VINCENT COSSART

Polyèdre caractéristique d'une singularité – Tome I

Thèses d'Orsay, 1987, 252 p

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1987__0203__P01_0>

63463

N° d'ordre

TOME I

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

T H E S E

présentée

Pour obtenir

Le grade de DOCTEUR D'ETAT

par

Vincent COSSART

Sujet : POLYEDRE CARACTERISTIQUE D'UNE SINGULARITE

Soutenue le 11 Juin 1987, devant la Commission d'examen

Président :	M. RAYNAUD
Examinateurs :	J. GIRAUD
	P. KREE
	M. LEJEUNE-JALABERT
	B. TEISSIER

Je tiens à remercier ici J. GIRAUD qui a eu la patience et l'abnégation de lire tous les brouillons de ce mémoire. Ses questions, ses encouragements et ses suggestions m'ont apporté une aide inappréciable.

Ma reconnaissance s'adresse aussi à MM. AROCA, CANO, SANCHEZ et VICENTE qui ont subi plusieurs exposés de ce travail, aux congrès de LA RABIDA d'abord et à l'Université de VALLADOLID ensuite. Leurs questions et leurs remarques ont permis de clarifier bien des points obscurs.

J'ai beaucoup apprécié mes deux séjours à LA RABIDA où j'ai rencontré dans une ambiance agréable et studieuse des collègues étrangers intéressés par l'étude des désingularisations, en particulier MM. SPIVAKOSKY et YOUSSIN et bien sûr, les deux grands maîtres, le jardinier japonais H. HIRONAKA et le gourou indien S.S. ABHYANKAR.

Mes remerciements vont aussi à MM HERRMANN et ORBANZ de l'Université de COLOGNE, leurs encouragements constants m'ont aidé dans des moments difficiles.

Je remercie également M. RAYNAUD qui, alors que j'étais étudiant, m'a encouragé à faire de la recherche et qui a accepté la présidence du jury.

Je n'oublie pas M. LE JEUNE-JALABERT et B. TEISSIER qui ont accepté la redoutable et fastidieuse tâche de lire le manuscrit et P. KREE qui m'a proposé un deuxième sujet des plus intéressants.

Ce sont Michel HUGUET et Evelyne GUILLOUX qui ont assuré avec beaucoup de patience , de gentillesse et de compétence la frappe du manuscrit.

Un dernier mot pour mes proches : Marie-Pierre et mes trois enfants Séverine, Arnaud et Etienne qui ont subi mes sautes d'humeur, provoquées par mes erreurs et mes découragements dont ils n'étaient pas responsables.

Je dédie cette thèse à mon père qui était un fana de la géométrie algébrique.

POLYEDRE CARACTERISTIQUE D'UNE SINGULARITE

RESUME

La thèse se compose de trois parties : d'une part de deux articles "Desingularization of embedded excellent surfaces", Tohoku Math. Journ. 33 (1981) p.25-33, "Desingularization in dimension 2", Lecture Notes in Math., 1101 (1984) p.79-98 et d'autre part d'une partie inédite "Forme normale d'une fonction de trois variables en caractéristique positive". C'est ce dernier travail que nous allons résumer ici.

Soit f une fonction sur un schéma régulier X. Rappelons que, en caractéristique positive, une relation du genre $f = ux_1^{a(1)}\dots x_r^{a(r)}=ux^a$, où u est une unité, ne dit rien sur f lorsque le multi-indice a est divisible par p car par exemple, en cherchant le lieu singulier de $f=0$, on est conduit par le critère Jacobien à étudier les dérivées de u sur lesquelles on ne sait rien. On cherche donc à réaliser une condition plus forte où le coefficient du monôme vaut 1 ; on dit que f est mise sous forme normale si pour tout $\xi\in X$, il existe un revêtement fini étale V d'un voisinage U de ξ dans X, tel que, sur V, on ait

$$(\star)\quad f = g^p + x_1^{a(1)}\dots x_p^{a(p)}$$

où $g\in O_V(V)$, où $(x_1,\dots,x_p)$ est une p-base de $O_V(V)$ et où l'un des $a(i)$ n'est pas divisible par p.

Notre énoncé dit que l'on peut réaliser $(\star)$ par une suite d'éclatements de X dont les centres sont réguliers, à croisements normaux avec le diviseur exceptionnel créé par les éclatements précédents et contenus dans l'ensemble des points où l'on n'a pas $(\star)$.

L'énoncé obtenu a par exemple pour conséquence, la désingularisation d'un revêtement radiciel de hauteur 1. Les difficultés surmontées sont considérablement plus grandes qu'en caractéristique nulle.

En fait, le problème analogue en car. 0 est la désingularisation d'un champ de vecteurs en dimension 3 ; obtenue récemment par F. Cano, par des méthodes voisines des nôtres.

Nous ne travaillons pas avec la condition (*), mais avec un idéal jacobien convenable

$$\mathcal{J}(X,f,E) = \mathcal{K}(X,f,E)J(X,f,E) \quad \text{(cf. I.A.3)},$$

où $\mathcal{K}(X,f,E)$ est un idéal inversible qui joue le rôle du monôme dans (*) et où $J(X,f,E)$ finit par devenir l'idéal unité : le lieu singulier du problème est le support de l'idéal $J(X,f,E)$ et en tout point ξ, on pose $\nu(\xi)$ l'ordre au point ξ de l'idéal $J(X,f,E)$. Les caprices de la loi de transformation de $J(X,f,E)$ par éclatement nous obligent à introduire divers idéaux jacobiens, par exemple $J(X,f,E,Y)$ qui fait intervenir l'espace ambiant X, la fonction étudiée f, le diviseur exceptionnel crée par les éclatements précédents E et le centre d'éclatement Y.

Le chapitre I est consacré à la définition et aux lois de transformation des idéaux $J(X,f,E,Y)$. On y prouve que $\nu(\xi)$ n'augmente pas par éclatement permis mais que

$$\alpha(\xi) = \mathrm{ord}_\xi(J(X,f,E,\{\xi\}))$$

peut sauter le $\nu(\xi)$ à $1+\nu(\xi)$ et inversement, ce qui provoquera de grosses difficultés, voir par exemple IV. B.4.6.5. ou le cas exposé dans l'introduction de VI et appelé par dérision le "cas joyeux".

Le chapitre II élimine d'abord les composantes de dimension 2 de

$$\mathrm{Sing}_\nu(X,f) = \{\xi \in X \mid \nu(\xi) = \nu\}.$$

La suite de la démonstration utilise un invariant κ, $\kappa \in \{0,1,\dots,7\}$ qui indique dans quel ordre on doit alterner éclatements de points et éclatements de courbes.

On dit que $\kappa = 0$ si l'on peut faire baisser ν par éclatements de points fermés. Soit ξ tel que $\nu(\xi) > 0$ et $\kappa(\xi) \neq 0$. On décrit un algorithme qui consiste à éclater certaines courbes, qui se globalise automatiquement, qui s'arrête au bout d'un nombre fini de pas par un succès ou un échec, le succès étant que ν a baissé. En cas de succès, on dit que $\kappa(\xi) = 1$. On prouve que, sauf en un nombre fini de points fermés de $\mathrm{Sing}_\nu(X)$, on a $\kappa = 1$ (II.C.2.3.).

Expliquons le principe de la définition par récurrence de κ qui n'est terminée qu'au chapitre IX. Supposons définie la condition $\kappa \leq i$, on dit que $\kappa = i+1$ si on n'a pas $\kappa \leq i$ et si une certaine condition explicitée dans chaque cas est satisfaite.

Soit ξ tel que $\nu(\xi) > 0$ et $\kappa(\xi) = \kappa$. On donne à la fin du chapitre II un algorithme qui consiste à éclater certaines courbes, qui se globalise automatiquement, qui s'arrête au bout d'un nombre fini de pas par un succès ou un échec, le succès signifiant que (ν,κ) a baissé. En cas de succès, on dit que ξ est bon.

Vu ce que nous venons de dire de l'organisation générale de la démonstration, il reste à prouver que, pour chaque valeur de κ, en éclatant tous les points qui ne sont pas bons et en répétant cette opération

1°) (ν,κ) n'augmente pas,

2°) au bout d'un nombre fini de pas, tous les points deviennent bons.

Ce sera l'objet des chapitres IV à IX.

Le chapitre III donne quelques critères assurant que $\kappa(\xi) = 0$ ou 1. On en trouvera d'autres beaucoup plus techniques dans le chapitre IV (B.1, C.5, D.2.9., D.4.6.).

Dans le chapitre IV, on définit et étudie le cas $\kappa = 2$, cas qui signifie en gros que l'on peut trouver une projection transverse qui le restera en tout point proche. En IV.B.4, on montre qu'après un nombre fini d'éclatements de points fermés, on se ramène à une condition plus fine, stable notée (**).

Malheureusement, le cas $\kappa = 2$ et (**) nécessite une étude approfondie des transformations des polygones de Newton d'un idéal lors d'un éclatement (voir IV.C et surtout IV.C.4.2.2.). De plus, nous devons raffiner cette étude aux cas de certains idéaux Jacobiens contenus dans $J(S,f,E)$. Cette dernière étude (IV.D) est très longue car, d'une part il faut séparer les cas $\alpha(\xi) = \nu(\xi)$ et $\alpha(\xi) = 1 + \nu(\xi)$ et d'autre part, on doit contrôler quelles sont les dérivations qui donnent les termes sensibles des polygones considérés, ce qui fait une multitude de cas différents que l'on étudie l'un après l'autre.

Dans le chapitre V, on étudie

$$f = u_1^N + a_1 u_1^{N-1} + \ldots + a_N$$

aux points proches situés sur le transformé strict de $\mathrm{div}(u_1)$. Si $N-i \neq 0(p)$, on remarque que les a_i deviennent des monômes, par contre, si $N-i = 0(p)$, on réalise la condition (*) pour les a_i. Cette étude est faite en prévision de VI.A, VI.E et IX.A.

Au début du chapitre VI est exposé le "cas joyeux" qui est le cas le plus subtil de tout ce travail. En gros, si on a

$$(1)\quad \begin{cases} f = u_1^{A(1)}\ u_2^{A(2)}\ u_3^{A(3)}\ \ (p(u_1,u_2) + g), \\ g \in \mathcal{M}^{1+\nu}\ ,\ p \text{ homogène de degré } \nu = \nu(\xi), \\ \operatorname{div}(u_1\ u_2) \subset E\ ,\ A(3) = 0(p), \end{cases}$$

et l'une des deux conditions

$$(1\text{-a})\quad \begin{cases} p(u_1,u_2) = c^p(u_1+u_2)^\nu\ ,\ \nu = 0(p), \\ A(1)+A(2) = 0(p),\quad c \text{ inversible}, \end{cases}$$

ou

$$(1\text{-b})\quad \begin{cases} p(u_1,u_2) = c^p \sum\limits_{o\leqslant j\leqslant \nu} \binom{\nu}{j}\ [1/(A(1)+j)]u_1^j\ u_2^{\nu-j}\ , \\ \nu \neq 0(p),\ c \text{ inversible},\ A(1),\ A(2) \neq 0,\ \widehat{A(1)} + \widehat{A(2)} + \hat{\nu} = p, \end{cases}$$

où pour tout entier n, on note $\hat{n}$ le reste de la division de n par p,

(Observons qu'avec les conditions (1-b), $A(1) + j = 0(p)$ implique $\binom{\nu}{j} = 0(p)$, on convient que

$$\binom{\nu}{j}[1/(A(1)+j)] = 0 \text{ si } \binom{\nu}{j} = 0(p).)\ ,$$

alors en ξ' proche de ξ, ξ' non sur le transformé strict de $\nu(u_1,u_2)$, on a

$$(2)\quad \begin{cases} f = t^{kp}\ (\gamma v_1^{1+\nu}+tg') + R^p\ ,\ k\in\mathbb{N} \\ E = \operatorname{div}(t),\ \gamma \text{ inversible},\ g'\in O_{X',\xi'}\ ,\ R\in O_{X',\xi'}\ . \end{cases}$$

Il apparaît qu'on a perdu toutes les informations qu'on possédait sur la forme initiale du transformé strict de f. De plus, on peut avoir $\alpha(\xi') = \nu(\xi')$ ou $1+\nu(\xi')$.

Le cas $\alpha(\xi') = \nu(\xi')$ se résout facilement,au pire nous avons $\kappa(\xi') = 3$ (voir VI.A et VI.E).

Le cas $\alpha(\xi') = 1+\nu(\xi')$ est beaucoup plus délicat : on a $\kappa(\xi') = 4$ ou 5 (chapitre VII), malheureusement, l'hypothèse $\alpha = 1 + \nu$ n'est pas stable et, des éclatements de courbes inconsidérés peuvent nous ramener à (1) et donc on risque de retomber sur le cas joyeux.

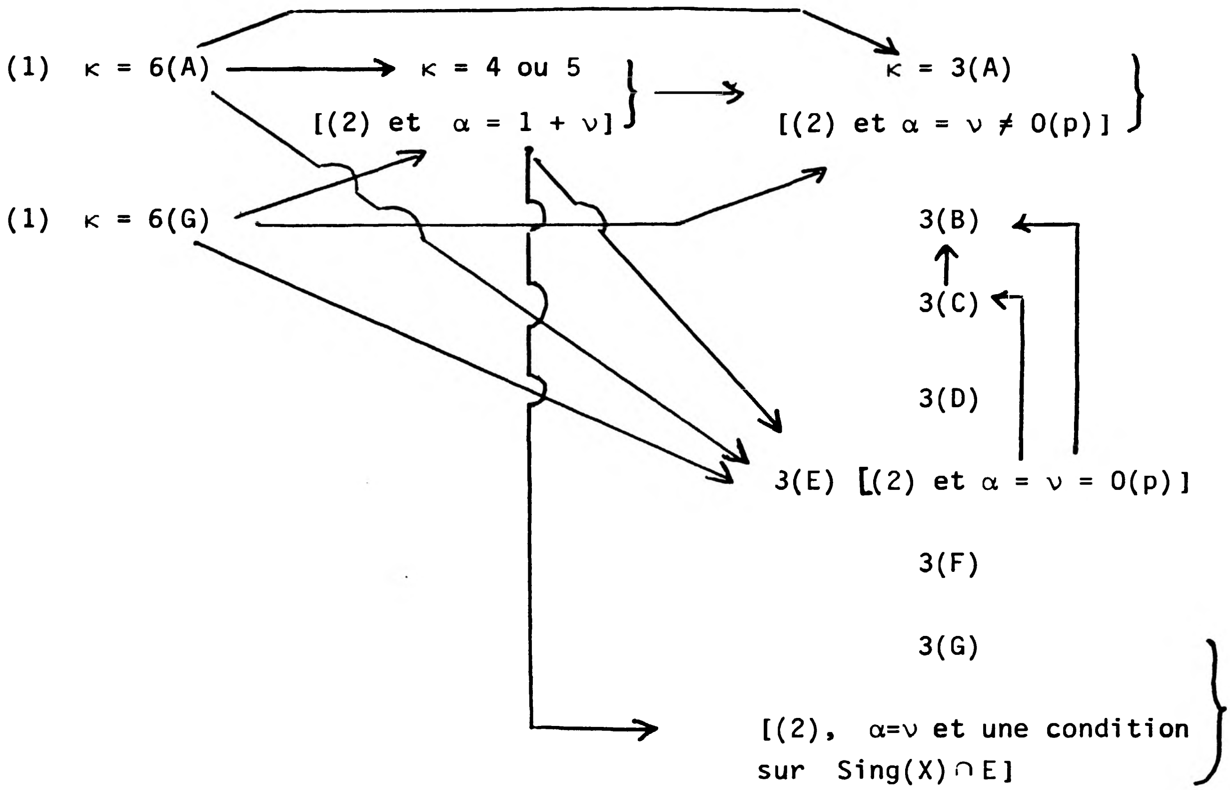
Le point clé est qu'en conservant des conditions techniques sur les courbes de $E\cap \operatorname{Sing}(X)$ (VII.B.1 (6)(7)), conditions qui sont automatiques si localement les composantes de E sont des d.e. d'éclatements de points fermés, on tombe sur un des cas de $\kappa = 3$ déjà cités ou sur le cas très exceptionnel de $\kappa = 3(G)$.

Bref, les chapitres VI et VII sont consacrés à l'étude de points proches d'un point "joyeux". On a rajouté quelques cas similaires simples (VI B.C.D.F).

Dans les chapitres VIII et IX, nous étudions les divers cas restants. Pour terminer, remarquons que le cas où on a (1) est traité en VIII.A ou G, suivant la structure de g dans (1). Au cas où on ne passe pas de (1) à (2), nous risquons de subir les différents autres cas de $\kappa = 6$.

Pour fini, nous conseillons au lecteur de commencer par lire II.C où la structure de la démonstration est donnée explicitement.

Schéma montrant les différentes étapes possibles rencontrées après un passage de (1) à (2) "cas joyeux", et avant d'obtenir $\kappa < 2$.



I PRELIMINAIRES.

A.1. Soit X un schéma régulier noethérien de caractéristique $p > 0$, de dimension ℓ et tel que le faisceau des différentielles absolues soit de type fini. Tout point x de X admet alors un voisinage ouvert affine U d'anneau $R = O_X(U)$ tel que R admet une p-base, c'est à dire une suite $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ d'éléments de R satisfaisant aux conditions équivalentes suivantes :

(1) Les monômes λ^a , $0 \leq a(i) < p$, (ce qu'on écrit $a << p$) forment une base de R sur R^p .

(2) Les $d\lambda_i$ forment une R-base de Ω_R .

Dans ces conditions, si l'on note $\mathcal{D}(X)$ le faisceau des dérivations absolues de X , on a $\mathcal{D}(X)(U) = \mathrm{Dér}(R,R^p) = \oplus R\partial_i$, où ∂_i est défini par :

(3) $df = \sum \partial_i(f) d\lambda_i$, $f \in R$, (donc $\partial_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$) .

Un diviseur à croisements normaux de X (on écrira d.c.n.) est un sous-schéma fermé E qui, localement, est de la forme $E = V(\lambda^a)$ où $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ est une p-base et λ^a un monôme. Pour tout $x \in U$, ceux des λ_i qui appartiennent à l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{X,x}$ forment une partie d'un système régulier de paramètres (en abrégé s.r.p.) de $O_{X,x}$. On en déduit que <u>toute composante irréductible E' de E est régulière</u>, car en tout point de E' , l'idéal de E' est à la fois premier et engendré par un monôme en les λ_i . Soit Y un fermé régulier de X , à croisements normaux avec E et d'idéal P . On note :

(4) $\mathcal{D}(X,E,Y)$

le faisceau des dérivations D de O_X telles que $D(I(E)) \subset I(E)$ et $D(P) \subset P$.

Si $f \in O_X(X)$, $f \notin O_X(X)^p$, on a un faisceau d'idéaux défini par :

(5) $\mathcal{J}(X,f,E,Y) = \mathcal{D}(X,E,Y)f$,

on peut avoir $Y = \emptyset$, on pose alors :

(6) $\mathcal{J}(X,f,E,\emptyset) = \mathcal{J}(X,f,E)$, $\mathcal{D}(X,E,\phi) = \mathcal{D}(X,E)$ et on a

(7) $\mathcal{J}(X,f,E,Y) \subset \mathcal{J}(X,f,E)$.

Soient U et λ comme plus haut, on pose

(8) $I_1 = \{ i \in [1,s] \ / \ \mathrm{div}(\lambda_i) \subset E \}$, $I'_1 = \{ i \in [1,s] \ / \ Y \subset \mathrm{div}(\lambda_i) \subset E \}$,

(9) $I_2 = \{ i \in [1,s] \ / \ \mathrm{div}(\lambda_i) \not\subset E$ et $Y \subset \mathrm{div}(\lambda_i) \}$.

On observe que, si λ_i est une unité, $\mathrm{div}(\lambda_i) = \phi$ et donc $i \in I_1$. On pose :

(10) $I_3 = \{ i \in [1,s] \ / \ \mathrm{div}(\lambda_i) \not\subset E$ et $Y \not\subset \mathrm{div}(\lambda_i) \}$.

<u>Désormais</u>, <u>nous</u> <u>supposerons</u> E <u>réduit</u>. Alors, si X est régulier, si E est un d.c.n. , si Y est à croisements normaux avec E , si $x \in Y$, il existe un voisinage affine $U = \mathrm{Spec}(R)$ de x et une p-base $(\lambda_i, 1 \leqslant i \leqslant s)$ de $O_X(U)$ et des entiers $1 \leqslant q \leqslant t \leqslant k \leqslant r \leqslant s$ tels que si $\mathfrak{m}$ est l'idéal de $\{x\}$, on ait

(11) $E = \bigsqcup_{1 \leqslant i \leqslant t} \mathrm{div}(\lambda_i)$, $P = \sum_{q+1 \leqslant i \leqslant k} \lambda_i R$, $\mathfrak{m} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \lambda_i R$,

(12) $\mathrm{div}(\lambda_i) \subset U$ est irréductible (i.e. connexe) $\forall i, 1 \leqslant i \leqslant t$.

On a alors :

(13) $I_1 = \{ i / 1 \leqslant i \leqslant t$ ou $r+1 \leqslant i \leqslant s \}$, $I'_1 = \{ i \ / \ q+1 \leqslant i \leqslant t \}$, $I_2 = \{ i \ / \ t+1 \leqslant i \leqslant k \}$, $I_3 = \{ i \ / \ k+1 \leqslant i \leqslant r \}$.

Il nous sera commode d'utiliser aussi les notations que voici :

(14) $u_i = \lambda_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$, et $(u,\lambda) = (u_1,\dots,u_r , \lambda_{r+1},\dots,\lambda_s) = (\lambda_1,\dots,\lambda_s)$

$(u_1,\dots,u_r)$ est donc un système régulier de paramètres (en abrégé : s.r.p.)

de $O_{X,x}$.

On définit alors : $D^{u,\lambda}_{[i]} f$ par

(15) $df = \sum D^{u,\lambda}_{[i]} f \ d\lambda_i = \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} D^{u,\lambda}_{[i]} f \ du_i + \sum_{r+1 \leqslant j \leqslant s} D^{u,\lambda}_{[j]} f \ d\lambda_j$

(16) On vérifie les résultats suivants .

Etant donnée une p-base (u,λ) vérifiant (11) , au voisinage de x , on a les générateurs suivants de nos modules de dérivées :

$\mathcal{D}(X,E) = (u_i D^{u,\lambda}_{[i]} \ , \ 1 \leqslant i \leqslant t) + (D^{u,\lambda}_{[i]} \ , \ t+1 \leqslant i \leqslant s)$,

$\mathcal{D}(X,E,Y) = (u_i D^{u,\lambda}_{[i]} \ , \ 1 \leqslant i \leqslant t) + (P D^{u,\lambda}_{[i]} \ , \ t+1 \leqslant i \leqslant k) + (D^{u,\lambda}_{[i]} \ , \ k+1 \leqslant i \leqslant s)$

$\mathcal{D}(X,E,\overline{\{x\}}) = (u_i D^{u,\lambda}_{[i]} \ , \ 1 \leqslant i \leqslant t) + (\mathfrak{m} D^{u,\lambda}_{[i]} \ , \ t+1 \leqslant i \leqslant r) + (D^{u,\lambda}_{[i]} \ , \ r+1 \leqslant i \leqslant s)$.

