segment $[x, \delta x]$ est fixe par δ pour tout x dans T .

Démontrons cette dernière assertion. Si y est un point fixe de δ , notons z le point de T tel que $[x, z] = [x, y] \cap [y, \delta x]$. Alors z est fixe par δ , et appartient au segment $[x, \delta x]$. Puisque $d(x, z) = d(\delta x, \delta z) = d(\delta x, z)$, le point z est le milieu de $[x, \delta x]$. CQFD

Nous dirons qu'un segment de T est **non dégénéré** s'il est non vide, et non réduit à un point. Deux axes de translation seront dit **birayonnants** si leur intersection est exactement un rayon.

Soient x, y deux points distincts de T . Nous dirons qu'une isométrie γ de T **translate** x vers y si le segment $[x, y]$ est contenu dans l'axe de γ et si γx est situé du même coté que y sur A_γ par rapport à x .

Proposition 2.5 : Soient γ, δ deux isométries hyperboliques de T .

(1) Si $A_\gamma \cap A_\delta = \emptyset$ et D est la longueur de l'arc connectant S entre A_γ et A_δ , alors S est contenu dans l'axe de $\gamma\delta$ et l'isométrie $\gamma\delta$ translate $S \cap A_\delta$ vers $S \cap A_\gamma$. Nous avons

$$l(\gamma\delta) = l(\gamma) + l(\delta) + 2D.$$

(2) Supposons que $A_\gamma \cap A_\delta$ est un segment compact $[x, y]$ non dégénéré.

i) Si les sens de translation de γ et δ sur $[x, y]$ coïncident, alors

$$l(\gamma\delta) = l(\gamma) + l(\delta) \text{ et } A_\gamma \cap A_\delta \subset A_{\gamma\delta}.$$

ii) Si les sens de translation de γ et δ sont opposés, et D est la longueur de $[x, y]$, alors

$$l(\gamma\delta) = l(\gamma) + l(\delta) - 2D \quad \text{si } l(\gamma) > D \text{ et } l(\delta) > D,$$

$$l(\gamma\delta) = |l(\gamma) - l(\delta)| \quad \text{sinon.}$$

(3) Si les axes de translation A_δ et A_γ sont confondus ou birayonnants, alors

$$l(\gamma\delta) = l(\gamma) + l(\delta) \text{ si } \gamma \text{ et } \delta \text{ traduisent dans le même sens,}$$

$$l(\gamma\delta) = |l(\gamma) - l(\delta)| \text{ sinon.}$$

Démonstration : Remarquons tout d'abord que si S est un segment ne rencontrant l'axe de translation A_γ qu'en un seul point x , alors γS est un segment disjoint de S , ne rencontrant A_γ qu'au point γx . Ceci découle en effet de la définition d'un arbre et de la Construction 2.2.

(1) Posons $S = [x, y]$ avec $A_\gamma \cap S = \{x\}$ et $A_\delta \cap S = \{y\}$.

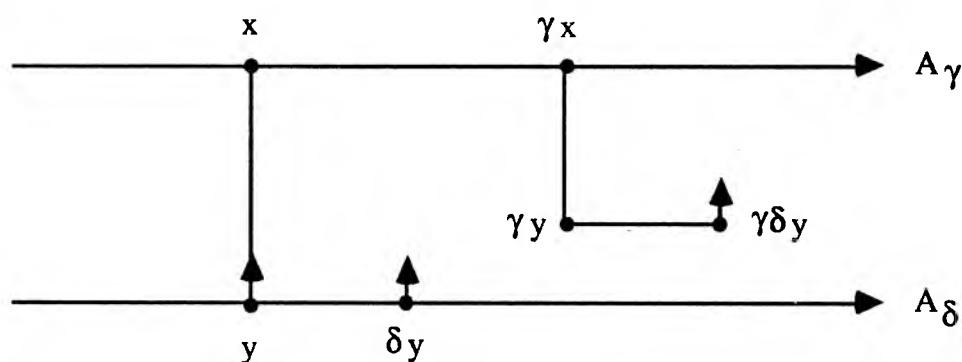


Figure 2.

D'après la remarque préliminaire, le chemin de y à $\gamma(\delta y)$ consiste à aller de y à x par S , de x à γx suivant A_γ , de γx à γy par γS , et de γy à $\gamma\delta y$ suivant γA_δ . Donc

$$d(y, \gamma\delta y) = l(\gamma) + l(\delta) + 2D.$$

En étudiant l'image d'un germe d'orientation en y du segment $[y, \gamma\delta y]$ de y vers $\gamma\delta y$, le résultat découle de la Construction 2.2.

(2) Supposons tout d'abord que les sens de translation de γ et δ coïncident sur $[x, y]$. Quitte à permuter x et y , nous pouvons supposer que γ et δ traduisent x vers y . Soit D la longueur du segment $[x, y]$.

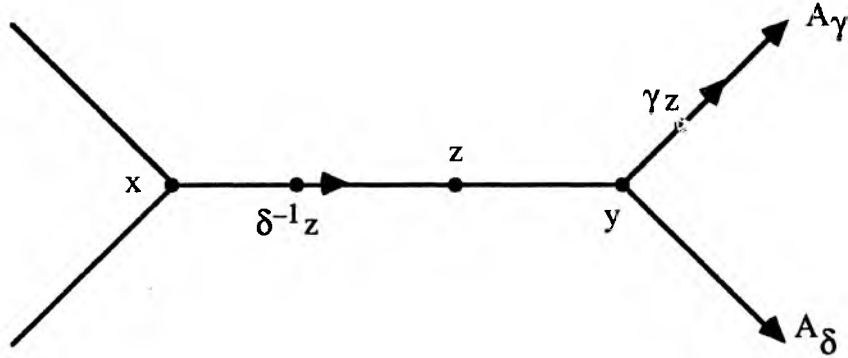


Figure 3.

Pour tout point z du segment $[x, y]$, nous avons

$$d(\delta^{-1}z, \gamma z) = d(\delta^{-1}z, z) + d(z, \gamma z) = l(\gamma) + l(\delta).$$

Dans la Figure 3, nous avons supposé par exemple que $d(x, z) > l(\delta)$ et que $d(z, y) < l(\gamma)$. Mais la situation est semblable dans les autres cas. Le résultat découle alors de la Construction 2.2, en regardant les germes d'orientation. Tout point du segment $[x, y]$ appartient en particulier à l'axe de translation de $\gamma\delta$.

Supposons maintenant que les sens de translation diffèrent. Nous pouvons supposer que γ translate x vers y . Dans chacun des cas suivants, nous regardons l'image par $\gamma\delta$ du germe de direction en y du segment $[y, \gamma\delta y]$ de y vers $\gamma\delta y$. Le résultat s'en déduit.

Cas 1 : Si $l(\gamma) > D$, $l(\delta) > D$, alors x appartient au segment $[\gamma^{-1}y, \delta y]$. Donc

$$\begin{aligned} d(y, \gamma\delta y) &= d(\gamma^{-1}y, \delta y) = d(\gamma^{-1}y, x) + d(x, \delta y) \\ &= (l(\gamma) - D) + (l(\delta) - D) = l(\delta) + l(\gamma) - 2D \quad (\text{voir Figure 4}). \end{aligned}$$

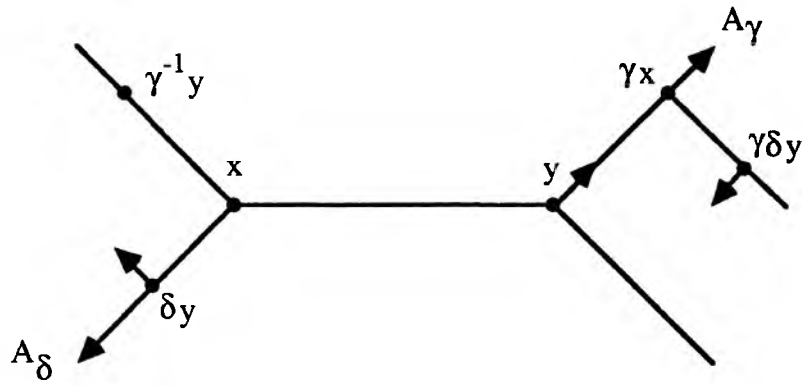


Figure 4.

Cas 2 : Si $l(\gamma) \leq D$, $l(\delta) \leq D$, alors en supposant par exemple $l(\delta) \leq l(\gamma)$, nous avons (voir Figure 5) :

$$d(y, \gamma\delta y) = d(\gamma^{-1}y, \delta y) = l(\gamma) - l(\delta).$$

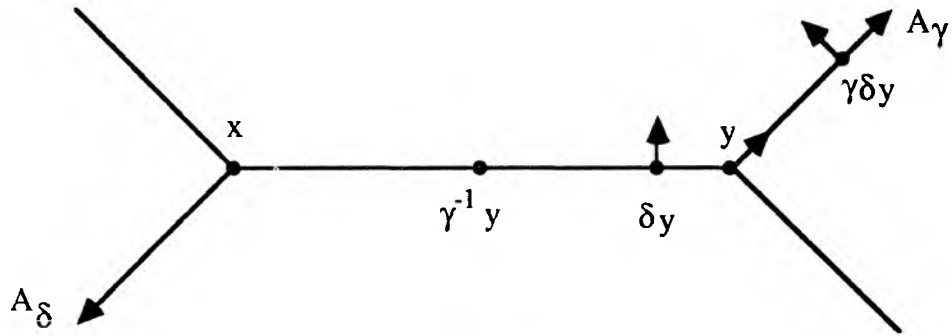


Figure 5.

Cas 3 : Sinon, nous pouvons supposer par exemple que $l(\gamma) \leq D$ et $l(\delta) > D$. Alors γx appartient au segment $[x, y]$, et x à $[\delta y, y]$. (Voir Figure 6.) Donc

$$\begin{aligned} d(y, \gamma\delta y) &= d(y, \gamma x) + d(\gamma x, \gamma\delta y) \\ &= (D - l(\gamma)) + (l(\delta) - D) = l(\delta) - l(\gamma). \end{aligned}$$

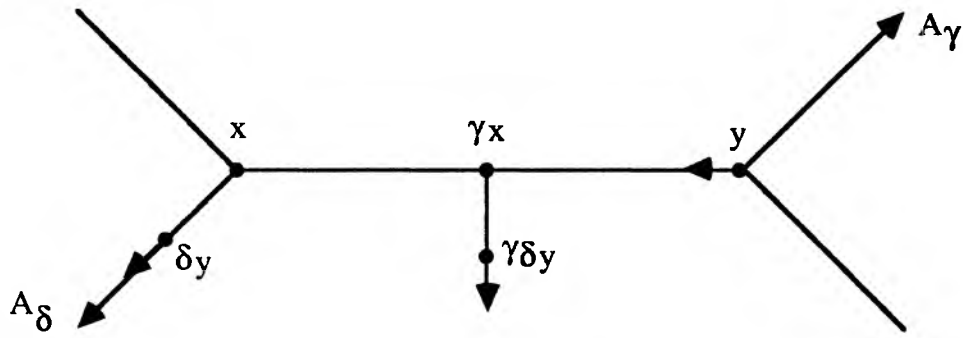


Figure 6.

(3) La troisième partie de l'énoncé est évidente. Notons que l'axe de $\gamma\delta$ rencontre ceux de γ et δ en un rayon au moins. CQFD

Remarquons que si γ et δ sont des isométries hyperboliques de T , d'axes de translation disjoints, alors les composées de deux isométries parmi $\{\gamma, \delta, \gamma^{-1}, \delta^{-1}\}$ ont même distance de translation.

Considérons maintenant une paire d'isométries dont l'une est hyperbolique et l'autre elliptique.

Proposition 2.6 : Soit γ une isométrie hyperbolique de T , et δ une isométrie elliptique.

(1) Supposons que A_γ contient au moins un point fixe de δ . Notons (Remarque 2.3) que $\delta\gamma\delta^{-1}$ est une isométrie hyperbolique de T . Alors l'intersection de $A_{\delta\gamma\delta^{-1}}$ et A_γ est non vide, et contient tous les points fixes de δ sur A_γ .

(i) Si $A_{\delta\gamma\delta^{-1}}$ et A_γ sont confondus, alors ou bien δ est l'identité sur A_γ et $l(\gamma\delta) = l(\gamma)$, ou bien δ est la symétrie par rapport à l'unique point fixe de δ sur A_γ et $l(\gamma\delta) = 0$.

(ii) Si $A_{\delta\gamma\delta^{-1}}$ et A_γ se coupent en un segment compact, notons celui-ci $[x, y]$ de telle sorte que si $x \neq y$, alors l'isométrie γ translate x vers y .

* Si $x = y$, alors $l(\gamma\delta) = l(\gamma)$.

* Si $x \neq y$, alors

– ou bien γ et $\delta\gamma\delta^{-1}$ traduisent dans le même sens sur $A_{\delta\gamma\delta^{-1}} \cap A_\gamma$, et tous les points de ce segment sont fixes. Alors $l(\gamma\delta) = l(\gamma)$.

– ou bien γ et $\delta\gamma\delta^{-1}$ traduisent en sens opposés sur $A_{\delta\gamma\delta^{-1}} \cap A_\gamma$, et ce segment contient un seul point fixe z de δ . Alors

$$l(\gamma\delta) = 0 \text{ si } l(\gamma) \leq 2d(x, z)$$

$$l(\gamma\delta) = l(\gamma) - 2d(x, z) \text{ sinon.}$$

(iii) La dernière possibilité est que $A_{\delta\gamma\delta^{-1}}$ et A_γ se coupent en un rayon R_∞ d'extrémité x .

* Si γ et $\delta\gamma\delta^{-1}$ traduisent dans le même sens sur R_∞ , alors tous les points de ce segment sont fixes et $l(\gamma\delta) = l(\gamma)$.

* Sinon γ et $\delta\gamma\delta^{-1}$ traduisent en sens opposés sur R_∞ . Ce segment contient alors un seul point fixe z de δ . Si x n'appartient pas à R_∞ , on a $l(\gamma\delta) = 0$. Sinon,

$$l(\gamma\delta) = 0 \text{ si } l(\gamma) \leq 2d(x, z)$$

$$l(\gamma\delta) = l(\gamma) - 2d(x, z) \text{ sinon.}$$

(2) Supposons que A_γ ne contient pas de point fixe de δ . Alors

$$l(\gamma\delta) = l(\gamma) + 2 \min_{x \text{ point fixe de } \delta} d(x, A_\gamma).$$

Démonstration : La preuve de (1.i) est immédiate (Remarques 2.3, 2.4).

Démontrons (1.ii). Notons z un point fixe de δ sur A_γ . Alors le point z appartient à $[x, y] = A_\gamma \cap A_{\delta\gamma\delta^{-1}}$.

Supposons que $x \neq y$. Rappelons que γ translate par hypothèse x vers y . Pour tout $w \in [x, y]$, nous noterons $]w, +\infty[_\gamma$ (resp. $] -\infty, w[_\gamma$) la demi-droite ouverte de A_γ limitée par w , ne contenant pas x (resp. y) et contenant y (resp. x). Nous noterons aussi $]w, +\infty[_{\delta\gamma\delta^{-1}}$ (resp. $] -\infty, w[_{\delta\gamma\delta^{-1}}$) la demi-droite ouverte de $A_{\delta\gamma\delta^{-1}}$ limitée par w , ne contenant pas x (resp. y) et contenant y (resp. x).

Si l'isométrie δ envoie $]z, +\infty[_\gamma$ sur $]z, +\infty[_{\delta\gamma\delta^{-1}}$, alors le point y est fixe par δ (Remarque 2.4). De plus, elle envoie aussi $] -\infty, z[_\gamma$ sur $] -\infty, z[_{\delta\gamma\delta^{-1}}$, donc x est fixe. D'après la Remarque 2.4, l'ensemble des points fixes de δ sur A_γ est un segment. Les points de $[x, y]$ sont alors fixés par δ . Les isométries γ et $\delta\gamma\delta^{-1}$ traduisent alors dans le même sens sur $[x, y]$. Voir Figure 7.

Dans le cas contraire, l'isométrie δ envoie $]z, +\infty[_\gamma$ sur $] -\infty, z[_{\delta\gamma\delta^{-1}}$ et $] -\infty, z[_\gamma$ sur $]z, +\infty[_{\delta\gamma\delta^{-1}}$. Le point z est alors le seul point fixe du segment $[x, y]$. Les isométries γ et $\delta\gamma\delta^{-1}$ traduisent en sens opposés sur $[x, y]$. Voir Figure 8.

Supposons tout d'abord que tous les points de $[x, y]$ sont fixés par δ . En étudiant l'image par $\gamma\delta$ d'un germe d'orientation en x de x vers $\gamma\delta x$, nous avons $l(\gamma\delta) = d(x, \gamma x) = l(\gamma)$. Notons que si $x = y$, nous avons de même $l(\gamma\delta) = l(\gamma)$.

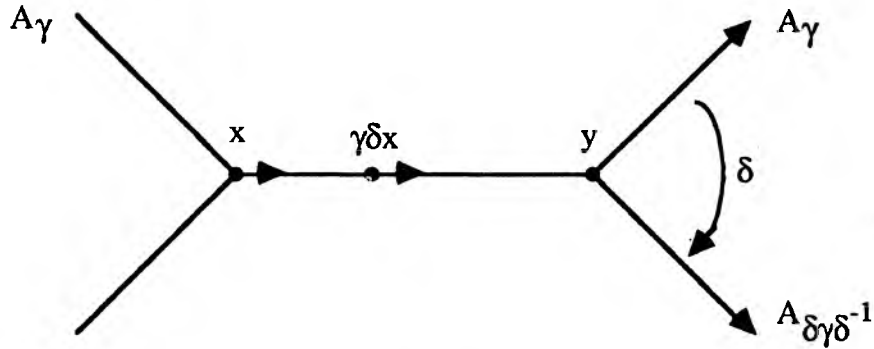


Figure 7.

Supposons maintenant que $x \neq y$ et que z est le seul point fixe de δ sur A_γ .

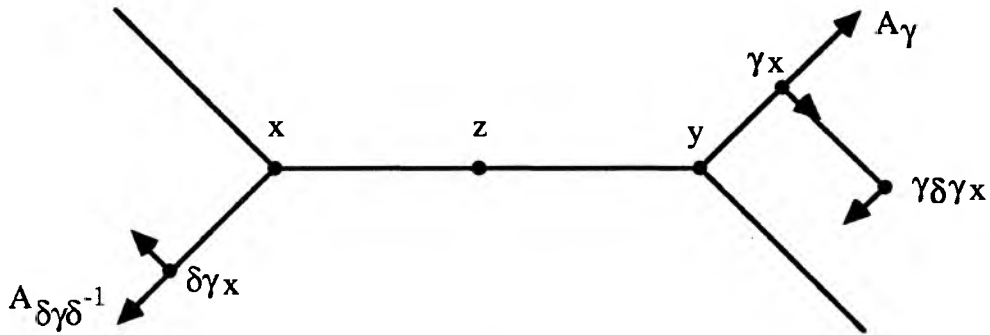


Figure 8.

* Si $l(\gamma) \leq 2d(x, z)$, alors le point de A_γ à distance $1/2 l(\gamma)$ de z , situé du côté opposé à x par rapport à z , est fixe par $\gamma\delta$. En effet, son image par δ appartient au segment $[x, z]$. Donc $l(\gamma\delta) = 0$.

* Si $l(\gamma) > 2d(x, z)$, étudions l'image de γx par $\gamma\delta$. Le point x appartient au segment $[\delta\gamma x, z]$. Donc

$$d(\gamma x, \gamma\delta\gamma x) = d(x, \delta\gamma x) = d(\delta\gamma x, z) - d(x, z) = d(\gamma x, z) - d(x, z) = l(\gamma) - 2d(x, z).$$

En étudiant les germes d'orientation (voir Construction 2.2), nous avons donc

$$l(\gamma\delta) = d(\gamma x, \gamma\delta\gamma x) = l(\gamma) - 2d(x, z).$$

Dans la Figure 8, nous supposons que $y \in [z, \gamma x]$. Mais si $\gamma x \in [z, y]$, le dessin est similaire.

La preuve de (iii) est une simple variante de la précédente en envoyant l'un des deux points x, y à l'infini.

Montrons maintenant (2). Donnons nous x un point fixe de δ . Notons y la projection de x sur A_γ . D'après la Construction 2.2, l'image du segment $[x, y]$ par γ est un segment rencontrant A_γ en $\{\gamma y\}$. Le segment $[x, \gamma y]$ rencontre son image par δ en un segment de la forme $[x, z]$. (Voir Figure 9.) Tous les points de ce segment sont alors fixés par δ (Remarque 2.4). Par hypothèse, le point z appartient donc au segment $[x, y] \setminus \{y\}$. En étudiant les germes d'orientation, l'axe de translation de $\gamma\delta$ contient le segment $[z, \gamma\delta z]$ (voir Construction 2.2) et

$$l(\gamma\delta) = l(\gamma) + 2 d(z, A_\gamma).$$

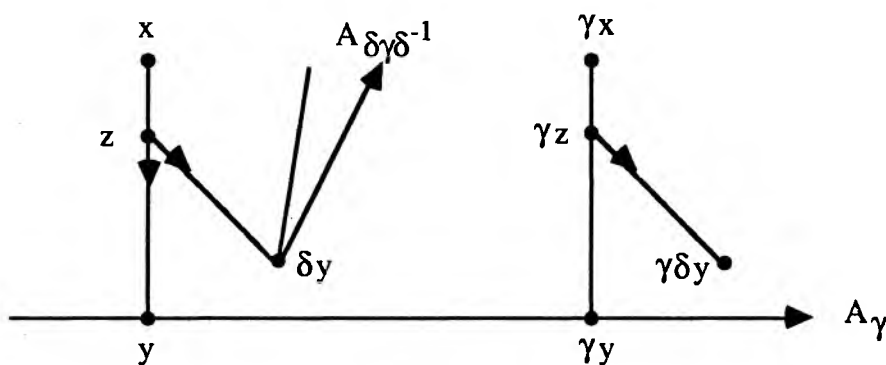


Figure 9.

Le point z est le point fixe de δ le plus proche de A_γ . En effet, supposons que x' est un point fixe de δ . Alors le segment $[z, x']$ fixé par δ d'après la Remarque 2.4, ne rencontre $[z, y]$ qu'au point z . Sinon, il existerait un point fixe de δ sur le segment $[z, y] \setminus \{z\}$. Ceci contredirait la construction de z . Donc $d(x', A_\gamma) \geq d(z, y)$. CQFD

Etudions maintenant le cas de deux isométries elliptiques.

Proposition 2.7 : Soient γ, δ deux isométries elliptiques de T . Alors

$$l(\gamma\delta) = 2 \min_{x, y} d(x, y),$$

pour x point fixe de δ et y point fixe de γ .

De plus, si les ensembles des points fixes de γ, δ sont disjoints, alors le segment connectant entre ces deux connexes est contenu dans l'axe de $\gamma\delta$.

Démonstration : Si γ et δ ont un point fixe commun, le résultat est évident.

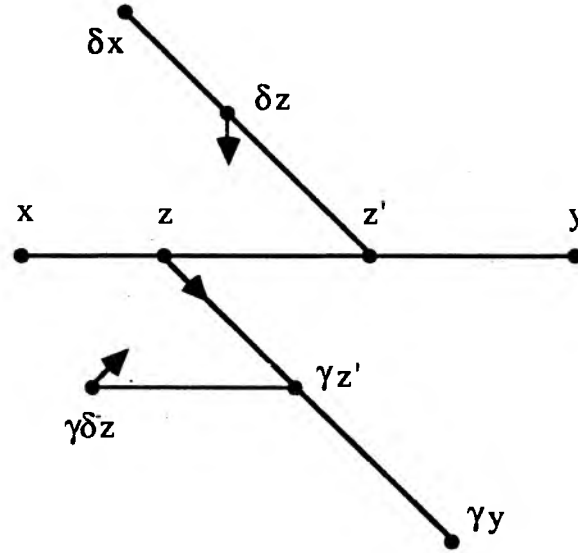


Figure 10.

Sinon, notons x (respectivement y) un point fixe de γ (respectivement δ) et S le segment $[x, y]$. Alors $\gamma S \cap S$ est un segment $[x, z]$ fixe par γ et $\delta S \cap S$ un segment $[y, z']$ fixe par δ . Les isométries γ et δ n'ont pas de point fixe commun. Donc les segments $[x, z]$ et $[y, z']$ ne se rencontrent pas (voir Figure 10).

Nous avons alors $l(\gamma\delta) = d(z, \gamma\delta z) = 2d(z, z')$ car z' est le milieu du segment $[z, \delta z]$ (Remarque 2.4). Ceci montre que la distance $d(z, z')$ ne dépend pas des points fixes x et y , et achève la démonstration. CQFD

3 Actions minimales et irréductibles.

Dans toute la suite du Chapitre II, nous notons Γ un groupe de type fini fixé. Nous allons restreindre notre étude à une certaine classe d'arbres réels munis d'actions de Γ .

Définition 3.1 : Nous dirons que Γ agit *minimalement* sur l'arbre réel T si les seuls sous-arbres fermés de T invariants par Γ sont $\emptyset$ et T .

*Un bout d'un arbre réel T est une classe d'équivalence de rayons de T , où deux rayons sont identifiés s'ils se rencontrent en un rayon. Nous dirons que l'action de Γ sur un arbre réel T est **irréductible** s'il n'existe pas de bout de T fixé par tout élément de Γ .*

Si nous n'avions pas l'intention de travailler avec des espaces métriques complets, nous pourrions obtenir les mêmes résultats (arbre réel déterminé par sa fonction distance de translation (Remarque 5.5) ; égalité des topologies des axes et de Gromov (Théorèmes 5.1 et 5.3)) en définissant une action minimale comme n'ayant pas de sous-arbre invariant autre que l'ensemble vide et l'arbre réel tout entier.

Notons que par tout point d'un arbre réel passe un rayon appartenant à un bout donné. Pour une généralisation, voir Chapitre IV, § 1.

Nous dirons que l'action est **réductible** si elle n'est pas irréductible. (Voir [CM] pour des compléments sur les arbres réductibles.) Si l'action est réductible, alors un rayon appartenant à un bout fixé par Γ rencontre tous les axes de translation en un rayon. En fait, les seuls bouts de T fixés par une isométrie hyperbolique γ sont les bouts de son axe de translation A_γ . Deux axes de translation sont alors confondus ou birayonnants.

Des exemples d'actions minimales (et en général irréductibles dans l'Exemple 3.3) non triviales sont obtenus de la manière suivante (voir aussi [MS1] [MO]).

Nous notons M une variété compacte connexe orientée de dimension n , de bord ∂M éventuellement non vide. Nous noterons $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ un revêtement universel de M , et $\Pi_1(M)$ son groupe du revêtement. Les constructions que nous allons faire ne dépendent que modulo isométrie du point base.

Une **variété à poids** est une variété dont chaque composante connexe est munie d'un nombre réel strictement positif. Une hypersurface compacte S est **proprement plongée** dans M si elle est plongée dans M et rencontre transversalement ∂M en son bord : $S \cap \partial M = \partial S$.

La définition suivante généralise en dimension n la notion d'arbre simplicial associé à un système de courbes essentielles d'une surface [MS1].

Définition 3.2 : Soit S une hypersurface à poids compacte proprement plongée dans M . Notons $\tilde{S} = \pi^{-1}(S)$. Nous appellerons **arbre dual** à S le 1-complexe simplicial T ainsi défini. Les arêtes de T sont les composantes connexes de $\tilde{S}$. Les sommets de T sont les composantes connexes de $\tilde{M} \setminus \tilde{S}$. Une arête a possède pour sommet s et s' si les adhérences de s et s' dans $\tilde{M}$ contiennent a . De plus, la longueur d'une arête est égale au poids de la composante connexe de $\tilde{S}$ correspondante.

L'arbre dual à une surface S est naturellement munie d'une action (simpliciale) par isométrie de $\Pi_1(M)$. Remarquons que le stabilisateur d'une arête représentant la composante connexe $\tilde{s}$ de $\tilde{S}$ est précisément $\text{Im}(\Pi_1(\pi(\tilde{s})) \rightarrow \Pi_1(M))$.

Exemple 3.3 (J. Morgan, P. Shalen) : Soit M une surface compacte, sans bord, connexe, orientée. Soit S une réunion finie de cercles à poids plongés dans M . Alors l'arbre dual à S est un arbre simplicial minimal non dégénéré, et irréductible si le genre est supérieur ou égal à 2.

Démonstration : Les composantes connexes de $\pi^{-1}(S)$ séparent l'espace simplement connexe $\tilde{M}$. Donc T est un arbre simplicial non vide, non réduit à un point.

Montrons que l'arbre T est réunion de ses axes de translation. La Proposition 3.7 conclura alors à la minimalité.

En effet, fixons nous une composante γ de S . Alors il existe une courbe fermée simple γ' telle que :

- le nombre d'intersections géométriques est 1 ou 2.
- la courbe γ' n'est pas homotope à une courbe disjointe de γ .

Celle-ci s'obtient de la manière suivante.

Si γ ne sépare pas M , alors γ' est une courbe joignant un "coté" de γ à l'autre. Si γ sépare M , notons M_1, M_2 les deux composantes connexes de $M \setminus \gamma$. Notons que M_i ne peut être un disque, ni un anneau. Donc $\Pi_1(M_i, \partial M_i) \neq 0$ pour $i = 1, 2$.

Nous prenons alors pour γ' une courbe fermée simple formée d'un arc non trivial dans $\Pi_1(M_1, \partial M_1)$ suivi d'un arc non trivial dans $\Pi_1(M_2, \partial M_2)$.

L'arête représentée par une composante connexe de $\pi^{-1}(\gamma)$ est alors contenue dans l'axe de translation d'un des conjugués de γ' dans $\Pi_1(M)$.

Le stabilisateur d'un segment non dégénéré est cyclique. En effet, le stabilisateur de l'arête représentée par une des composante de $\pi^{-1}(\gamma)$ est (modulo conjugaison) engendrée par la classe de γ dans $\Pi_1(M)$.

Si le genre est supérieur ou égal à deux, l'action est irréductible, car $\Pi_1(M)$ contient un groupe libre de rang 2 (Proposition 3.9).

Notons que dans le cas du tore, l'arbre dual est nécessairement une droite, dont les deux bouts sont fixés par tout le groupe. CQFD

Exemple 3.4 : Nous notons M une variété compacte connexe orientée de dimension 3, irréductible et à bord incompressible.

Rappelons que M est **irréductible** si toute sphère plongée borde une boule plongée de dimension 3.

Nous dirons que M est à **bord incompressible** si le groupe fondamental de chaque composante connexe du bord s'injecte dans $\Pi_1(M)$. Nous supposons de plus qu'aucune composante de ∂M n'est une sphère. (Sinon M serait la boule fermée de dimension 3.)

Remarquons qu'une variété orientée irréductible, contenant un plan projectif plongé, est forcément $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. En effet, le bord d'un voisinage tubulaire du plan projectif est la sphère S^2 .

Une surface compacte S proprement plongée dans M est dite **incompressible** si

- le groupe fondamental $\Pi_1(s)$ s'injecte dans $\Pi_1(M)$, pour toute composante s de S ,
- le groupe fondamental $\Pi_1(s, \partial s)$ s'injecte dans $\Pi_1(M, \partial_i M)$, pour toute composante s de S , rencontrant la composante $\partial_i M$ du bord de M
- une composante connexe de S n'est ni une sphère, ni un plan projectif, ni parallèle au bord.

L'arbre dual à une surface à poids proprement plongée dans M est un 1-complexe simplicial connexe, simplement connexe. En effet, $\tilde{M}$ est orientée, connexe et simplement connexe, donc toute surface proprement plongée est séparante (voir [Hem] Lemme 2.1). Une surface S plongée dans une variété N est dite séparante si $N \setminus S$ a exactement deux composantes connexes.

Proposition 3.5 : *Soit S une surface à poids compacte, orientée, proprement plongée dans M . Si la surface S est incompressible, alors l'arbre dual à S est minimal.*

Démonstration : Soit $\mathcal{A}$ une composante connexe de S . Comme dans l'Exemple 3.3, nous construisons un lacet γ , de nombre d'intersection géométrique 1 ou 2 avec $\mathcal{A}$, non homotope à un lacet disjoint de $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ ne sépare pas, la construction est similaire.

Supposons donc que $\mathcal{A}$ sépare M . Notons M_1, M_2 les variétés compactes, connexes, orientées, obtenues en découpant M le long de $\mathcal{A}$. Elles sont irréductibles (voir par exemple [Wal2]) et à bord incompressible (simple conséquence du théorème du lacet, voir par exemple [Hem]).

Nous notons $\mathcal{A}_i$ la composante du bord de M_i ($i = 1, 2$) définie par $\mathcal{A}$. Notons qu'elle n'est pas parallèle à une autre composante du bord. Montrons que $\Pi_1(M_i, \mathcal{A}_i)$ est non trivial.

En effet, si S est une surface (compacte, connexe) qui n'est pas la sphère ou le plan projectif, alors $\Pi_j(S) = 0$ pour $j \geq 2$. De même, si N est une variété de dimension 3, compacte, connexe, irréductible, de groupe fondamental infini (par exemple si $\Pi_1(N)$ contient un groupe de surface de genre ≥ 1), alors $\Pi_j(N) = 0$ pour $j \geq 2$. Ceci est une conséquence du théorème de la sphère (voir par exemple [Hem]).

Supposons par l'absurde que $\Pi_1(M_i, \mathcal{A}_i) = 0$. D'après la suite exacte d'homotopie de la paire $(M_i, \mathcal{A}_i)$, puisque $\Pi_1(\mathcal{A}_i)$ s'injecte dans $\Pi_1(M_i)$, alors M_i et $\mathcal{A}$ ont même homotopie. Soit N_i un voisinage tubulaire de $\mathcal{A}_i$ dans M_i . Notons P_i l'adhérence dans M_i de $M_i \setminus N_i$. Alors (voir par exemple [Spa]) il existe une application continue de P_i dans $\mathcal{A}$, induisant un isomorphisme en homotopie. Nous en déduisons une application continue de M_i dans $\mathcal{A} \times [0, 1]$ qui :

- envoie P_i dans $\mathcal{A} \times \{1\}$,
- induit une application de N_i dans $\mathcal{A} \times [0, 1]$ respectant la structure fibrée,
- envoie $\mathcal{A}_i$ dans $\mathcal{A} \times \{0\}$, et
- induit un isomorphisme des groupes fondamentaux.

D'après le théorème suivant de F. Waldhausen ([Wal1] Théorème 6.1), nous en déduisons que $\mathcal{A}_i$ est parallèle à une autre composante du bord de M_i , ce qui est une contradiction.

Théorème : Si N et N' sont deux variétés de dimension 3, compactes, connexes, orientées, irréductibles, à bord incompressible non vide, et si $f : (N, \partial N) \rightarrow (N', \partial N')$ est une application continue induisant un isomorphisme des groupes fondamentaux de N et N' , alors f est homotope à un homéomorphisme $(N, \partial N) \rightarrow (N', \partial N')$ (au sens des paires).

Le lacet γ est alors défini comme dans l'Exemple 3.3.

Une composante connexe de $\pi^{-1}(\mathcal{A})$ est donc contenue dans l'axe de translation d'un conjugué de γ . CQFD

Nous allons maintenant développer les propriétés de minimalité des arbres réels.

Lemme 3.6 (Serre) : *Soit Γ un groupe de type fini agissant sur un arbre réel T . Si chaque élément de Γ admet un point fixe dans T , alors Γ possède un point fixe global.*

Démonstration [MS1] : La preuve procède par récurrence sur le cardinal n d'un système fini de générateurs $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ de Γ . Elle est immédiate pour $n = 1$. Le groupe Δ engendré par $g_1, g_2, \dots, g_{n-1}$ possède un point fixe y dans T , par récurrence. Le milieu de $[y, g_n y]$ est fixé par g_n et $g_n \Delta$, d'après la Remarque 2.4. Il est donc fixé par tout le groupe. CQFD

Proposition 3.7 : *Soit Γ un groupe de type fini. Soit T un arbre réel muni d'une action de Γ . Si Γ n'a pas de point fixe global dans T , il existe un unique sous-arbre de T non vide invariant par Γ , minimal au sens de l'inclusion. Il s'agit de la réunion des axes de translation de T . En particulier, si T n'est pas réduit à un point, Γ agit minimalement si et seulement si la réunion des axes de translation de T est dense dans T .*

Démonstration : Notons T' la réunion des axes de translation de T . Si elle était vide, tous les éléments de Γ seraient elliptiques. D'après le lemme précédent, il existerait alors un point fixe global. Par la Proposition 2.5 (1), l'espace T' est connexe, donc est un sous-arbre de T . Il est invariant par Γ d'après la Remarque 2.3.

Soit T'' un sous-arbre de T invariant non vide et $x \in T''$. Si Γ n'a pas de point fixe global, il existe un élément γ de Γ hyperbolique dans T . Alors par la Construction 2.2, T'' contient un point de l'axe de translation A_γ . (Par exemple le milieu du segment $[x, \gamma x]$). Donc T'' contient tout A_γ . Si A_δ est un autre axe de translation ne rencontrant pas A_γ , il rencontre un axe coupant A_γ , d'après la Proposition 2.5 (1). Donc T'' contient tous les axes de translation de T . CQFD

J. P. Otal (qui le tenait d'A. Fathi) nous a fait remarquer que la réunion des axes de translation d'un arbre réel T n'est pas toujours fermée dans T , et en particulier n'est pas toujours complète.

Ce résultat montre qu'un arbre réel muni d'une action minimale par un groupe de type fini est adhérence d'une réunion dénombrable de compacts. En particulier, il est séparable (i.e. contient une partie dénombrable dense).

L'ensemble de ses **sommets** (i.e. des points x de T tels que $T \setminus \{x\}$ possède au moins trois composantes connexes) est dénombrable.

Un tel arbre possède aussi un domaine faiblement fondamental qui est compact, et même réunion finie de segments compacts.

Proposition 3.8 : Soit Γ un groupe de type fini. Soit T un arbre muni d'une action de Γ minimale. Alors T possède un domaine faiblement fondamental K (i.e. la réunion $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma K$ est dense dans T) qui est compact.

Démonstration : Soit G une partie génératrice finie de Γ . Soit K un compact connexe contenant :

- un point fixe de toute isométrie elliptique γ de G . Nous noterons S_γ le singleton contenant ce point.
- un segment $S_\gamma = [x, \gamma x]$ pour toute isométrie hyperbolique γ de G , où x appartient à l'axe de translation de γ .

Un tel compact existe bien d'après les Propositions 2.5 et 2.6. Grâce à la proposition précédente, il suffit de savoir construire (en faisant agir Γ sur K) l'axe de translation de tout élément de Γ hyperbolique. La démonstration se fait par récurrence sur la longueur minimale d'un mot en les éléments de G .

Fixons nous deux éléments α, β de Γ . Supposons construits par l'hypothèse de récurrence

- l'axe de translation A_α de α (resp. un point fixe x_α de α),
- le segment connectant éventuel entre cet axe (resp. ce point fixe) et le domaine fondamental K , et de même pour β .

Il suffit de construire l'axe de translation de $\alpha\beta$ (resp. un point fixe de $\alpha\beta$), ainsi que les segments connectant éventuels entre cet axe (resp. ce point fixe) et A_α ou $\{x_\alpha\}$. Ceci découle des Propositions 2.5, 2.6 et 2.7. CQFD

Exemple : Soient a, b, c trois réels strictement positifs, rationnellement indépendants. Il est facile de construire un unique arbre réel (à isométrie près) complet, minimal irréductible $T = T_{a,b,c}$ de $\mathcal{T}(\Gamma)$ tel que :

- * le groupe libre à deux générateurs $\langle \gamma, \delta \rangle$ agit librement sur T ;
- * $l_T(\gamma) = a, l_T(\delta) = b$;
- * les axes de translation de γ et δ se coupent en un segment compact S de longueur c ;
- * les isométries γ, δ translatent dans le même sens sur S .

Proposition 3.9 : *Soit Γ un groupe de type fini, contenant un groupe libre $\langle \alpha, \beta \rangle$ de rang 2. Soit T un arbre réel muni d'une action de Γ . Supposons que le stabilisateur d'un segment non dégénéré ne contient pas de groupe libre de rang 2. Alors l'action est irréductible.*

Démonstration : Supposons par l'absurde que Γ fixe un bout b_∞ de T . Si z est un point fixe de α , le rayon issu de z passant par b_∞ rencontre son image par α en un rayon issu de z et passant par b_∞ . Il est donc fixé par α . De plus, tout axe de translation passe par b_∞ .

Il existe donc un rayon R contenu dans l'axe de translation ou dans l'ensemble des points fixes de α (respectivement β). Mais alors le groupe libre $\langle [\alpha, \beta], [\alpha^2, \beta] \rangle$ de rang 2 fixe un segment non dégénéré contenu dans R . Ceci contredit nos hypothèses. CQFD

Remarque 3.10 : *Un arbre minimal qui n'est pas réduit à une droite ou à un point est réductible si et seulement s'il existe un rayon rencontrant tous les axes de translation en un rayon.*

Démonstration : Le bout b_∞ défini par ce rayon est fixé par toute isométrie hyperbolique de Γ .

Soit maintenant δ un élément elliptique de Γ . Fixons nous un élément hyperbolique γ de Γ . Alors l'intersection $A_{\delta\gamma\delta^{-1}} \cap A_\gamma$ contient un rayon passant par b_∞ . Donc A_γ contient un point fixe de δ (Proposition 2.6). Si ce point fixe n'est pas unique, alors δ fixe b_∞ d'après la Proposition 2.6.

Supposons donc que z est le seul point fixe de δ sur A_γ . Notons A_σ un axe de translation obtenu en translatant un axe de translation non confondu avec A_γ par une puissance suffisamment grande de γ ou γ^{-1} pour que z n'appartienne pas à A_σ .

D'après la Proposition 2.6, l'image de A_σ par δ est alors un axe de translation ne passant pas par b_∞ . Ceci contredit nos hypothèses. CQFD

Remarque 3.11 : *Considérons un arbre réel T muni d'une action minimale irréductible sans point fixe global. Supposons que T n'est pas réduit à une droite. Alors il n'existe pas d'axe de translation rencontrant tous les axes de translation.*

Démonstration : D'après l'hypothèse et la Proposition 3.7, il existe deux axes de translation A_γ, A_δ non confondus.

Supposons tout d'abord l'intersection de A_γ et A_δ compacte. Alors l'axe translaté de A_γ par une puissance suffisamment grande de δ est disjoint de A_γ .

Supposons maintenant que les deux axes A_γ et A_δ sont birayonnants. Alors il existe un axe de translation A_σ ne contenant pas le bout commun (Remarque 3.10). Mais alors l'axe de translation, translaté de A_σ par une puissance suffisamment grande de δ ou δ^{-1} , est disjoint de A_γ . CQFD

4 Topologie des axes.

Soit Γ un groupe de type fini quelconque. Si un arbre réel T est muni d'une action de Γ , nous noterons l_T la fonction de Γ dans $\mathbb{R}_+$ qui à γ associe sa distance de translation

$$l_T(\gamma) = \inf_{x \in T} d(x, \gamma x).$$

C'est la fonction “distance de translation” de T . Nous montrerons dans la section suivante que celle-ci détermine à isométrie équivariante près un arbre réel complet minimal et irréductible. Nous aurons besoin de quelques lemmes techniques, que nous allons développer maintenant.

Définissons tout d'abord la classe des arbres réels qui vont nous intéresser.

Définition 4.1 : Nous notons $\mathcal{T}(\Gamma)$ l'ensemble des classes d'équivalence d'arbres réels complets non vides, non réduits à un point, munis d'une action de Γ minimale et irréductible. Deux tels objets sont identifiés s'il existe une isométrie de l'un sur l'autre commutant avec les actions.

Notons que $\mathcal{T}(\Gamma)$ est bien un ensemble. C'est une conséquence de la Proposition 3.7.

Définition 4.2 : Soient γ et δ deux isométries hyperboliques d'un arbre réel T .
Si les axes de translation A_δ et A_γ ont une intersection non vide, nous notons $D_T(\gamma, \delta)$ la longueur du segment commun.
Sinon, nous notons $D_T(\gamma, \delta)$ l'opposé de la longueur de l'arc connectant entre ces axes.

Remarquons que $D_T(\gamma, \delta) = +\infty$ si et seulement si les axes sont confondus ou birayonnants. Pour tout couple (p, q) d'entiers non nuls, nous avons $D_T(\gamma, \delta) = D_T(\gamma^p, \delta^q)$, et $D_T(\gamma, \delta) = D_T(\delta, \gamma)$.

Le résultat suivant nous dit que la fonction $D_T(\cdot, \cdot)$ ne dépend que des distances de translation pour les arbres réels considérés.

Lemme 4.3 : Soit T un élément de $\mathcal{T}(\Gamma)$. Soient γ et δ deux éléments de Γ . Les énoncés suivants ne dépendent que de la fonction distance de translation l_T de T :

- * γ et δ sont hyperboliques dans T .
- * Les axes de translation de γ et δ ont une intersection vide (resp. réduite à un point, un segment compact non dégénéré, un rayon, tout l'axe).
- * Les axes de translation de γ et δ ont une intersection non dégénérée. Les sens de translation de γ et δ sur cette intersection coïncident (resp. différent).

De plus, pour tous les entiers p et q dans $\mathbb{N}$ suffisamment grands,

$$D_T(\gamma, \delta) = \frac{1}{2} (l_T(\gamma^p) + l_T(\delta^q) - l_T(\gamma^p \delta^q))$$

si l'intersection des axes de translation de γ et δ est dégénérée (resp. compacte non dégénérée avec γ, δ translatant en sens opposés).

Démonstration : L'hyperbolicité d'une isométrie est équivalente à la non nullité de sa distance de translation. Les justifications des assertions suivantes découlent de la Proposition 2.5.

Les axes de translation de γ et δ ont une intersection vide si et seulement si

$$l_T(\gamma\delta) > l_T(\gamma) + l_T(\delta),$$

et alors $D_T(\gamma, \delta) = 1/2 (l_T(\gamma^p) + l_T(\delta^q) - l_T(\gamma^p\delta^q))$ pour tous p et q dans $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Les axes de translation A_δ et A_γ se coupent en un point et un seul si et seulement si $l_T(\gamma\delta) = l_T(\gamma^{-1}\delta) = l_T(\gamma) + l_T(\delta)$ et alors $D_T(\gamma, \delta) = 1/2 (l_T(\gamma^p) + l_T(\delta^q) - l_T(\gamma^p\delta^q)) = 0$ pour tous p et q dans $\mathbb{Z}$.

La non-dégénérescence de l'intersection des axes de translation ne dépend donc que des distances de translation. Les isométries γ et δ translatent alors dans le même sens si et seulement si $l_T(\gamma\delta) = l_T(\gamma) + l_T(\delta)$. De plus, nous avons alors $l_T(\gamma^p) + l_T(\delta^q) = l_T(\gamma^p\delta^q)$ pour tous p et q dans $\mathbb{N}$. Supposons que cette intersection soit compacte. Alors quitte à changer γ en γ^{-1} , nous pouvons supposer que γ et δ translatent en sens opposés.

Soient p et q entiers dans $\mathbb{N}$ tels que $l_T(\gamma^p) > D_T(\gamma, \delta)$ et $l_T(\delta^q) > D_T(\gamma, \delta)$. La formule annoncée pour $D_T(\gamma, \delta)$ découle de la Proposition 2.5 (2).

Les axes de translation dans T de γ et δ sont confondus ou birayonnants si et seulement si (Proposition 2.5)

$$l_T(\gamma^p\delta^p) = |l_T(\gamma^p) - l_T(\delta^p)| \text{ pour tout entier } p,$$

ou

$$l_T(\gamma^{-p}\delta^p) = |l_T(\gamma^p) - l_T(\delta^p)| \text{ pour tout entier } p.$$

Supposons que les axes A_γ et A_δ soient birayonnants. Soit A_σ un axe de translation ne rencontrant pas A_γ (Remarque 3.11). Quitte à le translater par une puissance suffisamment grande de γ ou γ^{-1} , sa projection sur A_γ n'appartiendra pas à A_δ . La distance de A_σ à A_γ est donc strictement plus petite que celle de A_σ à A_δ .

D'après ce qui précède, il en sera de même dans un arbre réel T' ayant même fonction distance de translation. En particulier les axes A'_γ et A'_δ seront birayonnants. CQFD

Nous allons maintenant définir une topologie sur $\mathcal{T}(\Gamma)$. Le groupe Γ est muni de la topologie discrète, et $\mathbb{R}_+^\Gamma$ de la topologie produit.

Définition 4.4 : Nous appellerons *topologie des axes* la topologie de $\mathcal{T}(\Gamma)$ induite par l'application de $\mathcal{T}(\Gamma)$ dans $\mathbb{R}_+^\Gamma$, qui à un arbre réel T associe sa fonction distance de translation l_T .

Soit T un élément de $\mathcal{T}(\Gamma)$. Une base de voisinage de T pour cette topologie est formée par les parties $V_T(\varepsilon, P)$ de $\mathcal{T}(\Gamma)$, avec $\varepsilon > 0$ et P partie finie de Γ . Un élément T' de $\mathcal{T}(\Gamma)$ appartient à $V_T(\varepsilon, P)$ si $\forall \gamma \in P, |l_T(\gamma) - l_{T'}(\gamma)| < \varepsilon$.

Nous allons montrer que la fonction qui à T associe $D_T(\gamma, \delta)$ (Définition 4.2) est continue pour cette topologie. Nous allons d'abord la définir pour les paires d'isométries qui ne sont plus forcément hyperboliques.

Définition 4.5 : Soient $T \in \mathcal{T}(\Gamma)$ et $\gamma, \delta \in \Gamma$. Supposons γ hyperbolique dans T , et δ elliptique. Nous posons

$$*D_T(\gamma, \delta) = - \min_{z \text{ point fixe de } \delta} d(z, A_\gamma) = 1/2 D_T(\gamma, \delta\gamma\delta^{-1})$$

(voir Proposition 2.6 (2)) si A_γ ne contient pas de point fixe de δ .

$$*D_T(\gamma, \delta) = D_T(\gamma, \delta\gamma\delta^{-1})$$

si $A_{\delta\gamma\delta^{-1}} \cap A_\gamma$ est un segment non dégénéré, sur lequel γ et $\delta\gamma\delta^{-1}$ traduisent dans le même sens.

$$*D_T(\gamma, \delta) = 0 \text{ sinon.}$$

Si δ est hyperbolique dans T , et γ elliptique, nous posons $D_T(\gamma, \delta) = D_T(\delta, \gamma)$.

Proposition 4.6 : La fonction $T \rightarrow D_T(\gamma, \delta)$ de $\mathcal{T}(\Gamma)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ est définie sur un ouvert de $\mathcal{T}(\Gamma)$ pour la topologie des axes, et est continue pour tous $\gamma, \delta \in \Gamma$ fixés.

Démonstration : Fixons nous $\gamma, \delta \in \Gamma$. L'ensemble des arbres réels T de $\mathcal{T}(\Gamma)$ tels que $l_T(\delta) = l_T(\gamma) = 0$ est fermé pour la topologie des axes.

Fixons nous un arbre réel T dans l'ouvert complémentaire.

(1) Supposons γ et δ hyperboliques dans T . Si T' est suffisamment proche de T , il en sera de même dans T' .

* Si $D_T(\gamma, \delta) < 0$, alors $-D_T(\gamma, \delta) = 1/2 [l_T(\gamma\delta) - l_T(\gamma) - l_T(\delta)]$ (Proposition 2.5). Pour T' proche de T , nous aurons aussi $l_{T'}(\gamma\delta) - l_{T'}(\gamma) - l_{T'}(\delta) > 0$ et $D_{T'}(\gamma, \delta)$ sera donné par la même formule (Proposition 2.5). Donc l'application $T \rightarrow D_T(\gamma, \delta)$ est continue en T .

* Si $0 \leq D_T(\gamma, \delta) < +\infty$, alors les axes de translation de γ et δ dans T se coupent suivant un compact. Pour n entier suffisamment grand, les axes des isométries $\delta^n \gamma \delta^{-n}$ et $\delta^{-n} \gamma \delta^n$ ne rencontrent pas A_γ . Leurs intersections avec A_δ sont situées sur A_δ de part et d'autre du segment $A_\delta \cap A_\gamma$ (voir Figure 11).

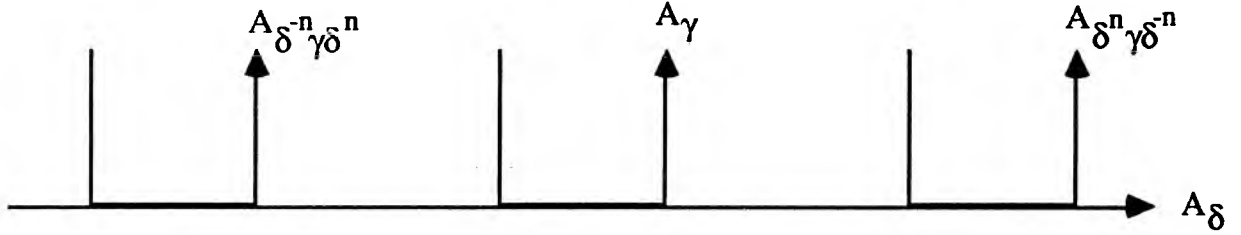


Figure 11.

$$\text{Alors } D_T(\gamma, \delta) = -D_T(\delta^n \gamma \delta^{-n}, \delta^{-n} \gamma \delta^n) + D_T(\delta^n \gamma \delta^{-n}, \gamma) + D_T(\delta^{-n} \gamma \delta^n, \gamma).$$

Notons S_T le second membre de cette égalité. D'après le raisonnement précédent, pour T' proche de T , les nombres $D_{T'}(\delta^n \gamma \delta^{-n}, \delta^{-n} \gamma \delta^n)$, $D_{T'}(\delta^n \gamma \delta^{-n}, \gamma)$ et $D_{T'}(\delta^{-n} \gamma \delta^n, \gamma)$ seront strictement négatifs. Alors les axes de γ et δ dans T' ne sont pas birayonnants. Nous avons donc $D_{T'}(\gamma, \delta) = S_{T'}$ si $S_{T'}$ est positif, et $D_{T'}(\gamma, \delta) = \frac{1}{2} S_{T'}$ sinon.

Si S_T est strictement positif, alors $S_{T'}$ le sera aussi pour T' proche de T . Sinon $S_T = 0$, et $S_{T'}$ sera proche de 0. Ceci montre donc la continuité de Δ en T .

* Supposons maintenant que $D_T(\gamma, \delta) = +\infty$. Montrons que pour tout $A > 0$, si T' est proche de T , alors $D_{T'}(\gamma, \delta) > A$.

Remplacer γ et δ par une de leurs puissances ne change pas la valeur de $D_T(\gamma, \delta)$. Nous pouvons donc supposer que $l_T(\gamma) > l_T(\delta) > 2A$, et que γ et δ translatent en sens contraire.

Alors $l_T(\gamma\delta) = l_T(\gamma) - l_T(\delta)$ (Proposition 2.5 (3)). Pour T' proche de T , nous aurons $l_{T'}(\gamma) > l_{T'}(\delta) > 2A$ et $l_{T'}(\gamma\delta) < l_{T'}(\gamma)$. D'après la Proposition 2.5, les isométries γ et δ ont alors des axes de translation dans T se coupant en un segment non dégénéré, et leurs sens de translation différent. De plus, nous avons

$$\text{ou bien } l_{T'}(\delta) \leq D_{T'}(\gamma, \delta),$$

$$\text{ou bien } l_{T'}(\delta) - 2D_{T'}(\gamma, \delta) = l_{T'}(\gamma\delta) - l_{T'}(\gamma) < 0.$$

Le résultat découle alors de $l_{T'}(\delta) > 2A$.

(2) Quitte à permuter γ et δ , il reste à envisager la situation où γ est hyperbolique dans T et δ elliptique. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et $A > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de T tel que pour T' dans $\mathcal{V}$, nous avons :

- (i) $l_{T'}(\delta) < \varepsilon$.
- (ii) $|l_{T'}(\gamma) - l_T(\gamma)| < \varepsilon$ et $l_{T'}(\gamma) > 0$.
- (iii) $|l_{T'}(\gamma\delta) - l_T(\gamma\delta)| < \varepsilon$ et $l_{T'}(\gamma\delta) > 0$ si $l_T(\gamma\delta) \neq 0$.
- (iv) Si A_γ et $A_{\delta\gamma\delta^{-1}}$ ne sont ni confondus, ni birayonnants, alors
$$|D_{T'}(\gamma, \delta\gamma\delta^{-1}) - D_T(\gamma, \delta\gamma\delta^{-1})| < \varepsilon.$$

Si $D_T(\gamma, \delta\gamma\delta^{-1}) \neq 0$, alors $D_T(\gamma, \delta\gamma\delta^{-1})$ et $D_{T'}(\gamma, \delta\gamma\delta^{-1})$ sont de même signe, et plus grands que 2ε en valeur absolue.

- (v) Si A_γ et $A_{\delta\gamma\delta^{-1}}$ sont confondus ou birayonnants, alors $D_{T'}(\gamma, \delta\gamma\delta^{-1}) > A$.

Les conditions (iv) et (v) sont justifiées par l'étude (1) précédente. Montrons que quitte à réduire le voisinage $\mathcal{V}$, pour tout $T' \in \mathcal{V}$ alors

$$|D_{T'}(\gamma, \delta) - D_T(\gamma, \delta)| < 2\varepsilon \text{ si } D_T(\gamma, \delta) < +\infty, \text{ et } D_{T'}(\gamma, \delta) > A \text{ sinon.}$$

Cas 1 : Supposons que A_γ ne contient pas de point fixe de δ .

Soit z le point fixe de δ le plus proche de A_γ et y sa projection sur A_γ . D'après la Figure 9, les axes de translation A_γ et $A_{\delta\gamma\delta^{-1}}$ sont disjoints, et

$$D_{T'}(\gamma, \delta\gamma\delta^{-1}) = 2D_{T'}(\gamma, \delta) = l_{T'}(\gamma\delta) - l_{T'}(\gamma).$$

Grâce aux hypothèses (iv), γ et $\delta\gamma\delta^{-1}$ ont donc des axes de translation disjoints dans T' . En particulier, si $l_{T'}(\delta) = 0$, alors A'_γ ne contient pas de point fixe de δ . Dans ce cas, le résultat découle de (ii) et (iii).

Supposons donc que $l_{T'}(\delta) \neq 0$, et que A'_γ et A'_δ ont une intersection non vide. Puisque A'_γ et $A'_{\delta\gamma\delta^{-1}}$ sont disjoints, celle-ci est compacte. Notons-la $[x', y']$ de telle sorte que δ translate x' vers y' . Alors y' appartient au segment $[x', \delta x']$ (voir Figure 12) et

$$-D_{T'}(\gamma, \delta\gamma\delta^{-1}) = d(y', \delta x') \leq d(x', \delta x') < \varepsilon,$$

ce qui contredit l'hypothèse (iv).

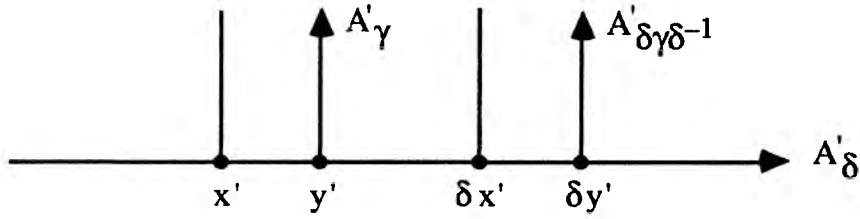


Figure 12.

Il nous reste à supposer que $l_{T'}(\delta) \neq 0$, et que A'_γ et A'_δ ont une intersection vide. Alors (voir Figure 13)

$$-D_{T'}(\gamma, \delta\gamma\delta^{-1}) = -2D_{T'}(\gamma, \delta) + l_{T'}(\delta).$$

Puisque $D_T(\gamma, \delta\gamma\delta^{-1}) = 2D_T(\gamma, \delta)$, le résultat découle des hypothèses (i) et (iv).

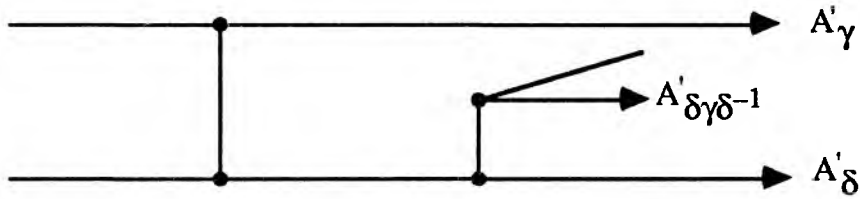


Figure 13.

Cas 2 : Supposons que A_γ contient un point fixe de δ et que les axes de γ et $\delta\gamma\delta^{-1}$ se rencontrent en un segment $[x, y]$ non dégénéré. Supposons que les sens de translation de γ et $\delta\gamma\delta^{-1}$ coïncident. (Les points x et y peuvent être à l'infini ; avec de bonnes conventions, le raisonnement reste valide).

Alors d'après (iv) et quitte à réduire $\mathcal{V}$, il en est de même dans T' . En effet, deux isométries hyperboliques α et β tradament en sens opposés sur le segment commun à leurs axes de translation (si ce segment est non dégénéré) si et seulement si

$$l_T(\alpha\beta) < l_T(\alpha) + l_T(\beta),$$

d'après la Proposition 2.5. De plus, α et β tradament en sens opposés si et seulement si α^{-1} et β tradament dans le même sens.

Si $l_{T'}(\delta) = 0$, alors le résultat découle de la définition de $D_{T'}(\gamma, \delta)$ et de l'hypothèse (iv).