On pose :

(17) $DM^{u,\lambda}_{[i]} = \lambda_i D^{u,\lambda}_{[i]}$, $1 \leqslant i \leqslant s$,

bien sûr, si $1 \leqslant i \leqslant r$, $DM^{u,\lambda}_{[i]} = u_i D^{u,\lambda}_{[i]}$.

DEFINITION A.1.1.

Soient X,f,E comme plus haut et soit $x \in X$. Soit U un voisinage ouvert de x et soit $(\lambda_1,\ldots,\lambda_s)$ une p-base de $O_X(U)$.

(1) On dit que $(\lambda_1,\ldots,\lambda_s)$ est adaptée au point x si

(1-a) on peut extraire des λ_i un s.r.p. au point x,

(1-b) il existe $a(1),\ldots a(s)$ tel que, au voisinage de x , on ait $E = \mathrm{div}(\lambda^a)$.

(2) Soit encore Y un sous-schéma fermé de X . On dit que la p-base $(\lambda_1,\ldots,\lambda_s)$ est adaptée à (x,Y) si on a (1) et si de plus on peut extraire des λ_i un système de générateurs de l'idéal de Y dans $O_{X,x}$.

A.1.2. L'existence d'une p-base adaptée à (x,Y) impose que Y est à c.n. avec E au voisinage de x .

PROPOSITION A.2.

Soit X un schéma régulier vérifiant les hypothèses (A.1) , soit E un d.c.n. et soit $\mathcal{J}$ un faisceau d'idéaux sur X . Alors il existe un et un seul couple d'idéaux $(\mathcal{H},J)$ tel que :

(i) $\mathcal{J} = \mathcal{H}J$,

(ii) $\mathcal{H}$ est l'idéal d'un d.c.n. à support contenu dans celui de E ,

(iii) pour tout point maximal η de E , on a $\mathcal{H}O_{X,\eta} = \mathcal{J}O_{X,\eta}$.

On dit que $\mathcal{H}$ est le E-p.g.c.d. de $\mathcal{J}$.

Preuve.

Il est clair que $\mathcal{H}$ est caractérisé par les conditions (ii) et (iii) ; en effet, pour tout $x \in X$, on choisit un voisinage affine $U = \mathrm{Spec}(R) \subset X$ et une p-base adaptée λ . Si $A(i)$ est l'ordre au point générique η de $\mathrm{div}(\lambda_i)$, $1 \leqslant i \leqslant t$, de l'idéal $\mathcal{J}$, on a :

(1) $\mathcal{H}/U = \prod_{1 \leqslant i \leqslant t} \lambda_i^{A(i)} O_U$.

Puisque $\mathcal{H}$ est inversible, on obtient (i) en prenant $J = \mathcal{H}^{-1}\mathcal{J}$.

Observons que A.1.(12) nous dit que $\mathrm{div}(\lambda_i) \subset U$ est irréductible, λ_i est donc un élément premier de $O_{X,x}$, car cet anneau régulier est factoriel et $O_{X,\eta}$ est un localisé de $O_{X,x}$, l'entier $A(i)$ qui figure dans (1) est donc :

(2) $A(i) = \sup \left\{ n \in \mathbb{N} \,/\, \lambda_i^n \text{ divise } \mathcal{J} O_{X,x} \right\}$.

PROPOSITION A.3.

Soient X et E vérifiant les hypothèses de (A.2.), soit Y un fermé régulier de X et à croisements normaux avec E en x, $x \in Y$ et soit $f \in O_X(X)$. Alors le E-p.g.c.d. de $\mathcal{J}(X,f,E)$ est aussi celui de $\mathcal{J}(X,f,E,Y)$ et, dans un voisinage de x, $\mathcal{H}$ est aussi le E-p.g.c.d. de $\mathcal{J}(X,f,E,\overline{\{x\}})$.

On le note $\mathcal{H}(X,f,E)$ ou plus simplement $\mathcal{H}$, on pose :

(i) $J(X,f,E,Y) = \mathcal{H}^{-1}\mathcal{J}(X,f,E,Y)$,

(ii) $J(X,f,E) = \mathcal{H}^{-1}\mathcal{J}(X,f,E)$,

(iii) $J(X,f,E,\overline{\{x\}}) = \mathcal{H}^{-1}\mathcal{J}(X,f,E,\overline{\{x\}})$,

(iv) $\alpha(Y,x) = \mathrm{ord}_x(J(X,f,E,Y))$,

(v) $\alpha(x) = \mathrm{ord}_x(J(X,f,E,\overline{\{x\}}))$,

(vi) $\nu(x) = \mathrm{ord}_x(J(X,f,E))$,

et on a les inégalités :

(vii) $\nu(x) \leqslant \alpha(Y,x) \leqslant \alpha(x) \leqslant \nu(x)+1$.

Preuve.

Au voisinage de son point générique x le fermé $\overline{\{x\}}$ est régulier, à croisements normaux avec E, il suffit donc de démontrer que $\mathcal{H}$ est le E-p.g.c.d. de $\mathcal{J}(X,f,E,Y)$. Comme $\mathcal{J}(X,f,E,Y) \subset \mathcal{J}(X,f,E)$, $\mathcal{H}$ divise $\mathcal{J}(X,f,E,Y)$, d'autre part, $\mathcal{H}$ est l'idéal d'un d.c.n. à support contenu dans celui de E, il ne reste plus qu'à montrer la condition (A.2(iii)) pour $\mathcal{J} = \mathcal{J}(X,f,E,Y)$: il suffit de remarquer que, si η est un point maximal de E, on a l'égalité $\mathcal{J}(X,f,E,Y)O_{X,\eta} = \mathcal{J}(X,f,E)O_{X,\eta}$.

Les inégalités de (vii) découlent des inclusions suivantes :

$\mathfrak{m}J(X,f,E) \subset J(X,f,E,\overline{\{x\}}) \subset J(X,f,E,Y) \subset J(X,f,E)$,

avec $\mathfrak{m} = I(x)$, (A.1.(16)).

A.3.1. Si Y est irréductible et si η est le point générique de Y , on pose $\nu(Y) = \nu(\eta)$, $\alpha(Y) = \alpha(\eta) = \alpha(Y,\eta)$

A.3.2. Si η est le point générique de la composante de Y passant par x , on a :

$\mathrm{ord}_\eta (J(X,f,E,Y)) = \alpha(Y,\eta) \leqslant \mathrm{ord}_x(J(X,f,E,Y)) = \alpha(Y,x)$.

A.3.3. Si x' est une spécialisation de x (i.e. $x' \in \overline{\{x\}}$) , on a : $\nu(x) \leqslant \nu(x')$ et $\alpha(Y,x) \leqslant \alpha(Y,x')$.

DEFINITION A.4.

Soit (X,f,E) satisfaisant aux hypothèses de A.2. Pour tout entier $\nu \geqslant 1$, on pose $\mathrm{Sing}_\nu(X,f,E) = \{x \in X / \nu(x) \geqslant \nu\}$.
On pose $\{x \in X/\nu(x) \geqslant 1\} = \mathrm{Sing}(X,f,E) = \mathrm{Sing}_1(X,f,E)$.

L'invariant $\nu(.)$ étant l'ordre d'un idéal, il est semi-continu supérieurement, $\mathrm{Sing}_\nu(X,f,E)$ et $\mathrm{Sing}(X,f,E)$ sont des fermés de X . En général, on notera ces fermés $\mathrm{Sing}_\nu(X)$ et $\mathrm{Sing}(X)$ tout simplement.

A.5. Etant donnés X,f,E,x et (u,λ) adaptée à x , on a un développement unique :

(1) $f = \sum_{a<<p} f_a{}^p \lambda^a$, $f_a \in R$.

En recopiant [5] (1.4) , on pose pour $1 \leqslant i \leqslant s$:

(2) $r(i) = \inf \{ \mathrm{ord}_{u_i}(f_a) , a<<p , a \neq 0 \}$, (on rappelle que l'on pose $u_i = \lambda_i$, pour $1 \leqslant i \leqslant s$) , $\mathrm{ord}_{u_i}(f_a)$ est l'ordre de f_a au point générique de $\mathrm{div}(u_i)$

(3) $K(i) = \{ a \in N^s , a<<p , a \neq 0 , \mathrm{ord}_{u_i}(f_a) = r(i) \}$,

(4) $s(i) = \inf \{ a(i) , a \in K(i) \}$, $A(i) = pr(i) + s(i)$.

Nous allons voir que pour $0 \leqslant i \leqslant r$, on a :

(5) $A(i) = \mathrm{ord}_{u_i}(f - f_0{}^p)$,

(6) $A(i) \leqslant \mathrm{ord}_{u_i}(DM^{u,\lambda}_{[i]}f)$ avec égalité si $s(i) \neq 0$,

(7) $A(i) \leqslant \mathrm{ord}_{u_i}(DM^{u,\lambda}_{[j]}f) = \mathrm{ord}_{u_i}(D^{u,\lambda}_{[j]}f)$, pour $1 \leqslant j \leqslant s$ et $i \neq j$,

(8) si $s(i) = 0$, il existe $j \neq i$, $1 \leqslant j \leqslant s$, tel que $A(i) = \mathrm{ord}_{u_i}(DM^{u,\lambda}_{[j]}f)$,

(9) $A(i) = \sup \{ \mathrm{ord}_{u_i}(f - g^p) , g \in R \} = \inf \{ \mathrm{ord}_{u_i}(DM^{u,\lambda}_{[j]}f) , 1 \leqslant j \leqslant s \}$.

On a $gr_{u_i}(R) = (R/u_iR)[U_i]$, d'où une base de $gr_{u_i}(R)$ sur $(R/u_iR)^p$ formée des $U_i^k\lambda^a$, avec $k \in N$, $0 \leq a(j) < p$ pour $1 \leq j \leq s$ et $a(i) = 0$. On en tire immédiatement (5)(6)(7) . Quant à (8) , on peut supposer que $f \notin R^p$, sinon la formule est triviale , on a donc $K(i) \neq \emptyset$, d'où un $a \in K(i)$ avec $a(i) = 0$, mais $a \neq 0$, donc il existe j tel que $a(j) \neq 0$, d'où la conclusion. Enfin, on déduit (9) de (5) en observant qu'en ajoutant une puissance p-ème à f , on ne change pas f_a pour $a \neq 0$.

De (6)(7)(8) et (A.2) on déduit que, si on pose :

(10) $h(u,\lambda) = \prod_{1 \leq i \leq t} u_i^{A(i)}$,

alors $h(u,\lambda)$ est localement un générateur de l'idéal $\mathcal{H}(X,f,E)$.

Désormais nous poserons

(11) $R(f,u,\lambda) = f_0^p$, $h(x) = h(u,\lambda)$.

Cette notation $h(x)$ est abusive, car si on multiplie les équations des composantes de E par un inversible , $h(x)$ est multiplié par un inversible. Cela n'aura d'importance qu'en IV où ce phénomène sera étudié.

Alors (9) implique :

(12) $f = h(x)\, f' + R(f,u,\lambda)$, $\mathrm{ord}_{u_i}(f') = 0$, $1 \leq i \leq t$.

A.6. Etant donnés X,f,E,x et (u,λ) comme en (A.5.) , on pose :

(1) $\mathcal{J}(X,f,(u,\lambda)) = (DM^{u,\lambda}_{[i]}f$, $1 \leq i \leq s)$.

En vertu de (A.4.(5)(6)(7)(8)(10)) , le E-p.g.c.d. de $\mathcal{J}(X,f,(u,\lambda))$ est engendré par $h(x)$ et c'est aussi celui de $\mathcal{J}(X,f,E,\overline{\{x\}})$. On pose :

(2) $I(X,f,(u,\lambda)) = \mathcal{H}(X,f,E)^{-1}\,\mathcal{J}(X,f,(u,\lambda))$.

Prouvons que :

(3) $\alpha(x) = \mathrm{ord}_x(J(X,f,E,\overline{\{x\}})) = \mathrm{ord}_x(I(X,f,(u,\lambda))) = \mathrm{ord}_x(f')$.

La première égalité est la définition de $\alpha(x)$, la deuxième se lit sur les définitions de $I(X,f,(u,\lambda))$ et de $J(X,f,E,\overline{\{x\}})$. Il reste à prouver que si $\beta = \inf(\mathrm{ord}_x(f_a^p\lambda^a)$, $a << p$, $a \neq 0$) alors :

(4) $\beta = \mathrm{ord}_x(\mathcal{J}(X,f,(u,\lambda))) = \mathrm{ord}_x(f-f_0^p)$.

On pose $U_i = in_{\mathfrak{m}}(u_i)$, $1\leq i\leq r$, $\overline{\lambda}_i = in_{\mathfrak{m}}(\lambda_i)$, $r+1\leq i\leq s$. Alors , $(U_i,\overline{\lambda}_i)$ est une p-base de $gr_{\mathfrak{m}}(O_{X,x})$ et donc les monômes $in_{\mathfrak{m}}(\lambda^a)$, $a<<p$, sont p-indépendants dans $gr_{\mathfrak{m}}(O_{X,x})$, d'où il résulte que $\beta = ord_x(f-f_0^p)$.

Comme $DM_{[i]}^{u,\lambda}f = \sum_{a<<p,0\neq a} a(i)f_a^p\lambda^a$, on a $\beta\leq ord_x(I(X,f,(u,\lambda))$. Soit $a<<p$, $a\neq 0$ tel que $\beta = ord_x(f_a^p\lambda^a)$, alors il existe i tel que $a(i)\neq 0$ et par suite $ord_x(DM_{[i]}^{u,\lambda}f) = \beta$, ce qui prouve (4) et donc (3) .

Puisque l'idéal $I(X,f,(u,\lambda))$ ne change pas si on ajoute à f une puissance p-ème , on a aussi : $\beta = \sup(ord_x(f-g^p)$, $g\in R)$, donc :

(5) $\alpha(x) + ord_x(h(x)) = \sup(ord_x(f-g^p)$, $g\in R)$.

(6) Si Y est intersection de composantes de $E(n)$, on a $J(X,f,E,Y) = J(X,f,E)$, $\alpha(Y,x) = \nu(x)$.

On dira que Y est combinatoire.

A.6.1. Si x est intersection de composantes de E (on dira que x est un point de croisement et que $\{\overline{x}\}$ est combinatoire) , alors : $\alpha(x) = \nu(x)$.

En effet, on remarque qu'alors $I(X,f,(u,\lambda)) = J(X,f,E) = J(X,f,E,\{\overline{x}\})$.

PROPOSITION A.7.1.

Avec les hypothèses et notations de A.1.(11)-(14) , soit $\mathcal{Z} = div(u_1)\subset E$ et soit $E' = div(u_2\ldots u_t)$, considéré comme un diviseur de $\mathcal{Z}$. On pose $f - R(f,u,\lambda) = u_1^{A(1)}g$.

Alors, dans un voisinage de x dans $\mathcal{Z}$, on a $\mathcal{J}(Z,g,E') + A(1)gO_Z = u_2^{A(2)}\ldots u_r^{A(r)} J(X,f,E)O_Z$.

Preuve. Pour tout $h\in O_X(X)$, on note h' son image dans $O_{\mathcal{Z}}(\mathcal{Z})$; pour $i\geq 2$, on a donc $(DM_{[i]}^{u,\lambda}h)' = DM_{[i]}^{u',\lambda'}h'$, où $(u',\lambda') = (u'_2,\ldots u'_r , \lambda'_{r+1},\ldots,\lambda'_s)$. De plus, pour tout i , $2\leq i\leq t$, on a $DM_{[i]}^{u,\lambda}f = u_1^{A(1)}DM_{[i]}^{u,\lambda}g$ et, pour tout i , $t+1\leq i\leq s$, $D_{[i]}^{u,\lambda}f = u_1^{A(1)}D_{[i]}^{u,\lambda}g$, et $DM_{[1]}^{u,\lambda}f = u_1^{A(1)}(A(1)g + u_1D_{[1]}^{u,\lambda}g)$. D'où l'on déduit la formule

(1) $(u_1^{-A(1)}DM^{u,\lambda}_{[i]}f)' = A(1)g'$, si $i = 1$

$(u_1^{-A(1)}DM^{u,\lambda}_{[i]}f)' = DM^{u',\lambda'}_{[i]}g'$, si $2\leq i\leq s$

$(u_1^{-A(1)}DM^{u,\lambda}_{[i]}f)' = D^{u',\lambda'}_{[i]}g'$ si $2\leq i\leq s$.

PROPOSITION A.7.2.

Avec les hypothèses et notations de A.7.1. , si $J(X,f,E) = (u_2^{B(2)}\ldots u_r^{B(r)})$ $\mathrm{mod}(u_1)$, $B(2),\ldots,B(r)$ étant des entiers positifs ou nuls , on a :
$g = \gamma u_2^{B(2)+A(2)}\ldots u_t^{B(t)+A(t)}u_{t+1}^{B(t+1)}\ldots u_r^{B(r)}\mathrm{mod}(u_1)$, γ inversible en x ou $[\mathrm{ord}_x(\gamma)=1$ et $\exists i$, $t+1\leq i\leq r$, $D^{u,\lambda}_{[i]}\gamma$ est inversible et $((D^{u,\lambda}_{[i]}f)\ /\ h)O_Z = u_2^{B(2)}\cdot\ldots u_r^{B(r)}O_Z]$.

Preuve.

Posons $M = u_2^{B(2)+A(2)}\ldots u_t^{B(t)+A(t)}u_{t+1}^{B(t+1)}\ldots u_r^{B(r)}$. D'après A.7.1.(1), on a :

(1) $\gamma(Z,g,E')+A(1)gO_Z = MO_Z$

Si $A(1)gO_Z = MO_Z$, on a le résultat annoncé avec γ inversible.

Supposons donc $A(1)gO_Z \neq MO_Z$, alors $\gamma(Z,g',E') = MO_Z$,

donc $\exists D$, $D \in \mathcal{D}(Z,E')$, $Dg' = \varepsilon M'$, ε inversible. Si $A(1) \neq O(p)$, par (1) , on a $A(1)g' \in MO_Z$ et donc

(2) $g' = \gamma' M' , \gamma' \in O_Z$.

Si $A(1) = O(p)$ alors par définition de g, on a $R(u_1^{A(1)}g,u,\lambda) = 0$ et puisque $A(1) = O(p)$ on a $R(g,u,\lambda) = 0$, donc $R(g',u',\lambda') = R(g,u,\lambda)' = 0$ et d'après A.5.(5) on a $g' = \gamma' M'+R(g',u',\lambda')$, on a donc encore (2).

Si γ' est inversible, A.7.2. est établi, supposons donc $\mathrm{ord}_x(\gamma')\geq 1$.

Alors on a :

(3) $Dg' = M'D\gamma' + \gamma' DM' = \varepsilon M'$, où ε est inversible.

Par suite $\mathrm{ord}_x(Dg')<\mathrm{ord}_x(g')$.

Or les $D^{u,\lambda}_{[j]}$, $t+1\leq j\leq r$, sont les seuls éléments de la base de $\mathcal{D}(Z,E')$

qui ne respectent pas l'idéal $\mathfrak{m}_{Z,x}$. En développant D dans cette base, on en tire que l'un des $D^{u,\lambda}_{[i]}g'$, $t+1\leq i\leq r$, engendre $M'O_{Z,x}$ et l'on prend $D = D^{u,\lambda}_{[i]}$.

Je dis que $D\gamma'$ est inversible, ce qui entrainera $\mathrm{ord}_x(\gamma') = 1$, donc A.7.2. En effet, si $D\gamma'$ n'est pas inversible alors $\gamma' DM'O_Z = M'O_Z$, et comme $\mathrm{ord}_x\gamma'\geq 1$, on en tire que M' ne divise pas DM' , donc $B(i) \not\equiv 0(p)$

et $\gamma' = \delta u_i$, où δ est inversible, d'où l'on tire $D\gamma' = \delta + u_i D\delta$ donc $D\gamma'$ inversible, ce qui établit A.7.2. dans ce dernier cas.

B) PROBLEME.

Etant donnés (X,f) comme ci-dessus, avec $\dim(X) = 3$, nous allons montrer qu'il existe un morphisme propre $e : X' \longrightarrow X$, tel que

(i) e est composé d'un nombre fini d'éclatements de centres réguliers ,

(ii) $E' = e^{-1}(V(J(X,f,\phi)))_{red}$ est un d.c.n. de X' ,

(iii) $J(X',f,E') = O_{X'}$.

Alors, d'après [5](1.5) , en tout point x' de X' , il existe un voisinage affine U' de x' , $U'=\mathrm{Spec}(R')$, des éléments $g,u_1,\dots,u_r,\gamma$ de R' et des entiers naturels $a(1),\dots,a(n)$ tels que , dans R' , on a :

(a) $f = g^p + \gamma u^a$

(b) $\mathrm{div}(u_1 \cdot\ldots\cdot u_r) \subset E'$

(c) au moins une des deux conditions suivantes est satisfaite :

(c-1) $a \not\equiv 0\ (p)$ et γ unité,

(c-2) $u_1,\dots,u_r,\gamma$ font partie d'une p-base de R' .

C) MODIFICATION.

On appelle modification une suite $(n,\pi(i) : X(i+1) \to X(i)$, $Y(i)$. $0\leq i\leq n-1$; $f(i) \in O_{X(i)}(X(i))$, $0\leq i\leq n$; $E(i)$, $0\leq i\leq n)$ telle que

(1) les $X(i)$ sont des schémas satisfaisant aux conditions de A.1,

(2) $E(i)$ est un d.c.n. de $X(i)$,

(3) $Y(i)$ est un sous schéma fermé de $X(i)$ à c.n. avec

$E(i)$ et $\pi(i) : X(i+1) \to X(i)$ est l'éclatement de $X(i)$ centré en $Y(i)$,

(4) $Y(i) \subset \mathrm{Sing}(X(i),f(i),E(i))$

(5) $E(i) = [\pi(i-1)^{-1}\ (E(i-1) \cup Y(i-1))]_{red}$, $1 \leq i \leq n$, $E(0) = \phi$,

(6) $f(i) = f(i-1) o \pi(i-1)$, $1 \leq i \leq n$, $f(0) \in O_{X(0)}(X(0))$.

On pose

(7) $e(i) = \pi(i) o \pi(i-1) o \ldots o \pi(0)$, $0 \leq i \leq n-1$.

(8) pour tout $x \in X(i)$, $\nu(x) = \mathrm{ord}_x [J(X(i),f(i),E(i))]$,

(9) $\nu(X(i)) = \sup \{\nu(x) \mid x \in X(i)\}$, $0 \leq i \leq n$.