Si $l_{T'}(\delta) \neq 0$, nécessairement les axes de translation A'_γ et A'_δ se coupent en un segment $[x', y']$ de telle sorte que si δ translate x' vers y' , alors $\delta x' \in [x', y']$ (voir Figure 14). Donc

$$D_{T'}(\gamma, \delta) = D_{T'}(\gamma, \delta\gamma\delta^{-1}) + l_{T'}(\delta).$$

Puisque $D_T(\gamma, \delta\gamma\delta^{-1}) = D_T(\gamma, \delta)$, le résultat découle des hypothèses (i) et (iv).

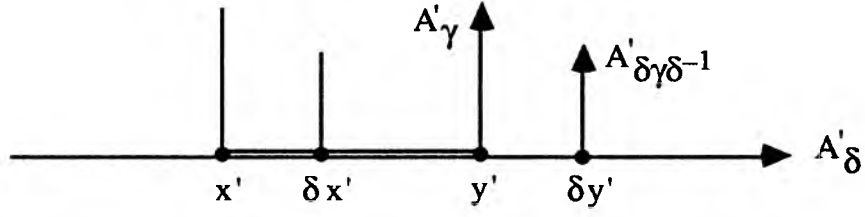


Figure 14.

Cas 3 : Supposons que A_γ contient un point fixe de δ et que les axes de translation de γ et $\delta\gamma\delta^{-1}$ se rencontrent en un segment $[x, y]$ non dégénéré. Supposons que les sens de translation de γ et $\delta\gamma\delta^{-1}$ diffèrent. Alors il en est de même dans T' . Notons que par définition, $D_T(\gamma, \delta) = 0$.

Si $l_{T'}(\delta) = 0$, alors nous avons aussi $D_{T'}(\gamma, \delta) = 0$.

Si $l_{T'}(\delta) \neq 0$, les axes de translation A'_γ et A'_δ se coupent en un segment non dégénéré $[x', y']$ (noté de telle sorte que δ translate x' vers y'). D'après la condition sur les sens de translation, l'isométrie δ envoie un segment non dégénéré de la demi-droite de A'_γ rencontrant A'_δ en $\{x'\}$ dans la demi-droite de A'_γ rencontrant A'_δ en $\{y'\}$. Voir Figure 15. En particulier, nous avons $y' = \delta x'$, et $D_{T'}(\gamma, \delta) = l_{T'}(\delta)$. Le résultat découle alors de l'hypothèse (i).

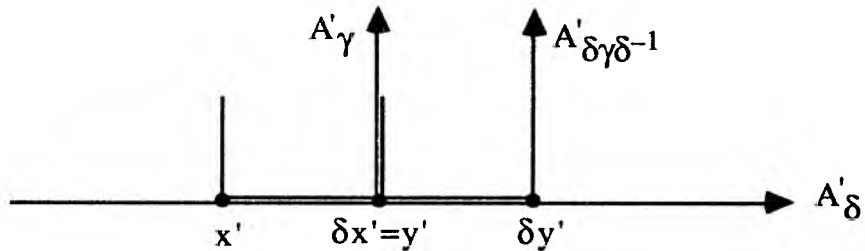


Figure 15.

Cas 4 : Supposons que A_γ contient un point fixe de δ et que les axes de translation de γ et $\delta\gamma\delta^{-1}$ se rencontrent en un seul point x' . Alors $D_T(\gamma, \delta) = 0$ et $D_T(\gamma, \delta\gamma\delta^{-1}) = 0$.

Si $l_{T'}(\delta) = 0$ et A'_γ ne contient pas de point fixe de δ , alors d'après le cas 1, nous avons

$$D_{T'}(\gamma, \delta) = \frac{1}{2} D_{T'}(\gamma, \delta\gamma\delta^{-1}).$$

Le résultat découle alors de (iv).

Si $l_{T'}(\delta) = 0$ et A'_γ contient un point fixe de δ , alors $D_{T'}(\gamma, \delta)$ par définition est égal à 0 ou à $D_{T'}(\gamma, \delta\gamma\delta^{-1})$. Le résultat découle de même de (iv).

Si $l_{T'}(\delta) \neq 0$, d'après les cas précédents, nous avons

$$\begin{aligned} & 0 \leq -D_{T'}(\gamma, \delta) < l_{T'}(\delta) \\ \text{ou} \quad & 0 \leq -D_{T'}(\gamma, \delta\gamma\delta^{-1}) = -2D_{T'}(\gamma, \delta) + l_{T'}(\delta) \\ \text{ou} \quad & D_{T'}(\gamma, \delta) = D_{T'}(\gamma, \delta\gamma\delta^{-1}) + l_{T'}(\delta) \\ \text{ou} \quad & D_{T'}(\gamma, \delta) = l_{T'}(\delta). \end{aligned}$$

Le résultat découle de (i) et (iv). CQFD

5 Topologie de Gromov.

Nous avons défini (Introduction) la topologie de Gromov sur $\mathcal{T}(\Gamma)$ en exhibant une base d'ouverts de $\mathcal{T}(\Gamma)$. D'après la Remarque 1.4 et la Proposition 1.7 du Chapitre I, nous pouvons prendre comme base de voisinages d'un arbre réel T de $\mathcal{T}(\Gamma)$ les ouverts suivants.

Donnons nous un $\varepsilon > 0$, une partie finie P de Γ , et une partie finie K de T . Nous notons $V_T(\varepsilon, P, K)$ l'ensemble des éléments T' de $\mathcal{T}(\Gamma)$ tels qu'il existe un compact K' dans T' , et une relation surjective fermée $\mathcal{R}$ dans $K \times K'$ telle que :

la relation $\mathcal{R}$ est une ε -approximation entre K et K' i.e. :

$$\forall x, y \in K, \forall x', y' \in K', \quad x \mathcal{R} x' \text{ et } y \mathcal{R} y' \Rightarrow |d(x, y) - d(x', y')| < \varepsilon.$$

et $\mathcal{R}$ est (ε, P) -équivariante, au sens suivant (voir Chapitre I, Définition 1.3) :

$$\forall x \in K, \forall x', y' \in K', \forall \alpha \in P, \quad \alpha x \in K, \quad x \mathcal{R} x' \text{ et } \alpha x \mathcal{R} y' \Rightarrow d(\alpha x', y') < \varepsilon.$$

Nous sommes maintenant en mesure de montrer l'égalité entre la topologie de Gromov et la topologie des axes sur $\mathcal{T}(\Gamma)$.

Théorème 5.1 : *La topologie de Gromov sur $\mathcal{T}(\Gamma)$ est plus fine que la topologie des axes.*

Démonstration : Soit T un élément de $\mathcal{T}(\Gamma)$. Il s'agit de montrer que tout voisinage $V_T(\epsilon', P') = \{T' \in \mathcal{T}(\Gamma) / \forall \gamma \in P', |l_T(\gamma) - l_{T'}(\gamma)| < \epsilon'\}$ de T pour la topologie des axes contient un voisinage de T pour la topologie de Gromov. Puisque P' est une partie finie de Γ , nous pouvons nous restreindre au cas P' réduit à un singleton $\{\gamma\}$, car

$$V_T(\epsilon', Q \cup Q') = V_T(\epsilon', Q) \cap V_T(\epsilon', Q').$$

En d'autres termes, nous voulons montrer que la fonction $T \rightarrow l_T(\gamma)$ est continue pour la topologie de Gromov.

Premier cas : L'isométrie γ est hyperbolique dans T . Notons $x \in T$ un point de l'axe de translation de γ . Nous avons en particulier $d(x, \gamma x) = l_T(\gamma)$ et

$$d(x, \gamma x) + d(\gamma x, \gamma^2 x) - d(x, \gamma^2 x) = 0.$$

Posons alors $P = \{\gamma, \gamma^2\}$ et soit $0 < \epsilon \leq l_T(\gamma)/4$. Soit T' un élément de $\mathcal{T}(\Gamma)$. Supposons qu'il existe une ϵ -approximation P -équivariante $\mathcal{R}$ entre le segment compact $K = [x, \gamma^2 x]$ et un compact de T' . Prenons un point x' dans T' tel que $x \mathcal{R} x'$. Alors $\gamma x \in K$ et $\gamma^2 x \in K$, donc $\gamma x \mathcal{R} \gamma x'$ et $\gamma^2 x \mathcal{R} \gamma^2 x'$. Par conséquent,

$$(*) \quad |d(x, \gamma x) - d(x', \gamma x')| < \epsilon \quad \text{et} \quad |d(x, \gamma^2 x) - d(x', \gamma^2 x')| < \epsilon.$$

Montrons par l'absurde que l'isométrie γ ne peut pas être elliptique dans T' .

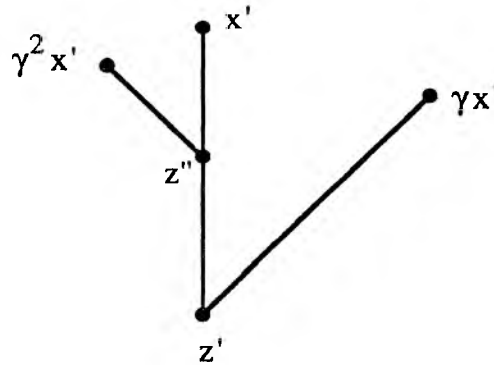


Figure 16.

Sinon, le milieu z' du segment $[x', \gamma x']$ est fixé par γ (Remarque 2.4). Le segment $[\gamma^2 x', z']$ rencontre le segment $[x', z']$ en un segment $[z'', z']$, avec éventuellement $z'' = z'$ (voir Figure 16). Donc $d(x', \gamma^2 x') \leq d(\gamma x', \gamma^2 x')$ et

$$d(x', \gamma x') \leq d(x', \gamma x') + d(\gamma x', \gamma^2 x') - d(x', \gamma^2 x').$$

D'après (*), nous avons donc $d(x', \gamma x') < 3\epsilon$. Mais alors

$$l_T(\gamma) = d(x, \gamma x) < d(x', \gamma x') + \varepsilon < 4\varepsilon,$$

ce qui contredit le choix de ε .

L'isométrie γ est donc hyperbolique dans T' . Notons A'_γ son axe de translation dans T' .

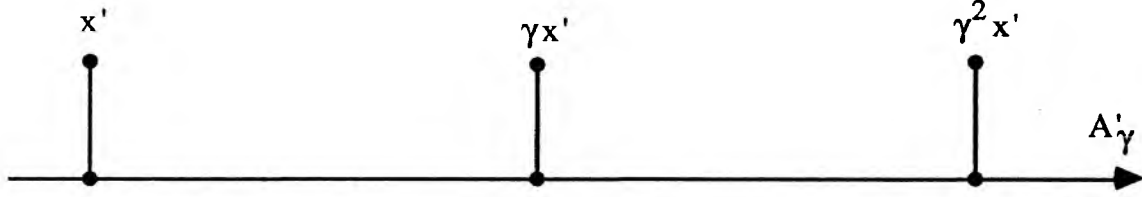


Figure 17.

D'après la Construction 2.2, nous avons (voir Figure 17) :

$$d(x', \gamma x') + d(\gamma x', \gamma^2 x') - d(x', \gamma^2 x') = 2 d(x', A'_\gamma) = d(x', \gamma x') - l_{T'}(\gamma).$$

D'après (*)

), nous avons donc $|d(x', \gamma x') - l_{T'}(\gamma)| < 3\varepsilon$ et

$$|l_T(\gamma) - l_{T'}(\gamma)| < 4\varepsilon.$$

Second cas : L'isométrie γ est elliptique dans T . Par définition, nous avons $l_T(\gamma) = 0$. Notons x un point fixe de γ dans T .

Posons $P = \{\gamma\}$. Soit T' un élément de $\mathcal{T}(\Gamma)$. Supposons qu'il existe $\mathcal{R}$ une ε -approximation P -équivariante entre le segment compact $K = \{x\}$ et un compact de T' . Il existe alors un point x' dans T' tel que $x \mathcal{R} x'$. Par conséquent, $\gamma x \in K$ et $\gamma x \mathcal{R} \gamma x'$.

Donc $|d(x, \gamma x) - d(x', \gamma x')| < \varepsilon$ et $0 \leq l_{T'}(\gamma) < \varepsilon$. CQFD

Pour montrer la réciproque, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 5.2 : *Soit T un arbre réel non réduit à un point, muni d'une action minimale irréductible de Γ . Tout segment compact de T dont les extrémités sont contenues dans des axes de translation est contenu dans un axe de translation.*

Démonstration : Notons $S = [x, x']$ ce segment. Soient A_γ et A'_γ deux axes de translation contenant respectivement x et x' . Notons z (resp. z') le point de S tel que A_γ (resp. A'_γ) rencontre S en $[x, z]$ (resp. $[x', z']$).

D'après la Remarque 3.11, il existe un axe de translation A_δ (resp. $A_{\delta'}$) disjoint de A_γ (resp. $A_{\gamma'}$). Translatons le par une puissance suffisamment grande de γ (resp. γ') ou γ^{-1} (resp. γ'^{-1}). Alors nous pouvons supposer que si y (resp. y') est la projection de A_δ (resp. $A_{\delta'}$) sur A_γ (resp. $A_{\gamma'}$), alors

le point x (resp. x') est entre z (resp. z') et y (resp. y').

Alors le segment $[x, x']$ est contenu dans l'arc connectant entre A_δ et $A_{\delta'}$. D'après la Proposition 2.5 (1), l'axe de translation de $\delta\delta'$ contient le segment $[x, x']$. CQFD

Théorème 5.3 : *La topologie des axes sur $\mathcal{T}(\Gamma)$ est plus fine que la topologie de Gromov.*

Démonstration : La preuve débute par une remarque de R. Lyndon [Lyn] et I. M. Chiswell [Chi1] [Chi2].

Remarque 5.4 : Soit T un arbre réel non vide muni d'une action de Γ minimale. Fixons nous un point x de T . Notons $\|\gamma\|$ la longueur du segment entre x et γx (voir Figure 18). Posons

$$\chi(\gamma, \delta) = 1/2 (\|\gamma\| + \|\delta\| - \|\gamma^{-1}\delta\|).$$

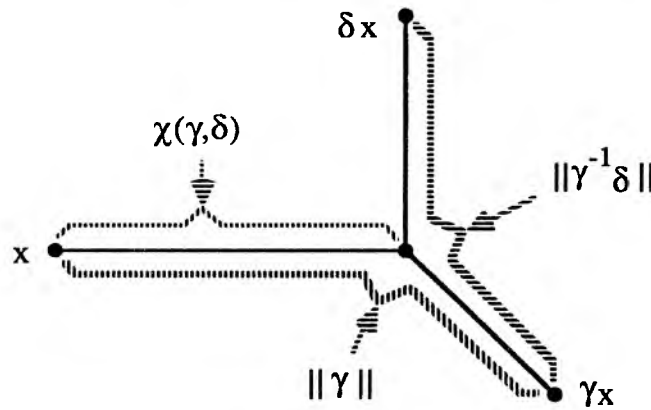


Figure 18.

Notons T' la réunion disjointe des segments $S_\gamma = [0, \|\gamma\|]$ de $\mathbb{R}$ pour les $\gamma \in \Gamma$, où nous recollons deux segments S_γ et S_δ en identifiant $t \in S_\gamma$ et $t' \in S_\delta$ si

$$0 \leq t = t' \leq \chi(\gamma, \delta).$$

L'espace T' est naturellement muni d'une action de Γ . Alors l'application "canonique" de T' dans T est une isométrie équivariante sur un sous-arbre dense de T (voir aussi [Gro4] § 6).

De plus, pour toute partie finie P de Γ , notons T_P' l'espace formé à partir de la réunion disjointe des S_γ pour $\gamma \in P$, en recollant S_γ et S_δ pour γ, δ dans P comme ci-dessus. Alors l'application $T_P' \rightarrow T'$ est une isométrie (d'image l'enveloppe convexe de $\{x, Px\}$). Ceci se démontre facilement par récurrence. CQFD

Soit T un élément de $\mathcal{T}(\Gamma)$ et $\varepsilon > 0$. Soit P une partie finie de Γ et K une partie finie de T . (Voir début de la section 5 pourquoi nous pouvons nous limiter aux parties finies). Pour démontrer le théorème, il faut prouver que tout voisinage $V_T(\varepsilon, P, K)$ de T pour la topologie de Gromov contient un voisinage de T pour la topologie des axes. Nous allons chercher un point base x "canonique" pour pouvoir effectuer la construction de R. Lyndon et I. M. Chiswell.

Remarquons que pour tout point x de la réunion des axes de translation de T , il existe une partie W finie de Γ telle que K est contenu dans la réunion des segments $[x, \alpha x]$ pour $\alpha \in W$. En effet, d'après le Lemme 5.2, un segment S dont une extrémité est x et l'autre est dans K est contenu dans un axe de translation A_β . Donc S est contenu dans $[x, \beta^n x]$ ou $[x, \beta^{-n} x]$ pour n suffisamment grand.

Supposons tout d'abord que T n'est pas réduit à une droite.

Nous nous fixons deux éléments γ, δ de Γ hyperboliques dans T et d'axes de translation disjoints (Remarque 3.11). Notons x le milieu du segment connectant entre ces deux axes de translation. Soit $\alpha \in \Gamma$. Alors si x n'est pas fixé par α , et n'appartient pas à l'axe de translation (éventuel) de α , la distance de x à son image par α est donnée par la formule suivante :

$$d(x, \alpha x) = 2 \sup \{ -D_T(\alpha, \delta), -D_T(\alpha, \gamma) \} + D_T(\gamma, \delta) + l_T(\alpha).$$

où la fonction $D_T(\alpha, \delta)$ a été définie en 4.2 et 4.5. Pour vérifier cette formule, il faut observer que par l'hypothèse sur x et α , l'un au moins des axes de translation A_γ, A_δ est disjoint de l'axe de translation ou de l'ensemble des points fixes de α .

Pour tout $\alpha \in \Gamma$, nous avons donc

$$d(x, \alpha x) = \sup \{ 0, [2 \sup \{ -D_T(\alpha, \delta), -D_T(\alpha, \gamma) \} + D_T(\gamma, \delta)] \} + l_T(\alpha).$$

Remarque 5.5 : Avec le Lemme 4.3, la Remarque 5.4 et l'unicité du complété d'un espace métrique, ceci permet de montrer que l'application de $\mathcal{T}(\Gamma)$ dans $\mathbb{R}_+^\Gamma$, qui à un arbre réel T associe sa fonction distance de translation l_T , est injective. *CQFD*

D'après la section 4, les propriétés suivantes sont ouvertes pour la topologie des axes

- * l'isométrie $\alpha \in \Gamma$ est hyperbolique dans l'arbre réel T de $\mathcal{T}(\Gamma)$;
- * les axes des isométries hyperboliques α et β sont disjoints dans T .

Pour $T' \in \mathcal{T}(\Gamma)$ suffisamment proche de T pour la topologie des axes, nous pouvons donc définir x' , milieu du segment connectant entre les axes de translation de γ et δ dans T' . La distance $d(x', \alpha x')$ sera donc donnée par la même formule que pour $d(x, \alpha x)$, en remplaçant T par T' .

Nous définissons alors une relation surjective $\mathcal{R}$ entre la réunion dans T des $[x, \alpha x]$ pour $\alpha \in W \cup P \cup PW$ et celle dans T' des $[x', \alpha x']$:

la relation $\mathcal{R}$ est la réunion des graphes $\mathcal{R}_\alpha$ des applications linéaires de $[x, \alpha x]$ dans $[x', \alpha x']$, envoyant x sur x' et αx sur $\alpha x'$.

Les longueurs des segments $[x, \alpha x]$ dépendent continûment de T pour la topologie des axes, d'après les formules ci-dessus et la Proposition 4.6. De plus, la longueur du recollement de deux de ces segments est une fonction linéaire en ces longueurs (voir Remarque 5.4). Il n'est donc pas difficile de voir que $\mathcal{R}$ est une ε -approximation pour T' proche de T pour la topologie des axes.

Il est aussi facile de voir que la relation $\mathcal{R}$ est (ε, P) -équivariante sur K (Chapitre I, Définition 1.3).

En effet, la partie K est contenue dans la réunion des $[x, \alpha x]$ pour $\alpha \in W$. Or un point d'un segment compact est déterminé par sa distance aux extrémités de ce segment, et α agit par isométrie sur T et T' . Il suffit donc de montrer que la relation $\mathcal{R}$ est ε -équivariante pour P sur les points αx , avec $\alpha \in W \cup \{e\}$, où e est l'élément neutre de Γ .

Soit $\alpha \in W \cup \{e\}$, et $\beta \in P$. Alors $\beta\alpha \in P \cup PW$. Supposons que $\alpha x \in [x, \alpha'x]$ pour $\alpha' \in W$. Notons y' l'image de $\beta\alpha x$ par $\mathcal{R}_{\beta\alpha'}$. Puisque $\beta\alpha x'$ est l'image de $\beta\alpha x$

par $\mathcal{R}_{\beta\alpha}$, le point $\beta\alpha x'$ sera proche de y' , d'après le paragraphe précédent, ce qui montre le résultat.

Il nous reste à envisager le cas où l'arbre réel T est réduit à une droite, ce que nous supposons.

D'après la Proposition 2.6 et l'irréductibilité de T , il existe nécessairement un élément δ de Γ elliptique dans T , ayant un unique point fixe z . Fixons nous un tel δ et un élément γ de Γ hyperbolique dans T . Soit $\mathcal{K}$ un segment de T contenant K , les images de K par les isométries de P , et le point fixe z de δ . Nous noterons $l(\mathcal{K})$ sa longueur. Nous supposons que la distance de translation de γ dans T est grande devant $l(\mathcal{K})$.

Assertion : Soit α une isométrie elliptique de T . Supposons T' suffisamment proche de T pour la topologie des axes. Alors les isométries γ et $\alpha\gamma\alpha^{-1}$ ont des axes de translation dans T' se coupant en un "long" segment. Elles translatent dans le même sens si α est l'identité dans T , en sens opposés sinon.

De plus, si α n'est pas l'identité dans T , alors α est elliptique dans T' .

Démonstration : La première partie de cette assertion découle de la Proposition 4.6. En effet, γ et $\alpha\gamma\alpha^{-1}$ translatent dans le même sens dans T si et seulement si α est l'identité dans T (Proposition 2.6).

Supposons que α n'est pas l'identité dans T . Montrons que α est elliptique dans T' . Sinon, d'après ce qui précède, pour T' proche de T , les axes de translation de γ et $\alpha\gamma\alpha^{-1}$ ont une intersection non dégénérée et les sens de translation sont opposés. Pour respecter ces conditions, nous avons la situation de la Figure 19 suivante.

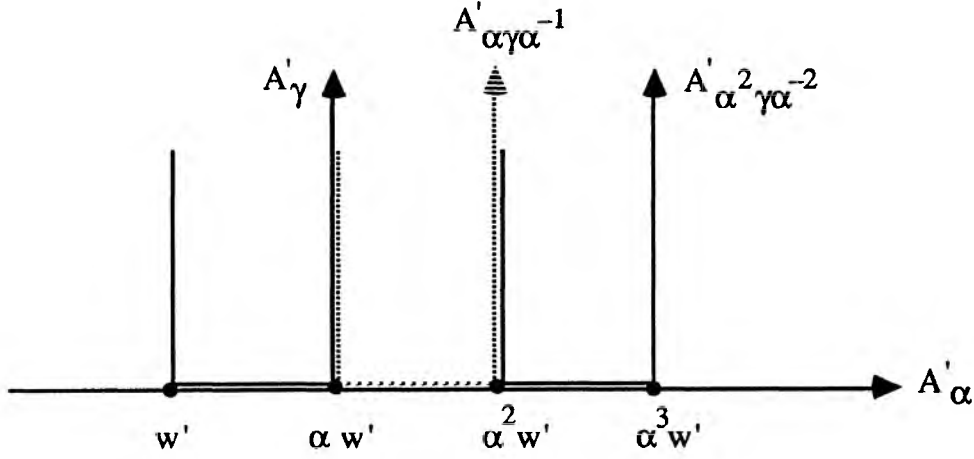


Figure 19.

Mais ceci contredit le fait que les axes de translation de γ et $\alpha^2\gamma\alpha^{-2}$ dans T' se rencontrent, pour T' proche de T . CQFD

Nous notons $S' = [x', y']$ l'intersection (non dégénérée d'après l'Assertion) des axes de translation de γ et $\delta\gamma\delta^{-1}$ dans T' . Les points x', y' sont éventuellement à l'infini, et nous utiliserons les conventions classiques. Nous pouvons supposer que l'isométrie γ translate x' vers y' dans T' .

Notons z' l'unique point fixe de δ sur A'_γ (qui existe d'après l'Assertion précédente). Considérons l'unique isométrie envoyant $\mathcal{K}$ dans A'_γ en conservant les sens de translation induits par γ , et envoyant z sur z' . Son graphe $\mathcal{R}$ est évidemment une ε -approximation. La fin de cette section est consacrée à montrer que $\mathcal{R}$ est (ε, P) -équivariante.

Tout d'abord, le point z' est “loin” des extrémités du segment S' . En effet, la distance de z' à x' est supérieure à $1/2 (l_T(\gamma) - l_T(\gamma\delta))$ d'après la Proposition 2.6. Comme $l_T(\gamma\delta) = 0$, la distance $d(z', x')$ est donc grande. Puisque δ^2 fixe A_γ , les isométries γ et $\delta^2\gamma\delta^{-2}$ doivent avoir des axes de translation dans T' qui se rencontrent en un long segment (Assertion). La distance de z' à y' est donc grande aussi, pour T' proche de T pour la topologie des axes.

Si $\alpha \in P$ est hyperbolique dans T , alors α possède un axe de translation dans T' rencontrant S' en un long segment. Comme ci-dessus, le point z' doit appartenir à ce

segment, et être loin des extrémités. Puisque les distances de translation sont proches, la relation $\mathcal{R}$ est $(\varepsilon, \{\alpha\})$ -équivariante.

De même, si $\alpha \in P$ est elliptique dans T , alors d'après l'Assertion et le raisonnement ci-dessus, $\alpha\gamma\alpha^{-1}$ possède un axe de translation dans T' rencontrant S' en un long segment. Celui-ci contient z' loin de ses extrémités.

Si α est l'identité sur T , alors γ et $\alpha\gamma\alpha^{-1}$ traduisent dans le même sens dans T' d'après l'Assertion. Donc si α est hyperbolique dans T' , alors α bouge les points de l'image de K par $\mathcal{R}$ d'une distance $l_{T'}(\alpha)$, qui est petite. Si α est elliptique dans T' , alors (Proposition 2.6) α est l'identité sur l'image de K par $\mathcal{R}$.

Si α n'est pas l'identité sur T , l'isométrie α possède un unique point fixe z'_α dans A'_γ d'après l'Assertion. Par la Proposition 2.7, la distance de z'_α à z' est égale à la moitié de la distance de translation de $\alpha\delta$. De plus, la position de z'_α d'un côté ou de l'autre de z' est déterminée par les sens de translation relatifs de γ et $\alpha\delta$. Pour T' proche de T pour la topologie des axes, la relation $\mathcal{R}$ est donc $(\varepsilon, \{\alpha\})$ -équivariante.

Ceci termine la démonstration du Théorème 5.3. CQFD

6 Compacité des arbres réels à petits stabilisateurs.

Nous allons maintenant appliquer le critère de compacité (Chapitre I, § 3) pour montrer un théorème de M. Culler et J. Morgan [CM].

Rappelons que nous nous sommes donnés un groupe Γ de type fini. Une action de Γ sur un arbre réel T est dite à **petits stabilisateurs** si le stabilisateur d'un segment non dégénéré de T ne contient pas de groupe libre de rang 2.

Définition 6.1 : *Considérons l'ensemble des arbres réels complets non vides, non réduits à un point, munis d'une action de Γ minimale à petits stabilisateurs. Nous notons $\mathcal{ST}(\Gamma)$ cet ensemble modulo isométries équivariantes. Nous appelons $\mathcal{PST}(\Gamma)$ l'espace quotient de $\mathcal{ST}(\Gamma)$, où deux arbres sont identifiés s'il existe une bijection équivariante $\varphi : T \rightarrow T'$ et un réel λ non nul tel que $\forall x, y \in T, d(\varphi(x), \varphi(y)) = \lambda.d(x, y)$.*

Nous remarquons que $\mathcal{ST}(\Gamma)$ est bien un ensemble. En effet, un arbre réel muni d'une action minimale est séparable (conséquence de la Proposition 3.7), et les classes d'isométries d'espaces métriques séparables forment un ensemble.

Si Γ contient un groupe libre $\langle \alpha, \beta \rangle$ de rang 2, alors nous avons vu qu'une action à petits stabilisateurs est irréductible (Proposition 3.9). Une telle action ne peut pas non plus être **diédrale** (au sens de [CM], i.e. irréductible mais préservant une paire de points à l'infini distincts). En effet, la géodésique joignant ces deux points à l'infini serait invariante par Γ . Les éléments du groupe agiraient sur cette droite soit par translation, soit par symétrie par rapport à un point. Le groupe libre

$$\langle [\alpha^2, \beta^2], [\alpha^4, \beta^2] \rangle$$

agirait alors par l'identité sur cet axe.

Théorème 6.2 : *Soit Γ un groupe de type fini, contenant un groupe libre de rang deux. Alors l'espace $\mathcal{PST}(\Gamma)$, muni de la topologie de Gromov, est compact.*

Nous allons montrer que $\mathcal{PST}(\Gamma)$ est séquentiellement compact pour la topologie de Gromov. Il suffit alors de remarquer qu'il est métrisable.

Mais nous avons montré (Remarque 5.5) qu'une action irréductible minimale était déterminée, à isométrie équivariante près, par la donnée de ses distances de translation (voir aussi l'article [CM] de M. Culler et J. Morgan). L'espace $\mathbb{R}^\Gamma$ muni de la topologie produit est certainement métrisable. Et nous avons montré dans la section précédente que la topologie de Gromov et celle définie par les distances de translation sont les mêmes sur l'espace des actions irréductibles minimales.

Démonstration : Donnons nous $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{PST}(\Gamma)$, et $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de représentants. Nous allons montrer qu'il existe un choix de points bases $x_i \in T_i$, et des facteurs normalisants λ_i tels que $\{((\lambda_i)^{-1} T_i, x_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ satisfait le

critère de compacité 3.11 du Chapitre I. Nous notons ici μX l'espace métrique X où la métrique est multipliée par μ .

Lemme 6.3 : *Soit Γ un groupe de type fini et G une partie génératrice finie de Γ stable par passage à l'inverse. Pour tout γ de Γ , notons M_γ la longueur minimale d'un mot en les générateurs représentant γ .*

Si T est un arbre réel muni d'une action de Γ , et si

$$\lambda_T = \sup\{ l_T(h) / h \text{ produit sans répétition d'éléments de } G \},$$

alors pour tout γ de Γ ,

$$l_T(\gamma) \leq M_\gamma \lambda_T.$$

En particulier, si λ_T est nul, alors l'arbre a un point fixe global.