On dira que l'entier n est la longueur de la modification. Une modification de longueur 0 est tout simplement une paire $(X(0),f(0)) = (X,f)$ où (X,f) satisfait aux conditions de A.1. On appellera modification de (X,f) une modification telle que $(X,f) = (X(0),f(0))$. Enfin, pour prolonger une modification de longueur n en une modification de longueur $n+1$, il suffit de choisir un fermé $Y(n) \subset X(n)$ satisfaisant aux conditions (3) et (4) pour $i = n$, souvent pour alléger les notations, on notera (X',E') au lieu de $X(n+1)$, $E(n+1)$

Par abus de langage on dira souvent "soit $(X(n),f,E(n))$" au lieu de "soit une modification $(n,\pi(i) : X(i+1) \to X(i), Y(i)$, $0 \leq i \leq n-1$, $f(i) \in O_{X(i)}(X(i))$, $0 \leq i \leq n$; $E(i)$, $0 \leq i \leq n)$ avec $f = f(0)$", en particulier cela sous-entendra que n est la longueur de la modification.

L'expression "$x \in X(n)$" sous-entendra qu'on a une modification $(X(n),f,E(n))$ et signifiera que x est un point de $X(n)$.

De plus pour $0 \leq i \leq n$ on notera f au lieu de $f(i)$.

D. LES ECLATEMENTS PERMIS.

DEFINITION D.1.

Soit $(X(n),f,E(n))$ une modification , soit $x(n) \in \mathrm{Sing}(X(n))$, soit $Y(n)$ un sous schéma fermé de $X(n)$. On dit que $Y(n)$ est permis en $x(n)$ si :

(i) $x(n) \in Y(n)$ et si $Y(n)$ est régulier au point $x(n)$,

(ii) $Y(n)$ est à croisements normaux avec $E(n)$ en $x(n)$,

(iii) si P est l'idéal de $Y(n)$ dans $O_{X(n),x(n)}$ et $\mathfrak{m}$ celui du point $x(n)$, on a $\mathrm{ord}_P(J(X(n),f,E(n),Y(n))) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(J(X(n),f,E(n),Y(n)))$, c'est à dire que si η est le point générique de la composante de $Y(n)$ passant par $x(n)$, on a : $\alpha(Y(n),\eta) = \alpha(Y(n),x(n))$,

(iv) $Y(n)\subset\mathrm{Sing}(X(n))$ au voisinage de $x(n)$.

DEFINITION D.2.

Soit $(X(n),f,E(n))$ une modification. Un fermé $Y(n)$ de $X(n)$ est dit permis s'il est permis en tous ses points.

Jusqu'à la fin de D. , on considère un fermé irréductible $Y(n)$ de $X(n)$ dont le point générique est noté η .

D.3 Si $Y(n)$ est permis en $x(n)$, d'après (A.3.(vii)), on a :

$$\nu(x(n))\leq\alpha(Y(n),x(n)) = \alpha(Y(n),\eta)\leq\alpha(x(n))\leq\nu(x(n))+1 .$$

D.4. Si $Y(n)$ est permis en $x(n)$, on a donc trois cas possibles :

(1) $\nu(x(n)) = \alpha(x(n)) = \alpha(Y(n),x(n)) = \alpha(Y(n),\eta)$,

(2) $\alpha(x(n)) = \nu(x(n))+1 = \alpha(Y(n),x(n)) = \alpha(Y(n),\eta)$,

(3) $\nu(x(n)) = \alpha(Y(n),x(n)) = \alpha(Y(n),\eta) = \alpha(x(n))-1$.

D.4.1. Si $Y(n) = \overline{\{x(n)\}}$, on ne peut être dans le cas D.4.(3) .

D.5. On a équivalence entre :

($Y(n)$ est permis en $x(n)$ et on a D.4.(1)) et

($Y(n)$ vérifie D.1.(i)(ii)(iv) et $\alpha(x(n)) = \nu(x(n)) = \alpha(Y(n),\eta)\geq 1$) .

Preuve : il suffit de montrer la réciproque, en fait il suffit de montrer que $Y(n)$ satisfait à D.1(iii) , c'est une conséquence de (A.3.(vii),A.3.2.).

D.6. On a équivalence entre :

($Y(n)$ est permis en $x(n)$ et on a D.4.(2)) et

($Y(n)$ satisfait à D.1.(i)(ii) et $\nu(x(n))+1 = \alpha(x(n)) = \alpha(Y(n),\eta)\geq 1$) .

Preuve : il suffit de montrer la réciproque, en fait il suffit de montrer que $Y(n)$ satisfait à D.1.(iii) et D.1.(iv). D'après (A.3.(vii),A.3.2.) , on a les inégalités : $\alpha(Y(n),\eta)\leq\alpha(Y(n),x(n))\leq\alpha(x(n))$, ici les deux termes extrêmes sont égaux, donc on a deux égalités, D.1.(iii) est vérifié, de plus $\alpha(Y(n),\eta) = \nu(x(n))+1\leq\nu(\eta)+1$, comme $\nu(x(n))\geq 1$ par hypothèse, on a $\nu(\eta)\geq 1$ et donc au voisinage de $x(n)$, $Y(n)\subset\mathrm{Sing}(X(n))$.

D.7. On a équivalence entre :

($Y(n)$ est permis en $x(n)$ et on a D.4.(3)) et

($Y(n)$ satisfait à D.1.(i)(ii)(iv) , $\alpha(Y(n),\eta) = \nu(x(n))$ et si (u,λ) est une p-base de $O_{X(n),x(n)}$ adaptée à $(x(n),Y(n))$ et $E(n)$, $\exists i \in I_3$, $\mathrm{ord}_{x(n)}((D^{u,\lambda}_{[i]}f)/h(x(n))) = \nu(x(n))\geq 1)$.

Montrons d'abord la réciproque : la condition sur $D^{u,\lambda}_{[i]}f$ implique $\alpha(Y(n),x(n))\leq\nu(x(n))$, alors, par (A.3.(vii) et A.3.2.) , on a les inégalités : $\nu(x(n)) = \alpha(Y(n),\eta)\leq\alpha(Y(n),x(n))\leq\nu(x(n))$, qui prouvent D.1.(iii).

Montrons la directe : l'égalité $\nu(x(n))+1 = \alpha(x(n))$ implique : $\mathrm{ord}_{x(n)}((D^{u,\lambda}_{[i]}f)/h(x(n)))\geq\nu(x(n))$, $1\leq i\leq s$, avec inégalité stricte si $r+1\leq i\leq s$, comme $\nu(x(n)) = \alpha(Y(n),x(n)) = \mathrm{ord}_{x(n)}(J(X(n),f,E(n),Y(n)))$, on a égalité pour un $i \in I_3$, i.e. $k+1\leq i\leq r$.

On a $\mathrm{ord}_{x(n)}((D^{u,\lambda}_{[i]}f)/h(x(n)))\geq\nu(x(n))+1$, $r+1\leq i\leq s$, on a donc :

(1) $cl^{\nu}_{\mathfrak{m}}(\mathrm{Dir}(J(X(n),f,E(n),Y(n)) = cl^{\nu}_{\mathfrak{m}}(f_i,i \in I_3)$.

REMARQUE D.8.

La condition :

(1) $\alpha(Y(n),\eta)\geq 2$

entraine la condition D.1.(iv) .

Preuve.

Par (A.3.(vii)) , on a $\nu(\eta)\geq\alpha(Y(n),\eta)-1\geq 1$, donc $\eta \in \mathrm{Sing}(X(n))$, Q.E.D.

REMARQUE D.9.

La condition :

(1) $Y(n)$ est combinatoire (i.e. η est un point de croisement pour $E(n)$ (A.6.1.)) et $\nu(\eta) = \nu(x(n))$, implique que $Y(n)$ est permis en $x(n)$.

Preuve.

On a clairement D.1.(i)(ii), par A.6.1. , on a :

$J(X(n),f,E(n),Y(n)) = J(X(n),f,E(n))$

donc $\alpha(Y(n),\eta) = \nu(\eta)$ et $\alpha(Y(n),x(n)) = \nu(x(n))$,

d'où $\alpha(Y(n),x(n)) = \alpha(Y(n),\eta)$, ce qui prouve D.1.(iii),

comme $x(n) \in \mathrm{Sing}(X(n))$, on a $\nu(x(n))\geq 1$ et donc $\nu(\eta)\geq 1$ ce qui prouve D.1.(iv).

E. LES LOIS DE TRANSFORMATION.

PROPOSITION E.1.

Soit $X(n),f,E(n)$ une modification, soit $Y(n)$ un fermé régulier de $X(n)$, irréductible d'idéal P, de point géénrique η, à c.n. avec $E(n)$ alors si on effectue l'éclatement $\pi(n)$ centré en $Y(n)$, on a, avec les notations de C. et (A.3.1).

$$\mathcal{J}(X(n+1),f,E(n+1)) = \mathcal{J}(X(n),f,E(n),Y(n))O_{X(n+1)} ,$$

$$\mathcal{H}(X(n+1),f,E(n+1)) = \mathcal{H}(X(n),f,E(n))P^{\alpha(Y(n))}O_{X(n+1)} ,$$

$$J(X(n+1),f,E(n+1)) = P^{-\alpha(Y(n))}J(X(n),f,E(n),Y(n))O_{X(n+1)} .$$

REMARQUE E.1.1.

$J(X(n+1),f,E(n+1))$ est le transformé faible d'un idéal qui dépend du centre d'éclatement.

Preuve de 1.

Soit $x(n)$ un point fermé de $Y(n)$, soit U un voisinage affine de $x(n)$ tel que $O_X(U)$ est muni d'une p-base (u,λ) satisfaisant à (A.1(11)(12)(13)(14)) pour $x(n),E(n)$ et $Y(n)$, $x(n)$ point fermé de $Y(n)$. Effectuons $\pi(n)$. Regardons d'abord l'ouvert affine V de $X(n+1)$ au dessus de U où u_{q+1} est l'idéal du diviseur exceptionnel de $\pi(n)$.

E.1.2. On pose : $v_i = u_i$, $1\leq i\leq q$ ou $k+1\leq i\leq r$,

$v = u_{q+1} = v_{q+1}$, $v_j = u_j/v$, $q+2\leq j\leq k$.

(1) $(v,\lambda) = (v_1,\dots,v_r,\lambda_{r+1},\dots,\lambda_s)$ est une p-base de $O_{X(n+1)}(V)$ et on a :

$du_i/u_i = dv_i/v_i$, $1\leq i\leq q$ ou $k+1\leq i\leq r$,

$dv/v = du_{q+1}/u_{q+1}$, $du_j/u_j = dv_j/v_j+dv/v$, $q+2\leq j\leq k$. On en déduit :

(2) $DM^{v,\lambda}_{[i]}f\circ\pi(n) = (DM^{u,\lambda}_{[i]}f)\circ\pi(n)$, $1\leq i\leq q$ ou $k+1\leq i\leq r$,

$DM^{v,\lambda}_{[q+1]}f\circ\pi(n) = (DM^{u,\lambda}_{[q+1]}f + \sum_{q+2\leq j\leq k} DM^{u,\lambda}_{[j]}f)\circ\pi(n)$,

$DM^{v,\lambda}_{[j]}f\circ\pi(n) = (DM^{u,\lambda}_{[j]}f)\circ\pi(n)$, $q+2\leq j\leq k$.

Ce qui donne :

(3) $v_i D^{v,\lambda}_{[i]} f = u_i \; (D^{u,\lambda}_{[i]} f) o\pi(n) = v_i v(D^{u,\lambda}_{[i]} f)$, $t+1 \leq i \leq k$, et donc :

(4) $D^{v,\lambda}_{[i]} f = v(D^{u,\lambda}_{[i]} f) o\pi(n) = (PD^{u,\lambda}_{[i]} f) o\pi(n)$, $t+1 \leq i \leq k$.

La première assertion de la proposition de la proposition découle facilement de (2) et (4) , la deuxième assertion est donnée par la définition du $E(n+1)$-p.g.c.d. (A.2. et A.2.1.) et $E(n+1) = \mathrm{div}(v_1 \ldots v_t)$ et $\mathrm{ord}_p(\mathcal{J}(X(n+1),f,E(n+1)) = \alpha(Y(n)) + \mathrm{ord}_p(J(x(n),f,E(n))$, la dernière assertion est conséquence des deux premières.

Quitte à permuter les u_i , il suffit d'étudier maintenant l'ouvert où $v = u_{t+1}$ est l'idéal du diviseur exceptionnel de $\pi(n)$.

E.1.3. On pose : $v_i = u_i$, $1 \leq i \leq q$ ou $k+1 \leq i \leq r$

$v = u_{t+1} = v_{t+1}$, $v_j = u_j/v$, $q+1 \leq j \leq k$, $j \neq t+1$.

(1) $(v,\lambda) = (v_1,\ldots,v_r,\lambda_{r+1},\ldots,\lambda_s)$ est une p-base de $O_{X(n+1)}(V)$ et on a :

$du_i/u_i = dv_i/v_i$, $1 \leq i \leq q$ ou $k+1 \leq i \leq r$,

$dv/v = du_{t+1}/u_{t+1}$, $du_j/u_j = dv_j/v_j + dv/v$, $q+1 \leq j \leq k$, $j \neq t+1$.

On en déduit :

(2) $DM^{v,\lambda}_{[i]} f o\pi(n) = (DM^{u,\lambda}_{[i]} f) o\pi(n)$, $1 \leq i \leq q$ ou $k+1 \leq i \leq r$,

$DM^{v,\lambda}_{[t+1]} f o\pi(n) = (\overline{\sum_{q+1<j<k}} DM^{u,\lambda}_{[j]} f) o\pi(n)$,

$DM^{v,\lambda}_{[j]} f o\pi(n) = (DM^{u,\lambda}_{[j]} f) o\pi(n)$, $q+1 \leq j \leq k$, $j \neq t+1$.

Ce qui nous donne :

(3) $v_i D^{v,\lambda}_{[i]} f o\pi(n) = u_i \; (D^{u,\lambda}_{[i]} f) o\pi(n) = v_i v \; (D^{u,\lambda}_{[i]} f) o\pi(n)$, $t+2 \leq i \leq k$, et donc :

(4) $D^{v,\lambda}_{[i]} f o\pi(n) = v(D^{u,\lambda}_{[i]} f) o\pi(n)$, $t+2 \leq i \leq k$.

Comme ci-dessus, (2) et (4) impliquent la première assertion de la proposition, la deuxième assertion découlant de la définition du $E(n+1)$-p.g.c.d. (A.2. et A.2.1.) et $E(n+1) = \mathrm{div}(v_1 \ldots v_t v_{t+1})$ et $\mathrm{ord}_p(\mathcal{J}(X(n+1),f,E(n+1)) = \alpha(Y(n)) + \mathrm{ord}_p(J(X(n),f,E(n))$, ce qui prouve aussi la troisième assertion et qui termine la preuve de E.1. .

E.1.4. De E.1.2.(2) et E.1.3.(2), on déduit que, avec les notations de E.1.2. et E.1.3., on a dans les deux cas : $I(X(n+1),f,(v,\lambda))$ est le transformé faible de $I(X(n),F,(u,\lambda))$ (A.6.(2)) et, par un développement sur les p-bases, $R(f,u,\lambda) = R(f,\nu,\lambda)$.

E.1.5. Dans ce paragraphe, nous allons introduire la notion de directrice d'un idéal homogène et l'utiliser pour étudier le transformé faible d'un idéal par éclatement.

NOTATIONS E.1.5.1.

On désigne par k un corps, $\mathcal{J}$ est un idéal homogène de $k[S] = k[U_1,\ldots,U_l]$ l'algèbre des polynômes à l indéterminées sur k, soit $C = \mathrm{Spec}(k[S]/\mathcal{J})$. On supposera toujours $\mathcal{J} \neq 0$ et $\mathcal{J} \neq (1)$ et on posera $\nu = \mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{J})$ où $\mathfrak{m} = (U_1,\ldots,U_l)$.

PROPOSITION, DEFINITION, NOTATION E.1.5.1.1.

Avec les hypothèses et notations de E.1.5.1., il existe un plus petit sous-espace vectoriel S_1 de $S = kU_1+\ldots+kU_l$ tel que :

(1) $\mathcal{J} = (k[S_1]\cap\mathcal{J})k[S]$.

On appelle directrice de $\mathcal{J}$ et on note $\mathrm{Dir}(\mathcal{J})$ le schéma

(2) $\mathrm{Dir}(\mathcal{J}) = \mathrm{Spec}(k[S]/(S_1k[S]))\subset C$.

On pose :

(3) $V\ \mathrm{Dir}(\mathcal{J}) = S_1$.

Preuve.

Voir [6],(1.5.6.) et le paragraphe qui suit.

PROPOSITION E.1.5.1.2.

Avec les hypothèses et notations de E.1.5.1., soit $F \in \mathcal{J}$, F homogène et $\deg(F) = \nu$, alors, $F \in k[S_1]$.

Preuve.

En effet, on a $F = \sum_{1\leq i\leq n} F_iG_i$ avec $F_i \in (k[S_1]\cap\mathcal{J})$, $G_i \in k[S]$, F_i et G_i homogènes, par homogénéité de F et de $\mathcal{J}$, on peut prendre $\deg(F_i)+\deg(G_i) = \deg(F) = \nu$, $1\leq i\leq n$, comme $\deg(F)$ est minimal, on a

$\deg(F_i) \geqslant \deg(F)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, donc $\deg(F_i) = \deg(F)$, $\deg(G_i) = 0$, $G_i \in k$, $1 \leqslant i \leqslant n$, d'où le résultat.

On en déduit les quatre propositions qui suivent où on reprend les hypothèses et notations de E.1.5.1.2.

PROPOSITION E.1.5.1.3.

S'il existe $L \in k[S]$ tel que L divise F , alors $L \in k[S_1]$.

PROPOSITION E.1.5.1.4.

Si $U_1 \in V\ \mathrm{Dir}(J)$ et si $F \in J_\nu$ et si on a $F = \sum_{0 \leqslant j \leqslant \nu} U_1{}^j G_j$, $\deg G_j = \nu - j$, alors $V\ \mathrm{Dir}(G_j) \subset V\ \mathrm{Dir}(J)$.

PROPOSITION E.1.5.1.5.

Soit T un sous-espace vectoriel de S , on a un morphisme surjectif $r : k[S] \to k[S/T]$.

Si $\mathcal{J}$ est engendré par des polynômes homogènes de degré ν de $k[S]$, et si $\mathfrak{J} = r(\mathcal{J}) \neq 0$, alors on a $r[V\ \mathrm{Dir}\ \mathcal{J}] \supset V\ \mathrm{Dir}(\mathfrak{J})$.

PROPOSITION E.1.5.1.6.

Avec les notations de E.1.5.1.5., si on a $T = \langle U_2 \rangle$ et $r(\mathcal{J}) = (U_1^\nu)$,

alors

(i) il existe $a \in k$ tel que $U_1 + aU_2 \in V\ \mathrm{Dir}(\mathcal{J})$,

(ii) si $\langle U_1 + aU_2 \rangle \neq V\ \mathrm{Dir}(\mathcal{J})$ alors $\langle U_1, U_2 \rangle \subset V\ \mathrm{Dir}(\mathcal{J})$,

(iii) si $J \not\subset k[U_1, U_2]$, alors $\dim V\ \mathrm{Dir}(\mathcal{J}) \geqslant 3$.

NOTATIONS E.1.5.2.

Soit R un anneau local régulier de dimension 3 et d'idéal maximal $\mathfrak{m} = x$, on pose $k = R/\mathfrak{m}$, (u_1, u_2, u_3) est un s.r.p. de R , on pose $U_i = in_{\mathfrak{m}}(u_i)$, $1\leq i\leq 3$, on a donc $gr_{\mathfrak{m}}(R) = k[U_1,U_2,U_3]$.

Soit I un idéal non nul de R et $I \neq R$, on pose $\nu = ord_{\mathfrak{m}}(I)\geq 1$.

Pour tout élément $f \in R$, $ord_{\mathfrak{m}}(f)\geq\nu$, on note $cl^{\nu}_{\mathfrak{m}}(f)$ l'image de f dans $\mathfrak{m}^{\nu}/\mathfrak{m}^{\nu+1}$, on note $\mathcal{J} = cl^{\nu}_{\mathfrak{m}}(I)\subset gr_{\mathfrak{m}}(R)$ l'idéal de $gr_{\mathfrak{m}}(R)$ engendré par les $cl^{\nu}_{\mathfrak{m}}(f)$, $f \in I$.

Soit Y un fermé régulier d'idéal P de $X = Spec(R)$ tel que $I\subset P^{\nu}$.

Nous allons effectuer l'éclatement $\pi:X'\longrightarrow X$ de X centré en Y et étudier le transformé faible $(P^{-\nu}I)O_{X'}$ de I .

DEFINITION E.1.5.2.1.

Avec les notations et hypothèses de E.1.5.2. , on appelle directrice de I et on note $Dir(I)$ la directrice $Dir(\mathcal{J})$ de $\mathcal{J}$.

PROPOSITION E.1.5.2.2.

Avec les hypothèses et notations de E.1.5.2. , si $dim(Y) = 2$, alors $I = P^{\nu}$ et $(P^{-\nu}I)O_{X'} = O_{X'}$.

Preuve.

Soit $f \in R$ tel que $P = fR$, alors $I\subset f^{\nu}R$, or , il existe $f' \in I$ tel que $ord_{\mathfrak{m}}(f') = \nu$ donc $f' = \gamma f^{\nu}$ avec γ inversible dans R , donc $I = f'R = P^{\nu}$. De plus π est un isomorphisme puisque Y est un diviseur [6](II.1.1.1.) et donc $P^{-\nu}I = O_{X'} = O_X$.

PROPOSITION E.1.5.2.3.

Avec les hypothèses et notations de E.1.5.2.1. , si $dim(Y) = 1$, on peut choisir (u_1,u_2,u_3) tel que $I(Y) = P = (u_1,u_2)$ et alors :

(i) $V\ dir(I) \subset kU_1\oplus kU_2\subset k[U_1,U_2,U_3] = gr_{\mathfrak{m}} R$,

(ii) $\pi^{-1}(x)$ est la droite projective $Proj(k[U_1,U_2])$,

(iii) si $V\ Dir(I)$ est de dimension 1 , dans $\pi^{-1}(x) = Proj(k[U_1,U_2])$, en tout point x' différent de $Proj(V\ Dir(I))$, $ord_{x'}(P^{-\nu}I) = 0$,

(iv) si $V\ Dir(I)$ est de dimension 2 , en tout point x' au-dessus de x , $ord_{x'}(P^{-\nu}I)<\nu$.

Preuve.

Puisque $I \subset (u_1,u_2)^\nu$, on a $cl^\nu_{\mathfrak{m}}(I) \subset k[U_1,U_2]$, ce qui prouve (i) . On a $X = \mathrm{Spec}(R)$, donc [6](11.1.4.) , $X' = \mathrm{Proj}(R[U_1,U_2]/(u_1U_2-u_2U_1)$, donc $\pi^{-1}(x) = \mathrm{Proj}(k[U_1,U_2])$, ce qui prouve (ii) . Pour prouver (iii) et (iv) , nous utiliserons le lemme qui suit .