Démonstration : Il s'agit de copier une preuve de [CS] dans le cas des arbres réels. Nous utilisons le résultat suivant :

Lemme 6.4 : *Soient h_1, h_2 deux éléments d'un groupe Γ , agissant par isométrie sur un arbre réel T . Alors $l_T(h_1 h_2) \leq l_T(h_1) + l_T(h_2)$ ou $l_T(h_1 h_2) = l_T(h_1(h_2)^{-1})$.*

Démonstration : Nous avons $l_T(h_1 h_2) > l_T(h_1) + l_T(h_2)$ seulement dans les trois cas suivants (Propositions 2.5, 2.6, 2.7) : h_1 et h_2 sont hyperboliques, d'axes de translation disjoints ; h_1 (resp h_2) est hyperbolique, h_2 (resp h_1) elliptique et l'axe de translation de h_1 (resp h_2) ne contient pas de point fixe par h_2 (resp h_1) ; h_1 et h_2 sont elliptiques et n'ont pas de point fixe commun.

Dans ces cas-là, nous avons $l_T(h_1 h_2) = l_T(h_1(h_2)^{-1}) = l_T(h_1) + l_T(h_2) + 2D$, où D est, selon le cas, la distance entre les deux axes de translation ; le minimum des distances entre l'axe de translation de l'un et un point fixe de l'autre ; le minimum des distances entre un point fixe de h_1 et un point fixe de h_2 . CQFD

Reprenons maintenant la démonstration du Lemme 6.3.

Montrons d'abord que $l_T(\gamma) \leq M_\gamma \lambda_T$, quand $\gamma = g_{i_1}^{n_1} \dots g_{i_r}^{n_r}$ où $i_1, \dots, i_r$ sont des entiers distincts entre 1 et n , et $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}$.

Procédons par récurrence sur l'entier naturel $v = \sum_{j=1}^r k_j$ où k_j vaut $-n_j$ si $n_j \leq 0$, et vaut $n_j - 1$ sinon.

Si $v = 0$, alors le résultat est vrai, par définition de λ_T .

Si $v > 0$, alors après conjugaison (les distances de translation ne dépendent que des classes de conjugaison), nous pouvons supposer que n_r est différent de 0 et 1. Si $n_r < 0$, nous avons par le lemme ci-dessus

$$l_T(\gamma) \leq l_T(g_{i_1}^{n_1} \dots g_{i_r}^{n_r} g_{i_r}^{-1}) + l_T(g_{i_r}^{-1}) \text{ ou } l_T(\gamma) = l_T(g_{i_1}^{n_1} \dots g_{i_r}^{n_r} g_{i_r}^2)$$

et nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence. Le cas $n_r > 0$ se traite de manière identique.

Supposons maintenant que $\gamma \in \Gamma$ est arbitraire. Ecrivons donc $\gamma = g_{i_1}^{n_1} \dots g_{i_r}^{n_r}$ avec $i_1, \dots, i_r$ des entiers quelconques entre 1 et n , et $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}$.

Raisonnons par récurrence sur l'entier r . Nous pouvons supposer d'après ce qui précède que les $i_1, \dots, i_r$ ne sont pas tous distincts. Après avoir éventuellement remplacé γ par un de ses conjugués, il existe des entiers s, r avec $1 \leq s-1 < r \leq n$ tels que $i_{s-1} = i_r$. Posons $h_1 = g_{i_1}^{n_1} \dots g_{i_{s-1}}^{n_{s-1}}$ et $h_2 = g_{i_s}^{n_s} \dots g_{i_r}^{n_r}$.

Par le lemme précédent, nous avons $l_T(\gamma) \leq l_T(h_1) + l_T(h_2)$ ou $l_T(\gamma) = l_T(h_1(h_2)^{-1})$. Le résultat découle de l'hypothèse de récurrence. CQFD

Si γ est une isométrie elliptique d'un arbre réel T , nous noterons (jusqu'à la fin de la démonstration du Théorème 6.2) A_γ l'ensemble convexe fermé (Remarque 2.4) de ses points fixes. Le lemme suivant découle alors des Propositions 2.5, 2.6, 2.7.

Lemme 6.5 : Si g et h sont deux isométries de T telles que $A_g \cap A_h = \emptyset$, alors
 $d(A_g, A_h) = \frac{1}{2} (l_T(gh) - l_T(h) - l_T(g))$. CQFD

Revenons à la démonstration du Théorème 6.2.

Fixons nous une partie génératrice finie $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ de Γ , stable par passage à l'inverse. Puisque Γ contient un groupe libre de rang 2, nous pouvons supposer que les éléments g_1, g_2 engendrent un tel groupe.

Posons $\lambda_i = \lambda_{T_i}$, où λ_{T_i} est défini dans le Lemme 6.3. Nous notons $l_i(\cdot) = l_{T_i}(\cdot)$ la fonction distance de translation de T_i .

Notons $\omega \in \Gamma$ un élément réalisant le maximum $\lambda_i = l_i(\omega)$. Après extraction éventuelle d'une sous-suite, il ne dépend plus de i . Puisque l'action est sans point fixe global, le réel λ_i est non nul, et ω possède un axe de translation A_ω^i dans T_i .

Nous allons alors définir cas par cas le point base x_i . Fixons nous $\gamma \in \Gamma$. Dans chacun de ces cas, nous montrerons que la suite

$$1/\lambda_i d(x_i, A_\gamma^i),$$

est bornée. Le nombre élevé de cas provient de la nécessité de prendre le point x_i sur l'axe de translation A_ω^i pour assurer la minimalité de l'arbre limite.

(1) Supposons que g_1 ou g_2 (quitte à changer les indices, nous supposons qu'il s'agit de g_1) vérifie $A_\omega^i \cap A_{g_1}^i = \emptyset$.

Prenons alors comme point base x_i la projection de $A_{g_1}^i$ sur A_ω^i . Si le segment connectant $A_{g_1}^i$ à A_ω^i rencontre le segment connectant entre x_i et A_γ^i en un point autre que x_i , alors $d(x_i, A_\gamma^i) = d(A_\gamma^i, A_\omega^i) \leq 1/2 l_i(\gamma \omega) \leq l_i(\gamma \omega)$ d'après le Lemme 6.5. Sinon, nous avons $d(x_i, A_\gamma^i) \leq d(A_\gamma^i, A_{g_1}^i) \leq l_i(\gamma g_1)$ toujours d'après le Lemme 6.5.

(2) Considérons maintenant le cas où g_1 et g_2 ont dans T_i un axe de translation ou un ensemble de points fixes qui rencontre A_ω^i .

(i) Supposons que $A_{g_1}^i \cap A_{g_2}^i = \emptyset$. Définissons x_i comme le milieu du segment connectant entre ces convexes. En particulier, $x_i \in A_\omega^i$. Si $d(x_i, A_\gamma^i)$ est non nul, alors A_γ^i ne rencontre pas l'un des deux ensembles $A_{g_1}^i$ et $A_{g_2}^i$. Donc

$$d(x_i, A_\gamma^i) \leq \sup \{d(A_\gamma^i, A_{g_1}^i), d(A_\gamma^i, A_{g_2}^i)\} \leq \sup \{l_i(\gamma g_1), l_i(\gamma g_2)\}.$$

(ii) Sinon, $A_{g_1}^i$ et $A_{g_2}^i$ ont une intersection non vide. La plus grande longueur d'un segment contenu dans celle-ci est inférieure ou égale à $l_i(g_2) + 2l_i(g_1)$. En effet, le groupe libre $\langle [g_1, g_2], [g_1^2, g_2] \rangle$ fixerait sinon un segment non dégénéré.

Définissons donc x_i comme étant le milieu du segment $A_{g_1}^i \cap A_{g_2}^i \cap A_{\omega}^i$.

Nous avons alors la majoration

$$d(x_i, A_{\gamma}^i) \leq \sup \{d(A_{\gamma}^i, A_{g_1}^i), d(A_{\gamma}^i, A_{g_2}^i), d(A_{\gamma}^i, A_{\omega}^i)\} + 2l_i(g_1) + l_i(g_2),$$

qui montre le résultat cherché.

Pour tout $\gamma \in \Gamma$, les distances $d(x_i, \gamma x_i)$ sont bornées uniformément en i après normalisation, car elles sont égales à $2d(x_i, A_{\gamma}^i) + l_i(\gamma)$. L'enveloppe convexe de x_i et des γx_i pour les γ appartenant à P , partie finie de Γ , est réunion des segments entre x_i et γx_i . Il est alors facile de voir que la suite des $(\lambda_i)^{-1}T_i$ vérifie les hypothèses du critère de compacité (Chapitre I, Théorème 3.11). Nous avons vu au Chapitre I, dans le paragraphe suivant la Définition 3.3, qu'une famille d'arbres réels est uniformément convexe.

Il nous reste maintenant à montrer que l'espace limite T_{∞} , qui est complet, est un arbre réel minimal à petits stabilisateurs, quitte à le remplacer par son cœur convexe (Définition 3.8, Chapitre I).

J.P. Otal nous a fait remarquer que les distances $\|\gamma\| = d(x_{\infty}, \gamma x_{\infty})$ définissent une fonction de Γ dans $\mathbb{R}^+$ qui est une fonction de longueur au sens de R. Lyndon [Lyn] et I. Chiswell [Chi1][Chi2]. C'est-à-dire qu'elle vérifie les axiomes suivants (voir Remarque 5.4 pour une interprétation géométrique) :

$$A \ 1' : \|e\| = 0$$

$$A \ 2 : \|\alpha\| = \|\alpha^{-1}\|$$

$$A \ 4 : \chi(\alpha, \beta) < \chi(\alpha, \gamma) \text{ implique } \chi(\beta, \gamma) = \chi(\alpha, \beta), \text{ où nous posons}$$

$$\chi(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} (\|\alpha\| + \|\beta\| - \|\alpha^{-1}\beta\|).$$

En effet, ces conditions sont linéaires et passent bien à la limite. Ceci nous assure donc l'existence d'un arbre réel invariant par Γ dans T_{∞} .

Mais nous utilisons plutôt le Lemme 3.7 du Chapitre I, qui démontre que notre espace limite T_{∞} est un arbre réel.

L'action de Γ sur T_{∞} est sans point fixe global. En effet, puisque le point x_i appartient toujours à l'axe de translation de ω , la géodésique par morceaux passant par les $(\omega)^n.x_{\infty}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ est une géodésique, sur laquelle l'isométrie ω agit par translation, de

longueur 1. Il s'agit donc de l'axe de translation de ω , et ω est hyperbolique. D'après le Lemme 3.6, l'action de Γ sur T_∞ est sans point fixe global.

D'après la Proposition 3.7, l'arbre réel T_∞ possède donc un unique cœur convexe (Définition 3.6, Chapitre I) fermé, donc complet. Celui-ci est encore limite des $(\lambda_i)^{-1}T_i$ pour la convergence au sens de Gromov (voir Chapitre I, fin de la Section 1). Nous le noterons encore T_∞ . C'est un arbre réel non vide, non réduit à un point, complet et muni d'une action minimale de Γ .

Il nous reste à montrer l'assertion suivante :

Lemme 6.6 : *Soit $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'arbres réels à petits stabilisateurs. Supposons que T_i tend vers T_∞ pour la convergence au sens de Gromov. Alors T_∞ est lui aussi à petits stabilisateurs.*

Démonstration : Supposons qu'il existe un segment compact $S = [x_\infty, y_\infty]$ de T_∞ , avec $x_\infty \neq y_\infty$ dont le stabilisateur contienne un sous-groupe libre G de rang 2. Un sous-groupe d'indice deux du stabilisateur de S fixe les extrémités x_∞ et y_∞ de S . Nous pouvons donc supposer que le groupe $G = \langle \alpha, \beta \rangle$ fixe S point par point.

Pour i suffisamment grand, il existe une ε -approximation P -équivariante $\mathcal{R}_i$ entre S et un compact de T_i , avec $\varepsilon < 1/10 \text{ long}(S)$ et $P = \{\alpha, \beta\}$.

Soient $x_i, y_i \in T_i$ tels que $x_\infty \mathcal{R}_i x_i$ et $y_\infty \mathcal{R}_i y_i$.

Alors $d(x_i, \alpha x_i) < \varepsilon$. De même, $d(y_i, \alpha y_i) < \varepsilon$. Puisque $d(x_i, y_i) > d(x_\infty, y_\infty) - \varepsilon \geq 2\varepsilon$, les segments $[x_i, \alpha x_i]$, $[y_i, \alpha y_i]$ ne se rencontrent pas. Tous deux contiennent un point de A_α^i , axe de translation ou ensemble des points fixes de l'isométrie α dans T_i . Par convexité, le segment connectant S_α^i entre ces segments est contenu dans A_α^i . La longueur de S_α^i est strictement supérieure à 7ε . (Voir Figure 20.)

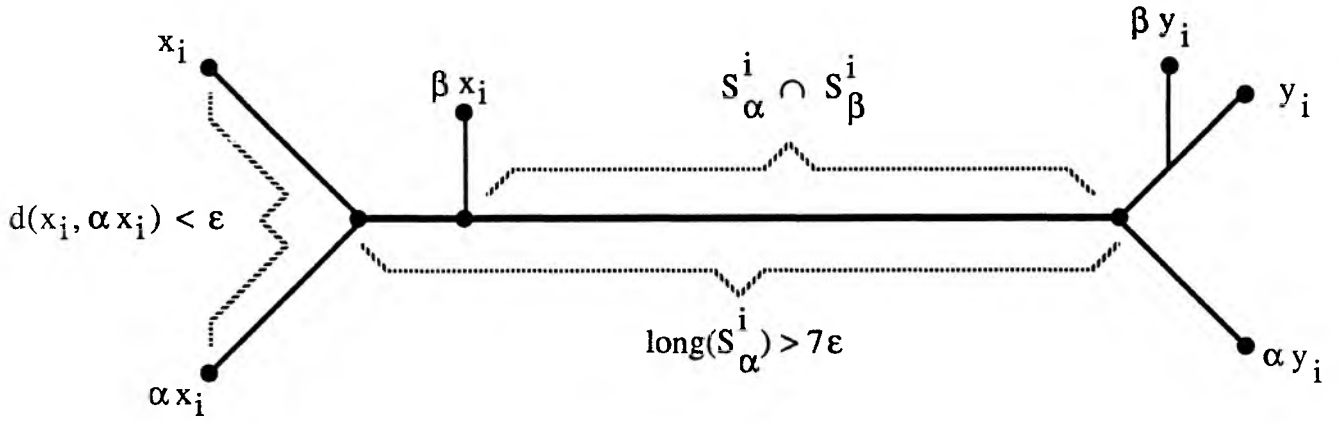


Figure 20.

Puisque $d(x_i, \beta x_i) < \epsilon$ et $d(y_i, \beta y_i) < \epsilon$, le segment S_β^i rencontre S_α^i sur une distance d'au moins 3ϵ . Nous avons $2l_i(\alpha) + l_i(\beta) \leq 2d(x_i, \alpha x_i) + d(x_i, \beta x_i) < 3\epsilon$. La longueur du segment $S_\alpha^i \cap S_\beta^i$ est alors supérieure strictement à $2l_i(\alpha) + l_i(\beta)$.

Mais alors, il existe un segment non dégénéré, contenu dans $S_\alpha^i \cap S_\beta^i$, qui est stable par le groupe libre $\langle [\alpha, \beta], [\alpha^2, \beta] \rangle$, ce qui contredit les hypothèses.

Ceci termine la démonstration du Lemme 6.6 et du Théorème 6.2. CQFD

Remarques 6.7 : (1) Considérons une suite d'arbres réels minimaux qui sont seulement irréductibles. En adaptant la démonstration, nous pouvons montrer que s'il n'y a pas de sous-suite qui converge au sens de Gromov, alors les distances de translation tendent vers celles d'un arbre réductible (quitte à normaliser et extraire). En effet, nous pouvons montrer que ces distances de translation convergent et valent 0 à la limite sur le groupe dérivé. Il est alors facile de construire une action sur $\mathbb{R}$ ayant pour fonction distance de translation la limite ainsi obtenue (voir [CM]).

(2) Supposons que G est un groupe discret sans torsion d'isométries de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ (voir rappels Chapitre III, § 1). Alors G est presque abélien (i.e. contient un sous-groupe abélien d'indice fini) si et seulement s'il ne contient pas de groupe libre de rang 2 (voir Chapitre III, Proposition 1.3).

Donc l'espace des actions minimales d'un groupe d'isométries hyperboliques, discret de type fini sans torsion, sur les arbres réels à stabilisateurs d'arêtes presque abéliens, est compact.

Chapitre 3.

1 Géométrie de l'espace hyperbolique.

Dans tout ce chapitre, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. Les rappels suivants de géométrie hyperbolique pourront être trouvés chez S.S. Chen et L. Greenberg [CG], L. Greenberg [Gre], N. Wielenberg [Wie] et A. Beardon [Bea] en dimension 2.

Nous noterons $\mathbb{H}^n$ la boule unité de $\mathbb{R}^n$, munie de la métrique riemannienne

$$ds = \frac{2dx}{(1 - \|x\|^2)}$$

à courbure constante -1 , où dx est la métrique euclidienne. Nous notons S_∞^{n-1} l'espace à l'infini de $\mathbb{H}^n$, c'est-à-dire la sphère euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ de rayon 1.

Les géodésiques de $\mathbb{H}^n$ sont les cercles et droites perpendiculaires à S_∞^{n-1} au sens euclidien.

Les **horisphères** sont les sphères euclidiennes contenues dans $\mathbb{H}^n \cup S_\infty^{n-1}$ et tangentes à S_∞^{n-1} , privées du point de tangence. Nous dirons que cette horisphère est centrée en ce point de S_∞^{n-1} . Les horisphères sont des hypersurfaces à courbure nulle, isométriques à $\mathbb{R}^n$.

Un autre modèle de l'espace hyperbolique est

$$\mathbb{H}_0^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 = 1, x_0 \geq 1\},$$

muni de la métrique riemannienne induite par la forme quadratique $q = x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2$ sur l'espace tangent à $\mathbb{H}_0^n$. L'isométrie est

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \rightarrow \left(\frac{x_1}{(x_0+1)}, \dots, \frac{x_n}{(x_0+1)} \right).$$

Soit $O(n, 1)$ le groupe des transformations linéaires réelles préservant q . Le groupe $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ des isométries de $\mathbb{H}^n$ s'identifie donc avec $O^+(n, 1)$, sous-groupe d'indice deux de $O(n, 1)$ formé des éléments conservant le demi-hyperboloïde supérieur $\mathbb{H}_0^n$.

Une isométrie de $\mathbb{H}^n$ possède au moins un point fixe dans $\mathbb{H}^n \cup S_\infty^{n-1}$, d'après le théorème de Brouwer. Elle est de l'un des types suivants :

- (1) **elliptique**, si elle a un point fixe dans $\mathbb{H}^n$,
- (2) **parabolique** si elle a exactement un point fixe, et si celui-ci est dans S_∞^{n-1} ,
- (3) **loxodromique** si elle a exactement deux points fixes distincts, et ceux-ci sont dans S_∞^{n-1} .

Si α est une isométrie parabolique de $\mathbb{H}^n$, elle préserve les horisphères centrées en son point fixe à l'infini.

Si α est une isométrie de $\mathbb{H}^n$, nous noterons $l(\alpha)$ la borne inférieure des $d(x, \alpha x)$ pour x dans $\mathbb{H}^n$. Nous appellerons $l(\alpha)$ la **distance de translation** de α . Elle est nulle si et seulement si α est elliptique ou parabolique.

Si α est loxodromique, la géodésique entre ses deux points fixes à l'infini sera appelée **axe de translation** de α , et noté A_α . L'isométrie α translate alors sur son axe de translation de la distance $l(\alpha)$.

Rappelons le lemme suivant, qui utilise le fait que le groupe d'isotropie d'un point est $O(n)$, qui est compact.

Lemme 1.1 : *Pour tout x de $\mathbb{H}^n$, et tout ε réel, l'ensemble des isométries g de $\mathbb{H}^n$, telles que $d(g(x), x) \leq \varepsilon$, est compact. CQFD*

Fixons nous Γ un groupe de type fini, et G une famille finie de générateurs. Notons $R(\Gamma, \text{Isom}(\mathbb{H}^n))$ l'ensemble des représentations de Γ dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$.

Il est muni de la topologie dite usuelle de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{H}^n$ des images de G par les représentations. Elle est métrisable, car définie par la famille dénombrable d'écart

$$\delta_{K_i}(\rho, \rho') = \sup \{ d(\rho(g)x, \rho'(g)x) / x \in K_i \text{ et } g \in G \}$$

avec K_i la boule fermée de centre O et de rayon i dans $\mathbb{H}^n$, qui est compacte.

Cette topologie ne dépend évidemment pas de la partie génératrice choisie. Une base de voisinages ouverts d'une représentation ρ est donnée par les

$$W_\rho(\varepsilon, K, P) = \{ \rho' \in R(\Gamma, \text{Isom}(\mathbb{H}^n)) / \forall x \in K, \forall g \in P, d(\rho(g)x, \rho'(g)x) < \varepsilon \}$$

pour les $\varepsilon > 0$, les parties finies K de $\mathbb{H}^n$ et les parties finies P de Γ .

Nous noterons le quotient modulo conjugaison de $R(\Gamma, \text{Isom}(\mathbb{H}^n))$ par

$$R/C(\Gamma, \text{Isom}(\mathbb{H}^n)).$$

Sa topologie usuelle est la topologie quotient de celle décrite ci-dessus.

Proposition 1.2 : *La topologie de Gromov sur $R/C(\Gamma, \text{Isom}(\mathbb{H}^n))$ est la même que la topologie usuelle.*

Démonstration : Il est immédiat d'après les remarques précédentes, et la Remarque 1.4 du Chapitre I que l'application canonique de $R(\Gamma, \text{Isom}(\mathbb{H}^n))$ muni de la topologie usuelle dans $R/C(\Gamma, \text{Isom}(\mathbb{H}^n))$ muni de la topologie de Gromov est continue.

Réciproquement, soit $\rho' \in R(\Gamma, \text{Isom}(\mathbb{H}^n))$ une représentation proche au sens de Gromov d'une représentation ρ . Fixons nous une partie finie G de Γ et une partie finie K de $\mathbb{H}^n$. Nous allons montrer que, quitte à conjuguer ρ' , les $\rho'(g)$ avec $g \in G$ sont uniformément proches de $\rho(g)$ sur K .

Fixons nous un $\varepsilon > 0$ et soit $\eta > 0$ petit devant ε . Numérotions $\{x_j\}_{j=1\dots m}$ les éléments de K . Soit $\mathcal{R}$ une η -approximation G -équivariante entre K , muni de l'action ρ , et un compact K' de $\mathbb{H}^n$ muni de l'action ρ' .

Soit $\{x'_j\}_{j=1\dots m}$ des éléments de K' tels que $x_j \mathcal{R} x'_j$. Les distances relatives entre les x'_j sont donc proches de celles correspondantes pour les x_j .

Assertion : *Montrons par récurrence sur m qu'il existe des points $\{y'_j\}_{j=1\dots m}$ de $\mathbb{H}^n$ tels que $d(y'_j, x'_j) \leq \varepsilon$ et $d(y'_j, y'_k) = d(x_j, x_k)$, pourvu que η soit suffisamment petit.*

Démonstration de l'Assertion : Nous nous plaçons dans le modèle projectif $\mathbb{H}_P^n$ de $\mathbb{H}^n$ (Voir [Thu2] Chapitre 2). Il est obtenu de la manière suivante. Considérons $\mathbb{R}^n$ contenu dans $\mathbb{R}^{n+1}$ comme hyperplan des n premières coordonnées. Soit φ la bijection du disque ouvert unité $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$ dans lui-même, obtenue en prenant la projection stéréographique (euclidienne) de $\mathbb{D}^n$ sur l'hémisphère sud de la sphère $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ à partir du pôle Nord, puis en projetant de nouveau sur $\mathbb{D}^n$ par la projection orthogonale euclidienne de $\mathbb{R}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}^n$. Alors le modèle projectif $\mathbb{H}_P^n$ est $\mathbb{D}^n$ muni de la métrique image par φ de la métrique de $\mathbb{H}^n$.

Par sous-espace affine de $\mathbb{H}_P^n$, nous entendons intersection de $\mathbb{H}_P^n$ et d'un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$. Un sous-espace affine de dimension q de $\mathbb{H}_P^n$ est isométrique à $\mathbb{H}^q$. Le groupe des isométries de $\mathbb{H}_P^n$ agit transitivement sur les sous-espaces affines de mêmes dimensions (voir [Thu2]) Nous avons alors le lemme suivant, dont la démonstration est immédiate, en se ramenant à l'inclusion de $\mathbb{H}^r \subset \mathbb{H}^{r+1}$ (donnée par les r premières coordonnées) :

Lemme : Soit $\{u_j\}_{j=1 \dots r+1}$ un repère affine d'un sous-espace affine de dimension r de $\mathbb{H}_P^{r+1}$. Si $x, y \in \mathbb{H}_P^{r+1}$ sont deux points du même demi-espace et si $d(x, u_j)$ est suffisamment proche de $d(y, u_j)$ pour tout j , alors x est proche de y . CQFD

Montrons alors l'Assertion par récurrence sur m . Nous posons $y'_1 = x'_1$. Supposons $\{y'_j\}_{j=1 \dots m-1}$ construits, vérifiant $d(y'_j, x'_j) \leq \varepsilon'$ et $d(y'_j, y'_k) = d(x_j, x_k)$ pour $j, k = 1, \dots, m-1$ avec ε' suffisamment petit.

Si x_m appartient au sous-espace affine engendré par $\{x_j\}_{j=1 \dots m-1}$, alors notons y'_m l'unique point du sous-espace affine engendré par $\{y'_j\}_{j=1 \dots m-1}$ tel que $d(y'_m, y'_j) = d(x_m, x_j)$ pour $j = 1, \dots, m-1$. Alors $d(x'_m, y'_j)$ est proche de $d(y'_m, y'_j)$. D'après le Lemme ci-dessus, le point x'_m est proche de y'_m .

Si x_m n'appartient pas au sous-espace affine engendré par $\{x_j\}_{j=1 \dots m-1}$, et x'_m appartient au sous-espace affine engendré par $\{y'_j\}_{j=1 \dots m-1}$, alors soit y'_m un point de $\mathbb{H}_P^n$ tel que $d(y'_m, y'_j) = d(x_m, x_j)$ pour $j = 1, \dots, m-1$. Alors d'après le Lemme, le point y'_m est proche de x'_m .

Supposons que x_m n'appartient pas au sous-espace affine engendré par $\{x_j\}_{j=1 \dots m-1}$, et que x'_m n'appartient pas au sous-espace affine engendré par $\{y'_j\}_{j=1 \dots m-1}$. Soit y'_m le point du sous-espace affine engendré par $\{x'_m\} \cup \{y'_j\}_{j=1 \dots m-1}$, situé du même coté que x'_m par rapport au sous-espace affine engendré par $\{y'_j\}_{j=1 \dots m-1}$, et tel que $d(y'_m, y'_j) = d(x_m, x_j)$ pour $j = 1, \dots, m-1$. Toujours d'après le Lemme, le point y'_m est proche de x'_m .

Ceci démontre l'Assertion. CQFD

Par les propriétés d'homogénéité de $\mathbb{H}^n$, étant donné deux ensembles de points $\{u_j\}_{j=1 \dots m}$ et $\{v_j\}_{j=1 \dots m}$ tels que $d(u_j, u_k) = d(v_j, v_k)$ pour tout j, k , alors il existe une isométrie Φ de $\mathbb{H}^n$ telle que $\Phi(u_j) = v_j$.

Soit donc Φ une isométrie envoyant le point y'_j donné par l'Assertion sur x_j , pour tout j . Il existe alors $\varepsilon'' > 0$ arbitrairement petit, tel que l'identité est une ε'' -approximation G -équivariante entre K muni de l'action ρ , et K muni de l'action $\rho'' = \Phi \circ \rho \circ (\Phi)^{-1}$. Ce qui signifie précisément que les distances entre les images d'un point de K par $\rho''(g)$ et $\rho(g)$ pour g dans G sont petites. CQFD

Rappelons certaines propriétés que vérifient les sous-groupes discrets de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$, et dont nous nous servirons ultérieurement. Nous les avons regroupées ici pour faciliter

les renvois. Les démonstrations sont bien connues, ou se déduisent de manière évidente de résultats bien connus. Voir par exemple [EON] [Gro1] pour (1) et (2), et [Gre] pour (3). En particulier, supposons que tous les éléments du groupe sont paraboliques et fixent un même point à l'infini. Dans ce cas-là, le groupe respecte les horisphères passant par ce point, qui sont isométriques à $\mathbb{R}^n$. D'après les théorèmes de Bieberbach, les sous-groupes discrets d'isométries de $\mathbb{R}^n$ sont presque abéliens.

Proposition 1.3 : *Soit Γ un sous-groupe de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$, de type fini, discret et sans torsion.*

(1) Le groupe Γ contient un groupe libre de rang 2 si et seulement s'il n'est pas presque abélien. Si Γ est presque abélien, alors ou bien tous ses éléments sont paraboliques et fixent le même point fixe à l'infini, ou bien tous ses éléments sont loxodromiques et fixent une même géodésique.

(2) Le groupe Γ contient un groupe libre de rang 2

- si et seulement s'il n'admet pas de point fixe global à l'infini ;*
- si et seulement s'il possède au moins deux axes de translation distincts, et alors il en contient une infinité ;*
- si et seulement si son ensemble limite (voir Chapitre IV, Section 1) contient au moins trois points, et alors il en contient une infinité non dénombrable.*

(3) L'axe de translation d'un élément loxodromique de Γ ne passe pas par le point fixe à l'infini d'un élément parabolique de Γ . Les axes de translation de deux éléments de Γ n'ont pas un unique point fixe commun à l'infini.

2 Dégénérescence des structures hyperboliques.

Fixons nous un sous-groupe Γ de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$, de type fini, discret et sans torsion. En particulier, Γ n'a pas d'éléments elliptiques.

Définition 2.1 : *Nous noterons $\mathcal{H}^n(\Gamma)$ l'ensemble des homomorphismes injectifs à image discrète de Γ dans $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$, modulo conjugaison.*

C'est donc l'ensemble des actions par isométries fidèles et proprement discontinues de Γ sur $\mathbb{H}^n$, où nous identifions deux actions ρ et ρ' s'il existe une isométrie équivariante de $(\mathbb{H}^n, \rho)$ dans $(\mathbb{H}^n, \rho')$.

Notons $\mathcal{PH}^n(\Gamma)$ l'espace des actions fidèles et discrètes de Γ sur les espaces $\lambda\mathbb{H}^n$ où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, modulo homothéties équivariantes, muni de la topologie de Gromov quotient. Il est canoniquement homéomorphe à $\mathcal{H}^n(\Gamma)$, à cause des propriétés de la courbure.

Voici l'énoncé du théorème principal de ce chapitre.