<u>LEMME</u> E.1.5.2.4.

Avec les hypothèses et notations de E.1.5.2.3. , soit $v \in P$ tel que $0 \neq cl^1_{\mathfrak{m}}(v) \in V\,\mathrm{Dir}(I)$ et soit $Z = \mathrm{div}(v) \subset X$, alors , si $Z' \subset X'$ est le transformé strict de Z , on a :

(i) $Z' \cap \pi^{-1}(Y)$ est une courbe que π projette isomorphiquement sur Y ,

(ii) si $x' \in \pi^{-1}(x)$ et si $\mathrm{ord}_{x'}(P^{-\nu}IO_{X'}) = \nu$, alors $x' \in Z'$ et $0 \neq cl^1_{x'}(P^{-1}v) \subset V\,\mathrm{Dir}(P^{-\nu}IO_{X',x'})\ \mathrm{mod}(P,u_3)$.

Preuve de E.1.5.2.4. et de E.1.5.2.3. (iii)(iv) .

Quitte à modifier u_1 et u_2 , on peut supposer que $v = u_1$. D'après [6](II.1.4.) , X' est recouvert par deux ouverts affines O_1 et O_2. Dans O_1 , u_1 engendre P , dans O_2 , u_2 engendre P , $P^{-1}u_1O_{X'}(O_1) = (1)$, donc Z' est le complémentaire de O_1 dans X' , c'est la courbe de $O_2 = \mathrm{Spec}(R(u_1/u_2))$ d'idéal $(u_1/u_2,u_2)$, on vérifie que l'inclusion $R \longrightarrow R[u_1/u_2]$ induit un isomorphisme $R/(u_1,u_2) \longrightarrow R[u_1/u_2]/(u_1/u_2,u_2)$ ce qui prouve E.1.5.2.4.(i) . Comme $\mathrm{ord}_P(I) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(I) = \nu$; il existe $f \in I$, $\mathrm{ord}_P(f) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(f) = \nu$ et $f = \sum_{0\leq i\leq\nu} \lambda_i u_1^i u_2^{\nu-i}$, $\lambda_i \in R$, un des λ_i est inversible , $0\leq i\leq\nu$. Alors $f/u_1^\nu \in O_{X'}(O_1)$, donc $\sum_{0\leq i\leq\nu} \lambda_i (u_2/u_1)^{\nu-i} \in P^{-\nu}IO_{X'}(O_1)$.

Tout point fermé y de $O_1 \cap \pi^{-1}(x) = \mathrm{Spec}(R[u_2/u_1]/(u_1,u_3)) = \mathrm{Spec}(k[u_2/u_1])$ est défini par un polynôme irréductible Φ de $k[u_2/u_1]$ et , si on désigne par f' l'image de f/u_1^ν dans $R[u_2/u_1]/(u_1,u_3) = k[u_2/u_1]$, on a $f' = \sum_{0\leq i\leq\nu} \lambda'_i (u_2/u_1)^{\nu-i}$, λ'_i étant l'image de λ_i dans k , $0\leq i\leq\nu$

et on a $\mathrm{ord}_y(f/u_1^\nu) \leq \mathrm{ord}_\Phi(f')$. Si $U_1 = V\ \mathrm{Dir}(I)$, on a $\lambda_i' = 0$ si $i \neq \nu$, donc $f' = \lambda_\nu'$ est inversible , ce qui prouve E.1.5.2.3.(iii) . Si y est non rationnel sur x , alors $\deg(\Phi) \geq 2$ et donc $\mathrm{ord}_y(f/u_1) \leq \mathrm{ord}_\Phi(f') \leq \nu/2$. Ainsi, si $\mathrm{ord}_y(f/u_1^\nu) = \nu$, y est rationnel sur x , $\Phi = \gamma + (u_2/u_1)$, $\gamma \in k$, $f' = \delta\Phi^\nu = \delta(\gamma+(u_2/u_1))^\nu$, $\gamma \in k$, donc $\mathrm{cl}_{\mathfrak{m}}^\nu(f) = \delta(\gamma U_1+U_2)^\nu$.
Comme $U_1 \in V\ \mathrm{Dir}(I)$, il existe $g \in I$, $\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(g) = \nu$, $V\ \mathrm{Dir}(\mathrm{cl}_{\mathfrak{m}}^\nu(g)) \not\ni \gamma U_1+U_2$ donc $\mathrm{ord}_y(g/u_1^\nu) < \nu$. En résumé, si $U_1 \in V\ \mathrm{Dir}(I)$, on a $\mathrm{ord}_y(P^{-\nu}IO_{X'}) < \nu$ pour tout $y \in O_1 \cap \pi^{-1}(x)$. Si $\dim(V\ \mathrm{Dir}(I)) = 2$, on a $U_2 \in V\ \mathrm{Dir}(I)$, donc $\mathrm{ord}_y(P^{-\nu}IO_{X'}) < \nu$ pour tout $y \in O_2 \cap \pi^{-1}(x)$, donc pour tout $y \in \pi^{-1}(x)$.

Ce qui prouve E.1.5.2.3.(iv) .

Prouvons maintenant E.1.5.2.4.(ii) .
Si on a $\mathrm{ord}_{x'}(P^{-\nu}IO_{X'}) = \nu$, on a donc $kU_1 = V\ \mathrm{Dir}(I)$ et x' est le point de paramètres $(u_1/u_2, u_2, u_3)$, si f est un élément d'ordre ν de I , on a $\mathrm{cl}_{\mathfrak{m}}^\nu(f) = \delta U_1^\nu$ $\delta \in k$ et donc $f/u_2^\nu = \delta(u_1/u_2)^\nu \mathrm{mod}(u_2,u_3)$, ce qui prouve E.1.5.2.4.(ii) .

<u>PROPOSITION</u> E.1.5.2.5.

Avec les hypothèses et notations de E.1.5.2.1. , si $\dim(Y) = 0$, alors :

(i) $\pi^{-1}(x)$ est le plan projectif $\mathrm{Proj}(k[U_1,U_2,U_3])$,

(ii) dans $\pi^{-1}(x)$, en tout point y à l'extérieur de $\mathrm{Proj}\ (V\ \mathrm{Dir}(I))$ on a $\mathrm{ord}_y(P^{-\nu}IO_{X'}) < \nu$,

(iii) soit $v \in P$ tel que $0 \neq \mathrm{cl}_{\mathfrak{m}}^1(v) \in V\ \mathrm{Dir}(I)$, si x' est un point fermé de $\pi^{-1}(x)$ tel que $\mathrm{ord}_{x'}(P^{-\nu}IO_{X'}) = \nu$, alors
$0 \neq \mathrm{cl}_{x'}^1(P^{-1}v) \in V\ \mathrm{Dir}(P^{-\nu}IO_{X',x'})\ \mathrm{mod}(\mathrm{in}_{x'}(PO_{X',x'}))$.

De plus, si $\dim(V\ \mathrm{Dir}(I)) = 1$, on a :

(1) $P^{-\nu}IO_{X',x'} = v'^\nu O_{X',x'}\ \mathrm{mod}\ PO_{X',x'}$ où $v' = v/t$, t étant un élément de P tel que $tO_{X',x'} = PO_{X',x'}$.

Preuve.

D'après [6](11.1.4.) , $X' = \mathrm{Proj}(R[U_1,U_2,U_3]/(u_iU_j-u_jU_i),1\leq i,j\leq 3,\ i\neq j))$,

donc $\pi^{-1}(x) = \mathrm{Proj}(k[U_1,U_2,U_3])$, ce qui prouve (i) .

La preuve de (ii) n'est pas du tout triviale, l'hypothèse $\dim(X) = 3$ est essentielle, on trouvera cette preuve et un contre-exemple de (ii) en dimension 4 dans [10](theorem 2. and theorem 3.) .

Quitte à modifier (u_1,u_2,u_3) , on peut supposer que $u_1 = v$, d'après (ii) , $(P^{-1}v)(x') = 0$ et $\dim(V\ \mathrm{Dir}(I)) \leq 2$. Si $\dim(V\ \mathrm{Dir}(I)) = 1$, on peut supposer quitte à permuter u_2 et u_3 , que x' est dans l'ouvert O_2 de X' où u_2 engendre $PO_{X'}$. Pour tout $f \in I$ on pose

$F = F(U_1,U_2,U_3) = cl^{\nu}_{\mathfrak{m}}(f) \in k[U_1,U_2,U_3]$, on a alors :

$f/u_2^{\nu} = F(u_1/u_2,1,u_3/u_2) \bmod (u_2) \subset k[u_1/u_2,u_3/u_2]$,

donc $P^{-\nu}IO_{X',x'} = \mathcal{J}(u_1/u_2,1,u_3/u_2) \bmod (u_2)$, $\mathcal{J} = cl^{\nu}_{\mathfrak{m}}(I)$. Puisque $\dim(V\ \mathrm{Dir}(I)) = 1$ alors $\mathcal{J} = U_1^{\nu}k[U_1,U_2,U_3]$, donc $P^{-\nu}IO_{X',x'} = (u_1/u_2)^{\nu} \bmod (u_2)$, donc $V(\mathrm{Dir}(P^{-\nu}IO_{X',x'})) \supset k(x')in_{x'}(u_1/u_2) \bmod (u_2)$, ce qui prouve (iii) en ce cas.

Si $\dim(V\ \mathrm{Dir}(I)) = 2$, quitte à changer (u_1,u_2,u_3) , on peut supposer que $v = u_1$ et $kU_1+kU_2 = V\ \mathrm{Dir}(I)$, autrement dit , $v_1 = u_1/u_3$, $v_2 = u_2/u_3$, $v_3 = u_3$ est un s.r.p. de $O_{X',x'}$. Puisque $kU_1+kU_2 = V\ \mathrm{Dir}(I)$, pour tout $f \in I$ on a $f = F_{\nu}(U_1,U_2) + F'$, $F' \in \mathfrak{m}^{\nu+1}$, donc

$u_3^{-\nu}f = F_{\nu}(v_1,v_2) + v_3F''$, $F'' \in O_{X',x'}$, donc l'idéal $\mathcal{J}' = cl^{\nu}_{x'}(P^{-\nu}IO_{X',x'})$ est engendré par les éléments $F_{\nu}(V_1,V_2) + V_3cl^{\nu-1}_{x'}(F'')$, donc modulo V_3 , l'idéal $\mathcal{J}'$ est obtenu à partir de $\mathcal{J} = cl^{\nu}_{x}(I)$ par l'isomorphisme

$k[U_1,U_2] \longrightarrow k[V_1,V_2]$, $U_i \longrightarrow V_i$, $i = 1$ ou 2 .

On en déduit que $V\ \mathrm{Dir}(\mathcal{J}') \bmod (V_3) \supset kV_1 + kV_2$, ce qui finit la preuve de (iii).

E.1.5.3. Dans le paragraphe suivant E.2. , nous allons étudier le comportement de $\nu(.)$ lors d'un éclatement permis. Pour chaque cas D.4.(1)(2)(3) , on appliquera E.1.5. à un idéal $I \subset O_{X(n),x(n)}$ tel que $\mathrm{ord}_{x(n)}(I) = \nu$ et tel que le transformé faible de I est contenu dans $J(X(n+1),f,E(n+1))$.

PROPOSITION E.2.

Soit $(X(n),f,E(n))$ une modification, soit $Y(n)$ un fermé de $X(n)$ permis en $x(n) \in X(n)$, soit $\pi(n)$ l'éclatement centré en $Y(n)$, alors, en tout point $x(n+1)$ au dessus de $x(n)$, $\nu(x(n+1)) \leq \nu(x(n))$.

NOTATION E.2.1.

Soit $(X(n),f,E(n))$ une modification, soit $x(n) \in X(n)$ U un voisinage affine de $x(n)$ dans X et (u,λ) une p-base de $O_X(U)$ adaptée en $x(n)$. On note :

(1) $f_i = (DM^{u,\lambda}_{[i]}f)/h(x(n))$, $1 \leq i \leq t$, $f_i = (D^{u,\lambda}_{[i]}f)/h(x(n))$, $t+1 \leq i \leq s$.

On pose

(2) $\mathrm{Dir}(x(n)) = \mathrm{Dir}(\mathrm{cl}^{\nu}_{\mathfrak{m}} J(X(n),f,E(n),\overline{\{x(n)\}})$, si $\alpha(x(n)) = \nu(x(n))$

(3) $\mathrm{Dir}(x(n)) = \mathrm{Dir}(\mathrm{cl}^{\nu}_{\mathfrak{m}} J(X(n),f,E(n)))$ si $\alpha(x(n)) = \nu(x(n))+1$.

E.2.2. Prouvons E.2. dans le cas D.4.(1). On a donc :

(1) $\nu(x(n)) = \alpha(x(n)) = \alpha(Y(n))$, cet entier est noté ν

On note :

(2) $\mathrm{Dir}(x(n),Y(n)) = \mathrm{Dir}(\mathrm{cl}^{\nu}_{\mathfrak{m}}(J(X(n),f,E(n),Y(n)))$ (E.1.5.1.1.),

(3) $\mathrm{Dir}(x(n)) = \mathrm{Dir}(x(n), \overline{\{x(n)\}}) = \mathrm{Dir}(\mathrm{cl}^{\nu}_{\mathfrak{m}}(J(X(n),f,E(n), \overline{\{x(n)\}})$.

Si (u,λ) est une p-base de $O_{X(n)}(U)$ adaptée en $x(n)$, on a :

(4) $\mathrm{Dir}(x(n),Y(n)) \supset \mathrm{Dir}(x(n)) = \mathrm{Dir}(\mathrm{cl}^{\nu}_{\mathfrak{m}}(I(X(n),f,(u,\lambda))))$.

Preuve.

Il suffit de remarquer que l'on a les inclusions :

$\mathrm{cl}^{\nu}_{\mathfrak{m}}(J(X(n),f,E(n),Y(n)) = \mathrm{cl}^{\nu}_{\mathfrak{m}}(f_i, 1 \leq i \leq t$ ou $k+1 \leq i \leq s)$

$\mathrm{cl}^{\nu}_{\mathfrak{m}}(J(X(n),f,E(n),\overline{\{x(n)\}}) = \mathrm{cl}^{\nu}_{\mathfrak{m}}(f_i, 1 \leq i \leq t$ ou $r+1 \leq i \leq s) = \mathrm{cl}^{\nu}_{\mathfrak{m}}(I(X(n),f,(u,\lambda))$.

Comme $1 \leq q \leq t \leq k \leq r \leq s$, le résultat est clair.

D'après (E.1) le transformé faible de $J(X(n),f,E(n),Y(n))$ est $J(X(n+1),f,E(n+1))$. De E.1.5.2.2. et E.1.5.2.3. et E.1.5.2.4., on déduit :

(5) si $\dim(X(n)) = 3$ et $\dim(Y(n)) = 2$, en tout point $x(n+1) \in \pi(n)^{-1}(x(n))$, $\nu(x(n+1)) = 0$,

(6) si $\dim(X(n)) = 3$ et $\dim(Y(n)) = 1$, $Y(n) = V(u_1,u_2)$, alors à l'extérieur de $\mathrm{Proj}(V\ \mathrm{Dir}(x(n),Y(n)) \subset \mathrm{Proj}(V\ \mathrm{Dir}(x(n))) \subset \mathrm{Proj}(k(x(n))[U_1,U_2]) = \pi(n)^{-1}(x(n))$,

$\nu(.)$ a strictement baissé, si $\dim(V\ \mathrm{Dir}(x(n))) = 1$,
à l'extérieur de $\mathrm{Proj}(V\ \mathrm{Dir}(x(n)))$, $\nu(.)$ est nul,

(7) si $\dim(X(n)) = 3$ et $Y(n) = \{x(n)\}$, alors , à l'extérieur de $\mathrm{Proj}(V\ \mathrm{Dir}(x(n))) \subset \mathrm{Proj}(k(x(n))[U_1,U_2,U_3]) = \pi(n)^{-1}(x(n))$, $\nu(.)$ a strictement baissé et même, si $\dim(V\ \mathrm{Dir}(x(n))) = 1$, en dehors de $\mathrm{Proj}(V\ \mathrm{Dir}(x(n)))$, $\nu(.)$ est nul .

En appliquant [6](II.3.8.) à $J(X(n),f,E(n),Y(n))$, on voit que :

(8) si $\dim(X(n)) \geq 4$ alors en tout point $x(n+1)$ au dessus de $x(n)$, $\nu(x(n+1)) \leq \nu(x(n))$.

E.2.3. Traitons le cas D.4.(2) . On a :

(1) $\alpha(x(n)) = \nu(x(n))+1 = \alpha(Y(n),x(n)) = \alpha(Y(n),\eta)$, cet entier est noté $\nu+1$.

On pose :

(2) $\mathrm{Dir}(x(n),Y(n)) = \mathrm{Dir}(f_i, t+1 \leq i \leq k)$, (A.1.(13)) ,

(3) $\mathrm{Dir}(x(n)) = \mathrm{Dir}(x(n), \{x(n)\}) = \mathrm{Dir}(f_i, t+1 \leq i \leq r)$.

On remarque que l'hypothèse $\mathrm{ord}_{x(n)}(J(X(n),f,E(n),Y(n)) = \nu+1$ implique $\mathrm{ord}_{x(n)}(f_i, k+1 \leq i \leq r) \geq \nu+1$ et $\mathrm{ord}_{x(n)}(f_i, 1 \leq i \leq t) \geq \nu+1$, on en déduit :

(4) $\mathrm{Dir}(x(n)) = \mathrm{Dir}(x(n),Y(n)) = \mathrm{Dir}(J(X(n),f,E(n))) = \mathrm{Dir}(f_i, t+1 \leq i \leq k)$

En appliquant E.1.5.2.2. , E.1.5.2.3. et E.1.5.2.4. à $(f_i, t+1 \leq i \leq k)$ dont le transformé faible est clairement inclus dans $J(X(n+1),f,E(n+1))$, on a :

(5) si $\dim(X(n)) = 3$ et $\dim(Y(n)) = 2$, en tout point $x(n+1) \in \pi(n)^{-1}(x(n))$ $\nu(x(n+1)) = 0$,

(6) si $\dim(X(n)) = 3$ et $\dim(Y(n)) = 1$, $Y(n) = V(u_1,u_2)$, alors à l'extérieur de $\mathrm{Proj}(V\ \mathrm{Dir}(x(n))) \subset \mathrm{Proj}(k(x(n))[U_1,U_2]) = \pi(n)^{-1}(x(n))$, $\nu(.)$ a strictement baissé ,

(7) si $\dim(X(n)) = 3$ et $Y(n) = \{x(n)\}$, alors , à l'extérieur de $\mathrm{Proj}(V\ \mathrm{Dir}(x(n)) \subset \mathrm{Proj}(k(x(n))[U_1,U_2,U_3]) = \pi(n)^{-1}(x(n))$, $\nu(.)$ a strictement baissé et même, si $\dim(V\ \mathrm{Dir}(x(n))) = 1$, en dehors de

$Proj(V\ Dir(x(n)))$, $\nu(.)$ est nul.

En appliquant [6](II.3.8) à $(f_i, t+1 \leqslant i \leqslant k)$, on a :

(8) Si $\dim(X(n)) \geqslant 4$ alors en tout point $x(n+1)$ au dessus de $x(n)$, $\nu(x(n+1)) \leqslant \nu(x(n))$.

E.2.4. Traitons le cas D.4.(3) . On a donc :

(1) $\nu(x(n)) = \alpha(Y(n), x(n)) = \alpha(Y(n), \eta) = \alpha(x(n)) - 1$, cet entier est noté ν .

D'après D.4.1. , $\{x(n)\} \neq Y(n)$ et , d'après D.7.(1) :

(2) $cl^{\nu}_{\mathfrak{m}}(J(X(n), f, E(n), Y(n)) = cl^{\nu}_{\mathfrak{m}}(f_i, k+1 \leqslant i \leqslant r)$,

on pose :

(3) $Dir(x(n), Y(n)) = Dir(J(X(n), f, E(n), Y(n)) = Dir(f_i, k+1 \leqslant i \leqslant r)$.

En appliquant E.1.5.2.2. et E.1.5.2.4. à $J(X(n), f, E(n), Y(n))$, on a :

(4) si $\dim(X(n)) = 3$ et $\dim(Y(n)) = 2$, en tout point $x(n+1) \in \pi(n)^{-1}(x(n))$ $\nu(x(n+1) = 0$,

(5) si $\dim(X(n)) = 3$ et $\dim(Y(n)) = 1$, $Y(n) = V(u_1, u_2)$, alors en dehors de $Proj(V(Dir(x(n), Y(n)))) \subset Proj(k(x(n))[U_1, U_2]) = \pi(n)^{-1}(x(n))$, $\nu(.)$ a strictement baissé.

En appliquant [6(II.3.8.)] à $J(X(n), f, E(n), Y(n))$, on a :

(8) si $\dim(X(n)) \geqslant 4$ alors en tout point $x(n+1)$ au dessus de $x(n)$, $\nu(x(n+1) \leqslant \nu(x(n))$.

DEFINITION E.2.5.

Soit $(X(n), f, E(n))$ une modification que l'on prolonge par $\pi(n+i) : X(n+i+1) \to X(n+i)$, $t \geqslant i \geqslant 0$. Soit $x \in X(n)$. Un point ν-proche de x est un point $x' \in X(n+i+1)$ se projetant sur x et tel que $\nu(x') = \nu(x)$.

E.2.5.1. Bien sûr, si les $Y(n+i)$ ne se projettent pas sur x , $\pi(n+t) \circ \ldots \circ \pi(n)$ est un isomorphisme. Par suite il y a au dessus de x un seul point $x' \in X(n+i+1)$ et x' est ν- proche de x .

DEFINITION E.3.

Avec les hypothèses de E.2. on pose $v(x(n)) = \dim_{k(x(n))}(V\ Dir(x(n)))$.

DEFINITION E.4.

Soit $x(n)$ un point de $X(n)$ et J un idéal de $O_{X(n),x}$. On note $e(J)$ le plus petit entier k tel qu'il existe une p-base (u,λ) adaptée en $x(n)$ avec

$$V\ \mathrm{Dir}(J) \subset \langle U_1,U_2,\dots,U_k\rangle .$$

On pose

$e(x) = e(J(X(n),f,E(n)\ ,\ \{x\}\ )$ si $\alpha(x) = \nu(x)$

$e(x) = e(J(X(n),f,E(n))$ si $\alpha(x) = \nu(x)+1$.

On dit que $e(x)$ est l'encombrement de $(X(n),f)$ au point x .

Cette notion a été introduite par S.S. ABHYANKAR [1] .

PROPOSITION E.4.1.

Soit $x(n)$ un point de $X(n)$ avec $\alpha(x(n)) = \nu(x(n))$, soit (u,λ) une p-base adaptée en $x(n)$, on note $k(x(n))$ le corps résiduel de $x(n)$, soit k un entier , $k\leq r$, $r = \dim(O_{X(n),x(n)})$, on pose $F = cl^{\nu}(f')$, avec $f = h(x(n))f'+R(f,u,\lambda)$, cf. A.5.(12) , alors on a l'équivalence :

$V\ \mathrm{Dir}(x(n)) \subset \langle U_1,\dots,U_k\rangle \Leftrightarrow F \in k(x(n))[U_1,\dots,U_k]$.

On observera que $V\ \mathrm{Dir}(x(n))$ peut-être différent de $V\ \mathrm{Dir}(F)$, voir l'exemple qui suit en E.5.1(iii) .

Preuve. On est dans le cas (D.4.(1) , E.2.2.). On écrit :

$f' = \sum{}' \mu_a^{p} u^a + g_{\nu+1}$, $\sum{}'$ désignant la sommation sur les multi-indices $a = (a(1),\dots,a(S))$ avec $a(1)+\dots+a(r) = \nu$, μ_a^{p} inversible ou nul , enfin $\mathrm{ord}(g_{\nu+1})\geq\nu+1$.

Observons que

$\forall i$, $1\leq i\leq s$, $DM^{u,\lambda}_{[i]}(h(x(n))\mu_a u^a)) = \rho(a,i)\ h(x(n))\ u^a$

et pour tout multi-indice a tel que μ_a est inversible , $\exists i$, $1\leq i\leq s$, tel que $\rho(a,i)$ soit inversible. En appliquant E.1.5.1.2. aux $(DM^{u,\lambda}_{[i]}(h(x(n))/f)/h(x(n))$, on a la conclusion.

EXEMPLE E.5.

Nous allons étudier le cas où $v(x(n)) = 1$, $\alpha(x(n)) = \nu(x(n))$, ce cas est parfaitement décrit par la proposition suivante que nous n'hésitons pas à établir sans hypothèse sur la dimension de $X(n)$.

PROPOSITION E.5.1.

Soit $x(n)$ un point de $\mathrm{Sing}(X(n))$ tel que $\alpha(x(n)) = \nu(x(n)) = \nu$, soit U un voisinage affine de $x(n)$ et soit (u,λ) une p-base de $O_{X(n)}(U)$ adaptée en $x(n)$, on a :

$gr_{x(n)}(O_{X(n),x(n)}) = k(x(n))[U_1,U_2,\dots,U_r]$,

$f = h(x(n))f'+R(f,u,\lambda)$, $h(x(n)) = \prod_{i\in\Lambda} u_i^{A(i)}$, $\Lambda = \{i, 1\leq i\leq r$, $\mathrm{div}(u_i)\subset E(n)\}$

(A.5.(10)), $F = cl^{\nu}(f') \in k(x(n))[U_1,\dots,U_r]$.

On suppose de plus que $V\ \mathrm{Dir}(x(n))$ est de dimension 1, et que $L \in k(x(n))[U_1,\dots,U_r]$ est une base de $V\ \mathrm{Dir}(x(n)) = V\ \mathrm{Dir}(cl^{\nu}(I(X(n),f,(u,\lambda)))$ (E.2.2.(4.)), alors :

(i) si L est proportionnelle à un U_i, $1\leq i\leq r$ alors $F = cL^{\nu}$, $c \in k(x(n))^*$,

(ii) si $\nu = 0(p)$, alors $F = cL^{\nu}$, $c \in k(x(n))^*$,

(ii') si $\mathrm{ord}_{x(n)}(h(x(n)))+\alpha(x(n))\neq 0(p)$, on est dans le cas (ii) ou (i),

(iii) si $\nu \neq 0(p)$ et si on n'a pas (i), alors, quitte à réindexer les u_i, $1\leq i\leq r$, et à les multiplier par des inversibles, on a :

$L = U_1+U_2$, $\mathrm{div}(u_1u_2)\subset E(n)$, et pour $3\leq i\leq r$ $\mathrm{div}(u_i)\not\subset E(n)$ ou $A(i) = 0(p)$,

(A.5.(10)). $\forall m \in \mathbb{N}$, on note $\hat{m}$ le représentant de $m\ \mathrm{mod}(p)$ dans $[0,p-1]$, alors $\widehat{A(1)}+\hat{\nu}<p$, $\widehat{A(2)}+\hat{\nu}<p$, $\widehat{A(1)}+\widehat{A(2)}+\hat{\nu} = p$, $\widehat{A(1)}\widehat{A(2)} \neq 0$ et on a :

$F = c\sum_{0\leq j\leq\nu}\binom{\nu}{j}(1/(A(1)+j))U_1^jU_2^{\nu-j}$, $c \in k(x(n))^p$.

On montrera que $\widehat{A(1)}+\hat{\nu}<p \Rightarrow [(A(1)+j = 0(p) \Rightarrow \binom{\nu}{j} = 0(p))]$, pour donner un sens à la formule précédente, on convient que $\binom{\nu}{j}(1/(A(1)+j)) = 0$ si $\binom{\nu}{j} = 0(p)$.

Preuve.

On remarque que le système $(u,\lambda) = (U_1,\dots,U_r,\lambda'_i, r+1\leq i\leq s)$, $\lambda'_i = in_{x(n)}(\lambda_i)$, est une p-base de $k(x(n))[U_1,\dots,U_r]$ et, si on note

$\alpha'(x(n)) = \alpha(x(n))+\mathrm{ord}_{x(n)}(h(x((n)))$ et

$H(x(n)) = cl^{\nu}\ (h(x(n))) \in k(x(n))[U_1,\dots,U_r]$, on a :

(1) $DM^{U,\lambda}_{[i]}(H(x(n))F) = cl^{\alpha'(x(n))}(DM^{u,\lambda}_{[i]}f)$, $1\leq i\leq s$.

On remarque aussi que l'on est forcément dans un des trois cas (i) , (ii) ou (iii) et donc le cas $v(x(n)) = 1$ est bien décrit par la proposition.

Preuve de (i) .

Si $L = U_i$, $\forall j$, $1\leq j\leq s$, $DM^{U,\lambda}_{[j]}(H(x(n))F) = cl^{\nu}\ (DM^{u,\lambda}_{[j]}f) = c(j)H(x(n))U_i^{\nu}$,

en appliquant (A.5.(5)(7)(10)) à $H(x(n))F$ et en remarquant que $R(H(x(n))F,U,\lambda) = 0$, on en déduit que $H(x(n))U_i^{\nu}$ divise $H(x(n))F$, donc $F = cU_i^{\nu}$, comme $\deg(F) = \nu$, on a $c \in k(x(n))^*$.

Preuve de (ii) .

Soit i , $1\leq i\leq r$, tel que $\deg_{U_i}(L) = 1$, soit $c \in k(x(n))$ tel que

$\deg_{U_i}(F-cL^{\nu})<\nu$, alors $\deg_{U_i}((DM^{U,\lambda}_{[j]}[(F-cL^{\nu})\ H(x(n))]/H(x(n)))<\nu$, $1\leq j\leq s$,

d'autre part, on a d'après (1) :

$(DM^{U,\lambda}_{[j]}(H(x(n))F)/H(x(n)) = a(j)L^{\nu}$, $a(j) \in k(x(n))$, $1\leq j\leq s$ et, comme $\nu = O(p)$,

$(DM^{U,\lambda}_{[j]}(H(x(n))cL^{\nu})/H(x(n)) = c(j)L^{\nu}$, $1\leq j\leq s$, $c(j) = cA(j)$ pour $1\leq j\leq r$,

$c(j) = DM^{U,\lambda}_{[j]}(c)$ pour $r+1\leq j\leq s$,$c(j) \in k(x(n))$, donc

$(DM^{U,\lambda}_{[j]}((F-cL^{\nu})H(x(n)))/H(x(n)) = (a(j)-c(j))L^{\nu}$, $\deg_{U_i}((a(j)-c(j))L^{\nu})<\nu$,

donc $a(j) = c(j)$, $1\leq j\leq s$, donc $(F-cL^{\nu})H(x(n)) \in (k(x(n))[U_1,\dots,U_r])^p$.

Si $H(x(n))$ n'est pas une puissance p-ème, alors $\exists i$, $1\leq i\leq r$, $A(i) \neq O(p)$, $\mathrm{div}(u_i)\subset E(n)$, donc $\nu = O(p)$ implique que $R(cH(x(n))L^{\nu},U,\lambda) = 0$, comme $R(FH(x(n)),U,\lambda) = 0$ on en déduit $FH(x(n)) = cH(x(n))L^{\nu}$. Si $H(x(n))$ est une puissance p-ème, alors en posant $c' = c-R(c,U,\lambda)$, on a $R(c'H(x(n))L^{\nu},U,\lambda) = 0$, on a $(F-c'L^{\nu})H(x(n)) \in (k(x(n))[U_1,\dots,U_r])^p$ et donc $F = c'L^{\nu}$.

Preuve de (ii') .

Par Euler, on a : $\sum_{1\leq i\leq r} DM^{U,\lambda}_{[i]}H(x(n))F = \alpha'(x(n))H(x(n))F = cH(x(n))L^{\nu}$,

$c \in k(x(n))$, or $\alpha'(x(n)) = \alpha(x(n))+\mathrm{ord}_{x(n)}(h(x(n))) \neq O(p)$, donc

$F = c'L^\nu$ avec $c' = c/\alpha'(x(n)) \in k(x(n))$. Si $\nu = 0(p)$, on est dans le cas (ii), si $\nu \not\equiv 0(p)$, on note $L = a(1)U_1+\ldots+a(r)U_r$, on a :

$DM^{U,\lambda}_{[i]}(H(x(n))F) = c(i)H(x(n))L^\nu = c'H(x(n))(A(i)L+a(i)U_i)L^{\nu-1}$, $1\leq i\leq r$.

Or il existe un i , $1\leq i\leq r$, tel que $a(i) \not\equiv 0$ et L est proportionnel à $A(i)L+a(i)U_i$, donc L est proportionnel à U_i , on est dans le cas (i) .

Preuve de (iii) .

Quitte à réindexer les u_i , $1\leq i\leq r$, et à les multiplier par des inversibles on peut supposer : $L = U_1+\ldots+U_m$, $2\leq m\leq r$. On pose :

$F_i = (DM^{U,\lambda}_{[i]}(H(x(n))F))/H(x(n)) = c(i)L^\nu$, $1\leq i\leq s$, notons $a(j)$ le coefficient de U_j^ν dans l'expression de F . Le coefficient de U_j^ν dans F_i est $(A(i)+\delta_{ij}\nu)a(j)$, $1\leq i\leq r$, $1\leq j\leq r$. Supposons $3\leq m$ et écrivons que F_1,F_2 et F_3 sont proportionnels, les coefficients de U_1^ν , U_2^ν , U_3^ν sont proportionnels, les triplets suivants sont donc colinéaires :

$((A(1)+\nu)a(1),A(1)a(2),A(1)a(3)),(A(2)a(1),(A(2)+\nu)a(2),A(2)a(3))$,

$(A(3)a(1),A(3)a(2),(A(3)+\nu)a(3))$, bien sûr , $a(1)a(2)a(3) \not\equiv 0$, sinon les F_i n'auraient pas de terme en U_j^ν , $j = 1$, 2 ou 3 , $1\leq i\leq s$, en comparant le premier et le troisième triplet, on en déduit $A(1)+\nu = A(1)\bmod(p)$ ou $(A(3) = 0(p)$ et $A(3)+\nu = 0(p))$, donc $\nu = 0(p)$, ce qui contredit nos hypothèses , donc $m = 2$.

En comparant F_1 et F_2 , on voit que $((A(1)+\nu)a(1),A(1)a(2))$ et $(A(2)a(1),(A(2)+\nu)a(2))$ sont proportionnels , en calculant leur déterminant , on obtient :

(2) $A(1)+A(2)+\nu = 0(p)$

D'autre part, on a $A(1)+\nu \not\equiv 0(p)$, sinon on aurait $\deg_{U_1}(F_1)<\nu$, donc $F_1 = 0$ et donc $A(1) = 0$, ce qui donne $\nu = 0(p)$ qui est absurde. De même , on a $A(2)+\nu \not\equiv 0(p)$ et (2) prouve alors $A(1)A(2) \not\equiv 0(p)$, on a donc :

(3) $A(1)+\nu \not\equiv 0(p)$, $A(1) \not\equiv 0(p)$, $A(2)+\nu \not\equiv 0(p)$, $A(2) \not\equiv 0(p)$, $F_1 \not\equiv 0$, $F_2 \not\equiv 0$.

Soit $j \in N$, $0\leq j\leq \nu$, on pose les développements p-adiques :

$\nu = \nu_0+\nu_1 p+\ldots.+\nu_m p^m$, $j = j_0+j_1 p+\ldots+j_m p^m$, $\nu_o = \bar{\nu}$, $j_0 = \bar{j}$, $0\leq \nu_i \leq p-1$,

$0\leq j_i\leq p-1$, $0\leq i\leq m$, on a :

$(X+Y)^{\nu} = (X+Y)^{\nu_o}(X^p+Y^p)^{\nu_1}\ldots(X^{p^m}+Y^{p^m})^{\nu_m}$ et donc :

(4) $\binom{\nu}{j} = \binom{\nu_o}{j_o}\binom{\nu_1}{j_1}\ldots\binom{\nu_m}{j_m}$ mod(p) .

Pour tout j , $0\leq j\leq \hat{\nu}<p$, on a $j = \hat{j}$, $\binom{\nu}{j} = \binom{\hat{\nu}}{\hat{j}} = (\hat{\nu}!/\hat{j}!(\hat{\nu}-\hat{j})!) \not\equiv 0(p)$.

D'après E.4.1. , on a $F = \sum_{0\leq j\leq \nu}\mu(j)U_1^jU_2^{\nu-j}$, $\mu(j) \in k(x(n))$,

on a $F_1 = (A(1)+\nu)\mu(\nu)(U_1+U_2)^{\nu}$ qui est non nul par (3) , donc $\forall j$,

$0\leq j\leq \hat{\nu}$, $\mu(j)(A(1)+j) = \mu(\nu)\binom{\nu}{j}(A(1)+\nu) \not\equiv 0(p)$,

donc $\forall j$, $0\leq j\leq \hat{\nu}$, $A(1)+j=0(p)$, donc $\widehat{A(1)}+\hat{\nu}<p$, en raisonnant de la même façon avec F_2 , on obtient $\widehat{A(2)}+\hat{\nu}<p$; (2) et (3) nous donnent :

(5) $0<\widehat{A(1)}+\hat{\nu}<p$, $0<\widehat{A(2)}+\hat{\nu}<p$, $\widehat{A(1)}+\widehat{A(2)}+\hat{\nu} = p$.

De plus, puisque $\hat{\nu} = \nu_0$, $j_0 = \hat{j}$, (4) implique :

(6) $\hat{\nu}<\hat{j} \Longrightarrow \binom{\nu}{j} = 0(p)$.

Si $A(1)+j = 0(p)$ on a $\widehat{A(1)}+\hat{j} = p$; d'après (5) on a $\hat{\nu}<\hat{j}$ et donc $\binom{\nu}{j}= 0(p)$, par suite :

(7) $A(1)+j = 0(p) \Longrightarrow \binom{\nu}{j}= 0(p)$.

Ce qui justifie la convention donnée dans (iii) .

On a $H(x(n))F = H(x(n))\sum_{0\leq j\leq \nu}\mu(j)U_1^jU_2^{\nu-j} = \sum_{0\leq j\leq \nu}\mu(j)U_1^{A(1)+j}U_2^{A(2)+\nu-j}U_3^{A(3)}\ldots U_r^{A(r)}$,

$\mu(j) \in k(x(n))$ (E.4.1.) . On a :

(8) $H(x(n))F_1 = H(x(n))\mu(\nu)(U_1+U_2)^{\nu}(A(1)+\nu)$,

$F_1 = \mu(\nu)(A(1)+\nu)(\sum_{0\leq j\leq \nu}\binom{\nu}{j}U_1^jU_2^{\nu-j}) = \sum_{0\leq j\leq \nu}\mu(j)(A(1)+j)U_1^jU_2^{\nu-j}$.

De même :

(9) $F_2 = \mu(\nu)A(2)(\sum_{0\leq j\leq \nu}\binom{\nu}{j}U_1^jU_2^{\nu-j}) = \sum_{0\leq j\leq \nu}\mu(j)(A(2)+\nu-j)U_1^jU_2^{\nu-j}$,

(10) $F_i = \mu(\nu)A(i)(\sum_{0\leq j\leq \nu}\binom{\nu}{j}U_1^jU_2^{\nu-j}) = \sum_{0\leq j\leq \nu}\mu(j)A(i)U_1^jU_2^{\nu-j}$, $3\leq i\leq r$, en

convenant $A(i) = 0$ si $div(u_i)\not\subset E(n)$,

(11) $F_i = (D^{U,\lambda}_{[i]}\mu(\nu))(\sum_{0\leq j\leq \nu}\binom{\nu}{j}U_1^jU_2^{\nu-j}) = \sum_{0\leq j\leq \nu}(D^{U,\lambda}_{[i]}\mu(j))U_1^jU_2^{\nu-j}$, $r+1\leq i\leq s$.

Si $\binom{\nu}{j} = 0(p)$, alors $(A(1)+j)\mu(j) = (A(2)+\nu-j)\mu(j) = 0$, $A(i)\mu(j) = 0$,

$3\leq i\leq r$, $D^{U,\lambda}_{[i]}\mu(j) = 0$, $r+1\leq i\leq s$; si $\mu(j) \not\equiv 0$, le monôme $\mu(j)U_1^{A(1)+j}U_2^{A(2)+\nu-j}U_3^{A(3)}\ldots U_r^{A(r)}$ de $H(x(n)F$ est une puissance p-ème , ce qui est impossible , car $R(H(x(n))F,U,\lambda')=0$, donc :

(12) $\binom{\nu}{j}=0(p)\Rightarrow\mu(j)=0$.

Si $\binom{\nu}{j}\neq 0(p)$, alors $A(1)+j\neq 0(p)$, d'après (7) ; d'après (8) , on a :

$\mu(j)=\mu(\nu)\binom{\nu}{j}(1/(A(1)+j))$; d'après (12) , on a avec la convention de (iii) :

(13) $F=\mu(\nu)\sum_{0\leqslant j\leqslant\nu}\binom{\nu}{j}(1/(A(1)+j)U_1^jU_2^{\nu-j}$.

Nous allons montrer, en convenant $A(i)=0$ si $\mathrm{div}(u_i)\not\subset E(n)$:

(14) $A(i)=0(p)$, $3\leqslant i\leqslant r$.

D'après (10) , on a $\mu(\nu)A(i)\binom{\nu}{1}=\mu(1)A(i)=\mu(\nu)\binom{\nu}{1}A(i)/(A(1)+1)$, donc $\nu\mu(\nu)A(i)A(1)=0(p)$, donc $A(i)=0(p)$.

De même, d'après (11) , pour $r+1\leqslant i\leqslant s$ et $0\leqslant j\leqslant\nu$, on a

$D_{[i]}^{U,\lambda}(\mu(\nu))\binom{\nu}{1}=D_{[i]}^{U,\lambda}\mu(j)=\binom{\nu}{1}(D_{[i]}^{U,\lambda}\mu(\nu))/(A(1)+1)$, donc $D_{[i]}^{U,\lambda}(\mu(\nu))A(1)\binom{\nu}{1}=0$, $r+1\leqslant i\leqslant s$, on en déduit :

(15) $\mu(\nu)\in k(x(n))^p$.

Nous avons prouvé (iii). Maintenant, on peut remarquer que, si en un point fermé $x(n)\in \mathrm{Sing}(X(n))$, on a une p-base (u,λ) satisfaisant à (A.1.(11)-(14)) et si on a les conditions de (iii), on a :

$F_1=-F_2=c(U_1+U_2)^\nu$, $F_i=0$, $3\leqslant i\leqslant s$. Donc ce cas peut se présenter effectivement, on remarque cependant que (3) et (4) impliquent $p\geqslant 3$.

On a donc prouvé :

<u>COROLLAIRE</u> E.5.2

Avec les hypothèses de E.7.1. , si $p=2$, le cas (iii) ne peut pas se produire.

<u>COROLLAIRE</u> E.5.3.

Sous les hypothèses de E.5.1., si on est dans le cas (iii), alors si on pose $\nu=\hat{\nu}+kp$ avec $0<\hat{\nu}<p$, on a :

$$F=(U_1+U_2)^{kp}F_{\hat{\nu}}$$

où $F_{\hat{\nu}}=c\sum_{0\leqslant j\leqslant\hat{\nu}}\binom{\hat{\nu}}{j}(1/(A(1)+j))U_1^jU_2^{\hat{\nu}-j}$.

Preuve.

On a clairement :

$(DM^{U,\lambda}_{[i]}(F_{\hat{\nu}}(U_1+U_2)^{kp}H(x(n)))\ ;\ 1\leq i\leq s) = H(x(n))(U_1+U_2)^{\nu}$.

De plus par E.5.1.(iii), on a $R(H(x(n))F_{\hat{\nu}},U,\lambda) = 0$,

donc $R(H(x(n))(U_1+U_2)^{kp}F_{\hat{\nu}},U,\lambda) = 0 = R(H(x(n))F,U,\lambda)$.

Donc $F = F_{\hat{\nu}}(U_1+U_2)^{kp}$.

COROLLAIRE E.5.4.

Sous les hypothèses de E.5.3., si $\nu = \hat{\nu} < p$, alors $F = \lambda U_1^{\nu} \bmod (U_1+U_2)$, $\lambda \in k(x(n))^{\star}$, F n'est pas divisible par U_1+U_2.

Preuve.

Posons $F = L^r G$ avec $L = U_1+U_2 \nmid G$.

On a $H(x(n))F = U_1^{A(1)}U_2^{A(2)}L^r G\ M^p$ avec $H(x(n)) = U_1^{A(1)}U_2^{A(2)}M^p$. Alors on a :

(1) $DM^{U,\lambda}_{[1]}(H(x(n))F) = H(x(n))(A(1)L^r G + {}_r U_1 L^{r-1}G + U_1 L^r DM^{u,\lambda}_{[1]}G) = cH(x(n))\ L^{\nu}$.

On en déduit que $rU_1L^{r-1}G = 0$, donc $r = 0(p)$, donc $r = 0$, donc $L \nmid F$,

donc $F = \lambda U_1^{\nu} \bmod (L)$ avec $\lambda \neq 0$.

COROLLAIRE E.5.5.

Soient $x(n)$ un point fermé de $\mathrm{Sing}(X(n))$ et (u,λ) une p-base de $O_{X(n),x(n)}$ adaptée en $x(n)$ et satisfaisant à E.5.1.(iii). On pose $\nu = \nu(x(n))$.