Théorème 2.2 : *Soit Γ un groupe de type fini sans torsion contenant un groupe libre de rang deux. Alors l'ensemble $\mathcal{PH}^n(\Gamma) \cup \mathcal{PST}(\Gamma)$ muni de la topologie de Gromov est séquentiellement compact.*

Nous dirons qu'un espace topologique est **séquentiellement compact** si de toute suite nous pouvons extraire une sous-suite convergente. Nous montrerons (Chapitre IV, Théorème 3.6) que l'espace $\mathcal{PH}^n(\Gamma) \cup \mathcal{PST}(\Gamma)$ est en fait métrisable compact.

Démonstration : D'après la Section 6 du Chapitre II, il suffit de montrer que de toute suite d'éléments de $\mathcal{H}^n(\Gamma)$ nous pouvons extraire une sous-suite convergente vers un élément de la réunion $\mathcal{H}^n(\Gamma) \cup \mathcal{ST}(\Gamma)$, quitte à la normaliser.

Fixons nous une partie génératrice finie G de Γ stable par passage à l'inverse. Soit $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{H}^n(\Gamma)$. Prenons ρ_i une action dans la classe de conjugaison τ_i . Si $\lambda_i > 0$, nous notons X_i l'espace métrique $(1/\lambda_i)\mathbb{H}^n$ muni de l'action ρ_i . Quitte à conjuguer ρ_i , nous allons montrer qu'il existe un choix de points bases x_i et de facteurs normalisants λ_i tel que la suite d'espaces Γ -convexes (X_i, x_i) vérifie les hypothèses du critère de compacité.

Nous empruntons à M. Bestvina [Bes] le lemme suivant, qui remplace notre argument originel qui n'était valable qu'en petites dimensions.

En effet, en dimension deux, il est possible de trouver un point base en regardant uniquement les axes de translation d'une partie génératrice finie, ce qui donne une méthode plus constructive (voir Annexe).

Lemme 2.3 : Soit Γ un sous-groupe de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$, discret, sans torsion, de type fini, qui n'est pas presque abélien. Alors il existe un point x_0 de $\mathbb{H}^n$ qui minimise sur $\mathbb{H}^n$ la fonction

$$\max \{d(x, gx), g \in G\}.$$

Démonstration : Soit x_1 un point de $\mathbb{H}^n$ fixé. Notons λ le maximum des $d(x_1, gx_1)$ pour g élément de G .

Supposons qu'il existe deux éléments g_1, g_2 de G loxodromiques, d'axes de translation non confondus.

Ils n'ont pas de point commun dans S_∞^{n-1} , d'après la Proposition 1.3. Considérons les voisinages tubulaires V_1, V_2 de ces axes de translation tels que si x appartient à V_i , alors $d(x, g_i x) \leq \lambda$. Alors l'intersection de ces voisinages est compact, et il suffit de chercher x_0 dans ce compact.

Supposons qu'il existe un élément g_1 de G loxodromique, et que tous les autres éléments loxodromiques de G ont le même axe.

Il existe un élément parabolique $g_2 \in G$, puisque Γ n'est pas presque cyclique, dont le point fixe à l'infini x_∞ n'est pas extrémité de l'axe de translation de g_1 , car Γ est discret (Proposition 1.3).

Donnons nous une géodésique $\alpha(t)$ dont une extrémité est x_∞ . Considérons la fonction $f(t) = \min d(x, g_2 x)$, où le minimum est pris sur l'horisphère passant par $\alpha(t)$. Alors $f(t)$ est une fonction strictement croissante de 0 à $+\infty$.

Le point x_0 est alors à chercher dans l'intersection compacte du voisinage de l'axe de translation de g_1 décrit ci-dessus et de l'horiboule où le $f(t)$ correspondant à la frontière est inférieur ou égal à λ .

Si nous ne sommes pas dans l'un des cas précédents, alors tous les éléments de G sont paraboliques. Puisque Γ est discret et n'est pas presque abélien, il existe deux éléments paraboliques g_1, g_2 de G , dont les points fixes à l'infini sont distincts. Nous répétons alors l'argument en prenant l'intersection de deux horiboules. CQFD

Revenons à la démonstration du théorème. Prenons pour point base x_i le point défini par le lemme précédent pour le groupe $\rho_i(\Gamma)$. Posons

$$\lambda_i = \max \{d(x_i, \rho_i(g).x_i), g \in G\}.$$

Supposons la suite λ_i bornée. Après conjugaison, nous pouvons supposer que x_i ne dépend pas de i . En effet, le groupe des isométries de $\mathbb{H}^n$ est transitif sur $\mathbb{H}^n$. Nous utilisons alors le Lemme 1.1 pour en déduire que ρ_i tend vers une action ρ sur $\mathbb{H}^n$. Un résultat de N.J. Wielenberg [Wie] assure que l'action ρ est fidèle et discrète.

Supposons à partir de maintenant, quitte à extraire, que la suite λ_i tend vers $+\infty$. Montrons que pour toute partie finie P de Γ , les enveloppes convexes $\text{Conv}_{X_i}(Px_i)$ sont uniformément compactes (Définition 3.2, Chapitre I).

Par récurrence, pour tout α dans Γ , la distance $d(x_i, \alpha x_i)$ est majorée par $\lambda_i |\alpha|$, où $|\alpha|$ est la longueur minimale d'un mot en les générateurs de G représentant α . Quitte à extraire, nous pouvons supposer que, pour tout α dans Γ , la suite de nombre réels $1/\lambda_i d(x_i, \alpha x_i)$ converge, vers un réel noté $\|\alpha\|$.

Un triangle de $\mathbb{H}^n$ ayant pour sommets des images de x_i par Γ , une fois normalisé par $1/\lambda_i$, tend pour la distance de Hausdorff-Gromov vers une étoile, c'est-à-dire la réunion de trois intervalles compacts recollés par une de leurs extrémités.

En effet, l'aire du triangle géodésique de sommets les points considérés est bornée, puisque sa courbure est égale à -1 (formule de Gauss-Bonnet). Le diamètre du cercle inscrit (son existence se prouve comme dans le cas euclidien, voir [Bea] page 151) est borné, car l'aire d'un disque hyperbolique tend vers $+\infty$ quand son rayon tend vers $+\infty$.

Le diamètre du cercle inscrit divisé par λ_i doit donc tendre vers 0. Le disque hyperbolique bordé par le cercle inscrit tend alors vers un point. Par la convexité forte de l'espace $\mathbb{H}^2$ (voir Remarque 2.3, Chapitre I), les branches du triangles (i.e. ce qu'il reste quand nous avons enlevé le disque inscrit) tendent vers des segments. Voir la Figure 1, où nous posons

$$\chi(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} (\|\alpha\| + \|\beta\| - \|\alpha^{-1}\beta\|).$$

Remarquons au passage que l'application $\|\cdot\|$ ainsi définie de Γ dans $\mathbb{R}^+$ est de nouveau une fonction de longueur au sens de R. Lyndon et I. Chiswell.

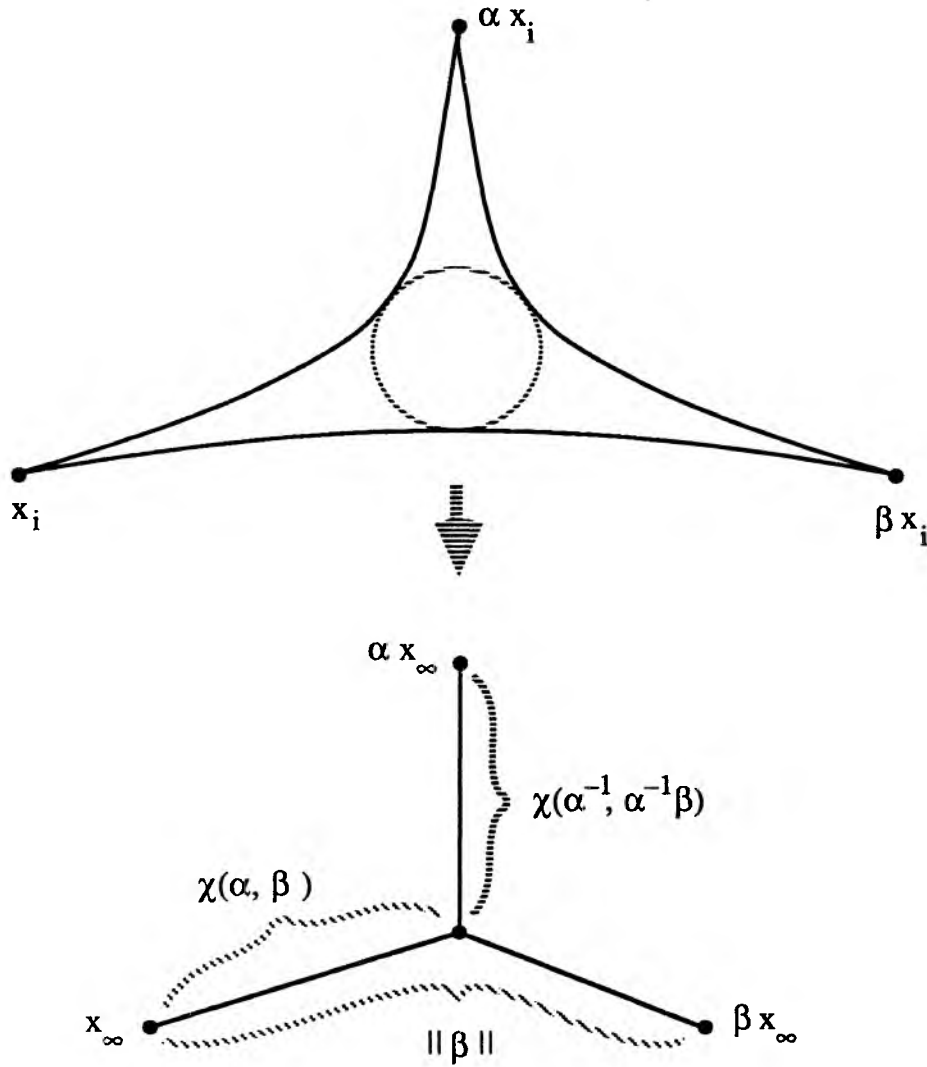


Figure 1.

Puisque tout triangle tend vers une étoile, les enveloppes convexes d'un nombre fini d'images de x_i par Γ tendent vers un arbre fini (compact) pour la distance de Hausdorff-Gromov, donc sont bien uniformément compactes.

Notons que la variété riemannienne $(1/\lambda_i)\mathbb{H}^n$ est à courbure sectionnelle $-(\lambda_i)^2$. Puisque λ_i tend vers $+\infty$, la suite des $(1/\lambda_i)\mathbb{H}^n$ est donc uniformément convexe (Définition 3.3, Chapitre I). Nous pouvons alors appliquer le critère de compacité (Chapitre I, § 3). Soit T_∞ une limite ainsi obtenue. Par construction, c'est un espace métrique complet. Le Lemme 3.7 du Chapitre I montre qu'il s'agit d'un arbre réel.

Faisons une remarque avant de poursuivre. Notons $\mathcal{P}(R(\Gamma, \text{Isom}(\mathbb{H}^n)))$ l'espace des actions isométriques de Γ sur les espaces $\lambda\mathbb{H}^n$ où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, où nous identifions une action sur $\lambda\mathbb{H}^n$ et la même action sur $\mu\mathbb{H}^n$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$. Il est muni de la topologie

de Gromov quotient. Il est canoniquement homéomorphe à $R(\Gamma, \text{Isom}(\mathbb{H}^n))$, à cause des propriétés de la courbure. Nous avons alors le résultat suivant :

Proposition 2.4 : *Soit Γ un groupe de type fini. Toute suite d'éléments de $\mathcal{P}(R(\Gamma, \text{Isom}(\mathbb{H}^n)))$ admet une sous-suite convergente au sens de Gromov vers un élément de cet ensemble, ou vers une action projectivée de Γ sur un arbre réel.*

Démonstration : Si nous considérons une suite de représentations $\{\rho_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dans $R(\Gamma, \text{Isom}(\mathbb{H}^n))$, nous pouvons poser $\lambda_i = \max \{d(O, \rho_i(g).O), g \in G\}$, où O est un point fixé de $\mathbb{H}^n$, et G une partie génératrice finie stable par passage à l'inverse. Nous normalisons $\mathbb{H}^n$ en divisant sa métrique par λ_i , et le raisonnement est le même que celui ci-dessus.

Remarquons que l'action de Γ sur un arbre réel que nous obtenons ainsi a de fortes chances d'être dégénérée. CQFD

Revenons au cadre des actions fidèles et discrètes. L'arbre réel T_∞ obtenu ci-dessus ne possède pas de point fixe global. Sinon, en prenant une $1/2$ -approximation G -équivariante entre ce point et un point y_i de X_i pour i assez grand, nous aurions

$$d(y_i, gy_i) < \frac{1}{2}\lambda_i$$

pour tout g de G , ce qui contredit la définition de x_i .

L'unique sous-arbre minimal de T_∞ , que nous noterons encore T_∞ , est aussi limite des X_i .

Il nous reste alors à montrer que les stabilisateurs de segments non dégénérés sont presque abéliens. La preuve du résultat est analogue à celle pour les arbres réels (voir Chapitre II, § 6). Nous allons utiliser le résultat suivant, dont la démonstration se trouve dans [KM] [Wie] [BK] [Thu2].

Lemme de Margulis : *Il existe une constante μ ne dépendant que de n , telle que pour tout sous-groupe discret Γ d'isométries de $\mathbb{H}^n$, et pour tout x de $\mathbb{H}^n$, le sous-groupe engendré par les éléments de Γ bougeant x d'une distance plus petite que μ , est presque abélien. CQFD*

Supposons qu'il existe un segment compact $S = [x_\infty, y_\infty]$ de T_∞ , dont le stabilisateur contient un sous-groupe libre G de rang 2. Un sous-groupe d'indice 2 du stabilisateur de S fixe les extrémités x_∞ et y_∞ de S . Nous pouvons donc supposer que $G = \langle \alpha, \beta \rangle$ fixe S .

Pour i suffisamment grand, il existe une ε -approximation P -équivariante $\mathcal{R}_i$ entre S et un compact de X_i , où ε est petit devant μ et la longueur D de S , et où P est l'ensemble des produits avec au plus quatre répétitions de α, β et de leurs inverses.

Soient $x_i, y_i \in X_i$ tels que $x_\infty \mathcal{R}_i x_i$ et $y_\infty \mathcal{R}_i y_i$. Alors $d(x_i, \alpha x_i) < \varepsilon \lambda_i$. De même, $d(y_i, \alpha y_i) < \varepsilon \lambda_i$.

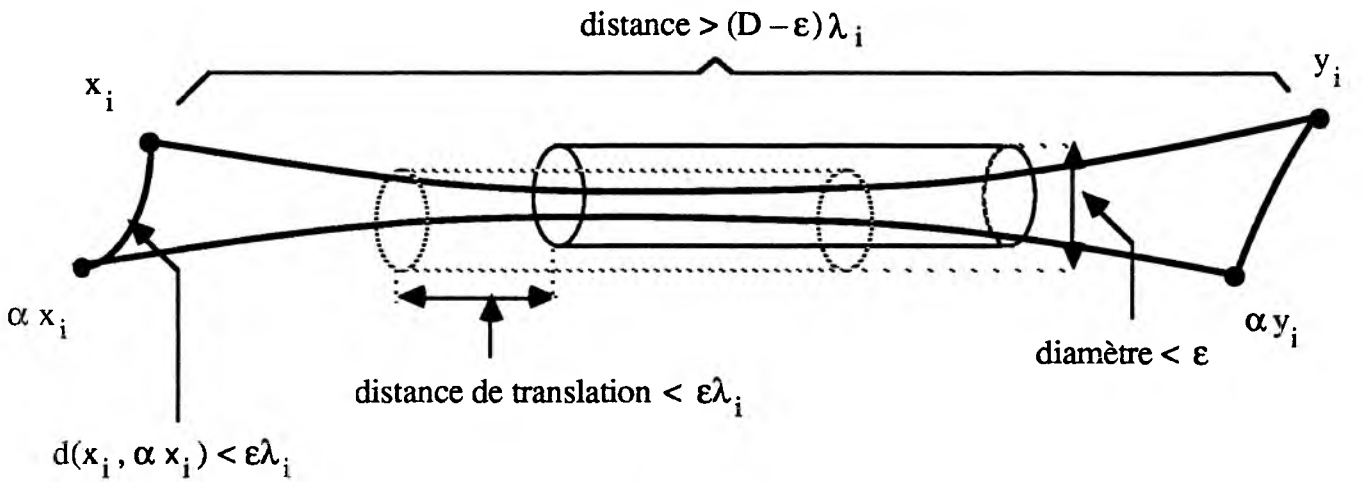


Figure 2.

Considérons les deux triangles géodésiques dont les sommets sont $\{x_i, y_i, \alpha x_i\}$, et $\{y_i, \alpha x_i, \alpha y_i\}$. Puisque λ_i tend vers $+\infty$ et que l'aire d'un triangle est bornée, les triangles sont longs et fins. C'est-à-dire par exemple que tout point d'un segment de la géodésique $[y_i, x_i]$ centré au milieu z_i de S_i et de longueur $\lambda_i D/2$, sera à distance $\leq \varepsilon/4$ d'un segment correspondant de $[y_i, \alpha x_i]$. Voir les formules de [Bea] page 147 donnant la distance entre points de deux côtés d'un triangle rectangle. Si A, B, C est un triangle hyperbolique rectangle en C , si A, B', C' est un triangle rectangle en C' , avec B' (resp. C') appartenant au côté AB (resp. AC), alors

$$\tanh(d(B', C')) = \frac{\sinh(d(C', A))}{\sinh(d(C, A))} \tanh(d(B, C)).$$

Considérons un voisinage tubulaire B_i autour du segment de géodésique S_i entre x_i et y_i , de diamètre ε' , centré au milieu z_i de S_i et de longueur $\lambda_i D/2$. La géodésique αA_i perce donc le “tonneau” B_i en ses extrémités.

Soit B'_i le tonneau de même centre que B_i , et de diamètre et de longueur moitiés.

Alors pour tous les points x, y dans le tonneau B'_i , les distances $d(x, \alpha x)$ et $d(y, \alpha y)$ sont proches uniformément en x, y . Ceci montre que α agit “presque” par translation euclidienne sur B'_i , parallèlement à la géodésique $[x_i, y_i]$. De même pour tous les éléments de la partie finie P . Mais le propre des translations est de commuter. Pour i suffisamment grand, les éléments

$$[\alpha, \beta] \text{ et } [\alpha^2, \beta]$$

déplacent donc le point z_i de moins de μ . Mais alors le lemme de Margulis contredit le fait qu'ils engendrent un groupe libre à deux générateurs.

Nous avons donc montré le :

Théorème 2.5 : *Soit Γ un groupe de type fini sans torsion contenant un groupe libre de rang deux. Un arbre réel limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{PH}^n(\Gamma)$ est à petits stabilisateurs.*

Ceci termine la preuve du Théorème 2.2. CQFD

Chapitre 4.

Cœurs convexes et séparation de la topologie de Gromov.

Nous allons nous intéresser aux propriétés de séparation de la topologie de Gromov sur un ensemble $\mathcal{E}$ d'espaces métriques munis d'actions d'un groupe Γ fixé.

Ces propriétés sont liées à l'existence et l'unicité d'un cœur convexe pour les éléments de $\mathcal{E}$ (voir § 1). Nous pouvons en effet imaginer un processus naturel pour essayer de rendre séparée la topologie de Gromov sur $\mathcal{E}$. Nous remplaçons les éléments de $\mathcal{E}$ par leur cœur convexe, puis nous identifions deux espaces isométriques par une isométrie commutant avec les actions.

Cette opération ne suffit pas en général. Nous allons essayer de chercher des conditions simples pour que ce processus aboutisse (voir § 2). Celles-ci font intervenir la “frontière hyperbolique” d'un espace, obtenue en rajoutant des points à l’“horizon”. Cette construction est essentiellement due à G. D. Mostow et G. A. Margulis, et a été mise en forme par P. Eberlein, B. O'Neill [EON] et M. Gromov [Gro1], [Gro4].

1 Cœurs convexes.

En général, la topologie de Gromov n'est pas séparée. Par exemple, n'importe quel espace métrique non vide, muni d'une action triviale de Γ est indiscernable d'un point.

Rappelons que deux éléments de $\mathcal{E}$ sont **indiscernables** (Chapitre I, Définition 1.8) si tout voisinage de l'un rencontre tout voisinage de l'autre.

Nous supposons que tous les éléments de $\mathcal{E}$ sont des espaces de longueur complets (voir Chapitre I, Définition 2.1).

Notons qu'une partie d'un espace de longueur uniquement géodésique est elle-même un espace de longueur si et seulement si elle est fermée et convexe (voir Chapitre I, le paragraphe suivant la Définition 2.2). La condition de fermeture vient du fait que nous supposons que tous nos espaces de longueur sont complets.

Si un élément X de $\mathbf{E}$ n'est pas minimal (Chapitre I, Définition 3.8), alors un sous-ensemble convexe, fermé et invariant par Γ est indiscernable de X . A fortiori, X est indiscernable d'un éventuel **cœur convexe** (convexe fermé invariant non vide, minimal pour l'inclusion) (Chapitre I, Définition 3.8).

Un cœur convexe n'existe pas forcément. Par exemple, le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2$, muni de l'action de $\mathbb{Z}$ où 1 agit par $z \rightarrow z + 1$, n'en possède pas. En effet, l'enveloppe convexe d'une orbite de x contient nécessairement le demi-plan supérieur délimité par la droite horizontale passant par x , qui est invariant, convexe et fermé. Il ne peut donc exister de cœur convexe dans ce cas.

D'autre part, quand il existe, le cœur convexe n'est pas forcément unique. Par exemple, le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'une translation.

Nous pouvons donc nous demander quelles sont les hypothèses supplémentaires qui entraînent l'existence d'un cœur convexe unique.

Rappelons tout d'abord des résultats de P. Eberlein et B. O'Neill [EON]. Les démonstrations sont ou bien similaires, ou bien évidentes. Nous en donnerons une ou deux pour illustrer l'application de la convexité stricte. Il faut toutefois faire attention au fait que les espaces ne sont pas localement compacts, ce que suppose M. Gromov [Gro1].

Par exemple, il n'est pas possible en général de compactifier un arbre réel en lui rajoutant uniquement les extrémités de ses géodésiques infinies. Voir [Gro4] pour des résultats sur la métrisabilité et la dimension de l'espace des points à l'infini.

Nous noterons X un espace strictement convexe complet fixé (voir Chapitre I, Définition 2.5).

Nous appellerons **rayon** une géodésique de X non bornée d'un côté. Il sera dit fermé (resp. ouvert) s'il contient (resp. ne contient pas) son extrémité à distance finie. Les rayons seront toujours paramétrés par des temps positifs.

Nous dirons que deux rayons α, β sont **asymptotes** s'il existe une constante C telle que $d(\alpha(t), \beta(t)) \leq C$ pour tout $t \geq 0$. Si nous changeons l'origine du paramétrage par abscisse curviligne, nous ne ferons que changer la valeur de la constante C .

Il s'agit d'une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence sont appelées les points à l'infini de X . L'ensemble de ces classes est noté ∂X . Nous noterons $\bar{X} = X \cup \partial X$. Remarquons que toute isométrie s'étend en une bijection de $\bar{X}$.

Lemme 1.1 : Soient α un rayon de X , paramétré par $[0, +\infty[$, et p un point de X . Soit $\varepsilon > 0$. Soit β_n la géodésique de p à $\alpha(n\varepsilon)$. Alors β_n converge uniformément sur tout compact vers un rayon β issu de p qui est asymptote à α .

Démonstration : Paramétrons la géodésique β_n par des temps positifs ou nuls, de telle sorte que $\beta_n(0) = p$.

Pour tout s dans $\mathbb{R}^+$, la suite $\beta_n(s)$ est définie pour n assez grand par l'inégalité triangulaire. Il suffit alors de montrer qu'elle est de Cauchy, uniformément sur tout compact.

Puisque $d(\alpha(n\varepsilon), \alpha(0))$ tend vers $+\infty$, et par la convexité de la fonction distance d'un point de α à p , il existe un réel r strictement positif, tel que la suite $a_{n+1} = d(\alpha(n\varepsilon), p)$ ait une croissance au moins arithmétique de raison r , i.e. $a_{n+1} \geq a_n + r$ pour n assez grand.

Remarquons que par la convexité forte, nous avons $d(\beta_n(s), \beta_{n+1}(s)) \leq \varepsilon$.

Découpons le segment $[\alpha(n\varepsilon), p]$ en morceaux de longueur 3ε , à partir du point $\beta_n(s)$. Notons $A_{n,k}$ le segment suivant :

$$A_{n,k} = [\beta_n(s+3k\varepsilon), \beta_{n+1}(s+3k\varepsilon)].$$

Par convexité, ce segment est de longueur inférieure ou égale à ε . L'inégalité triangulaire montre alors que tout point du segment $A_{n,k}$ est à distance au moins ε du segment $A_{n,k-1}$. Comme l'ensemble des points de X à distance inférieure ou égale à $s+3k\varepsilon$ du point p est convexe, la projection du point $\beta_n(s+3k\varepsilon)$ sur $A_{n,k-1}$ est précisément $\beta_n(s+3(k-1)\varepsilon)$.

Soit $0 \leq \delta < 1$ associé à ε par un module de convexité stricte de X (Chapitre I, Définition 2.6). En appliquant alors successivement l'hypothèse de convexité stricte aux segments $A_{n,k}$ autant que permis, nous avons alors :

$$d(\beta_n(s), \beta_{n+1}(s)) \leq \varepsilon \delta^{(a_n - s - 1)/3\varepsilon}$$

Les points $\beta_n(s)$ convergent donc uniformément sur tout compact, et ne s'éloignent pas trop de α . Donc le rayon limite est asymptote à α . CQFD

Nous dirons que le rayon α passe par un point x de ∂X si α appartient à la classe x . Si deux rayons asymptotes ont un point en commun, alors ils coïncident à partir de ce point. Pour tout rayon α , et tout point p de X , il existe un unique rayon issu de p et asymptote à α . Si α et β sont asymptotes, alors $d(\alpha(s), \beta)$ est une fonction décroissante de s tendant vers 0. En effet, si deux géodésiques arbitrairement longues $[x, y]$ et $[z, t]$ vérifient $d(x, z)$ et $d(y, t)$ sont bornés, alors par la convexité stricte, le milieu de $[x, y]$ sera à distance petite d'un point de $[z, t]$.

Entre deux points à l'infini distincts passe au plus une géodésique. En effet, une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convexe, tendant vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$ est identiquement nulle. Nous pouvons montrer qu'entre deux points à l'infini passe au moins une géodésique. En effet, si α et β sont deux rayons issus d'un même point et passant par deux points distincts de ∂X , alors le milieu de la géodésique $[\alpha(n), \beta(n)]$ est une suite de Cauchy. Le raisonnement est similaire à celui du lemme précédent.

Nous allons maintenant munir $\bar{X}$ d'une topologie. A la différence du cas $\mathbb{H}^n$, l'espace $\bar{X}$ ne sera pas forcément compact. Une isométrie n'aura pas toujours un point fixe. Un groupe agissant sur X n'aura pas toujours un point d'accumulation.

Un **cône** de base $x \in X$ est une réunion de rayons ouverts, dont un des bouts est x . Comme dans [EON], les cônes ouverts permettent de définir une topologie sur $\bar{X}$, qui vérifie les propriétés suivantes :

- (1) La topologie induite sur X est la topologie initiale, et X est un ouvert dense dans $\bar{X}$.
- (2) Les géodésiques et les isométries ont un prolongement continu sur $\bar{X}$.
- (3) Pour tout x de ∂X , et V voisinage de x , pour tout $r > 0$, il existe un voisinage U de x tel que $\{y \in X / d(y, U) < r\}$ soit contenu dans V .

Soit Γ un groupe d'isométries de X . D'après la propriété (3), l'ensemble des points d'accumulation dans ∂X d'une orbite $\Gamma(p)$ ne dépend pas du point p . Il est noté $L_X(\Gamma)$ et appelé ensemble limite de Γ dans X . C'est un fermé invariant, qui peut être vide.

Proposition 1.2 : *Supposons que $L_X(\Gamma)$ contient au moins deux points distincts. Alors X possède un unique cœur convexe.*

Démonstration : L'adhérence dans $\bar{X}$ de tout convexe fermé de X , non vide, et invariant par Γ , contient $L_X(\Gamma)$. Le cœur convexe est l'intersection de tous les convexes fermés invariants non vides. Il est égal à l'enveloppe convexe de l'ensemble limite (i.e. l'enveloppe convexe de la réunion de toutes les géodésiques dont les extrémités sont dans $L_X(\Gamma)$). CQFD

Remarquons que si Γ est un sous-groupe discret et sans torsion de $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$, alors son ensemble limite possède au moins deux points distincts, sauf si tous ses éléments sont paraboliques, auquel cas il est presque abélien (voir Chapitre III, Proposition 1.3).

De même, si Γ est un groupe agissant sans point fixe global sur un arbre réel T , alors par des résultats de J. P. Serre [Ser] et J. Morgan – P. Shalen [MS1] (voir Chapitre II, § 3), l'ensemble limite contient au moins deux points distincts. Le cœur convexe de T est alors égal à l'adhérence de la réunion de ses axes de translation.

La proposition suivante traite le cas où l'ensemble limite ne contient qu'un seul point. Elle utilise un résultat qui sera démontré dans la troisième partie de ce chapitre. Nous l'avons placée ici à cause de son contexte.

Proposition 1.3 : *Si l'ensemble limite $L_X(\Gamma)$ est réduit à un seul point, alors l'action est indiscernable de l'action sur l'espace réduit à un point.*

Démonstration : Il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute partie finie P de Γ , il existe un point x dans X tel que

$$(**) \text{ pour tout } \gamma \text{ dans } P, d(\gamma x, x) < \varepsilon.$$

Notons $x_\infty \in \partial X$ le point de l'ensemble limite. Fixons nous un rayon R passant par x_∞ . Ce rayon sera paramétré par $R(t)$ pour $t \in [0, +\infty[$. Nous allons chercher un point x vérifiant $(**)$ en allant suffisamment loin sur le rayon R .

Soit γ un élément de P . Le point x_∞ est fixe par tout le groupe Γ . Donc l'image du rayon R par γ est un rayon passant aussi par x_∞ . De plus, si nous orientons simultanément les rayons issus de x_∞ de telle sorte que $+\infty$ correspond à x_∞ , l'isométrie γ préservera l'orientation. Nous noterons p la projection sur le rayon γR , image de R par l'isométrie γ .

Rappelons que la distance entre un point d'un rayon et sa projection sur un rayon asymptote tend vers 0, quand la distance au point base du rayon tend vers l'infini, comme indiqué plus haut.

Supposons par l'absurde que la distance entre $R(t)$ et $\gamma R(t)$ est minorée par un réel strictement positif A . Donnons nous $\epsilon' > 0$ suffisamment petit par rapport à A . Quitte à raccourcir le rayon R , nous pouvons supposer que la projection p de R (resp. $\gamma^2 R$) sur γR bouge les points de moins de ϵ' , puisque les rayons sont asymptotes.