Effectuons l'éclatement $\pi : X' \to X(n)$ centré en $x(n)$. Soit x' un point fermé de $\mathrm{Sing}_{\nu}(X')$ situé dans l'ouvert où $\mathrm{div}(U_2)$ est le diviseur exceptionnel de π . Alors

(i) $1+u_1u_2^{-1}$ est nul en x' ,

(ii) pour toute p-base (v,μ) de $O_{X',x'}$ avec $v_1 = 1+u_1u_2^{-1}, v_2 = u_2$, on a $f = h(x')(\gamma v_1^{1+\nu}+v_2 g)+R(f,v,\mu)$ avec $\gamma \in O_{X',x'}^{\star}$, $h(x') = M^p$, où M est un monôme en $v_2,v_3,\dots,v_r$.

Preuve.

Comme $V\ \mathrm{Dir}(x(n)) = \langle U_1+U_2\rangle$, (i) est clair. D'autre part, en x' ,

$\mathrm{div}(1+u_1u_2^{-1})$ est transverse à E' et donc on peut trouver une p-base (v,μ) de $O_{X',x'}$ adaptée en x' avec $v_1 = 1+u_1u_2^{-1}$ et $v_2 = u_2$

On a par E.5.3. :

$$f = (v_1-1)^{A(1)}\, v_2^{A(1)+A(2)+\nu}\, u_3^{A(3)}\, u_2^{A(2)}\Big[\, c v_1^{kp} \sum_{0\leq j\leq \nu} \binom{\hat{\nu}}{j}_{A(1)+j} \frac{1}{A(1)+j}(v_1-1)^j + v_2 g\Big] + R(f,u,\lambda)$$

Posons $\phi(v_1) = \bar{c} v_1^{kp}\sum\binom{\hat{\nu}}{j}(A(1)+j)^{-1}(v_1-1)^{\widehat{A(1)}+j} \in k(x)[v_1]$

avec $\bar{c} = c \bmod.(v_2)$.

Par E.5.3.(iii), $\bar{c} \in k(x)^p$. De plus,

$$\begin{aligned} D^{v,\mu}_{[1]}\,\phi &= \bar{c}v_1^{kp}\sum\binom{\hat{\nu}}{j}(v_1-1)^{\widehat{A(1)}+j} \\ &= (v_1-1)^{\widehat{A(1)}}\,\bar{c}\, v_1^{kp}\,[(v_1-1)+1]^{\hat{\nu}} \\ &= (v_1-1)^{\widehat{A(1)}}\,\bar{c}\, v_1^{\nu}\ , \end{aligned}$$

$D^{v,\mu}_{[i]}\,\phi = 0$, $r\leq i\leq s$.

Donc $\phi(v_1) = A^p+\gamma v_1^{\nu+1}$ avec γ inversible.

D'où

$f = M^p(\gamma v_1^{\nu+1}+v_2 g) + B^p$,

ce qui donne (ii).

E.5.6. La situation est analogue lorsque l'on effectue l'éclatement $\pi : X' \to X(n)$ centré en $x(n)$ sous l'hypothèse $\nu = O(p)$, $V\,\mathrm{Dir}(x(n)) = \langle U_1+U_2\rangle$ et $\mathrm{ord}_{x(n)}(h(x(n))^{-1}Df)>\nu$ pour tout D tel que l'on ait (1) ou (2)

(1) $D = DM^{u,\lambda}_{[i]}$, $3\leq i\leq s$,

(2) $D = DM^{u,\lambda}_{[1]} + DM^{u,\lambda}_{[2]} + DM^{u,\lambda}_{[3]}$.

Nous verrons dans la proposition I.F.4.4. que ces conditions sont "raisonnables".

Par E.5.1.(ii) , on a

$P = c\,(U_1+U_2)^{\nu}$.

Par (1) pour $r+1\leq i\leq s$, on a $c \in k(x(n))^p$, posons $c = d^p$.

Par (1) pour $3\leq i\leq r$, on a $A(3) = \ldots = A(t) = O(P)$. Comme on a $\nu = O(P)$, la relation d'Euler et (2) nous donnent $A(1)+A(2) = A(1)+A(2)+\nu = O(P)$.

De plus, par (2), on a

(3) $\mathrm{ord}_x\left[h(x)^{-1}\left[DM^{u,\lambda}_{[1]} f + DM^{u,\lambda}_{[2]} f\right]\right]\geq 1+\nu$.

Comme $\alpha(x) = \nu$, par (3) et (1), on a

$\mathrm{ord}_x\left[h(x)^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[1]} f\right] = \nu$.

D'où, puisque $\nu = O(p)$

(4) $A(1) \not\equiv O(p)$.

Soit $x' \in X'$ un point proche au voisinage duquel $\mathrm{div}(u_2)$ est le diviseur exceptionnel de π . Avec les notations de la preuve de E.5.5., on a

$f = (v_1-1)^{A(1)}v_2^{A(1)+A(2)+\nu}u_3^{A(3)}\ u_r^{A(r)}\ [d^p\ v_1^{\nu} + v_2\ g] + R(f,u,\lambda)$

(5) $f = M^p[\gamma v_1{}^{1+\nu} + v_2 g'] + B^p$ avec γ inversible, $\gamma = A(1)d^p \bmod.(v_2)$.

PROPOSITION E.6.

Soit $C(n)$ une courbe irréductible de $X(n)$, soit $x(n)$ un point fermé de $C(n)$, on définit pour $i\geq 0$:

$\pi(n+i) : X(n+i+1) \longrightarrow X(n+i)$

l'éclatement centré en $x(n+i)$ point au dessus de $x(n)$ sur $C(n+i)\subset X(n+i)$, $C(n+i)$ étant le transformé strict de $C(n)$.

Alors, pour i assez grand, $\alpha(x(n+i)) = \alpha(C(n+i))$.

Preuve .

Bien sûr, on peut supposer $C(n)$ régulière et à croisements normaux avec $E(n)$. On choisit alors une p-base (u,λ) vérifiant (A.1(11)(12)(13)(14)) pour $(x(n),C(n))$, c'est à dire que $(u_1,\ldots,u_r)$ est un s.r.p. de $O_{X(n),x(n)}$, $I(E(n)) = (u_1\ldots u_t)$, $t\leq r$ et $\exists j'$, $1\leq j'\leq r$, $I(C(n)) = (u_j\ ,\ j' \neq j\ ,\ 1\leq j\leq r\ )$.

Avec ces notations, si on pose $v_j = u_j/u_{j'}^{\,i}$, $j \neq j'$, $1\leq j\leq r$ et $v_{j'} = u_{j'}$,

(v,λ) est une p-base de $x(n+i)$ adaptée en $x(n+i)$.
D'après (E.1.4.) , $I(X(n+i),f,(v,\lambda))$ est le transformé faible de $I(X(n),f,(u,\lambda))$, d'après le lemme de SANCHEZ [15] , pour i assez grand, $\mathrm{ord}_{x(n+i)}(I(X(n+i),f,(v,\lambda))) = \mathrm{ord}_{\xi}(I(X(n),f,(u,\lambda)))$, ξ étant le point générique de $C(n)$. D'après (A.6.(3)) , l'égalité précédente s'écrit : $\alpha(x(n+i)) = \alpha(\xi)$, $\alpha(\xi)$ et $\alpha(C(n))$ et $\alpha(C(n+i))$ désignant la même chose, la proposition est démontrée.

F. CAS DE LA DIMENSION 3 , CHOIX D'UNE p-BASE :

F.O. Nous supposons désormais que $X = X(0)$ est de dimension 3.
Soit $(X(n),f,E(n))$ une modification. Quand nous prolongeons $(X(n),f,E(n))$ par un éclatement permis $\pi(n)$ centré en $Y(n)$, en tout point fermé $x(n+1)$ au dessus de $x(n)$, nous disposons d'une p-base (v',λ) , déduite d'une p-base (u,λ) d'un voisinage de $x(n)$ (voir la preuve de E.1.)), malheureusement , (v',λ) n'est pas forcément adaptée en $x(n+1)$; comme nous devons contrôler $\alpha(x(n+1))$, nous devons modifier (v',λ). Ce sera l'objet des calculs ci-dessous.

Bien sûr, nous voulons construire un algorithme qui fait baisser ν strictement, et donc nous ne nous intéressons qu'au cas où $\nu(x(n+1)) = \nu(x(n))$.

F.1. Si $Y(n)$ est de dimension 2 , c'est à dire de codimension 1 dans $X(n)$ l'éclatement $\pi(n)$ est un isomorphisme et il n'y a pas de point ν-proche de $x(n)$ (E.2.2.(5),E.2.3.(5),E.2.4.(4)) .

F.2. Si $Y(n)$ est de dimension 1 , alors , d'après (E.2.2.(6),E.2.3.(6), E.2.4.(5)) , il y a au plus un point fermé $x(n+1)$ ν-proche de $x(n)$, et il est rationnel sur $x(n)$.

LEMME F.3.

Avec les hypothèses et notations de F.O. , soit (u,λ) une p-base de $\mathcal{O}_{X(n)}(U)$ adaptée pour $(x(n),Y(n))$ où U est un voisinage affine de $x(n)$. De plus, on suppose que $\dim(Y(n)) = 1$ et $\alpha(x(n)) = \nu(x(n)) = \nu\geq 1$,

$Y(n)$ permis en $x(n)$. Alors, si on effectue l'éclatement $\pi(n)$ centré en $Y(n)$, on a :

(i) si $\nu(x(n)) = 1$, il existe au plus un point singulier au dessus de $x(n)$ et il est rationnel, c'est le point qui est dans $\text{Proj}(\text{Dir}(x(n)) \subset X(n+1)$.

(ii) Si $\nu(x(n)) = 2$, il n'y a pas de point proche et $Y(n) \supset \text{Sing}_\nu(X(n))$. De plus, $V\ \text{Dir}(x(n)) = \langle U_i, U_j \rangle$ où $i \neq j$, $\{i,j\} \subset \{1,2,3\}$, et il existe au plus un nombre fini de points singuliers au dessus de $x(n)$.

(iii) Si $V\ \text{Dir}(x(n)) = \langle U_1, U_2 \rangle$ avec $I(Y(n)) = (u_1, u_2)$, et $\nu(x(n)) \geq 3$ ou ($\nu(x(n)) = 2$ et il existe une forme linéaire qui divise l'idéal $cl^\nu(J(X(n),f,E(n),\{x(n)\}))$, tout point $x(n+1)$ au dessus de $x(n)$ avec $\nu(x(n+1)) = \nu(x(n))-1$ est rationnel sur $x(n)$, il y a au plus un tel point avec $\alpha(x(n+1)) = \nu(x(n))$; si ce point $x(n+1)$ avec $\alpha(x(n+1)) = \nu(x(n))$ existe effectivement, alors localement $Y(n) = \text{Sing}_\nu(X(n))$.

F.3.1. Preuve de (i).

Avec les notations de E.2.2, on a deux générateurs u_1 et u_2 de l'idéal de $Y(n)$ et $\pi(n)^{-1}(x(n))$ est égal à $\text{Proj}(k[U_1,U_2])$. Puisque $\nu(x(n)) = 1$, $V\ \text{Dir}(x(n))$ est engendré par une forme linéaire non nulle aU_1+bU_2. D'après E.2.2.(6) un point singulier au dessus de $x(n)$ appartient à $\text{Proj}(V\ \text{Dir}(x(n)))$, ce qui par définition signifie que aU_1+bU_2 s'annule en ce point. Ce qui prouve (i). Par exemple, si $b = 0$ le seul point proche possible admet pour p-base

(1) $(u_1/u_2; u_2, u_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_s)$.

F.3.2. Preuve de (ii). On applique E.2.2(6) et comme $\nu(x(n)) = 2$, $\text{Proj}(V\text{Dir}(x(n)))$ est vide, donc il n'y a pas de point ν-proche. Soit $(u_i,u_j) = I(Y(n))$, d'après D.1., $J(X(n),f,E(n),Y(n)) \subset (u_i,u_j)^\nu$, donc $I(X(n),f,(u,\lambda)) \subset (u_i,u_j)^\nu$, donc $cl^\nu(I(X(n),f,(u,\lambda)) \subset in_{x(n)}(u_i,u_j))^\nu$, donc (E.2.2.2.) $V\ \text{Dir}(x(n)) \subset in_{x(n)}(u_i,u_j)$, comme $\nu(x(n)) = 2$, cette dernière inclusion est en fait une égalité. D'après E.1, $\text{Sing}(X(n+1))$ est le fermé défini par $J' = P^{-\nu}J(X(n),f,E(n),Y(n))$. Je dis que la restriction de J' à la fibre $\pi^{-1}(x(n))$ n'est pas l'idéal nul parce que l'ordre en P et en $\mathfrak{m}$ de $J(X(n),f,E(n),Y(n))$ est le même. Donc $\mathrm{Sing}(X(n+1))\cap\pi^{-1}(x(n))$ est un fermé strict de la droite projective $\pi^{-1}(x(n))$ c'est donc un ensemble fini.

F.3.3. Preuve de (iii) .

Soit $x(n+1)$ un point fermé au-dessus de $x(n)$ tel que $\nu(x(n+1)) = \nu-1$, $x(n+1)$ est défini dans $\pi(n)^{-1}(x(n)) = \mathrm{Proj}((k(x(n)))[U_1,U_2])$ par un idéal homogène $(\Phi(U_1,U_2))$, Φ polynome homogène irréductible ; l'hypothèse $\nu(x(n+1)) = \nu-1$ implique : $\mathrm{ord}_{x(n+1)}(P^{-\nu}I(X(n),f,E(n),\{x(n)\}\mathrm{mod}(P,u_3))\geq\nu-1$ comme $cl^{\nu}(J(X(n),f,E(n),\{x(n)\})\subset k(x(n))[U_1,U_2]$,on a $\Phi^{\nu-1}| cl^{\nu}(J(X(n),f,E(n),\{x(n)\}$ et donc, si $\nu\geq3$ ou ($\nu = 2$ et une forme linéaire divise $cl^{\nu}(J(X(n),f,E(n),\{x(n)\})$,on a $\deg\Phi = 1$ et donc $x(n+1)$ est rationnel sur $x(n)$

Supposons désormais $\alpha(x(n+1)) = \nu(x(n)) = 1+\nu(x(n+1))$.

Quitte à permuter u_1 et u_2 , on peut supposer que $x(n+1)$ est dans l'ouvert de $X(n+1)$ où $(u_2) = PO_{X(n+1)}$. Donc $x(n+1)$ est un point de paramètres $w_1 = \Phi(u_1/u_2,1) = \gamma+(u_1/u_2)$, $w_2 = u_2$, $w_3 = u_3$,

$(w,\lambda) = (w_1,w_2,w_3,\lambda_i,4\leq i\leq s)$ est une p-base de $O_{X(n+1),x(n+1)}$ adaptée pour $x(n+1)$. On applique E.1.2.(1)(2) , en remarquant que, quitte à multiplier u_2 par un inversible, on peut supposer $\gamma = 1$ ou 0 .

On a donc, en notant $f'_i = (DM^{u,\lambda}_{[i]}f)/h(x(n))$, $F_i = cl^{\nu}_{x(n)}(f'_i)$, $1\leq i\leq s$:

$((u_1/u_2)D^{w,\lambda}_{[1]}f)/h(x(n+1)) = f'_1/u_2^{\nu}$

$(DM^{w,\lambda}_{[2]}f)/h(x(n+1)) = (f'_1+f'_2+f'_3)/u_2^{\nu}$

$(DM^{w,\lambda}_{[i]}f)/h(x(n+1)) = f'_i/u_2^{\nu}$, $3\leq i\leq s$

On a $\forall$ i , $3\leq i\leq s$, $F_i = \rho_i(U_1+\gamma U_2)^{\nu}$, sinon $\mathrm{ord}_{x(n+1)}((DM^{w,\lambda}_{[i]}f)/h(x(n+1)))<\nu$, ce qui contredit $\alpha(x(n+1)) = \nu$, de même , $F_1+F_2+F_3 = \rho(U_1+\gamma U_2)^{\nu}$, sinon $\mathrm{ord}_{x(n+1)}((DM^{w,\lambda}_{[2]}f)/h(x(n+1)))<\nu$.

On a $F_1 = (U_1+\gamma U_2)^{\nu-1}(aU_1+bU_2)$, $F_2 = (U_1+\gamma U_2)^{\nu-1}(a'U_1+b'U_2)$ avec aU_1+bU_2 ou $a'U_1+b'U_2$ non colinéaire à $U_1+\gamma U_2$ puisque $\nu(x(n)) = 2$ et même, puisque $F_1+F_2+F_3 = \rho(U_1+\gamma U_2)^{\nu}$, les deux sont non colinéaires à $U_1+\gamma U_2$, donc $F_1 \neq 0$ et $F_2 \neq 0$, cela entraine $\mathrm{div}(u_1u_2)\subset E(n)$, sinon on aurait, pour $i = 1$ ou 2 , $(D^{u,\lambda}_{[i]}f)/h(x(n)) = f_i \in J(X(n),f,E(n))$ et $\mathrm{ord}_{x(n)}(f_i) = \deg(F_i)-1 = \nu(x(n))-1$ ce qui est absurde. Comme $\mathrm{div}(u_1u_2)\subset E(n)$ le point générique η de la composante de $Y(n)$ passant par $x(n)$ est un point de croisement (A.6.1.) et donc $\alpha(Y(n),\eta) = \nu(\eta)$, l'éclatement centré en $Y(n)$ étant permis, on a $\alpha(Y(n),\eta) = \nu(x(n))$ (D.4.(1)) , donc $\nu(\eta) = \nu(x(n))$, $\overline{\{\eta\}}\subset \mathrm{Sing}_\nu(X(n))$. On va déduire que dans un voisinage de $x(n)$, on a $\mathrm{Sing}_\nu(X(n)) = \overline{\{\eta\}} = Y(n)$. Sinon on trouverait une autre composante de dimension 1 de $\mathrm{Sing}_\nu(X(n))$ qui passerait par $x(n)$; son transformé strict rencontrerait $\pi^{-1}(x(n))$ en un point qui serait nécessairement ν-proche ce qui est absurde.

Avec des méthodes de calcul différentes, nous pouvons compléter F.3.(iii).

LEMME F.3.4.

Avec les hypothèses et notations de F.3, si $V\ \mathrm{Dir}(x(n)) = \langle U_1,U_2\rangle$, $Y(n) = V(u_1,u_2)$, $\mathrm{div}(u_1u_2)\not\subset E(n)$ et $\nu(x(n)) = 2$, alors :

(i) $\nu = p = 2$,

(ii) si on effectue $\pi(n)$, il n'y a pas de point singulier au-dessus de $x(n)$.

Preuve.

On a :

(1) $f = h(x(n))\ (\alpha u_1^2+\beta u_1u_2+\gamma u_2^2+g)+R(f,u,\lambda)$

avec $g \in m^3$, $g \in (u_1,u_2)^2$.

Comme $\mathrm{div}(u_1u_2)\not\subset E(n)$, quitte à permuter u_1 et u_2 , on peut supposer que $\mathrm{div}(u_1)\not\subset E(n)$, on peut alors écrire :

(2) $f = u_2^{A(2)} u_3^{A(3)} (\alpha u_1^2 + \beta u_1 u_2 + \gamma u_2^2 + g) + R(f,u,\lambda)$ avec $A(2) = 0$ si $\mathrm{div}(u_2) \not\subset E(n)$ et $A(3) = 0$ si $\mathrm{div}(u_3) \not\subset E(n)$.

On a $(D^{u,\lambda}_{[1]} f)/h(x(n)) = 2\alpha u_1 + \beta u_2 \mathrm{mod.}\, \mathfrak{m}^2$ comme $\nu(x(n)) = 2$, on a $\mathrm{ord}_{x(n)}(2\alpha u_1 + \beta u_2) \geq 2$ et donc $\beta \in \mathfrak{m}$, donc $\beta u_1 u_2 \in \mathfrak{m}^3$, $\beta u_1 u_2 \in (u_1,u_2)^2$, quitte à remplacer g par $g + \beta u_1 u_2$, on peut supposer $\beta = 0$. De plus on a $\mathrm{ord}_{x(n)}(2\alpha u_1) \geq 2$, donc $2\alpha \in \mathfrak{m}$, si $\alpha \in \mathfrak{m}$, on a $V\,\mathrm{Dir}(x(n)) = k(x(n))U_2$ (E.1.5.1.3.) , c'est une contradiction, donc $\alpha \notin \mathfrak{m}$, donc $2 = 0(p)$, donc $2 = p$. On a prouvé (i) .

F.3.4.1. Si

(3) $(A(2),A(3)) \neq (0,0) \mathrm{mod.} 2$, quitte à se placer dans un revêtement étale $X'(n)$ de $X(n)$, opération qui commute à l'éclatement, on peut extraire une racine $2+A(2)$-ème ou une racine $A(3)$-ème de γ , soit C cette racine, on remplace alors u_2 par $v_2 = Cu_2$ ou u_3 par $v_3 = Cu_3$ et on se ramène à :

(4) $f = u_2^{A(2)} u_3^{A(3)} (\alpha u_1^2 + u_2^2 + g) + R(f,u,\lambda)$.

On a utilisé le fait que $\gamma \notin \mathfrak{m}$, qui est vrai car sinon $V\,\mathrm{Dir}(x(n)) = \langle U_1 \rangle$.

F.3.4.1.1. Si la classe de α dans $k(x(n))$ n'est pas un carré, on peut modifier la p-base (u,λ) , de façon que $\lambda = \lambda_4$, on se ramène à :

(5) $f = u_2^{A(2)} u_3^{A(3)} (\lambda_4 u_1^2 + u_2^2 + g) + R(f,u,\lambda)$, $g \in \mathfrak{m}^3$.

F.3.4.1.2. Si $\alpha = a^2 + t$, $t \in \mathfrak{m}$, en remplaçant u_1 par au_1 et g par $g + tu_1^2$, on a :

(6) $f = u_2^{A(2)} u_3^{A(3)} (u_1^2 + u_2^2 + g) + R(f,u,\lambda)$,

$f = u_2^{A(2)} u_3^{A(3)} ((u_1 + u_2)^2 + g) + R(f,u,\lambda)$.

Comme $p = 2$, on trouve $V\,\mathrm{Dir}(x(n)) = \langle U_1 + U_2 \rangle$, donc $\nu(x(n)) = 1$, ce cas est impossible. On a donc (5) et par suite :

(7) $J(X(n),f,E(n),Y(n)) \supset (DM^{u,\lambda}_{[i]} f, 2 \leq i \leq s)/h(x(n))$

avec $(DM^{u,\lambda}_{[i]}f, 2\leq i\leq s)/h(x(n)) = (U_1{}^2, U_2{}^2) \mathrm{mod}\, \mathfrak{m}^3$.

On a d'après I.E.1. :

(8) $J(X(n+1),f,E(n+1)) = J(X(n),f,E(n),Y(n)).(u_1,u_2)^{-2}$,

$J(X(n+1),f,E(n+1) \supset (u_1{}^2,u_2{}^2).(u_1,u_2)^{-2}\ \mathrm{mod}.(u_3)$,

$J(X(n+1),f,E(n+1)) = O_{X(n+1)}$.

Ce qui prouve (ii) dans le cas (3) .

F.3.4.2. Si $(A(2),A(3)) = (0,0)(2)$, alors la classe de γ dans $k(x(n))$ n'est pas un carré, sinon $V\,\mathrm{Dir}(x(n) = k(x(n))U_1$ (E.1.5.1.3.), de même la classe de α dans $k(x(n))$ n'est pas un carré, sinon $V'\mathrm{Dir}(x(n)) = k(x(n))U_2$.

Quitte à modifier notre p-base (u,λ) , on peut supposer que $\lambda_4 = \gamma$, ce qui nous donne :

(9) $f = u_2{}^{A(2)}u_3{}^{A(3)}(\alpha u_1{}^2+\lambda_4 u_2{}^2+g)+R(f,u,\lambda)$.

Si α et λ_4 sont p-indépendants mod.$\mathfrak{m}$ on peut en outre supposer $\alpha = \lambda_5$ donc

(10) $f = U_2{}^{A(2)}U_3{}^{A(3)}(\lambda_5 u_1{}^2+\lambda_4 u_2{}^2+g)+R(f,u,\lambda)$, $g \in \mathfrak{m}^3$.

Sinon, on a $\alpha = a^2+b^2\lambda_4+\mathfrak{m}$ et on voit que $V\ \mathrm{Dir}(x(n)) = \langle b'U_1+U_2\rangle$ où b' est la classe de b mod.$\mathfrak{m}$, ce qui est exclu. On a donc (10).

On a donc

(11) $J(X,f,E(n),Y(n)) \ni (DM^{u,\lambda}_{[i]}f)/h(x(n))$, $i = 4,5$, donc

$J(X,f,E(n),Y(n)) \supset (u_1^2,u_2^2)\ \mathrm{mod}\,\mathfrak{m}^3$ on conclut comme dans F.3.4.1.(8) .

F.3.5. Plus généralement, si Y est une courbe permise en $x \in \mathrm{Sing}(X(n))$ et si on effectue l'éclatement $\pi : X' \to X(n)$ centré en Y , et si il y a un point $x' \in X'$ qui est ν-proche de x , on peut choisir une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ adaptée pour (x,Y) et telle que

(1) $\begin{cases} I(Y) = (u_1,u_2) \text{ , } (v,\lambda) \text{ est une p-base de } O_{X',x'} \text{ adaptée en } x' \\ \text{où } v = ((u_1+\delta u_2)u_2^{-1} \text{ , } u_2,u_3) \text{ , et } \delta = 0 \text{ ou } 1 \text{ .} \end{cases}$

En effet, puisque Y est permise, on a facilement $I(Y) = (u_1,u_2)$. Montrons qu'on peut alors obtenir les autres conditions de (1).

F.3.5.1. Si $\alpha(Y) = \nu(x)$, on a

$J(X(n),f,E(n),Y) \subset (u_1,u_2)^{\nu}$ et $\mathrm{ord}_x\,(J(X(n),f,E(n),Y) = \nu$ où $\nu = \nu(n)$,

donc $V\ \mathrm{Dir}(J(X(n),f,E(n),Y)) \subset \langle U_1,U_2\rangle$.

Par E.1, $J(X',f,E') = I(Y)^{-\nu}J(X(n),f,E(n),Y)$, l'existence de x' implique

(2) $V\ \mathrm{Dir}(J(X(n),f,E(n),Y)) = \langle U_1\rangle,\langle U_2\rangle$ ou $\langle U_1+\delta U_2\rangle$, $\delta \in k(x)$.

Quitte à permuter u_1 et u_2 ou à multiplier u_2 par un inversible, on a (1).

F.3.5.2. Si $\alpha(Y) = 1+\nu(x) = 1+\nu$, on a par A.3 $\nu(Y) = \nu$ et donc

$J(X(n),f,E(n)) \subset (u_1,u_2)^{\nu}$ et $\mathrm{ord}_x(J(X(n),f,E(n))) = \nu$.

De plus, par I.E.2.4, on a

$J(X',f,E') \supset I(Y)^{-\nu}\ J(X(n),f,E(n))$.

L'existence de x' implique donc

(3) $V\ \mathrm{Dir}(J(X(n),f,E(n))) = \langle U_1\rangle$, $\langle U_2\rangle$ ou $\langle u_1+\delta U_2\rangle$, $\delta \in k(x)$.

On conclut comme en F.3.5.1.

F.3.5.3. Supposons qu'on a F.3.5(1). Posons

(4) $\underline{u}' = (u_1u_2^{-1},u_2,u_3)$.

Bien sûr, (u',λ) est une p-base de $O_{X',x'}$ adaptée en x' si $\delta = 0$.

On a $u_1 = u'_1u_2 = (v_1-\delta)u_2$, d'où

$$du_1 = u_2du'_1+u'_1du_2 = u_2dv_1+u'_1du_2 \ .$$

On a

$$\begin{cases} df = u_1^{-1}DM^{u.\lambda}_{[1]}f\ du_1+u_2^{-1}DM^{u.\lambda}_{[2]}f\ du_2+u_3^{-1}DM^{u.\lambda}_{[3]}f\ du_3+\Sigma\lambda_i^{-1}DM^{u.\lambda}_{[i]}f\ d\lambda_i \\ \quad = u_1'^{-1}DM^{u'.\lambda}_{[1]}f\ du_1'+u'^{-1}_2DM^{u'.\lambda}_{[2]}f\ du_2'+u'^{-1}_3DM^{u'.\lambda}_{[3]}f\ du_3'+\Sigma\lambda_i^{-1}DM^{u'.\lambda}_{[i]}f\ d\lambda_i \ . \end{cases}$$

D'où

$$(5)\begin{cases} DM^{u',\lambda}_{[1]}f = DM^{u,\lambda}_{[1]}f = (v_1-\delta)D^{v,\lambda}_{[1]}f \ , \\ DM^{u',\lambda}_{[2]}f = DM^{u,\lambda}_{[1]}f + DM^{u,\lambda}_{[2]}f = DM^{v,\lambda}_{[2]}f \ , \\ DM^{u,\lambda}_{[2]}f = DM^{v,\lambda}_{[2]}f - (v_1-\delta)D^{v,\lambda}_{[1]}f \ , \\ DM^{u,\lambda}_{[i]}f = DM^{u',\lambda}_{[i]}f = DM^{v,\lambda}_{[i]}f \ , \ 3\leq i\leq s \ . \end{cases}$$

F.4. Nous allons étudier un éclatement $\pi(n)$ centré en un point fermé $x(n)$, on désignera par $x(n+1)$ un point fermé ν-proche de $x(n)$ (E.2.5.) . Nous allons construire une p-base (v,μ) de $O_{X(n+1),x(n+1)}$ adaptée en $x(n+1)$ et étudier l'idéal $I(X(n+1),f,(v,\mu))$. Nous aurons trois cas différents à étudier :

(1) $x(n+1)$ est rationnel sur $x(n)$,

(2) $x(n+1)$ est non rationel sur $x(n)$ et l'extension résiduelle est inséparable,

(3) $x(n+1)$ est non rationnel sur $x(n)$ et l'extension résiduelle est séparable.

Nous prenons les notations suivantes :

(4) $(u,\lambda) = (u_1,u_2,u_3,\lambda_i)$, $4\leq i\leq s$,

est une p-base de $O_X(U)$, U étant un voisinage de $x(n)$, (u_1,u_2,u_3) est un s.r.p. de $O_{X(n),x(n)}$, les λ_i sont inversibles, $4\leq i\leq s$. C'est à dire que $(u.\lambda)$ est adaptée en $x(n)$, $Y(n) = \{x(n)\}$.

Effectuons l'éclatement $\pi(n)$ centré en $x(n)$, nous posons :

(5) $u'_1 = u_1/u_2$, $u'_2 = v_2 = u_2$, $u'_3 = u_3/u_2$,

(6) on note (u',λ) la p-base $(u'_1,u'_2,u'_3,\lambda_i)$, $4\leq i\leq s$, (E.1.1.)

C'est à dire que nous étudions l'ouvert de $X(n+1)$ où u'_2 est l'équation du diviseur exceptionnel.

(7) Désormais, $\forall\, g \in O_{X(n),x(n)}$, nous noterons encore g l'élément $g\circ\pi(n)$ de $O_{X(n+1),x(n+1)}$.

Nous allons d'abord étudier le cas très particulier où :

F.4.1. $u_1'(x(n+1)) = u_3'(x(n+1)) = 0$.

C'est le cas où la p-base (u',λ) de (6) est adaptée pour $x(n+1)$, nous dirons que $x(n+1)$ est un point de croisement pour $(\pi(n),(u,\lambda))$, ou plus simplement, s'il n'y a pas de confusion possible, que $x(n+1)$ est un point de croisement. Alors, on prend $(v,\mu) = (u',\lambda)$, d'après (E.1.4.) , $I(X(n+1),f,(u',\lambda)) = I(X(n+1),f,(v,\mu))$ est le transformé faible de $I(X(n),f,(u,\lambda))$.

Passons au cas où :

F.4.2. $x(n+1)$ est rationnel sur $x(n)$ et n'est pas un point de croisement.

On peut supposer, quitte à permuter u_1,u_2 et u_3 que V $\mathrm{Dir}(x(n)) \ni in_{\mathfrak{m}}(u_1+\delta u_2+\varepsilon u_3)$

$\delta \in O_{X(n),x(n)}$, $\varepsilon \in O_{X(n),x(n)}$ et, quitte à multiplier u_2 et u_3 par des inversibles, on suppose $\delta = 1$ ou 0 , $\varepsilon = 1$ ou 0 .

Avec les notations de F.4(5), on pose

(1) $v_1 = u_1'+\delta+\varepsilon u_3'$,

Alors $v_1(x(n+1)) = 0$ (E.2.2(7) et E.2.3(7)). On choisit $\gamma \in O_{X(n),x(n)}$ de façon que si $v_3 = u_3'+\gamma$, on ait $v_3(x(n+1)) = 0$.

Je dis qu'on peut supposer la condition :

(2) Si $u_1'(x(n+1)) = 0$, alors $\delta = \varepsilon = 0$.

En effet, comme $x(n+1)$ n'est pas un point de croisement, $u_3'(x(n+1))$ est inversible et, comme $v_1(x(n+1)) = 0 = (\delta+\varepsilon\gamma)(x(n+1))$, soit $\delta = \varepsilon = 0$, soit $\delta = \varepsilon = 1$, dans ce dernier cas, on permute u_1 et u_3 dans (u,λ) , on a toujours (1) et de plus $u_1'(x(n+1))$ est devenu inversible. D'après (1) et (2), on a :

(3) $(v,\lambda) = (v_1,u_2,v_3,\lambda_i, 4\leqslant i\leqslant s)$ est une p-base de $O_{X(n+1)}(V)$ adaptée en $x(n+1)$, V étant un voisinage affine convenable de $x(n+1)$, on pose alors :

(4) $d\gamma = \gamma_1 dv_1+\gamma_2 du_2+\gamma_3 dv_3+\sum_{4\leqslant i\leqslant s}\gamma_i d\lambda_i$.

De plus, quitte à remplacer γ par $\gamma-\gamma_3 v_3$, on a

(4 bis) $\gamma_3 \in \mathfrak{m}_{X(n+1),x(n+1)}$.

Posons

(5) $u_2 = v_2 = u'_2$.

On a les relations :

(6) $du'_3 = -\gamma_1 dv_1 - \gamma_2 dv_2 + (1-\gamma_3)dv_3 - \sum_{4\leq i\leq s} \gamma_i d\lambda_i$,

$du'_1 = (1+\varepsilon\gamma_1)dv_1 + \varepsilon\gamma_2 dv_2 - \varepsilon(1-\gamma_3)dv_3 + \sum_{4\leq i\leq s} \varepsilon\gamma_i d\lambda_i$,

$du'_2 = du_2 = dv_2$ (on pose $u_2 = v_2$) .

On rappelle (E.1.(1)) qui, dans le cas présent nous donne :

(7) $D^{u',\lambda}_{[1]}f = v_2 D^{u,\lambda}_{[1]}f$, $DM^{u',\lambda}_{[1]}f = v_2 u'_1 D^{u,\lambda}_{[1]}f = DM^{u,\lambda}_{[1]}f$,

$DM^{u',\lambda}_{[2]}f = DM^{u,\lambda}_{[1]}f + DM^{u,\lambda}_{[2]}f + DM^{u,\lambda}_{[3]}f$,

$D^{u',\lambda}_{[3]}f = v_2 D^{u,\lambda}_{[3]}f =$, $DM^{u',\lambda}_{[3]}f = v_2 u'_3 D^{u,\lambda}_{[3]}f = DM^{u,\lambda}_{[3]}f$,

$D^{u',\lambda}_{[i]}f = D^{u,\lambda}_{[i]}f$, $4\leq i\leq s$.

On déduit de (6) et (7) :

(8) $D^{v,\lambda}_{[1]}f = (1+\varepsilon\gamma_1)D^{u',\lambda}_{[1]}f - \gamma_1 D^{u',\lambda}_{[3]}f = ((1+\varepsilon\gamma_1)DM^{u,\lambda}_{[1]}f)/u'_1) - \gamma_1(DM^{u,\lambda}_{[3]}f)/u'_3$,

$DM^{v,\lambda}_{[2]}f = DM^{u',\lambda}_{[2]}f - \gamma_2 v_2 D^{u',\lambda}_{[3]}f + \varepsilon\gamma_2 v_2 D^{u',\lambda}_{[1]}f =$

$DM^{v,\lambda}_{[2]}f = (DM^{u,\lambda}_{[1]}f + DM^{u,\lambda}_{[2]}f + DM^{u,\lambda}_{[3]}f) - v_2[(\gamma_2/u'_3)DM^{u,\lambda}_{[3]}f - (\varepsilon\gamma_2/u'_1)DM^{u,\lambda}_{[1]}f]$,

$D^{v,\lambda}_{[3]}f = (1-\gamma_3)D^{u',\lambda}_{[3]}f + \varepsilon(\gamma_3-1)D^{u',\lambda}_{[1]}f = (1-\gamma_3)/u'_3)DM^{u,\lambda}_{[3]}f + (\varepsilon(\gamma_3-1)/u'_1)DM^{u,\lambda}_{[1]}f$.

(9) $DM^{u,\lambda}_{[3]}f - \varepsilon u'^{-1}_1 DM^{u,\lambda}_{[1]}f = u'_3(1-\gamma_3)^{-1}D^{v,\lambda}_{[3]}f$,

$DM^{u,\lambda}_{[1]}f + DM^{u,\lambda}_{[2]}f + DM^{u,\lambda}_{[3]}f = DM^{v,\lambda}_{[2]}f + v_2\gamma_2(1-\gamma_3)^{-1}D^{v,\lambda}_{[3]}f$,

$D^{v,\lambda}_{[i]}f = D^{u,\lambda}_{[i]}f$, $4\leq i\leq s$,

$DM^{u,\lambda}_{[1]}f = u'_1 D^{v,\lambda}_{[1]}f + (1-\gamma_3)^{-1}u'_1 D^{v,\lambda}_{[3]}f$.

On rappelle que $1-\gamma_3$ est inversible (cf.(4 bis)).

F.4.3. Nous étudions maintenant le cas où $x(n+1)$ est non rationnel sur $x(n)$. On prend les notations de (F.4.) . On a $v(x(n)) = 1$ d'après E.2.2.(7) et E.2.3.(7) . Quitte à permuter u_1 , u_2 et u_3 , on peut supposer :

(1) $\mathcal{V}(\mathrm{Dir}(x(n))) = \langle \mathrm{in}_{m}(u_1+\delta u_2+\varepsilon u_3)\rangle$, $\delta,\varepsilon \in O_{X(n),x(n)}$, et δ , ε inversibles ou nuls et si $\delta\varepsilon = 0$ alors $\varepsilon = 0$.

Quitte à multiplier u_2 et u_3 par des inversibles, on peut supposer :

(2) $\delta = 1$ ou 0 , $\varepsilon = 1$ ou 0 .

Comme $x(n+1)$ n'est pas rationnel sur $x(n)$, il n'est pas sur le transformé strict de la courbe $V(u_1+\delta u_2+\gamma u_3,u_2)$, or , d'après E.2.2.(6) , il est sur le transformé strict de $V(u_1+\delta u_2+\gamma u_3)$, donc il n'est pas sur le transformé strict de $V(u_2)$. Donc $x(n+1)$ est dans l'ouvert de $X(n+1)$ où u_2 est l'équation du diviseur exceptionnel de $\pi(n)$, on pose, avec les notations de F.4. :

(3) $v_1 = u_1'+\delta+\varepsilon u_3'$, $u_1' = u_1/u_2$, $u_3' = u_3/u_2$.

(4) Bien sûr, $u_3'(x(n+1))$ est inversible puisque $x(n+1)$ n'est pas rationnel sur $x(n)$ et $v_1(x(n+1)) = 0$ puisque $x(n+1) \in \mathrm{Proj}(\mathrm{Dir}(x(n)))$. On note k le corps résiduel de $x(n)$. Alors, $x(n+1)$ est dans l'ouvert affine d'anneau R avec

(5) $R = O_{X(n),x(n)}\,[v_1,u_3']$, $R/v_2\,R = k\,[v_1,u_3']$

et $x(n+1)$ correspond à un idéal maximal homogène P de $k[U_1,U_2,U_3]$,

(6) $P = (U_1+\delta U_2+\varepsilon U_3\ ,\ \varphi)$,

où φ est un polynôme homogène irréductible $\varphi = \sum_{i+j=d} a_{ij}\ U_2^iU_3^j$

soient $b_{i,j} \in O_{X(n),x(n)}$ avec $b_{i,j} = a_{i,j} \bmod m_{X(n),x(n)}$, on pose

(7) $\Phi = \sum_{i+j=d} b_{ij}\ u_2^iu_3^j$ et $v_3 = u_2^{-d}\Phi$. Alors

(8) (v_1,v_2,v_3) est un système régulier de paramètres de $O_{X(n+1),x(n+1)}$, et $(v_1,v_2,u_3',\lambda_4,\dots,\lambda_s)$ est une p-base de R. On définit donc des $\Phi_i \in R$ par :

(9) $dv_3 = d\Phi = \Phi_1dv_1+\Phi_2dv_2+\Phi_3du_3'+ \sum_{4\leqslant i\leqslant s}\Phi_i d\lambda_i$.

Quitte à remplacer v_3 par $v_3-\Phi_2 v_2$, on peut supposer que

(9 bis) $(\phi_1,\phi_2) \subset v_2\, O_{X(n+1),x(n+1)}$.

Si l'extension résiduelle $k(x(n+1))/k(x(n))$ est inséparable, alors $\varphi \in k[U_2^k,U_3^k]$ et $\Phi_3 \in (v_2)$, alors, il existe $i\geq 4$ tel que Φ_i est inversible; quitte à permuter les λ_i , $4\leq i\leq s$, on peut supposer que Φ_4 est inversible ; alors, avec les notations de (3) et (7)

(10) $(v,\mu) = (v_1,v_2,v_3,u_3',\lambda_5,\ldots,\lambda_s)$

est une p-base de $O_{X(n+1),x(n+1)}$.

Si l'extension résiduelle $k(x(n+1))/k(x(n))$ est séparable , alors Φ_3 est inversible, on pose alors :

(11) $(v,\mu) = (v_1,v_2,v_3,\lambda_4,\ldots,\lambda_s)$, c'est une p-base de $O_{X(n+1),x(n+1)}$

F.4.3.1. Approfondissons le cas où l'extension $k(x(n+1))/k(x(n))$ est inséparable, alors, on a :

(1) $dv_1 = (du_1+\delta du_2+\varepsilon du_3)/u_2 - (u_1+\delta u_2+\varepsilon u_3)du_2/u_2^2$

$dv_2 = du_2$,

$dv_3 = \Phi_1 dv_1+\Phi_2 du_2+\Phi_3 du_3'+ \sum_{4\leq i\leq s} \Phi_i d\lambda_i$,

$d\mu_4 = du_3' = (du_3)/u_2 - u_3(du_2)/u_2^2$,

$d\mu_i = d\lambda_i$, $5\leq i\leq s$.

En inversant ce système de relations, on obtient :

(2) $du_1 = v_2 dv_1-\delta dv_2-\varepsilon\mu_4 dv_2+v_1 dv_2-\varepsilon v_2 d\mu_4$,

$du_2 = dv_2$,

$du_3 = \mu_4 dv_2 + v_2 d\mu_4$,

$d\lambda_4 = \Phi_4^{-1}(-\Phi_1 dv_1 - \Phi_2 dv_2 + dv_3 - \Phi_3 d\mu_4 - \sum_{5\leq i\leq s}\Phi_i d\mu_i)$,

$d\lambda_i = d\mu_i$, $5\leq i\leq s$,

et on rappelle que Φ_4 est inversible et Φ_1, Φ_2, Φ_3 appartiennent

à $v_2 O_{X(n+1),x(n+1)}$.

On en déduit avec les notations de F.4.3.(7)(8)

(3) $D^{v,\mu}_{[1]}f = v_2 D^{u,\lambda}_{[1]}f - (\Phi_1/\Phi_4)D^{u,\lambda}_{[4]}f$,

$D^{v,\mu}_{[2]}f = (v_1-\delta-\varepsilon\mu_4)D^{u,\lambda}_{[1]}f + D^{u,\lambda}_{[2]}f + \mu_4 D^{u,\lambda}_{[3]}f - (\Phi_2/\Phi_4)D^{u,\lambda}_{[4]}f =$

$u_1' D^{u,\lambda}_{[1]}f + D^{u,\lambda}_{[2]}f + u_3' D^{u,\lambda}_{[3]}f - (\Phi_2/\Phi_4)D^{u,\lambda}_{[4]}f$,

$D^{v,\mu}_{[3]}f = (1/\Phi_4)D^{u,\lambda}_{[4]}f$,

$D^{v,\mu}_{[4]}f = -\varepsilon v_2 D^{u,\lambda}_{[1]}f + v_2 D^{u,\lambda}_{[3]}f - (\Phi_3/\Phi_4)D^{u,\lambda}_{[4]}f =$

$(-\varepsilon/u_1')DM^{u,\lambda}_{[1]}f + (1/u_3')DM^{u,\lambda}_{[3]}f - (\Phi_3/\Phi_4)D^{u,\lambda}_{[4]}f$,

$D^{v,\mu}_{[i]}f = D^{u,\lambda}_{[i]}f - (\Phi_i/\Phi_4)D^{u,\lambda}_{[4]}f$, $5\leq i\leq s$.