Montrons tout d'abord que le point $\gamma R(t)$ est entre $p(R(t))$ et $p(\gamma^2 R(t))$ sur le rayon γR .

En effet, supposons par exemple que le point $\gamma R(t)$ est entre $p(R(t))$ et x_∞ sur le rayon γR . Alors $\gamma^2 R(t)$ est entre $\gamma p(R(t))$ et x_∞ sur $\gamma^2 R$. Puisque $d(\gamma p(R(t)), \gamma R(t)) < \epsilon'$ est petit devant $d(\gamma R(t), \gamma^2 R(t))$, le résultat cherché s'en déduit.

Nous avons alors

$$|d(R(t), \gamma^2 R(t)) - d(R(t), \gamma R(t)) - d(\gamma R(t), \gamma^2 R(t))| < 4\epsilon'.$$

Alors en prenant ϵ' suffisamment petit, et quitte à remplacer γ par une de ses puissances, nous pouvons supposer que $d(R(t), \gamma R(t)) \geq A(X)$ (où $A(X)$ est définie dans le Lemme 3.3 de la section suivante) et que l'inégalité ci-dessus est vérifiée en remplaçant $4\epsilon'$ par ϵ , pour $\epsilon > 0$ donné. D'après le Lemme 3.3, l'isométrie γ est donc loxodromique. Mais alors $L_X(\Gamma)$ contient au moins deux points, ce qui est contraire aux hypothèses. CQFD

2 Séparation de la topologie de Gromov.

Maintenant que nous avons obtenu un critère pour l'existence et l'unicité du cœur convexe, nous pouvons nous demander si deux espaces minimaux indiscernables sont isométriques par une isométrie commutant avec les actions. Il existe une classification des isométries des espaces strictement convexes, établie par M. Gromov [Gro4] § 8, analogue à celle pour l'espace $\mathbb{H}^n$.

Définition 2.1 [Gro1][Gro4]: Soit X un espace strictement convexe. Une isométrie γ de X est dite

- elliptique si l'orbite $\{\gamma^i x\}_{i \in \mathbb{N}}$ est bornée pour un (et donc pour tous) x dans X ,*
- parabolique si l'orbite $\{\gamma^i x\}_{i \in \mathbb{N}}$ possède un et un seul point d'accumulation dans ∂X , pour un (et donc pour tous) x dans X ,*
- loxodromique si elle admet un axe de translation, c'est-à-dire une géodésique isométrique à $\mathbb{R}$ sur laquelle elle agit par translation différente de l'identité.*

Par exemple, une isométrie d'un arbre réel est soit elliptique, soit loxodromique [MS1] (voir aussi Chapitre II, § 2). Une isométrie d'un espace strictement convexe localement compact ou bien admet un point fixe dans X , ou bien admet un point fixe et un seul dans ∂X , et aucun dans X , ou bien est loxodromique [EON][Gro1].

Si γ est une isométrie d'un espace métrique X , nous appelons **fonction de déplacement** l'application $x \rightarrow d(x, \gamma x)$. La **distance de translation** de γ est la borne inférieure de la fonction de déplacement.

Si l'isométrie γ de X est loxodromique, elle possède un unique axe de translation. Les points de cet axe de translation minimisent la fonction de déplacement $x \rightarrow d(x, \gamma x)$. Le déplacement d'un point croît avec sa distance à l'axe de translation. (Voir [EON][Gro1]).

La définition ci-dessus d'une isométrie loxodromique est légèrement différente de celle de M. Gromov [Gro4], mais le lemme ci-dessous montre qu'elles sont en fait équivalentes.

Lemme 2.2 : Soit $\phi : X \rightarrow X$ une isométrie d'un espace strictement convexe X , telle que la fonction de déplacement $d(x, \phi(x))$ possède une borne inférieure strictement positive λ . Alors il existe une et une seule géodésique α sur laquelle ϕ agit par translation de distance λ .

Démonstration : Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, l'ensemble C_μ des x de X tels que $d(x, \varphi(x)) \leq \mu$ est un convexe fermé invariant par φ . Fixons nous $x_1 \in X$. Soit λ_n une suite décroissante vers λ , avec $\lambda_1 = d(x_1, \varphi(x_1))$. Soit x_n la projection de x_{n-1} sur C_{λ_n} . Alors $\varphi(x_n)$ est la projection de $\varphi(x_{n-1})$. Notons A_i le segment géodésique entre x_i et $\varphi(x_i)$. Les segments A_i sont de longueurs décroissantes.

Montrons que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}, \forall i, j \geq k \quad d(A_i, A_j) \leq \varepsilon.$$

Sinon, quitte à extraire, il existerait un $\varepsilon > 0$ tel que $d(A_i, A_{i+1}) > \varepsilon$. La convexité stricte contredit alors l'existence d'une borne inférieure strictement positive. Maintenant, il existe une suite $x_i \in A_i$, qui est de Cauchy, donc converge.

Notons x la limite. Alors x minimise la fonction de déplacement $d(y, \varphi(y))$. De plus, le point x appartient à la géodésique d'extrémités $\varphi(x)$ et $\varphi^{-1}(x)$. En effet, supposons que l'arc réunion des géodésiques A entre $\varphi^{-1}(x)$ et x , et A' entre x et $\varphi(x)$ n'est pas géodésique entre $\varphi^{-1}(x)$ et $\varphi(x)$. Alors la distance d'un point intérieur du segment A à son image par φ , qui est dans A' , serait strictement inférieure à $d(x, \varphi(x))$.

Il existe une et une seule géodésique passant par toutes les images de x par les puissances de φ . Elle est invariante par φ . CQFD

Théorème 2.3 (M. Gromov, [Gro4] Corollaire 8.1.B) : Une isométrie d'un espace de longueur complet strictement convexe est ou bien elliptique, ou bien parabolique, ou bien loxodromique. CQFD

Remarquons alors qu'une isométrie est de l'un de ces trois types si et seulement si une de ses puissances est de ce type.

En fait, M. Gromov a établi cette classification pour les espaces δ -hyperboliques au sens ci-dessous.

Définition 2.4 [Gro4] : Un espace de longueur X est dit δ -hyperbolique pour un $\delta > 0$ donné, si pour tous points x, y, z de X , et pour toutes géodésiques $[x, z]$ (resp. $[x, y]$, $[y, z]$) entre x et z (resp. x et y , y et z), alors tout point de $[x, z]$ est à distance inférieure ou égale à δ d'un point de la réunion $[x, y] \cup [y, z]$.

La proposition qui suit montre que la classification de [Gro4] s'applique dans notre situation. Les arguments de la démonstration sont les mêmes que ceux du Lemme 1.1.

Proposition 2.5 : *Si X est un espace strictement convexe, alors il existe un réel $\delta > 0$, ne dépendant que d'un module de convexité stricte de X , tel que X est δ -hyperbolique.*

Démonstration : Soient x, y, z trois points de X . Notons p la projection de x sur la géodésique $[y, z]$. Il suffit de montrer que p est à distance inférieure ou égale à δ du segment $[x, y]$, ainsi que de $[x, z]$. La convexité forte impliquera alors le résultat (voir Remarque 2.3, Chapitre I).

Subdivisons la géodésique entre p et y en segments de longueur 2. Nous avons donc une suite de points $p = x_0, x_1, \dots, x_{N+2} = y$, avec $d(x_i, x_{i+1}) = 2$ pour $i = 0, \dots, N$ et $d(x_{N+1}, x_{N+2}) \leq 2$. Notons a_i la distance entre x et x_i . Puisque x_0 minimise la distance de x à un point de $[y, z]$, nous avons $a_i \geq a_1$. Soit w_i le point de la géodésique entre x et x_i à distance a_1 de x . Alors nous avons vu (Lemme 1.1) que

$$d(w_i, w_{i+1}) \leq \delta_2^{(a_i - a_1 - 1)/3}$$

où δ_2 est associé à 2 par un module de convexité stricte de X .

Il suffit alors de montrer que la suite a_i est au moins à croissance arithmétique de raison $r > 0$ ne dépendant que d'un module de convexité stricte de X . En effet, la distance de p à la géodésique $[x, y]$ sera alors majorée par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \delta_2^{(kr - 1)/3}$$

qui ne dépend que d'un module de convexité stricte de X .

D'après la démonstration de l'Assertion de la démonstration de la Proposition 3.5, Chapitre I, le point x_{i+1} se projette en x_i sur la géodésique $[x_i, x]$. Soit δ_1 le réel associé à 1 par un module de convexité stricte de X . Notons u le point de $[x_{i+1}, x]$ à distance 1 de x_{i+1} et v sa projection sur $[x_i, x]$. Alors $d(u, x) \geq d(v, x)$ et $d(x_i, x) \leq \delta_1 \cdot d(x_{i+1}, u) = \delta_1$, donc

$$\begin{aligned} a_{i+1} - a_i &= d(x_{i+1}, u) + d(u, x) - d(v, x) - d(x_i, x) \\ &\geq 1 - \delta_1. \end{aligned}$$

En posant $r = 1 - \delta_1 > 0$, le résultat s'en déduit. CQFD

Nous allons montrer que sous certaines conditions naturelles, la topologie de Gromov est séparée.

Théorème 2.6 : *Soit Γ un groupe dénombrable. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble d'espaces de longueur X complets strictement convexes, tels que l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points est compacte. Nous supposons de plus qu'ils sont munis d'une action de Γ minimale et irréductible (i.e. ne fixant pas globalement de point de ∂X), telle que l'ensemble limite de Γ contient au moins deux points distincts.*

Nous identifions deux éléments de $\mathcal{E}$ s'il existe une isométrie commutant avec les actions de l'un dans l'autre.

Alors la topologie de Gromov sur $\mathcal{E}$ est séparée.

Avant de montrer ce théorème, nous allons faire quelques remarques.

Les espaces vérifiant les hypothèses sauf peut-être celle de minimalité ont en particulier un unique cœur convexe (Proposition 1.2). Nous obtenons ainsi un procédé canonique pour rendre la topologie de Gromov séparée : prendre les cœurs convexes, puis identifier les espaces isométriques de manière équivariante.

L'hypothèse de compacité des enveloppes convexes de points en nombre fini a déjà été utilisée dans le Chapitre I, Section 4. Elle est tout à fait naturelle pour montrer que la topologie de Gromov pointée est séparée (voir Proposition 3.2).

Remarque 2.7 : Si l'action est minimale et les enveloppes convexes d'un nombre fini de points sont compactes, puisque le groupe Γ est dénombrable, alors l'espace est adhérence d'une réunion dénombrable de compacts, donc est séparable (i.e. contient une partie dénombrable dense).

Tout élément de $\mathcal{E}$ possède donc une base dénombrable de voisinages (voir Chapitre I, Proposition 1.6). Nous allons pouvoir raisonner en termes de suites.

Remarque 2.8 : *L'ensemble limite possède au moins deux points distincts, si et seulement s'il existe au moins un axe de translation.*

Démonstration : Il est clair que s'il existe un axe de translation, alors l'ensemble limite contient au moins deux points, à savoir les points à l'infini de cet axe de translation.

La réciproque découle de [Gro4] § 8.2, car la convexité stricte implique la δ -hyperbolicité (Proposition 2.5). CQFD

Pour les arbres réels, posséder un axe de translation équivaut à ne pas avoir de point fixe global (voir Chapitre II, Lemme 3.6).

Remarque 2.9 : Si Γ est un groupe de type fini, contenant un groupe libre de rang 2, alors les éléments de $\mathcal{ST}(\Gamma)$ vérifient les hypothèses du Théorème 2.6.

Si Γ est un groupe de type fini sans torsion, contenant un groupe libre de rang 2, alors $\mathcal{H}^n(\Gamma)$ vérifie les hypothèses du Théorème 2.6, sauf peut-être celle de minimalité.

Démonstration : Pour $\mathcal{ST}(\Gamma)$, cela découle de sa définition (Chapitre II, Définition 4.1), de la Proposition 3.9 du Chapitre II et de la remarque précédente. De plus, l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points d'un arbre réel est réunion d'un nombre fini de segments compacts, donc compacte.

Quant à $\mathcal{H}^n(\Gamma)$, l'image de Γ par une représentation fidèle et discrète ne fixe pas un point donné à l'infini (voir Proposition 1.3, Chapitre III). L'ensemble limite ne peut être réduit à un seul point, sinon celui-ci serait fixé par tout le groupe. En effet, l'ensemble limite contient les points fixes à l'infini d'une isométrie loxodromique ou parabolique. L'image de Γ ne contient pas d'élément elliptique, car discrète et sans torsion. Par ailleurs, les boules fermées de rayon fini dans $\mathbb{H}^n$ sont compactes et convexes, donc les enveloppes convexes (qui sont fermées) d'un nombre fini de points sont compactes. CQFD

3 Démonstration du théorème de séparation 2.6.

Nous allons tout d'abord introduire un outil technique qui nous servira dans la démonstration, la topologie de Gromov pointée.

Intuitivement, la condition supplémentaire que vérifie cette topologie par rapport à la topologie de Gromov est la conservation des points bases par les approximations.

Définition 3.1 : Soit $\mathcal{E}$ un ensemble d'espaces métriques pointés munis d'actions de Γ . Donnons nous un élément (X, x) de $\mathcal{E}$, un compact K de X , une partie finie P de Γ et $\varepsilon > 0$. Notons $V_{(X, x)}(\varepsilon, K, P)$ l'ensemble des éléments (X', x') de $\mathcal{E}$ tels qu'il existe un compact K' dans X' et une ε -approximation P -équivariante fermée $\mathcal{R}$ entre $K \cup \{x\}$ et $K' \cup \{x'\}$ qui conserve le point base :

$$x \mathcal{R} x'$$

Les $V_T(\epsilon, K, P)$ forment une base de voisinages de X pour une topologie sur $\mathcal{E}$, que nous appellerons **topologie de Gromov pointée**.

Il n'est pas très difficile de voir que la topologie de Gromov pointée est séparée sous des hypothèses très naturelles.

Proposition 2.5 : *Soit Γ un groupe dénombrable. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble d'espaces de longueur pointés complets fortement convexes, tels que l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points est compacte, munis d'une action minimale de Γ .*

Nous identifions deux éléments de $\mathcal{E}$ s'il existe une isométrie commutant avec les actions de l'un dans l'autre, préservant les points bases.

Alors la topologie de Gromov pointée sur $\mathcal{E}$ est séparée.

Démonstration : Soient (X, x) et (Y, y) deux espaces indiscernables. Ecrivons le groupe Γ comme réunion croissante dénombrable de parties finies $\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Nous pouvons supposer que $P_0 = \{e\}$, où e est l'élément neutre du groupe.

Il existe alors une suite (X_i, x_i) d'éléments de $\mathcal{E}$ qui tend à la fois vers (X, x) et (Y, y) au sens suivant. Pour P partie de Γ , notons $\text{Conv}_X(Px)$ l'enveloppe convexe fermée (Chapitre I, Définition 3.9) dans X des images de x par P . Soit ϵ_i une suite de réels strictement positifs tendant vers 0. Prenons alors

$$(X_i, x_i) \in V_{(X, x)}(\epsilon_i, \text{Conv}_X(P_i x), P_i) \cap V_{(Y, y)}(\epsilon_i, \text{Conv}_Y(P_i y), P_i).$$

Par minimalité, X est la réunion des enveloppes convexes des $P_i x$, pour $i \in \mathbb{N}$. Nous allons alors construire par récurrence une isométrie équivariante de X dans Y , qui envoie $\text{Conv}_X(P_i x)$ sur $\text{Conv}_Y(P_i y)$. La démonstration découle des quatre points suivants.

$$(1) \text{ Pour tout élément } \gamma \text{ de } \Gamma, d(x, \gamma x) = \lim_{i \rightarrow +\infty} d(x_i, \gamma x_i) = d(y, \gamma y).$$

(2) Un point sur un segment géodésique compact est uniquement déterminé par ses distances à ses extrémités.

(3) Rappelons que le n -squelette $C_n(Z)$ de l'enveloppe convexe d'une partie Z de X est définie de manière récurrente par $C_0(Z) = Z$, et $C_{n+1}(Z)$ est la réunion des géodésiques

entre les points de $C_n(Z)$. Alors le Lemme 3.10 du Chapitre I nous dit que pour tout entier i et pour tout $\varepsilon > 0$, le ε -voisinage du n -squelette de $\text{Conv}_X(P_i x)$ contient $\text{Conv}_X(P_i x)$.

(4) La distance de Hausdorff entre espaces métriques compacts est séparée ([Gro2] page 37).

L'isométrie entre $\text{Conv}_X(P_i x)$ et $\text{Conv}_Y(P_i y)$ envoie les images de x par P_i sur celles de y . Elle envoie la géodésique entre deux points dont nous avons déjà construit l'image sur la géodésique entre les images de ces points. Ceci est possible parce que la distance entre les points et celle entre leurs images sont identiques. Les isométries ainsi définies étant compatibles, elles définissent une isométrie globale, qui vérifie les bonnes propriétés. CQFD

Pour démontrer le Théorème 2.6, nous allons montrer que nous pouvons choisir des points bases de manière "canonique".

Pour donner un exemple, soit X un espace vérifiant les hypothèses du Théorème 2.6. Supposons qu'il existe deux axes de translation disjoints, ne se rejoignant pas à l'infini (dans ∂X). Nous prendrons alors pour point base le milieu du segment de géodésique réalisant le minimum des distances d'un point d'un axe à un point de l'autre axe.

La démonstration est composée de plusieurs parties indépendantes.

(1) Existence du segment connectant.

Soient A et B deux géodésiques de X isométriques à $\mathbb{R}$. Nous appellerons **segment connectant** entre A et B le segment de géodésique réalisant le minimum des distances d'un point de A à un point de B .

En géométrie strictement convexe, il est facile de voir qu'un segment connectant existe, et est unique.

En effet, si A et B sont les deux droites géodésiques, ce segment s'obtient ainsi. Soit x_0 un point de A et x_1 sa projection sur B , et x_{i+1} la projection de x_i sur le convexe A si i est pair, sur B sinon. Si A et B sont disjoints, et ne se rejoignent pas à l'infini, alors la distance entre A et B est strictement positive. Comme dans la démonstration du Lemme 1.1, nous pouvons voir que les suites $\{x_{2i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ et $\{x_{2i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$ sont de Cauchy. Elles

convergent donc, respectivement vers un point de A et un point de B . La géodésique entre ces deux points est le segment cherché.

L'unicité découle aussi de la forte convexité.

(2) Existence de deux axes de translation ne se rencontrant pas à l'infini.

Montrons qu'avec les hypothèses du théorème, nous pouvons trouver deux axes de translation ne se rencontrant pas à l'infini. Le raisonnement est purement combinatoire.

D'après la Remarque 2.8, il existe un élément γ de Γ qui est loxodromique. Notons A_γ son axe de translation.

Supposons par l'absurde que deux axes de translation se rencontrent nécessairement dans ∂X . Notons e_+ et e_- les deux bouts de A_γ .

Si l'axe de translation A_δ n'est pas confondu avec A_γ , il rencontre A_γ par exemple en e_+ et donc ne le rencontre pas en e_- . En effet, il existe une et une seule géodésique entre deux points à l'infini (voir Section 1). Notons b_- le bout de A_δ différent de e_+ .

S'il existe un autre axe de translation A_α ne rencontrant pas A_γ en e_+ , alors A_α est la géodésique entre b_- et e_- . Le point b_- ne peut être fixe par γ . Sinon, la géodésique A_δ dont les bouts sont fixes serait respectée par γ . Or ceci contredit le fait que l'axe de translation de γ est l'unique géodésique respectée par γ . L'axe de translation de $\gamma\alpha\gamma^{-1}$, qui est l'image de A_α par γ , ne rencontre A_δ en aucun de ses bouts, ce qui est impossible.

Donc tous les axes de translation ont en commun le point e_+ de ∂X . Puisque l'image par une isométrie d'un axe de translation est encore un axe de translation, deux cas sont possibles :

- le point e_+ est fixe par tout le groupe, ou
- tous les axes de translation sont confondus en une géodésique conservée par tout le groupe, et il existe un élément de Γ qui agit par symétrie par rapport à un point.

Dans le dernier cas, l'espace est une droite par minimalité. C'est de plus un arbre réel diédral au sens de [CM] (voir Chapitre II, paragraphes suivant la Définition 6.1). Le résultat découle du Chapitre II, ou de [CM].

Le premier cas contredit nos hypothèses.

(3) Choix du point base.

D'après le point (2) de la démonstration, il existe deux axes de translation ne se rencontrant en aucun de leurs bouts (dans ∂X). Leur intersection est donc vide ou compacte. A cause de la convexité forte, il s'agit d'un segment connexe. Nous prenons alors pour point base le milieu de cette intersection si elle est non vide, ou le milieu du segment connectant sinon.

Il s'agit maintenant de montrer que le point base ainsi déterminé est bien “canonique”, c'est-à-dire qu'il est “presque” préservé par les ε -approximations P -équivariantes avec P suffisamment grande, et ε suffisamment petit. Nous aurons pour cela besoin du lemme suivant.

(4) Lemme préparatoire.

Lemme 3.3 : *Soit x un point d'un espace de longueur complet strictement convexe X . Soit γ une isométrie de X . Si la somme des distances de x à γx et de γx à $\gamma^2 x$ est suffisamment proche de la distance de x à $\gamma^2 x$ par rapport à la distance $d(x, \gamma x)$, alors l'isométrie γ est loxodromique, et x est proche de l'axe de translation de γ .*

Plus précisément, montrons qu'il existe une constante $A(X)$, ne dépendant que d'un module de convexité stricte de X (voir Chapitre I, Définition 2.6) telle que s'il existe $x \in X$ tel que $d(x, \gamma x) \geq A(X)$ et $|2 d(x, \gamma x) - d(x, \gamma^2 x)| < 1$, alors γ est loxodromique. De plus, si γ est loxodromique, d'axe de translation A_γ , alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, \text{ si } |2 d(x, \gamma x) - d(x, \gamma^2 x)| < \eta, \text{ alors } d(x, A_\gamma) < \varepsilon.$$

Démonstration : L'isométrie γ est loxodromique d'après [Gro4]. En effet, si γ n'est pas loxodromique, alors γ^{-1} non plus. De plus,

$$d(\gamma x, x) = d(\gamma x, \gamma^2 x) \geq [d(x, \gamma^2 x) - d(\gamma x, x) - d(\gamma x, \gamma^2 x)] + (A(X) - 1).$$

Si X est strictement convexe, alors il est δ -hyperbolique (voir Proposition 2.5). En prenant $A(X) - 1$ un multiple entier suffisamment grand de δ , le Lemme 8.1.A de [Gro4] implique que $\gamma\gamma^{-1}$ est loxodromique, et nous obtenons une contradiction.

Supposons γ loxodromique, d'axe de translation A_γ . Soit y la projection de x sur A_γ . Alors γy est la projection de γx et $\gamma^2 y$ celle de $\gamma^2 x$. La géodésique entre x et $\gamma^2 x$ se projette sur celle entre y et $\gamma^2 y$. Notons que la distance $d(z, \gamma z)$ pour $z \in X$ est toujours minorée par la distance de translation de γ .

D'après le Lemme 3.4 du Chapitre I, si $2d(x, \gamma x) = d(x, \gamma x) + d(\gamma x, \gamma^2 x)$ est suffisamment proche de $d(x, \gamma^2 x)$, le point γx est très proche du milieu de la géodésique entre x et $\gamma^2 x$. Les trois distances $d(x, y)$, $d(\gamma x, \gamma y)$ et $d(\gamma^2 x, \gamma^2 y)$ sont égales. A cause de la convexité forte, tous les points de la géodésique entre x et $\gamma^2 x$ sont donc à distance approximativement $d(x, y)$ de l'axe de translation A_γ . D'après la convexité stricte, le point x est proche de A_γ . Sinon, le milieu du segment $[x, \gamma^2 x]$ serait beaucoup plus près de A_γ que le point x . CQFD

Remarque 3.4 : Si X est localement compact, alors une condition plus faible entraîne le même résultat :

$\forall A > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X$, si $d(x, \gamma x) \geq A$ et $|2d(x, \gamma x) - d(x, \gamma^2 x)| < \eta$, alors γ est loxodromique, et $d(x, A_\gamma) < \varepsilon$.

Démonstration : Si γ est elliptique, alors γ possède un point fixe y dans X . L'isométrie γ respecte les sphères de centre y . La distance $d(x, y)$ est supérieure à $A/2$.

D'après le Lemme 3.4 du Chapitre I, si $2d(x, \gamma x) = d(x, \gamma x) + d(\gamma x, \gamma^2 x)$ est suffisamment proche de $d(x, \gamma^2 x)$, le point γx est proche du milieu de la géodésique entre x et $\gamma^2 x$. Mais les trois distances $d(x, y)$, $d(x, \gamma y)$ et $d(x, \gamma^2 y)$ étant égales, ceci contredit la convexité stricte de X .

Le raisonnement est le même dans le cas où γ est parabolique, car il possède alors un unique point fixe dans ∂X , et n'est pas elliptique. Il s'agit d'utiliser le fait que l'isométrie respecte les horisphères au sens de H. Busemann [EON]. Le milieu d'une géodésique entre deux points d'une horisphère est loin de cette horisphère.

Donc γ est loxodromique, d'après le théorème de classification des isométries dans le cas localement compact (voir paragraphes suivant le Théorème 2.3). La démonstration se poursuit comme dans le Lemme 3.3. CQFD

Proposition 3.5 : La distance de translation d'un élément de Γ (voir paragraphes suivant la Définition 2.1) est continue pour la topologie de Gromov.

Soient X_∞ et $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ des espaces strictement convexes, avec X_i tendant vers X_∞ au sens de Gromov. Un élément de Γ est loxodromique dans X_∞ si et seulement si ses distances de translation dans X_i ne tendent pas vers 0. Les axes de translation sont limites des axes de translation (au sens ci-dessous).

La phrase “les axes de translation sont limites des axes de translation” doit être interprétée comme suit.

Supposons que $\gamma \in \Gamma$ est une isométrie loxodromique dans l'espace limite X_∞ , et donnons nous $[x, y]$ un segment de son axe de translation. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, pour toute partie finie P de Γ suffisamment grande, pour tout compact K de X suffisamment grand et pour tout $\eta > 0$ suffisamment petit, nous avons la propriété suivante :

pour tout i suffisamment grand, l'isométrie γ de X_i est loxodromique ; si $\mathcal{R}$ est une η -approximation P -équivariante entre X_∞ et X_i , si $z \in [x, y]$ et $z \mathcal{R} z_i$, alors la distance de z_i à l'axe de translation de γ est inférieure à ε .

En particulier, si une suite de structures hyperboliques dégénère vers un arbre réel, nous savons déjà ([MS1]) que les distances de translation étaient continues (du moins après la normalisation). Nous savons de plus que si les distances de translation d'une isométrie loxodromique de $\mathbb{H}^n$ ne tendent pas vers 0, alors les axes de translation dans $\mathbb{H}^n$ “convergent” vers l'axe de translation dans l'arbre réel limite.

Notons que la première assertion de la Proposition 3.5 a déjà été démontrée pour les arbres réels (voir Chapitre II, Théorème 5.1). La démonstration ci-dessous est similaire.

Démonstration de la Proposition 3.5 : Supposons la distance de translation d'un élément $\gamma \in \Gamma$ nulle dans un espace métrique X , muni d'une action de Γ . Alors pour tout espace métrique Y muni d'une action de Γ , suffisamment proche de X pour la topologie de Gromov, la distance de translation de γ est petite. Remarquons que cette preuve est la même que celle du Second cas du Théorème 5.1, Chapitre II.

Si la distance de translation de $\gamma \in \Gamma$ n'est pas nulle dans X_∞ , alors γ est loxodromique dans X_∞ , d'après le Lemme 2.2. Puisque X_i tend vers l'espace δ -hyperbolique X_∞ , l'espace X_i est 2δ -hyperbolique dans l'image de l' ε -approximation considérée, si ε est suffisamment petit.

Nous pouvons supposer que la distance de translation dans X_∞ d'une puissance γ^n de γ est grande devant $2A(X_\infty)$ (constante introduite au Lemme 3.3). Donnons nous une η -approximation P -équivariante entre $[x, \gamma^{2n}x]$ et un compact de X_i , avec η suffisamment petit, $P = \{\gamma^n, \gamma^{2n}\}$ et x un point de l'axe de translation de γ dans X_∞ . Alors l'image dans X_i du point x vérifie les conditions du Lemme 3.3. L'isométrie γ^n est donc hyperbolique dans X_i , et γ aussi. Le Lemme 3.3 nous dit alors que l'axe de translation dans X_i converge au sens ci-dessus vers l'axe de translation dans X_∞ . CQFD

(5) Conclusion : La démonstration du Théorème 2.6 se termine de la manière suivante.

Soient X et Y deux éléments de $\mathbf{E}$ indiscernables. Il existe alors une suite $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbf{E}$ tendant simultanément vers X et Y (Remarque 2.7). De la Proposition 3.5, nous déduisons qu'un élément de Γ est loxodromique dans X si et seulement s'il est loxodromique dans Y .

Donnons nous A_γ et A_δ deux axes de translation n'ayant pas de bout commun dans X . Alors d'après la Proposition 3.3, la réunion de ces deux axes de translation dans X_i converge pour la distance de Hausdorff vers la réunion des axes de translation dans X , et aussi dans Y . Ceci montre que le point base de X est bien envoyé par les approximations sur des points proches de point base de X_i . Nous appliquons alors la Proposition 3.2. CQFD

Nous allons utiliser la Proposition 3.5 pour montrer que $\mathcal{PH}^n(\Gamma) \cup \mathcal{PST}(\Gamma)$ est bien compact. Nous ne pouvons pas appliquer le Théorème 2.6, car nos actions sur $\mathbb{H}^n$ ne sont pas nécessairement minimales, et surtout nous travaillons projectivement.

Corollaire 3.4 : *Soit Γ un groupe de type fini contenant un groupe libre de rang deux. L'ensemble $\mathcal{PH}^n(\Gamma) \cup \mathcal{PST}(\Gamma)$ muni de la topologie de Gromov est métrisable compact.*

Démonstration : D'après un théorème de P. Urysohn (voir [Dug], Théorème 4.1, page 233), pour montrer que la topologie de Gromov sur $\mathcal{PH}^n(\Gamma) \cup \mathcal{PST}(\Gamma)$ est métrisable, il suffit de montrer qu'elle est séparée, séquentiellement compacte (ce qui est acquis par le Théorème 2.2, Chapitre III) et possède une base dénombrable d'ouverts.

La compacité de $\mathcal{PH}^n(\Gamma) \cup \mathcal{PST}(\Gamma)$ découlera alors de sa compacité séquentielle.

D'après [CS] par exemple, l'espace $R(\Gamma, O(n, 1))$ des représentations de Γ dans $O(n, 1)$ est naturellement muni d'une structure de variété affine réelle, de dimension finie. J. Morgan [Mor] a remarqué que le quotient $R(\Gamma, O(n, 1))/O(n, 1)$ de $R(\Gamma, O(n, 1))$

par l'action du groupe algébrique $O(n, 1)$ par conjugaison est une variété affine. Il est donc métrisable et réunion dénombrable de compacts, donc séparable (i.e. possède un sous-ensemble dénombrable dense), et donc possède une base dénombrable d'ouverts.

Les représentations discrètes et fidèles dans $O^+(n, 1)$ constituent un fermé dans $R(\Gamma, O(n, 1))$ (voir [Wie]), stable par conjugaison par $O(n, 1)$. L'espace $\mathcal{H}^n(\Gamma)$ muni de la topologie usuelle est donc métrisable et possède une base dénombrable d'ouverts, donc est séparable. Il en est de même pour la topologie de Gromov sur $\mathcal{PH}^n(\Gamma)$, puisque qu'elle coïncide avec la topologie usuelle (Chapitre III, Théorème 1.2).

L'espace $\mathcal{PST}(\Gamma)$ muni de la topologie de Gromov est métrisable compact (Chapitre II, Théorème 6.2), donc séparable.

La topologie de Gromov sur $\mathcal{PH}^n(\Gamma) \cup \mathcal{PST}(\Gamma)$ est définie par la donnée de la base d'ouverts $V_X(\epsilon, P, K)$ (voir Introduction, Définition 4) pour la topologie de Gromov $\mathcal{H}^n(\Gamma) \cup \mathcal{ST}(\Gamma)$. D'après la Proposition 3.7 du Chapitre II, un arbre réel de $\mathcal{ST}(\Gamma)$ est séparable. Donc tout point de $\mathcal{PH}^n(\Gamma) \cup \mathcal{PST}(\Gamma)$ possède une base dénombrable de voisinages (Proposition 1.6, Chapitre I). Puisque $\mathcal{PH}^n(\Gamma)$ et $\mathcal{PST}(\Gamma)$ sont séparables, leur réunion possède donc une base dénombrable d'ouverts.

Il nous reste à montrer que la topologie de Gromov sur $\mathcal{PH}^n(\Gamma) \cup \mathcal{PST}(\Gamma)$ est séparée. Puisque tout point admet une base dénombrable de voisinages, nous allons pouvoir raisonner avec des suites.

Par la définition de la topologie de cette réunion, une suite d'éléments τ_i de $\mathcal{PH}^n(\Gamma) \cup \mathcal{PST}(\Gamma)$ converge vers un élément τ si et seulement s'il existe une suite de réels $\lambda_i \geq 0$, une suite de représentants $\tau_i \in \mathcal{H}^n(\Gamma) \cup \mathcal{ST}(\Gamma)$ de τ_i , et un représentant $\tau \in \mathcal{H}^n(\Gamma) \cup \mathcal{ST}(\Gamma)$ de τ , tels que $\lambda_i \tau_i$ converge au sens de Gromov vers τ . Si $\rho \in \mathcal{H}^n(\Gamma)$ et $\lambda > 0$, nous notons $\lambda\rho$ l'espace $(\lambda\mathcal{H}^n, \rho)$. Remarquons aussi qu'un arbre réel de $\mathcal{ST}(\Gamma)$ où nous avons multiplié la métrique par un réel strictement positif est encore dans $\mathcal{ST}(\Gamma)$.

Tout d'abord, donnons nous $\bar{\rho}$ et $\bar{\rho}'$ deux éléments distincts de $\mathcal{PH}^n(\Gamma)$. Nous allons montrer que $\bar{\rho}$ et $\bar{\rho}'$ ne sont pas indiscernables (Définition 1.8, Chapitre I) pour la topologie de Gromov sur $\mathcal{PH}^n(\Gamma) \cup \mathcal{PST}(\Gamma)$.

Comme $\mathcal{PH}^n(\Gamma)$ est séparé, il ne peut exister de suite d'éléments de $\mathcal{PH}^n(\Gamma)$ tendant simultanément vers $\bar{\rho}$ et $\bar{\rho}'$. Il nous suffit donc de montrer qu'il n'existe pas de

suite T_i dans $\mathcal{ST}(\Gamma)$ qui tend vers un élément ρ de $\mathcal{H}^n(\Gamma)$. Or ceci découle du fait qu'un triangle géodésique dans $\mathbb{H}^n$ non aplati (rappelons que nous avons supposé $n \geq 2$) ne peut pas être arbitrairement proche d'un compact d'un arbre réel.

Soient $\bar{\rho}$ un élément de $\mathcal{PH}^n(\Gamma)$ et T un élément de $\mathcal{PST}(\Gamma)$. S'ils sont indiscernables, il existe d'après ce qui précède une suite de réels $\lambda_i \geq 0$, une suite de représentations $\rho_i \in \mathcal{H}^n(\Gamma)$, un représentant $\rho \in \mathcal{H}^n(\Gamma)$ de $\bar{\rho}$ et un représentant $T \in \mathcal{ST}(\Gamma)$ de T , tels que ρ_i converge au sens de Gromov vers ρ et $\lambda_i \rho_i$ converge au sens de Gromov vers T .

Nécessairement, la suite λ_i tend vers 0. En effet, l'arbre T n'est pas réduit à une droite (voir Chapitre II, paragraphe suivant la Définition 6.1). De plus, une "étoile" d'un arbre réel (i.e enveloppe convexe de trois points non alignés) ne peut pas être arbitrairement proche d'un triangle géodésique non aplati dans $\lambda \mathbb{H}^n$ avec $\lambda > 0$.

Considérons $\gamma \in \Gamma$. Soit $l(\rho(\gamma))$ la distance de translation de γ dans $(\mathbb{H}^n, \rho)$. D'après la Proposition 3.5, la distance de translation de γ dans $(\lambda_i \mathbb{H}^n, \rho_i)$ est proche de $\lambda_i l(\rho(\gamma))$, donc tend vers 0 quand i tend vers $+\infty$. La Proposition 3.5 montre alors que γ et donc tous les éléments de Γ sont elliptiques dans T . Mais par le Lemme 3.6 du Chapitre II, ceci contredit le fait que T n'a pas de point fixe global.

Soient maintenant T et T' deux éléments distincts de $\mathcal{PST}(\Gamma)$. S'ils étaient indiscernables, il existerait une suite de représentations $\rho_i \in \mathcal{H}^n(\Gamma)$ et deux suites de réels $\lambda_i \geq 0$ et $\mu_i \geq 0$ telles que $\lambda_i \rho_i$ converge vers T et $\mu_i \rho_i$ converge vers T' .

Soit γ un élément de Γ . Alors d'après la Proposition 3.5, la distance de translation $\lambda_i l(\rho_i(\gamma))$ de γ dans $\lambda_i \rho_i$ tend vers sa distance de translation $l_T(\gamma)$ dans T . De même, $\mu_i l(\rho_i(\gamma))$ tend vers $l_{T'}(\gamma)$.

En particulier, s'il existe un élément β de Γ hyperbolique à la fois dans T et T' , alors $\frac{\mu_i}{\lambda_i}$ tend vers un réel strictement positif, à savoir $\frac{l_{T'}(\beta)}{l_T(\beta)}$. Mais alors les fonctions distance de translation de T et T' sont proportionnelles, ce qui est une contradiction.

Soit γ (resp. γ') un élément de Γ hyperbolique dans T (resp. T'). Son existence découle du Lemme 3.6 du Chapitre II, puisque T (resp. T') n'a pas de point fixe global. D'après ce qui précède, nous avons $\lambda_i l(\rho_i(\gamma)) \rightarrow l_T(\gamma)$, et $\mu_i l(\rho_i(\gamma)) \rightarrow 0$ donc $\frac{\mu_i}{\lambda_i}$ tend vers 0. De même, $\lambda_i l(\rho_i(\gamma')) \rightarrow 0$, et $\mu_i l(\rho_i(\gamma')) \rightarrow l_{T'}(\gamma')$ donc $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ tend vers 0. Ceci nous donne une contradiction. CQFD

Nous pouvons nous demander si un arbre réel et une représentation peuvent avoir la même fonction distance de translation. La remarque suivante est sans doute aussi valable dans toutes les dimensions, mais la démonstration est encore plus technique. C'est pourquoi nous nous restreignons au cas des dimensions 2 et 3.

Remarque 3.7 : Soit Γ un groupe de type fini sans torsion contenant un groupe libre de rang deux. Un arbre réel $T \in \mathcal{ST}(\Gamma)$ et une représentation $\rho \in \mathcal{PH}^3(\Gamma)$ ont des fonctions distance de translation $l_T(\cdot)$ et $l(\rho(\cdot))$ non proportionnelles.

Démonstration : Tout d'abord, d'après les paragraphes suivant la Définition 6.1 du Chapitre II, l'arbre réel T n'est pas réduit à une droite.

D'après la Remarque 3.11, il existe deux éléments γ et γ' de Γ qui sont hyperboliques dans T et dont les axes de translation A_γ et $A_{\gamma'}$ sont disjoints. Alors pour tous les entiers $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, la quantité

$$l_T(\gamma^p \gamma'^q) - l_T(\gamma^p) - l_T(\gamma'^q)$$

est une constante non nulle (Chapitre II, Proposition 2.5).

Si $\rho(\gamma)$ ou $\rho(\gamma')$ n'est pas loxodromique dans $\mathbb{H}^3$, alors nous avons fini. De même, si $\rho(\gamma)$ et $\rho(\gamma')$ ont des axes de translation confondus, alors quitte à changer γ en son inverse, nous avons $l(\rho(\gamma\gamma')) = l(\rho(\gamma)) + l(\rho(\gamma'))$, et nous avons fini. Les axes de translation ne peuvent avoir un et un seul point commun à l'infini, car l'action est discrète (voir Proposition 1.3, Chapitre III).

Les axes de translation se rencontrent donc en un unique point de $\mathbb{H}^3$, ou ne se rencontrent pas dans $\mathbb{H}^3 \cup S_\infty^2$ et admettent alors une perpendiculaire commune. Quitte à les remplacer par leurs carrés, nous pouvons supposer que γ et γ' préservent l'orientation de $\mathbb{H}^3$.

Le groupe des isométries de $\mathbb{H}^3$ préservant l'orientation est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm I\}$. La matrice de l'isométrie loxodromique γ de $\mathbb{H}^3$ est conjuguée à une unique matrice de la forme $\pm \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$, avec $|\lambda| > 1$. La distance de translation $l(\gamma)$ de γ est donnée par la formule suivante :

$$l(\gamma) = 2 \log |\lambda|.$$

Voir en effet [Bea] pour l'analogie en dimension 2. En dimension 3, le calcul est le même. Considérons le modèle du demi-espace de Poincaré. L'isométrie γ agit sur la sphère à l'infini S_∞^2 par l'application $z \rightarrow \lambda^2 z$. Son axe de translation est l'axe vertical positif. La distance de translation est alors la distance hyperbolique sur l'axe vertical positif entre 1 et $|\lambda|^2$, c'est-à-dire $2 |\log(|\lambda|)|$.

L'isométrie loxodromique γ' est conjuguée à $\pm \begin{pmatrix} \lambda' & 0 \\ 0 & 1/\lambda' \end{pmatrix}$ où $\lambda' \in \mathbb{C}^*$, avec $|\lambda'| > 1$. Soit $\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice d'une isométrie de $\mathbb{H}^3$ envoyant l'axe de translation de γ' sur celui de γ , en respectant les sens de translation, et en préservant le point commun, ou la perpendiculaire commune. En particulier, cette matrice n'est pas parabolique, donc $bc \neq 0$. La matrice du produit $\gamma\gamma'$ est alors conjuguée à

$$\pm \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda' & 0 \\ 0 & 1/\lambda' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

La trace de $\gamma\gamma'$ est donc $\pm \left((\lambda\lambda' + \frac{1}{\lambda\lambda'}) ad - \left(\frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda'} \right) bc \right)$. Posons l (resp. l' , l'') la distance de translation de γ (resp. γ' , $\gamma\gamma'$) et θ (resp. θ' , θ'') l'angle de rotation de γ (resp. γ' , $\gamma\gamma'$) le long de son axe de translation. Nous avons alors la formule

$$\pm \left(e^{\left(\frac{l''}{2} + i\theta''\right)} + e^{-\left(\frac{l''}{2} + i\theta''\right)} \right) =$$

$$\left[e^{\left(\frac{l+l'}{2} + i(\theta+\theta')\right)} + e^{-\left(\frac{l+l'}{2} + i(\theta+\theta')\right)} \right] ad - \left[e^{\left(\frac{l-l'}{2} + i(\theta-\theta')\right)} + e^{-\left(\frac{l-l'}{2} + i(\theta-\theta')\right)} \right] bc.$$

Cette formule est encore valable si nous remplaçons les isométries γ et γ' par des puissances strictement positives d'elles-mêmes. Nous pouvons faire en sorte que $l \rightarrow +\infty$, $l' \rightarrow +\infty$, et $l - l' \rightarrow +\infty$. Mais puisque $bc \neq 0$, la formule précédente montre que $l'' - (l + l')$ ne peut pas rester constant. CQFD

Annexe.

Compactification de l'espace de Teichmüller.

Nous noterons $\mathbb{H}^2$ le disque de Poincaré, i.e. le disque unité ouvert $\mathbb{D}^2$ du plan $\mathbb{R}^2$, muni de la métrique riemannienne $ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$ à courbure constante -1 .

Soit g un entier supérieur ou égal à 2. Soit S une surface (de classe C^∞) fermée (compacte sans bord) orientable de genre g . L'espace de Teichmüller de S , noté $T(S)$, est défini de l'une des manières équivalentes suivantes (voir entre autres [FK], [FLP], et [Spr] pour une définition faisant appel à la géométrie complexe) :

<1> C'est l'ensemble des métriques riemanniennes hyperboliques (i.e. à courbure constante -1) sur S , modulo les isométries isotopes à l'identité. Il est muni de la topologie définie par celle des champs de tenseurs.

Nous pouvons aussi voir $T(S)$ comme l'ensemble quotient des couples (X, φ) où X est un exemplaire de S muni d'une métrique hyperbolique et φ un difféomorphisme de S dans X . Nous identifions (X, φ) et (X', φ') s'il existe une isométrie $f : X \rightarrow X'$ telle que φ et $\varphi' \circ f$ sont isotopes (Voir Figure 1). Rappelons que deux difféomorphismes de surfaces fermées homotopes sont isotopes (voir [Eps]).

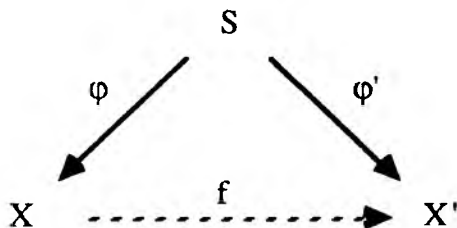


Diagramme commutatif
à homotopie près.

Figure 1.

L'espace $T(S)$ est non vide (voir par exemple [FLP]). Fixons nous une métrique hyperbolique sur S . Le revêtement universel de S peut aussi être muni d'une métrique hyperbolique. Par le théorème d'Hadamard-Cartan [CE], il est alors isométrique à $\mathbb{H}^2$.

Le groupe du revêtement est formé d'isométries conservant l'orientation. Il se plonge donc dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, groupe des isométries conservant l'orientation de $\mathbb{H}^2$. Le choix d'un point base dans le revêtement universel permet d'identifier le groupe fondamental $\Gamma = \Pi_1(S)$ et le groupe du revêtement. Les choix ne modifient pas l'image de Γ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ à conjugaison près.

Nous pouvons donc définir $T(S)$ de la manière suivante :

<2> C'est l'espace des classes de conjugaison de représentations fidèles et discrètes de Γ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Une telle représentation est par définition un homomorphisme ρ de Γ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tel que

- pour tout $x \in \mathbb{H}^2$, si $\rho(\gamma)x = x$, alors $\gamma = \mathrm{id}$;
- pour tout compact K de S , l'ensemble des γ de Γ , tels que $\rho(\gamma)(K) \cap K$ est non vide, est fini.

Cet ensemble est muni de la topologie compacte-ouverte.

En paraphrasant, nous avons aussi la définition suivante pour $T(S)$:

<3> Fixons nous une action ρ isométrique, fidèle et discrète de $\Gamma = \Pi_1(S)$ sur $\mathbb{H}^2$. Considérons l'ensemble des métriques hyperboliques sur $\mathbb{D}^2$ invariantes par l'action ρ . Identifions deux telles métriques s'il existe une isométrie de l'une dans l'autre commutant avec l'action de ρ , et isotope à l'identité par une isotopie respectant l'action de ρ .

L'espace quotient obtenu est $T(S)$.

W. Thurston a montré [FLP] [Thu1] que la topologie sur $T(S)$ est la même que celle définie par les distances de translation, au sens suivant.

Notons $\mathcal{C}$ l'espace des classes d'isotopie de courbes fermées simples connexes non homotopes à zéro. Rappelons que deux courbes lisses fermées simples homotopes sont isotopes (voir par exemple [Eps]). Munissons $\mathcal{C}$ de la topologie discrète. Soit $\mathbb{R}_{\neq 0}^{\mathcal{C}}$ l'espace des fonctions réelles positives ou nulles sur $\mathcal{C}$, muni de la topologie produit. Soit alors $\mathbb{P}(\mathbb{R}_{\neq 0}^{\mathcal{C}})$ son espace "projectif" associé.

Rappelons que si M est une surface hyperbolique fermée, tout élément non trivial de Γ contient dans sa classe d'homotopie libre une unique géodésique fermée lisse [FLP]. L'existence est un résultat général sur les variétés riemanniennes fermées.

Considérons l'application de $T(S)$ dans $\mathbb{R}_{+}^{\mathcal{C}} \setminus \{0\}$, qui à τ dans $T(S)$ fait correspondre la fonction $l_{\tau} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_{+} \setminus \{0\}$ suivante : si $\alpha \in \mathcal{C}$, alors $l_{\tau}(\alpha)$ est la longueur, pour une métrique m dans τ , de l'unique géodésique dans la classe d'isotopie libre de α .

C'est un homéomorphisme sur son image. En composant par la projection de $\mathbb{R}_{+}^{\mathcal{C}} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}_{+}^{\mathcal{C}})$, c'est encore un plongement [FLP].

W. Thurston cherche ensuite une compactification de $T(S)$, naturelle pour l'action des difféomorphismes.

Rappelons que $\mathcal{MF}$ désigne l'ensemble des classes de feuilletages à singularités quadratiques, munis d'une mesure transverse invariante par holonomie et régulière par rapport à la mesure de Lebesgue dans chaque carte. Deux tels feuilletages sont identifiés modulo isotopies et glissements de Whitehead (voir [FLP]).

Soit $\alpha \in \mathcal{C}$ une classe d'isotopie de courbes fermées simples connexes, et $\mathcal{F}$ un élément de $\mathcal{MF}$. Nous définissons $i(\mathcal{F}, \alpha)$ comme la borne inférieure des longueurs pour la mesure transverse d'un chemin transverse par morceaux représentant α .

Alors l'application $i : \mathcal{MF} \rightarrow \mathbb{R}_{+}^{\mathcal{C}}$ est injective [Thu1]. Nous munissons $\mathcal{MF}$ de la topologie définie par i , et notons $\mathcal{PMF}$ son image dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}_{+}^{\mathcal{C}})$. Nous notons aussi $\mathcal{C}^*$ l'espace des classes d'isotopie de multicourbes simples fermées sur S . Nous avons une application de $\mathcal{C}^*$ dans $\mathbb{R}_{+}^{\mathcal{C}}$, qui à une multicourbe C fait correspondre les $i(C, \alpha)$ pour α dans $\mathcal{C}$, où $i(C, \alpha)$ est le nombre minimal d'intersections géométriques entre un représentant de α et un représentant de C .

Il est montré dans [FLP] que $\mathcal{PMF}$ est l'adhérence dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}_{+}^{\mathcal{C}})$ de l'image de $i(\mathcal{C}^*)$. De plus $T(S) \cup \mathcal{PMF}$ est une variété compacte à bord, homéomorphe à la boule fermée $\mathbb{D}^{6g-6}$, dont le bord est $\mathcal{PMF}$ [FLP].

Rappelons que Γ désigne ici le groupe fondamental de la surface S . Alors J. Morgan et P. Shalen [MS1] compactifient $T(S)$ en lui rajoutant $\hat{T}(S)$, une partie compacte de $\mathcal{PST}(\Gamma)$ (voir Définition 6.1, Chapitre II). Ils montrent que les arbres réels simpliciaux (minimaux et à petits stabilisateurs) contenus dans $\hat{T}(S)$ ont une image

dense dans $\hat{T}(S)$. Ils en déduisent facilement que leur compactification et celle de W. Thurston sont les mêmes.

Considérons l'application de $\mathcal{C}^*$ dans $\mathcal{ST}(\Gamma)$ qui à une multicourbe associe son arbre dual (Chapitre II, Définition 3.2). J. Morgan et P. Shalen montrent que cette application induit l'identité dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}\mathcal{C}_+)$. Nous avons donc $\mathcal{PST}(\Gamma) \supset \mathcal{PMF}$.

Rappelons que la topologie de Gromov sur $T(S)$ est la topologie quotient de la topologie définie en Introduction, Définition 4, sur l'ensemble $\mathcal{H}$ des couples $(\mathbb{H}^2, \rho)$, où ρ est une action isométrique discrète et fidèle de $\Gamma = \Pi_1(S)$ sur l'espace métrique $\mathbb{H}^2$. Nous montrons dans la première partie que la topologie de Gromov est la même que la topologie usuelle définie par les distances de translation. La démonstration fait double emploi avec (Chapitre III, Proposition 1.2), mais elle est tout de même intéressante.

1 Egalité des topologies.

***Théorème 1.1 :** La topologie de Gromov coïncide avec la topologie usuelle sur $T(S)$.*

Démonstration : Tout d'abord, notons $\text{Bil}(TS)$ le fibré sur S des formes bilinéaires symétriques sur les espaces tangents aux points de S . La topologie usuelle sur $T(S)$ est la topologie de la convergence uniforme des sections de $\text{Bil}(TS)$, à valeurs dans les formes définies positives [FLP].

Elle est plus forte que la topologie de Gromov. En effet, la distance entre deux points du revêtement universel de S s'exprime comme minimum des longueurs des courbes entre ces deux points. Or ces longueurs sont des intégrales de la norme pour les métriques relevées des vecteurs vitesses de ces courbes.

Montrons maintenant la réciproque. Rappelons le fait suivant. Soit ρ une action fidèle et discrète de Γ sur le disque de Poincaré. Alors l'isométrie $\rho(\alpha)$, pour α dans Γ différent de l'élément neutre, est loxodromique (voir définitions Chapitre III, § 1).

En effet, l'action étant fidèle, si $\rho(\alpha)$ est elliptique, alors α est l'élément neutre. Supposons $\rho(\alpha)$ parabolique. Alors le rayon d'injectivité de S serait nul, car la borne inférieure sur les $x \in \mathbb{H}^2$ des $d(x, \rho(\alpha)x)$ est nul. Ceci est impossible, car S est

compacte. (Voir une méthode directe dans [FLP] Exposé 3 ou [Bea], qui exhibe la géodésique invariante par $\rho(\alpha)$).

Considérons la fonction de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}_+$ qui associe à un élément $(\mathbb{H}^2, \rho)$ de $\mathcal{H}$ la distance de translation $l(\rho(\alpha))$ de $\rho(\alpha)$. Il suffit alors de montrer que si $\mathcal{H}$ est muni de la topologie de Gromov, cette fonction est continue. Nous noterons A_α l'axe de translation d'une isométrie loxodromique de $\mathbb{H}^2$ (voir Chapitre III, § 1).

Nous avons vu (Chapitre I, Proposition 1.6) que ρ admet une base dénombrable de voisinages pour la topologie de Gromov. Supposons donc que ρ_i tend vers ρ pour la topologie de Gromov dans $\mathcal{H}$. Soit α un élément de $\mathcal{C}$. Soit K le compact formé de l'arc géodésique entre x et αx , où x est un point quelconque de A_α . Posons $P = \{\alpha\}$. Si i est suffisamment grand, il existe une ε -approximation P -équivariante $\mathcal{R}_i$ entre K et un compact K_i de $(\mathbb{H}^2, \rho_i)$. Soit x_i un point de $\mathbb{H}^2$ tel que $x \mathcal{R}_i x_i$.

Alors nous avons

$$l(\rho_i(\alpha)) \leq d(x_i, \alpha x_i) \leq d(x, \alpha x) + \varepsilon = l(\rho(\alpha)) + \varepsilon.$$

En particulier, les distances de translation de chaque élément de Γ sont bornées. Par le théorème de Tykhonov, les $(\mathbb{H}^2, \rho_i)$ appartiennent à un compact de $\mathbb{R} \mathcal{C}$. Pour montrer que cette suite converge pour la topologie des distances de translation, il suffit donc de montrer qu'elle n'a qu'une valeur d'adhérence ρ' .

Or une telle limite vérifierait $l(\rho'(\alpha)) \leq l(\rho(\alpha))$. Le résultat découle donc du lemme suivant. CQFD

Lemme 1.2 (W. Thurston) : Soient μ et μ' deux métriques hyperboliques sur S . Alors, si μ et μ' n'ont pas même image dans $T(S)$, il existe une courbe α dans $\mathcal{C}$ telle que $l_\mu(\alpha) > l_{\mu'}(\alpha)$.

Démonstration : W. Thurston donne deux démonstrations de ce lemme dans [Thu3]. En voici une autre, que nous a suggérée A. Douady.

Notons $M(S)$ l'espace modulaire de S , i.e. le quotient de l'espace de Teichmüller par le groupe des difféomorphismes à isotopie près $\Pi_0(\text{Diff}(S))$. Ce groupe est appelé **groupe modulaire** de S . Il s'identifie avec le groupe des automorphismes extérieurs de Γ .

Celui-ci agit à gauche sur les représentations de Γ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Notons π la projection canonique de $\mathbf{T}(\mathbf{S})$ sur $\mathbf{M}(\mathbf{S})$.

Si $\tau \in \mathbf{T}(\mathbf{S})$, nous noterons $h(\tau)$ la plus petite distance de translation de l'image d'un élément de Γ par un représentant de τ . Elle est bien définie, car les distances de translation des éléments de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sont définies à conjugaison près. Cette fonction passe aussi au quotient dans $\mathbf{M}(\mathbf{S})$, car un difféomorphisme ne fait que permuter les éléments de Γ .

Rappelons le résultat suivant, dont on pourra trouver une preuve dans [DH] :

Proposition 1.3 : *Soit (μ_i) une suite d'éléments de l'espace modulaire de $\mathbf{S}$. Elle dégénère (i.e. sort de tout compact) dans l'espace $\mathbf{M}(\mathbf{S})$ muni de la topologie usuelle si et seulement si $h(\mu_i)$ tend vers zéro. CQFD*

D'après un théorème de W. Thurston sur les tremblements de terre [Ker][Thu5], nous savons qu'il existe un chemin de tremblements de terre allant d'un élément τ de l'espace de Teichmüller à un autre τ' . Nous notons $\tau(s)$ avec $s \in \mathbb{R}$, un chemin dans $\mathbf{T}(\mathbf{S})$ obtenu par tremblement de terre tel que $\tau(0) = \tau$ et $\tau(1) = \tau'$. Notons $l_s(\alpha)$ la longueur de translation d'un élément α de Γ pour la métrique $\tau(s)$.

Supposons par l'absurde que pour tout élément α de Γ , nous avons $l_0(\alpha) \leq l_1(\alpha)$.

D'après un théorème de Kerckhoff [Ker], pour tout α dans Γ , la fonction $s \rightarrow l_s(\alpha)$ est convexe. Elle est donc croissante (au sens large) à partir de $s = 1$, et $h(\tau(s))$ est aussi croissante pour $s \geq 1$. Les images de $\tau(s)$ dans $\mathbf{M}(\mathbf{S})$ restent donc dans un compact pour les s positifs.

Rappelons qu'une décomposition en pantalons de la surface $\mathbf{S}$ munie d'une métrique hyperbolique τ est une famille de $2g-2$ géodésiques lisses fermées simples connexes dont le complémentaire dans $\mathbf{S}$ est une réunion de disques à deux trous, plongés dans $\mathbf{S}$ (voir Figure 2). Si P est une décomposition en pantalons de $\mathbf{S}$, notons $\sup(P, \tau)$ la longueur maximale d'une composante de P pour la métrique τ . Notons $g(\tau)$ la borne inférieure des $\sup(P, \tau)$ pour P décomposition en pantalons de $\mathbf{S}$.

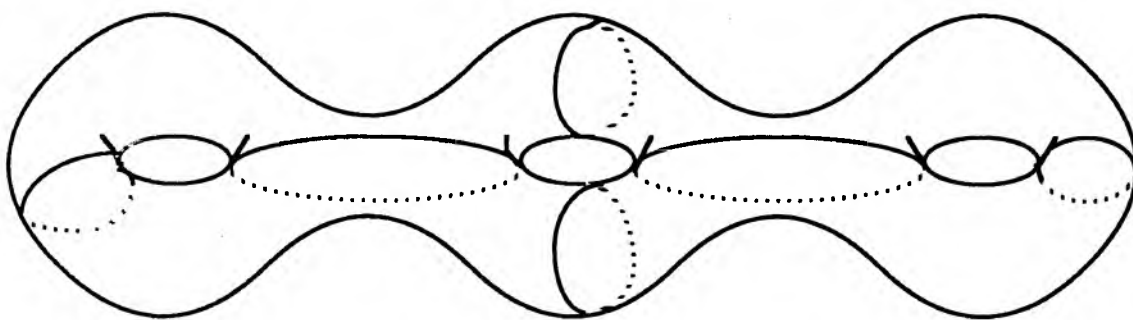


Figure 2.

Cette fonction est bien définie sur $M(S)$. En effet, un difféomorphisme transforme, modulo isotopie, une décomposition en pantalons en une autre.

La fonction $\zeta : s \rightarrow g(\tau(s))$ est continue, et croissante pour $s \geq 1$. En effet, le maximum d'un nombre fini de fonctions convexes croissantes est convexe croissant. Puis la borne inférieure de fonctions croissantes est aussi croissante.

Puisqu'il existe une suite extraite de $\{\tau(s)\}_{s \geq 1}$ qui converge dans $M(S)$, la fonction ζ est bornée. Montrons qu'il existe une décomposition en pantalons P dont la longueur maximale des composantes est constante.

En effet, donnons nous pour chaque entier n une décomposition P_n en pantalons telle que

$$\sup (P_n, \tau(n)) - \zeta(n) \leq 1.$$

Notons γ_n une composante de P_n telle que

$$l_{\tau(n)}(\gamma_n) = \sup (P_n, \tau(n)).$$

La suite des $l_{\tau(n)}(\gamma_n)$ est donc bornée. Puisque $l_{\tau(s)}(\gamma_n)$ est une fonction de s croissante (à partir de $s = 1$), la suite des $l_{\tau(1)}(\gamma_n)$ est aussi bornée.

Mais il n'existe qu'un nombre fini de géodésiques fermées simples connexes de longueurs inférieures à un nombre donné N . Donnons une esquisse de démonstration de ce fait bien connu. Considérons une boule de rayon suffisamment grand dans le revêtement universel de S . Alors puisque S est compacte, cette boule contient un point de chacune des géodésiques invariantes par les éléments de Γ de longueurs bornées par N , ainsi que leur image. Mais l'action étant proprement discontinue, cette boule ne peut rencontrer qu'un nombre fini de ses itérés.

Donc pour une infinité d'entiers n_i , la courbe γ_{n_i} s'identifie à une même courbe γ . Puisque la fonction $l_{\tau(s)}(\gamma)$ convexe et croissante pour $s \geq 1$ est bornée pour une infinité

de s , elle est constante pour $s \geq 1$. Comme $l_{\tau(0)}(\gamma) \leq l_{\tau(1)}(\gamma)$ et par convexité, nous avons donc

$$l_{\tau(0)}(\gamma) = l_{\tau(1)}(\gamma).$$

Par un raisonnement similaire, nous pouvons montrer que, quitte à extraire, les composantes des décompositions en pantalons P_{n_i} ne dépendent pas de i , et ont une longueur constante.

La fin de la démonstration reprend des arguments de [FLP] Exposé 7.

Nous pouvons donc passer de la métrique $\tau(0)$ à $\tau(1)$ par un twist de Dehn d'angle θ_j le long de la composante K_j d'une décomposition en pantalon P . (Voir coordonnées de Fenchel-Nielsen sur $T(S)$ [FLP].)

Si $\tau(0)$ et $\tau(1)$ sont deux éléments distincts de $T(S)$, l'un des angles θ_j , disons θ_1 , est non nul.

Notons K'_1 une courbe fermée simple essentielle dans la réunion des deux pantalons adjacents à K_1 , qui

- coupe K_1 transversalement en deux points,
- ne rencontre pas K_j pour $j \neq 1$,
- n'est pas isotope à une courbe disjointe de K_1 (voir Figure 3 et [FLP]

Exposé 6).

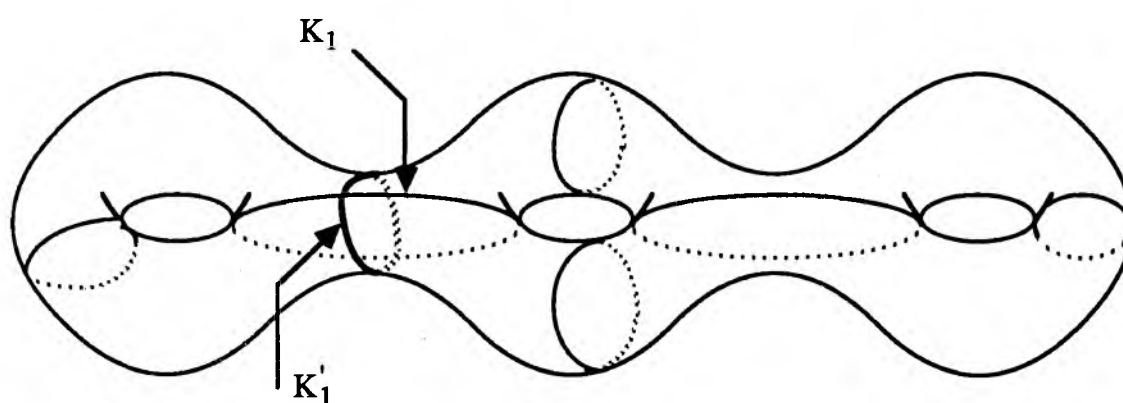


Figure 3.

Notons τ_θ la métrique obtenue à partir de $\tau(0)$ par un twist de Dehn d'angle θ le long de K_1 . D'après [FLP] Exposé 7, nous savons que la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ qui à θ associe $l_{\tau_\theta}(K'_1)$ est une fonction strictement convexe, possédant un minimum strict.

Elle tend donc vers $+\infty$ quand θ tend vers $-\infty$ et vers $+\infty$. Il existe alors un entier k de signe opposé à celui de θ_1 , suffisamment grand en valeur absolue, tel que

$$l_{\tau_k + \theta_1}(K'_1) < l_{\tau_k}(K'_1).$$

Mais notons ρ le twist de Dehn d'angle 2π le long de K'_1 . Alors

$$l_{\tau_k + \theta}(K'_1) = l_{\tau_\theta}(\rho^k(K'_1))$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Donc

$$l_{\tau_{\theta_1}}(\rho^k(K'_1)) < l_{\tau(0)}(\rho^k(K'_1)).$$

Ceci contredit notre hypothèse. CQFD

2 Dégénérescence des métriques hyperboliques.

Remarquons que dans $\mathbb{H}^2$, sans évoquer le théorème de Gauss-Bonnet, il est facile de voir qu'un polygone P , dont les sommets “bougent” sur des rayons fixes issus de l'origine, “tend” vers une étoile, une fois normalisé.

Plus précisément, nous supposons que l'intérieur du polygone P contient le point 0. Notons $(\lambda P, 0)$ le polygone P pointé en 0, où la métrique hyperbolique d a été multipliée par λ . Pour la convergence de Hausdorff pointée [Gro3] (voir aussi Introduction), quand λ tend vers zéro, les espaces métriques $(\lambda P, 0)$ tendent vers une étoile hyperbolique. Celle-ci est constituée d'un fragment de rayon pour chaque sommet p de P . Ce rayon a pour longueur la limite de $\lambda d(0, p)$ quand λ tend vers zéro (en supposant que cette limite existe dans $\overline{\mathbb{R}_+}$).

En effet, notons $\exp : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ l'application exponentielle en 0. Elle envoie de manière isométrique les rayons issus de 0 dans $\mathbb{R}^2$ sur les géodésiques issues de 0 dans $\mathbb{H}^2$, en conservant les angles. Notons Ψ_λ le difféomorphisme de $\mathbb{H}^2$ défini par

$$\Psi_\lambda(x) = \exp(\lambda \exp^{-1}(x)).$$

Il dilate la métrique par λ sur les rayons.

Maintenant, nous pouvons considérer Ψ_λ comme une isométrie de $\lambda \mathbb{H}^2$ sur le disque $\mathbb{D}^2$, muni de la métrique convenable d_λ :

$$d_\lambda(x, y) = \lambda d(\Psi_\lambda^{-1}(x), \Psi_\lambda^{-1}(y)).$$

Cette métrique est la métrique hyperbolique sur chaque rayon.

Une formule de [Bea] page 148 nous dit que

$$\cosh(d(x, y)) = \cosh(d(x, 0)) \cosh(d(y, 0)) - \cos \alpha \sinh(d(x, 0)) \sinh(d(y, 0))$$

pour tous $x, y \in \mathbb{H}^2$ avec α l'angle en 0 entre x et y .

Posons $d' = d(x, 0)$ et $d'' = d(y, 0)$. Avec x, y et α fixés, nous avons donc un développement limité quand λ tend vers 0 :

$$d_\lambda(x, y) \sim \lambda \ln \left\{ \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha) e^{(d' + d'')/\lambda} + \left(1 + \left(\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha) e^{(d' + d'')/\lambda} \right)^2 \right)^{1/2} \right\}$$

si α est non nul.

Cette distance tend bien vers la distance $\delta(x, y)$ qui est :

- la somme des distances hyperboliques de x et y à l'origine, si x et y ne sont pas sur un même rayon,
- la distance hyperbolique entre x et y sinon.

Pour voir vers quel espace tend l'espace métrique $\lambda \mathbb{H}^2$ quand λ tend vers 0, nous introduisons une notion de convergence, due à M. Gromov.

Nous dirons qu'une suite d'espaces métriques $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers un espace métrique X_∞ si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute partie finie $\{x_1, \dots, x_p\}$ de X_∞ , il existe pour i suffisamment grand une partie finie $\{x_1^i, \dots, x_p^i\}$ de X_i telle que

$$\forall j, k = 1, \dots, p, \quad |d(x_j, x_k) - d(x_j^i, x_k^i)| < \varepsilon.$$

Cette notion de convergence est encore moins séparée que celle au sens de Gromov pour les espaces métriques avec actions, car toute suite tend vers l'espace réduit à un point. Remarquons que nous pouvons remplacer les parties finies par des compacts, en utilisant les ε -approximation (voir Introduction et la fin de la Section 1 du Chapitre I). La suite $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers X_∞ si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout compact K de X_∞ , il existe pour i suffisamment grand une ε -approximation entre K et un compact K_i de X_i .

Un espace de longueur X (Définition 2.1, Chapitre IV) limite éventuelle des $\lambda \mathbb{H}^2$, quand λ tend vers 0, est un arbre réel. Ceci découle de la Proposition 3.5, Chapitre I qui montre que X est fortement convexe, et du Lemme 3.7 du Chapitre I.

Nous allons construire un arbre réel (complet) T_∞ qui est une limite "maximale" des $\lambda \mathbb{H}^2$ au sens suivant :

si T est un espace de longueur séparable (i.e. contient un sous-ensemble dénombrable dense) limite des $\lambda \mathbb{H}^2$, alors T est contenu dans T_∞ .

Ce résultat est dû à M. Gromov et P. Pansu.

Notons $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des séries absolument convergentes à valeur dans $\mathbb{C}$. Si $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont des éléments de $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$, nous notons $\|\{z_n\}\|$ le nombre de termes non nuls de $\{z_n\}$ (éventuellement $+\infty$) et

$$v(\{z_n\}, \{w_n\}) = -1 \quad \text{si } z_0 \neq w_0,$$

$$v(\{z_n\}, \{w_n\}) = \sup \{n \in \mathbb{N} / \forall p \leq n, z_p = w_p\} \text{ sinon.}$$

En particulier, $\{z_n\} = \{w_n\}$ si et seulement si $v(\{z_n\}, \{w_n\}) = +\infty$.

Notons T_∞ l'ensemble des suites $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ tels que si $z_n = 0$, alors $z_p = 0$ pour tout $p \geq n$. Munissons-le de la distance suivante :

$$d(\{z_n\}, \{w_n\}) = \sum_{i=v(\{z_n\}, \{w_n\})+1}^{+\infty} |z_i| + \sum_{i=v(\{z_n\}, \{w_n\})+1}^{+\infty} |w_i|$$

sauf si $\|\{z_n\}\| = \|\{w_n\}\| = m < +\infty$, $v(\{z_n\}, \{w_n\}) \geq m-1$ et $\text{Arg}(z_m) = \text{Arg}(w_m)$, auquel cas nous posons $d(\{z_n\}, \{w_n\}) = |z_m - w_m|$.

Il est facile mais fastidieux de voir qu'il s'agit d'un espace métrique complet. Il s'agit d'un espace de longueur, dans lequel chaque point sépare (i.e. l'espace privé de ce point n'est plus connexe par arc). C'est donc un arbre réel. Il n'est pas séparable.

Une autre manière de voir T_∞ est de commencer par considérer l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de la distance "S.N.C.F." (voir Chapitre II, Section 1) qui en fait un arbre réel. Cette étoile E peut aussi s'obtenir en considérant le cercle S^1 muni de la topologie discrète, et en prenant le cône sur ce cercle.

En tout point d'une première copie E , nous recollons un exemplaire de E , en identifiant ce point avec le sommet du cône E . En tout point de l'espace obtenu, n'appartenant pas à la première copie de E , nous recollons encore un exemplaire de E . Nous faisons cette opération un nombre dénombrable de fois, et nous prenons l'espace métrique complété.

Nous pouvons alors remarquer que tout arbre réel séparable se plonge isométriquement dans T_∞ . Nous pouvons même nous restreindre aux éléments $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de T_∞ tels que l'argument de z_n est rationnel pour tout n .

Pour montrer que $\lambda \mathbb{H}^2$ tend vers T_∞ quand λ tend vers 0, il suffit donc de démontrer que tout arbre fini T à n points extrémaux est limite de polygones P_λ à n sommets dans

$\lambda \mathbb{H}^2$. Ceci se fait par récurrence, en utilisant l'étude précédente sur les polygones, et le théorème de Gauss-Bonnet pour conclure à la convergence (voir aussi [Gro4]).

Donnons nous une suite $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $T(S)$. Nous allons maintenant indiquer une méthode constructive du choix du point base et du facteur normalisant pour que la suite $\{\tau_i\}$ vérifie le critère de compacité (Chapitre I, Théorème 3.11).

Fixons nous une partie génératrice $\{g_1, \dots, g_n\}$ de Γ (par exemple celle décrite dans la figure ci-dessous).

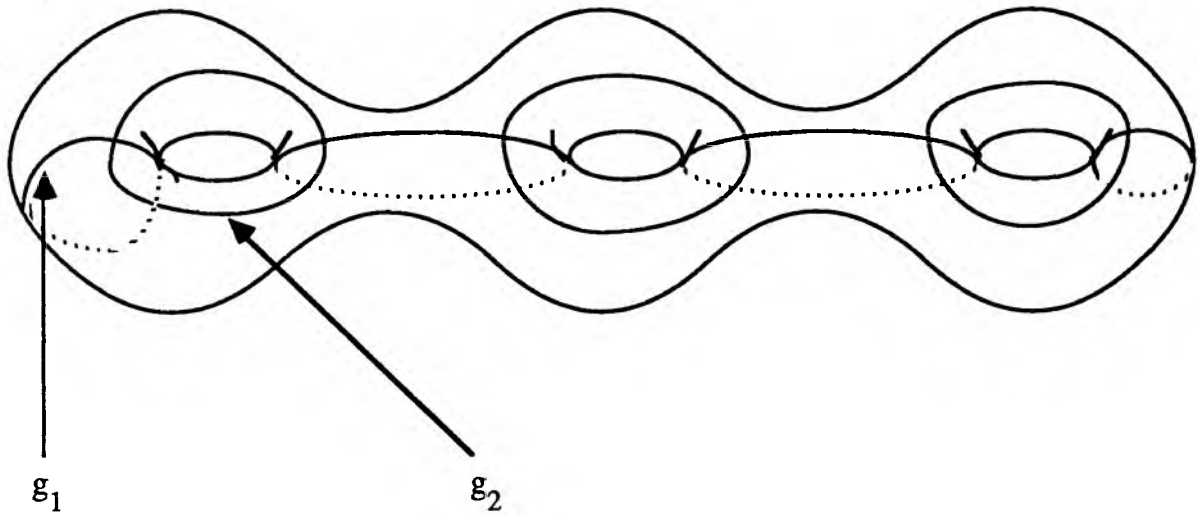


Figure 4.

Fixons nous $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de points de l'espace de Teichmüller qui dégénère. Choisissons une représentation ρ_i dans la classe τ_i (vue comme classe de conjugaison de représentations). Les constructions ci-dessous ne dépendent pas de ce choix.

Notons λ_i le maximum des distances de translation pour la métrique τ_i des produits $h_1 \dots h_r$ d'éléments distincts de $\{g_1, \dots, g_n\}$. Désignons par $\omega(\tau_i)$ l'un de ces produits où le maximum est atteint.

Lemme 2.1 (Kerckhoff): Soit $\{g_1, \dots, g_n\}$ des générateurs de Γ . Si $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite dans $T(S)$ qui dégénère, alors le maximum des distances de translation des g_j pour la métrique τ_i tend vers $+\infty$ quand i tend vers $+\infty$.

Démonstration : Les courbes représentant $\{g_1, \dots, g_n\}$ remplissent S (i.e. quand elles sont en position de nombre d'intersections minimal, leur complémentaire dans S est

réunion de disques). Nous appliquons alors le Lemme 3.1 de [Ker]. La somme des distances de translation des éléments de la famille génératrice tendant vers $+\infty$, le maximum aussi. CQFD

D'après le lemme ci-dessus, la suite des λ_i tend vers $+\infty$. Notons d la distance induite par la métrique hyperbolique sur $\mathbb{H}^2$.

F. Bonahon nous a suggéré de prendre comme point base de $(\mathbb{H}^2, \rho_i)$ un point x_i appartenant au graphe formé par les géodésiques de $\mathbb{H}^2$ sur lesquelles translatent $\rho_i(g_1), \dots, \rho_i(g_n)$. Nous supposons de plus que x_i appartient à l'axe de translation de $\rho_i(\omega(\tau_i))$. La raison de ce choix est qu'il entraîne que l'arbre réel limite est minimal, car réunion de ses axes de translations (voir Chapitre II, Proposition 3.7).

Lemme 2.2 : *Pour tout élément g de Γ , la suite des distances hyperboliques de x_i à gx_i , divisées par λ_i , est bornée.*

Démonstration : Fixons nous $g \in \Gamma$. Notons p_i la projection de $\mathbb{H}^2$ sur $\mathbb{H}^2/\rho_i(\Gamma)$. Soit $\tilde{\alpha}_i$ la géodésique de $\mathbb{H}^2$ minimisante entre x_i et gx_i . Nous allons chercher à majorer la longueur de $\tilde{\alpha}_i$.

Notons $\mathcal{G}_i$ le graphe connexe de $\mathbb{H}^2/\rho_i(\Gamma)$ formé par la réunion des géodésiques fermées lisses représentant les générateurs $g_1, \dots, g_n$ (voir Figure 4). Ces géodésiques remplissent la surface S (voir définition dans la démonstration 2.1).

Choisissons un point y_i , où la géodésique fermée lisse représentant g pour la métrique induite par ρ_i , rencontre le graphe $\mathcal{G}_i$. Choisissons σ_i un arc dans ce graphe allant de $p(x_i)$ à y_i . Il est évidemment possible de choisir σ_i de telle sorte que sa longueur soit inférieure à la somme des longueurs des géodésiques fermées lisses associées aux générateurs.

Soit $\tilde{\sigma}_i$ le relevé de σ_i dans $\mathbb{H}^2$ d'origine x_i . Soit $\tilde{\omega}_i$ l'arc géodésique entre le relevé de y_i et son image par g .

Considérons le chemin entre x_i et gx_i qui consiste à suivre $\tilde{\sigma}_i$, puis $\tilde{\omega}_i$, puis l'image par g du chemin inverse de $\tilde{\sigma}_i$. Ce chemin a une longueur supérieure à celle de $\tilde{\alpha}_i$. Nous avons donc

$$d(x_i, gx_i) \leq 2n\lambda_i + l_i(g),$$

où $l_i(g)$ est la distance de translation de $\rho_i(g)$.

Il nous reste par conséquent à montrer que les distances de translation normalisées sont bornées. Ceci découle de [CS] comme suit.

Notons t_g la fonction qui à une représentation ρ de Γ dans $SL_2(\mathbb{R})$ associe le réel $\text{trace}(\rho(g))$. Soit A l'anneau engendré par les fonctions t_g , pour g dans Γ .

D'après la Proposition 1.4.1 de [CS], l'anneau A est de type fini. Il est engendré par les t_h où h est un produit d'éléments distincts de $\{g_1, \dots, g_n\}$.

Le résultat découle alors de la formule ([Bea] Chapitre 7, § 34) :

$$\cosh\left(\frac{l_i(g)}{2}\right) = \frac{1}{2} |\text{trace}(\rho_i(g))|.$$

En effet, $\cosh\left(\frac{l_i(g)}{2}\right)$ est un polynôme en les $\cosh\left(\frac{l_i(h)}{2}\right)$ avec h produit d'éléments distincts de la partie génératrice de Γ . Puisque $l_i(h)$ est plus petit que λ_i , nous avons alors :

$$\exp\left(\frac{l_i(g)}{2}\right) \leq 2 \cosh\left(\frac{l_i(g)}{2}\right) \leq k(g) \left(\cosh \frac{\lambda_i}{2}\right)^{n(g)} \leq \exp(m(g) \cdot \lambda_i)$$

avec $k(g)$, $n(g)$, $m(g)$ des constantes réelles ne dépendant que de g et de la partie génératrice.

Ceci montre bien que la suite des $d(x_i, gx_i)/\lambda_i$ est bornée. CQFD

3 Egalité des compactifications.

Nous pouvons montrer facilement que la compactification de l'espace de Teichmüller ainsi obtenue (voir §2 et Chapitre III) est identique à celle obtenue par J. Morgan et P. Shalen [MS1] et donc celle de W. Thurston [FLP]. (Voir l'introduction de cette annexe pour un rappel succinct.) Sur ce sujet, voir aussi [Mas].

Théorème 3.1 : La compactification de l'espace de Teichmüller (Chapitre III, Théorème 2.2) est la même que celle obtenue par J. Morgan et P. Shalen [MS1].

Démonstration : Nous notons $\hat{T}(S)_{\text{Gromov}}$ (resp. $\hat{T}(S)_{\text{Morgan}}$) la compactification de l'espace de Teichmüller obtenue par le Théorème 2.2 du Chapitre III (resp. [MS1]).

Nous avons une application naturelle de $\hat{T}(S)_{\text{Gromov}}$ dans $\hat{T}(S)_{\text{Morgan}}$. Elle induit l'identité sur l'espace de Teichmüller $T(S)$. A un arbre réel de $\hat{T}(S)_{\text{Gromov}} \setminus T(S)$, elle associe sa fonction distance de translation.

Ceci est bien possible, car les distances de translation sont continues pour la topologie de Gromov sur $\hat{T}(S)_{\text{Gromov}}$ (Chapitre IV, Proposition 3.3).

Cette application est continue et injective (Chapitre II, Remarque 5.5). Puisque les espaces sont compacts, il s'agit d'un homéomorphisme sur son image. Par définition d'une compactification, cette application est aussi surjective. CQFD

La correspondance entre la compactification par des laminations mesurées et par les arbres réels peut se voir directement.

A une lamination, nous associons son arbre dual. Il s'agit du quotient de $\mathbb{H}^2$, où nous identifions deux points à pseudo-distance nulle. La pseudo-distance entre deux points est définie comme la borne inférieure des mesures des chemins transverses par morceaux entre les deux points. Cette pseudo-distance est symétrique, et vérifie l'inégalité triangulaire. Le quotient est donc bien un espace métrique.

Ceci sera pour une autre histoire.

Bibliographie

- [AB] R. Alperin, H. Bass, "*Lengths functions of group actions on Λ -trees*", Combinatorial Group Theory and Topology,
Ed : S. M. Gersten, J. R. Stallings, Ann. of Math. Studies **111**,
Princeton Univ. Press 1987, 265-377.
- [Bea] A.F. Beardon, "*The geometry of discrete groups*", Springer Verlag, 1983.
- [Bes] M. Bestvina, "*Degenerations of the Hyperbolic Space*", Prépublication 1987.
- [BK] P. Buser, H. Karcher, "*Gromov's almost flat manifolds*", Astérisque n° **81**,
Soc. Math. de France, 1981.
- [Bus1] H. Busemann, "*Metric Methods in Finsler Spaces and in the Foundations of Geometry*", Ann. of Math. Studies **8**, Princeton University Press, 1942.
- [Bus2] H. Busemann, "*The geometry of geodesics*", Academic Press, New York, 1955.
- [Bus3] H. Busemann, "*Recent Synthethic Differential Geometry*", Springer-Verlag, 1970.
- [CE] J. Cheeger, D.G. Ebin, "*Comparison theorems in Riemannian Geometry*", North Holland, 1975.
- [CEG] R. D. Canary, D. B. A. Epstein, P. Green, "*Notes on notes of Thurston*", Analytical and Geometric Aspects of Hyperbolic Space : Warwick-Durham 1984, London Math. Soc. L. N. S. **111**,
Cambridge Univ. Press, 1987, 3-92.
- [CG] S.S. Chen, L. Greenberg, "*Hyperbolic Spaces*", Contribution to analysis. A collection of paper dedicated to Lipman Bers,
Academic Press, 1974, 49-86.
- [Chi1] I.M. Chiswell, "*Length functions and free products with amalgamation of groups*", Proc. London Math. Soc. **42** (1981), 42-58.
- [Chi2] I.M. Chiswell, "*Abstract length functions in groups*",
Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **80** (1976), 451-463.
- [CM] M. Culler, J. Morgan, "*Groups actions on $\mathbb{R}$ -trees*", Prépublication 1985.
- [CS] M. Culler, P.B. Shalen, "*Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds*", Ann. of Math. **117** (1983), 109-146.
- [CV] M. Culler, K. Vogtmann, "*Moduli of graphs and outer automorphisms of free groups*", Prépublication.
- [DH] A. Douady, J.H. Hubbard, "*A proof of Thurston's topological characterization of rational functions*", Prépublication Institut Mittag-Leffler 1985.
- [Dug] J. Dugundji, "*Topology*", Allyn and Bacon, Boston, 1967.

- [Dun1] M. J. Dunwoody, "*Accessibility and groups of cohomological dimension 1*",
Proc. Lon. Mat. Soc. **38** (1979), 193-215.
- [Dun2] M. J. Dunwoody, "*The accessibility of finitely presented groups*",
Inv. Math. **81** (1985), 449-457.
- [EON] P. Eberlein, B. O'Neill, "*Visibility Manifolds*",
Pac. Journal of Math. **46** (1973), 45-109.
- [Eps] D. B. A. Epstein, "*Curves on 2-manifolds and isotopies*",
Acta Math. **115** (1966), 83-107.
- [FLP] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poenaru, "*Travaux de Thurston sur les surfaces*",
Astérisque (Soc. Math. de France) **66-67** (1978).
- [Gre] L. Greenberg, "*Discrete subgroups of the Lorentz Group*",
Math. Scand. **10** (1962), 85-107.
- [Gro1] M. Gromov, "*Hyperbolic manifolds, groups and actions*",
Riemann Surfaces and Related Topics, Proc. of the 1978th Stony Brook
Conference, Ann. of Math. Studies n^o **97**,
Princeton University Press 1980 (pages 183-213).
- [Gro2] M. Gromov, "*Structures métriques pour les variétés riemanniennes*",
Cedic / Fernand Nathan, 1981.
- [Gro3] M. Gromov, "*Groups of polynomial growth and expanding maps*",
Pub. Math. de l'IHES **53** (1981), 53-78.
- [Gro4] M. Gromov, "*Hyperbolic groups*", Prépublication I.H.E.S. 1987.
- [Hem] J. Hempel, "*3-Manifolds*", Ann. of Math. Studies **86**,
Princeton Univ. Press 1976.
- [Ker] S.P. Kerckhoff, "*The Nielsen realisation problem*",
Ann. of Math. **117** (1983), 235-265.
- [KM] D.A. Kazdan, G.A. Margulis, "*A proof of Selberg's conjecture*",
Mat. U.S.S.R Sbornik **4** (1968), 147-152.
- [Lyn] R.C. Lyndon, "*Length functions in groups*",
Math. Scand. **12** (1963), 209-234.
- [Mas] H. Masur, "*Two boundaries of Teichmüller Space*",
Duke Math. Journal **49** (1982), 183-190.
- [Men] K. Menger, "*Untersuchungen über allgemeine Metrik I, II, III*",
Math. Ann. **100** (1928), 75-163.
- [MO] J. Morgan, J.P. Otal, "*Non-archimedean measured laminations and degenerations
of surfaces*", Prépublication 1984.

- [Mor] J. Morgan, "*Groups actions on trees and the compactification of the space of conjugacy classes of $SO(n,1)$ -representations*",
Topology **25** (1986), 1-33.
- [MS1] J. Morgan, P.B. Shalen, "*Valuations, trees and degeneration of hyperbolic structures I*", Ann. Math. **122** (1985), 398-476.
- [MS2] J. Morgan, P.B. Shalen, "*Valuations, trees and degeneration of hyperbolic structures II*", Prépublication, à paraître.
- [Pau1] F. Paulin, "*Topologie de Gromov sur les arbres réels*",
Prépublication ORSAY 87 T 19, (1987) soumis à publication.
- [Pau2] F. Paulin, "*Topologies de Gromov équivariantes, structures hyperboliques et arbres réels*", Prépublication, soumis à publication.
- [Rin] W. Rinow, "*Die Innere Geometrie der Metrischen Räume*", Springer, 1961.
- [Ser] J.P. Serre, "*Trees*", Springer-Verlag (Berlin), 1980.
- [Spa] E. H. Spanier, "*Algebraic topology*", MacGraw-Hill, 1966.
- [Sta1] J. Stallings, "*A topological proof of Grusko's theorem on free products*",
Math. Zeit., **90** (1965), 1-8.
- [Sta2] J. Stallings, "*On torsion-free groups with infinitely many ends*",
Ann. of Math., **88** (1968), 312-334.
- [Sta3] J. Stallings, "*Group theory and 3-dimensional manifolds*",
Yale Univ. Press, 1971.
- [Tei1] O. Teichmüller, "*Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale*", Abh. Preuss. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl. **22** (1939).
- [Tei2] O. Teichmüller, "*Bestimmung der extremalen quasikonformen Abbildung bei geschlossenen orientierten Riemannschen Flächen*",
Preuss. Akad. Ber., **4** (1943).
- [Thu1] W.P. Thurston, "*On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*", Article non publié, 1975.
- [Thu2] W.P. Thurston, "*Geometry and topology of 3-manifolds*",
Notes de cours, Princeton University, 1976-1979.
- [Thu3] W.P. Thurston, "*Minimal stretch maps between hyperbolic surfaces*",
Prépublication.
- [Thu4] W.P. Thurston, "*Hyperbolic structures on 3-manifolds I : Déformation of acylindrical manifolds*", Ann. of Math. **124** (1986), 203-246.
- [Thu5] W.P. Thurston, "*Earthquakes*", Low-dimensional Topology and Kleinian Groups : Warwick-Durham 1984, London Math. Soc. L. N. S. **112**,
Cambridge Univ. Press, 1987, 91-112.
- [Wal1] F. Waldhausen, "*Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten I, II*",
Invent. Math., **3** (1967), 308-333 et Invent. Math., **4** (1967), 501-504.

- [Wal2] F. Waldhausen, "*On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*",
Ann. of Math., (2) **87** (1968), 56-88.
- [Wie] N.J. Wielenberg, "*Discrete Moebius Groups*",
Amer. Journal of Math. 1977, 861-877.

Sommaire :

Remerciements.	page 2
Préambule.	page 3
Introduction.	page 4
Chapitre 1 : Critère de compacité pour la topologie de Gromov.	
1 Généralités sur la topologie de Gromov	page 12
2 Espaces de longueur et espaces convexes	page 17
3 Enoncé du critère de compacité	page 22
4 Démonstration du critère de compacité	page 30
Chapitre 2 : Arbres réels et Topologie de Gromov.	
1 Arbres réels	page 36
2 Propriétés géométriques des axes de translation	page 38
3 Actions minimales et irréductibles	page 48
4 Topologie des axes	page 56
5 Topologie de Gromov	page 64
6 Compacité des arbres réels à petits stabilisateurs	page 72
Chapitre 3 : Structures hyperboliques et Topologie de Gromov.	
1 Espace hyperbolique	page 80
2 Dégénérescence des structures hyperboliques	page 84
Chapitre 4 : Cœurs convexes et séparation de la topologie de Gromov.	
1 Existence de cœurs convexes	page 92
2 Séparation de la topologie de Gromov	page 98
3 Démonstration du théorème de séparation	page 102
Annexe : Compactification de l'espace de Teichmüller.	
1 Egalité des topologies	page 114
2 Dégénérescence des structures hyperboliques	page 117
3 Egalité des compactifications	page 122
Bibliographie.	page 127
	page 129