(4) $DM^{u,\lambda}_{[1]}f = u_1'\, D^{v,\mu}_{[1]}f + u_1'\,\Phi_1\, D^{v,\mu}_{[3]}f$,

$(DM^{u,\lambda}_{[1]} + DM^{u,\lambda}_{[2]} + DM^{u,\lambda}_{[3]})(f) = DM^{v,\mu}_{[2]}f + v_2\,\bar{\Phi}_2\, D^{v,\mu}_{[3]}f$,

$DM^{u,\lambda}_{[3]}f = \mu_4\, D^{v,\mu}_{[4]}f + \varepsilon\mu_4\, D^{v,\mu}_{[1]}f + \mu_4(\varepsilon\bar{\Phi}_1+\bar{\Phi}_3)D^{v,\mu}_{[3]}f$,

$D^{u,\lambda}_{[4]}f = \bar{\Phi}_4\, D^{v,\mu}_{[3]}f$,

$D^{u,\lambda}_{[i]}f = D^{v,\mu}_{[i]}f + \bar{\Phi}_i\, D^{v,\mu}_{[3]}f$, $i\geq 5$.

F.4.3.2. Etudions maintenant le cas où l'extension $k(x(n+1))/k(x(n))$ est séparable, alors, d'après (F.4.3.) on a :

1) $dv_1 = (du_1+\delta du_2+\varepsilon du_3)/u_2 - (u_1+\delta u_2+\varepsilon u_3)du_2/u_2^2$,

$dv_2 = du_2$,

$dv_3 = d\Phi = \Phi_1 dv_1 + \Phi_2 dv_2 + \Phi_3 du_3' + \sum_{4\leq i\leq s}\Phi_i d\lambda_i$,

$d\mu_i = d\lambda_i$, $4\leq i\leq s$

et Φ_3 est inversible d'après F.4.3.(11).

En inversant ce système de relations, on obtient :

(2) $du_1 = v_2(1+\varepsilon\Phi_1/\Phi_3)dv_1 + (u_1'+\varepsilon v_2\Phi_2/\Phi_3)dv_2 - (\varepsilon v_2/\Phi_3)dv_3 + \sum_{4\leq i\leq s}(\varepsilon v_2\Phi_i/\Phi_3)d\mu_i$,

$du_2 = dv_2$,

$du_3 = (-v_2\Phi_1/\Phi_3)dv_1 + (u_3'-(v_2\Phi_2/\Phi_3))\, dv_2 + (v_2/\Phi_3)dv_3 - \sum_{4\leq i\leq s}(v_2\Phi_i/\Phi_3)d\mu_i$,

$d\lambda_i = d\mu_i$, $4\leq i\leq s$.

On en déduit :

(3) $D^{v,\mu}_{[1]}f = v_2(1+\varepsilon\Phi_1/\Phi_3)D^{u,\lambda}_{[1]}f + (-v_2\Phi_1/\Phi_3)D^{u,\lambda}_{[3]}f$,

$D^{v,\mu}_{[2]}f = (u_1'+(\varepsilon v_2\Phi_2/\Phi_3))D^{u,\lambda}_{[1]}f + D^{u,\lambda}_{[2]}f + (u_3'-(v_2\Phi_2/\Phi_3))D^{u,\lambda}_{[3]}f$,

$D^{v,\mu}_{[3]}f = v_2((-\varepsilon/\Phi_3)D^{u,\lambda}_{[1]}f + (1/\Phi_3)D^{u,\lambda}_{[3]}f) = (-\varepsilon/\Phi_3 u_1')DM^{u,\lambda}_{[1]}f + (1/u_3'\Phi_3)DM^{u,\lambda}_{[3]}f$,

$D^{v,\mu}_{[i]}f = D^{u,\lambda}_{[i]}f-\Phi_i v_2((-\varepsilon/\Phi_3)D^{u,\lambda}_{[1]}f + (1/\Phi_3)D^{u,\lambda}_{[3]}f) =$

$D^{u,\lambda}_{[i]}f - (\Phi_i/\Phi_3)((-\varepsilon/u_1')DM^{u,\lambda}_{[1]}f + (1/u_3')DM^{u,\lambda}_{[3]}f)$, $4\leq i\leq s$.

(4) $DM^{u,\lambda}_{[1]}f + DM^{u,\lambda}_{[2]}f + DM^{u,\lambda}_{[3]}f = DM^{v,\mu}_{[2]}f - v_2\ \phi_2/\phi_3\ D^{v,\mu}_{[3]}f$,

$D^{u,\lambda}_{[i]}f = D^{v,\mu}_{[i]}f + \phi_i\ D^{v,\mu}_{[3]}f$, $4\leq i\leq s$,

$DM^{u,\lambda}_{[1]}f = u_1'\ D^{v,\mu}_{[1]}f + u_1'\phi_1\ D^{v,\mu}_{[3]}f$,

$DM^{u,\lambda}_{[3]}f = u_3'\phi_3\ D^{v,\mu}_{[3]}f + \varepsilon u_3'(D^{v,\mu}_{[1]}f + \phi_1\ D^{v,\mu}_{[3]}f)$.

PROPOSITION F.4.4.

Soit $x(n)$ un point fermé de $X(n) = \mathrm{Spec}(R)$, soit (u,λ) une p-base de R adaptée en $x(n)$. Effectuons l'éclatement $\pi(n) : X(n+1) \to X(n)$ centré en $x(n)$. Soit $x(n+1) \in X(n+1)$ un point fermé au dessus de $x(n)$ et soient V un voisinage ouvert affine de $x(n+1)$ et (v,μ) une p-base de $O_{X(n+1)}(V)$ tels qu'on les a construits en F.4.1 ou F.4.2 ou F.4.3.1 ou F.4.3.2 en particulier, on a $v_1 = (u_1+\delta u_2+\varepsilon u_3)u_2^{-1}$. Alors

(i) $\begin{cases} v_2^{-\alpha(x(n))}h(x(n))^{-1}(DM^{u,\lambda}_{[1]}+DM^{u,\lambda}_{[2]}+DM^{u,\lambda}_{[3]})(f) = \\ h(x(n+1))^{-1}Df \quad \text{où} \quad D \in \mathcal{D}(X(n+1),E(n+1),\{x(n+1)\})(V) \end{cases}$,

(ii) pour tout $\Delta \in \mathcal{D}(X(n),f,E(n),\{x(n)\})$ de la forme

$\Delta = \gamma DM^{u,\lambda}_{[3]} + \sum_{4\leq i\leq s} \gamma_i\ DM^{u,\lambda}_{[i]}$, $\gamma_i \in R$, $4\leq i\leq s$,

$\gamma \in R$ et $\gamma = 0$ si $\varepsilon \neq 0$,

on a

$v_2^{-\alpha(x(n))} h(x(n))^{-1} \Delta f = h(x(n+1))^{-1} \Delta' f$

où $\Delta' = \gamma' u'_3 \, D^{\nu,\mu}_{[3]} + \sum_{4 \leq i \leq s} \gamma'_i \, D^{\nu,\mu}_{[i]}$

$\Delta' \in \mathcal{D}(X(n+1), E(n+1))(V)$

et $\gamma' \in O_{X(n+1)}(V)$, $\gamma'_i \in O_{X(n+1)}(V)$, $4 \leq i \leq s$.

Ce sont des corollaires de I.E.1, I.F.4.2(9), I.F.4.3.1(4) et I.F.4.3.2(4).

II CONSTRUCTION DE LA MODIFICATION.

A.INTRODUCTION.

Par I.C. il est clair que le problème I.B. se réduit au problème suivant.

PROBLEME A.

Etant donnée une modification $(X(n),f,E(n))$, avec $\nu(X(n))\geq 1$, peut-on construire un prolongement $(X(n+t),f,E(n+t))$ avec $\nu(X(n+t))<\nu(X(n))$?

B. LES COMPOSANTES DE DIMENSION 2.

Dans ce paragraphe nous allons construire un prolongement $(X(n+r),f,E(n+r))$ avec $\nu(X(n+r))<\nu(X(n))$ ou $(\nu(X(n+r)) = \nu(X(n))$ et $\mathrm{Sing}_{\nu(X(n+r))}(X(n+r))$ n'a pas de composante de dimension 2). Dans ce paragraphe, $(X(n),f,E(n))$ est donnée.

NOTATION B.1.

On note $S(2,n)$ le fermé union des composantes de dimension 2 de $\mathrm{Sing}_{\nu(X(n))}(X(n))$.

PROPOSITION B.2.

(i) $S(2,n)$ est régulier en tous ses points.

(ii) Si v est une équation locale de $S(2,n)$, localement $J(X(n),f,E(n)) = (v^\nu)$.

(iii) Au voisinage d'un point de $S(2,n)$ on a $\mathrm{Sing}(X(n),f,E(n)) = S(2,n)$.

Preuve .

Soit v une équation locale de $S(2,n)$, on pose $\nu = \nu(X(n))$, alors localement v^ν divise $J(X(n),f,E(n))$ et $\mathrm{ord}(J(X(n),f,E(n)))\leq\nu$, (i) est clair et en tout point de $S(2,n)$ on a $J(X(n),f,E(n)) =(v^\nu)$, ce qui prouve (ii) et (iii).

COROLLAIRE B.2.1.

Aucune composante de $E(n)$ n'est contenue dans $S(2,n)$.

Preuve .

C'est une conséquence de la définition de $H(X(n),f,E(n))$ (I.A.3.).

PROPOSITION B.3.

Si $S(2,n)$ est à croisements normaux avec $E(n)$ en tous ses points et si on effectue l'éclatement $\pi(n)$ centré en $S(2,n)$, alors :

(i) $\nu(X(n+1))\leq\nu(X(n))$,

(ii) si $\nu(X(n+1)) = \nu(X(n))$, alors $S(2,n+1)$ est vide.

Preuve .

Puisque l'on éclate un diviseur, $\pi(n) : X(n+1) \longrightarrow X(n)$ est un isomorphisme. On peut donc prendre $X(n+1) = X(n)$ et on aura $E(n+1) = E(n)\cup S(2,n)$. Soit (u,λ) une p-base de $O_{X(n),x(n)}$ adaptée à un point $x(n)$ de $S(2,n)$ et telle que u_1 soit une équation locale de $S(2,n)$. Dans un voisinage V de $x(n)$, on a

(1) $\left(u_1^{\nu(X(n))}\right) = J(X(n),f,E(n))\subset J(X(n),f,E(n),S(2,n))$,

(2) $\mathcal{J}(X(n),f,E(n),S(2,n)) = \mathcal{J}(X(n+1),f,E(n+1))$,

(3) $h(X(n+1)) = h(X(n))u_1^r$ avec $r = \mathrm{ord}_{u_1}(J(X(n),f,E(n),S(2,n)))$ et

(4) $\nu(X(n))\leq r\leq\nu(X(n))+1$,

(5) $J(X(n+1),f,E(n+1)) = J(X(n),f,E(n),S(2,n)).\,u_1^{-r}$.

On a donc deux cas.

Si $r = \nu(X(n))+1$, alors $J(X(n+1),f,E(n+1)) = O_{X(n)}$,donc $S(2,n+1) = \phi$.

Si $r = \nu(X(n))$ par I.E.1., au dessus de $S(2,n)$, on a $\mathrm{ord}_{u_1}(J(X(n+1),f,E(n+1))$:

et, en tout point $x(n+1)$ de $\pi(n)^{-1}(S(2,n))$, $\mathrm{ord}_{x(n+1)}(J(X(n+1),f,E(n+1))\leq 1\leq\nu(X(n)$

En dehors de $S(2,n)$, $\nu(.)$ n'a pas varié, dans tous les cas donc $\nu(X(n+1))\leq\nu(X(n)$

Comme $\mathrm{ord}_{u_1}(J(X(n+1),f,E(n+1)) = 0$ au point générique de $S(2,n)$, dans $X(n+1)$, $\nu(.)$ est nul sur un ouvert non vide de $S(2,n) = V(u_1)$, comme à l'extérieur de $S(2,n)$, $\nu(.)$ n'a pas varié, si $\nu(X(n)) = \nu(X(n+1))$, on a clairement $S(2,n+1) = \phi$.

REMARQUE B.3.1..

Dans la preuve ci-dessus, l'éclatement $\pi(n)$ n'est pas toujours permis, c'est la seule fois que nous effectuons un éclatement non permis. Dorénavant, tous les éclatements seront de centres permis en tous leurs points.

REMARQUE B.3.2.

Pour obtenir $S(2,n+t) = \phi$ ou $\nu(X(n+t))<\nu(X(n))$ il suffit donc de se ramener au cas où $S(2,n+t)$ est transverse à $E(n+t)$. Ce sera l'objet des propositions qui suivent, pour ne pas perdre le lecteur dans les méandres de la démonstration, nous allons en faire un plan et décrire succintement l'algorithme que l'on utilise.

Premier pas. B.3.2.1.

Par éclatements de points fermés où cela n'est pas vrai, on réalise :

(*) $I(E(n+t)).O_{S(2,n+t)}$ est l'idéal d'un d.c.n. de $S(2.n+t)$.

Cela sera prouvé en B.5. et explicité en B.6. .

Deuxième pas. B.3.2.2.

Une composante C de $S(2,n+t)\cap E(n+t)$ telle que $S(2,n+t)$ et $E(n+t)$ ne sont pas transverses au point générique de C est dite mauvaise. On éclate les points fermés où les composantes mauvaises de $S(2,n+t)\cap E(n+t)$ ne sont pas permises. On finit par réaliser :

(**) On a (*) et si une composante C de $S(2,n+t)\cap E(n+t)$ est mauvaise, elle est permise en tous ses points.

Cela sera prouvé en B.9.1., B.9.2. et B.9.3. et B.10.1., B.10.2. .

Troisième pas. B.3.2.3.

Si on a (**), on éclate la réunion des C mauvaises avec $m(C) = 1$ (C'est à dire les C qui ne sont incluses que dans une seule composante de $E(n+t)$).

Alors on a (**) et toutes les composantes mauvaises de $S(2,n+t)\cap E(n+t)$ sont intersections de deux composantes de $E(n+t)$.

On les éclate alors dans un ordre idoine et certains invariants baissent.

Ce sera prouvé en B.10.6., les invariants seront définis en B.8., B.10.4., et B.10.5. .

Quatrième pas. B.3.2.4.

On décrit précisément l'algorithme complet en B.10.8. .

PROPOSITION B.4.

Etant donnés $(X(n),f,E(n))$ une modification et $\pi(n)$ un éclatement de $X(n)$ centré en un fermé $Y(n)$ permis en tous ses points, (I.D.1.), alors si $\nu(X(n)) = \nu(X(n+1))$, $S(2,n+1)$ est le transformé strict de $S(2,n)$ (NOTATION 1), en particulier, si $S(2,n)$ est vide, $S(2,n+1)$ est vide.

Preuve.

Ceci résulte de B.2.1.

PROPOSITION B.5.

Etant donnée $(X(n),f,E(n))$ avec $S(2,n)$ non vide, on peut prolonger $(X(n),f,E(n))$ par une suite d'éclatements $\pi(n+i)$, $0<i<t-1$, centrés en des points fermés $x(n+i)$ $S(2,n+i)$ telle que en tout point fermé ξ de $S(2,n+t)\cap E(n+t)$, on a les deux conditions :

(1) $I(E(n+t))O_{S(2,n+t),\xi} = y'^{\beta}z'^{\gamma}O_{S(2,n+t),\xi}$, (y',z') étant un s.r.p. de $O_{S(2,n+t),\xi}$,

(2) si $\beta\gamma \neq 0$ dans (1), alors y' est l'image d'un élément y de $O_{X(n+t),\xi}$ tel que $\mathrm{div}(y)$ est une composante de $E(n+t)$.

Preuve .

A chaque étape on éclate les points fermés de $S(2,n+i)$ où $I(E(n))O_{S(2,n+i)}$ n'est pas l'idéal d'un d.c.n. de $S(2,n+i)$. D'après B.4., $S(2,n+i+1)$ est le transformé strict de $S(2,n+i)$. Ce procédé s'arrête car nous appliquons à l'idéal non nul $I(E(n))O_{S(2,n+i)}$ du schéma $S(2,n+i)$ de dimension 2 l'algorithme classique de désingularisation. Comme $I(E(n+i))$ divise $I(E(n))O_{X(n+i)}$ on obtient (1). Si on a (1) et pas (2), alors on éclate les points fermés ξ où (2) n'est pas vérifié, cet éclatement sépare $\mathrm{div}(y')$ et $\mathrm{div}(z')$ dans $S(2,n+t)$, on obtient (2) sans perdre (1).

NOTATION B.5.1.

Etant donnée $(X(n),f,E(n))$ avec $S(2,n) \neq \phi$ et $S(2,n)$ non transverse à $E(n)$, on note (*) la condition :

(*) on a B.5.(1) et(2) pour $t = 0$.

PROPOSITION B.6.

Etant donnée $(X(n),f,E(n))$ avec $S(2,n)\neq\phi$, on suppose que l'on a $(*)$, alors, en tout point fermé $x(n)$ de $S(2,n)$ où $S(2,n)$ n'est pas transverse à $E(n)$, on a une équation de $S(2,n)$ de la forme :
$v=u_1+u_2^{\beta}u_3^{\gamma}$, (u_1,u_2,u_3) s.r.p. de $O_{X(n),x(n)}$, $div(u_1)\subset E(n)$, $E(n)\subset div(u_1u_2u_3)$, et si $\beta\gamma\neq 0$, $div(u_2)\subset E(n)$.

Preuve .

Nous avons deux s.r.p. de $O_{X(n),x(n)}$, l'un (v,y,z) avec $S(2,n)=div(v)$, y et z relevant y' et z' de B.5.(1), l'autre (u_1,u_2,u_3) tel que $E(n)\subset div(u_1u_2u_3)$.

(i) Si une seule composante de $E(n)$ passe par $x(n)$, soit $div(u_1)$ cette composante, comme elle n'est pas transverse à $S(2,n)$, $S(2,n)$ et $div(u_1)$ sont tangentes. D'après B.5., on a : $u_1 = y^{\beta}z^{\gamma}+vg$, donc g est inversible et $\beta+\gamma\geq 2$, quitte à remplacer v par $-vg$, u_1 par $-u_1$ on a $v=u_1+y^{\beta}z^{\gamma}$, de plus par B.5.(2), on a $\gamma=0$, donc

(1) $v=u_1+y^{\beta}$, $\beta\geq 2$, $div(u_1)=E(n)$.

(ii) Si exactement deux composantes de $E(n)$ passent par $x(n)$, quitte à permuter les u_i on a $E(n)=div(u_1u_2)$, au moins une de ces composantes n'est pas tangente à $S(2,n)$, soit $div(u_2)$. Alors on a par B.5. $u_1u_2=y^{\beta}z^{\gamma}\mathrm{mod}(v)$, donc $u_2=y^bz^c+vg$, $b+c=1$, disons $c=0$, $b=1$, alors $y=u_2$ $\mathrm{mod}(v)$, donc on peut prendre $y=u_2$. Par B.5.(1), on a $u_1u_2=y^{\beta}z^{\gamma}\mathrm{mod}(v)$ donc $u_1=y^rz^s+vg_2=u_2^rz^s+vg_2$.

Si g_2 est une unité, quitte à multiplier v et u_1 par des inversibles, et à compléter le système u_1,u_2 en u_1,u_2,z pour obtenir un s.r.p. de $O_{X(n),x(n)}$, on a :

(2) $v=u_1+u_2^ru_3^s$, $div(u_1u_2)=E(n)$.

Si g_2 n'est pas une unité; alors $r=0$, $u_1=z+\mathfrak{m}^2$, on remplace z par u_1, on a alors $S(2,n)$ transverse à $div(u_1\ u_2)$, c'est impossible.

(iii) Si $E(n) = div(u_1 u_2 u_3)$, alors au moins deux composantes de $E(n)$ ne sont pas tangentes à $S(2,n)$, soit $div(u_2)$ et $div(u_3)$, on a :

$u_2 = y^r z^s + vg_2$, $u_3 = y^{r'} z^{s'} + vg_3$, avec $r = 0$, $s = 1$, $r' = 1$, $s = 0$.

On peut donc prendre $y = u_2$, $z = u_3$, on a alors :

$u_1 = u_2^b u_3^c + vg_1$

et g_1 est une unité, donc, quitte à multiplier v et u_1 par des inversibles, on a :

(3) $v = u_1 + u_2^b u_3^c$, $div(u_1,u_2,u_3) = E(n)$. Ce qui termine la preuve de B.6. .

B.8. Avant de poursuivre notre algorithme supprimant $S(2,n)$, nous devons introduire quelques notions générales.

<u>REMARQUE ET DEFINITION</u> B.8.1.

On définit par récurrence une relation d'ordre partiel sur les composantes irréductibles de $E(n)$, $n \geq 0$. On la note $\geqslant$.

1) Pour $n = 0$, on a $E(0) = \phi$ et donc on n'a rien à définir.

2) <u>Pour $n>0$</u> , les composantes irréductibles de $\overline{\{E(n)-\pi(n-1)^{-1}(Y(n-1))\}}$ sont les transformées strictes des composantes de $E(n-1)$. La relation d'ordre sur ces composantes est celle qui est induite par la relation définie sur les composantes de $E(n-1)$.

3) Toute composante irréductible de $\pi(n-1)^{-1}(Y(n-1))$ est <u>strictement plus petite</u> que toute composante de $\overline{\{E(n)-\pi(n-1)^{-1}(Y(n-1))\}}$ et elle n'est pas comparable aux autres composantes de $\pi(n-1)^{-1}(Y(n-1))$.

B.8.1.1. On voit que toute composante de $E(n)$ est comparable aux composantes qu'elle rencontre.

B.8.1.2. Pour tout point $\eta \in X(n)$, la relation d'ordre induite sur les composantes de $E(n)$ contenant η est une relation d'ordre total. De plus, elle peut être définie par la seule donnée de la suite d'anneaux locaux.

$(S) O_{X,\eta(0)} \subset \dots \subset O_{X(i),\eta(i)} \subset \dots \subset O_{X(n),\eta(n)}$

où $\eta(i)$ est la projection de η sur $X(i)$. Pour toute composante F de $E(n)$ contenant η , il existe dans la suite (S) un plus petit anneau $O_{X',\eta'}$ que l'on note $A(F)$ et tel que F se projette isomorphiquement sur un diviseur de $\mathrm{Spec}[A(F)]$. Alors, si F_1 et F_2 sont deux composantes de $E(n)$ passant par η, on a

$$F_1 \geq F_2 \Longleftrightarrow A(F_1) \subset A(F_2) ,$$

et si $F_1 \neq F_2$ alors $A(F_1) \neq A(F_2)$.

B.8.1.3. Pour des raisons bien évidentes, si deux composantes F et F' de $E(n)$ sont comparables, $F<F'$ sera lu " F plus petit que F' " ou " F plus jeune que F' " ou " F' plus ancienne que F ".

B.8.1.4. On rappelle que l'expression " F est maximale " signifie que F est plus grande que toutes les composantes qui lui sont comparables.

NOTATION B.8.2.

Soient $(X(n),f,E(n))$ une modification et C un fermé de $X(n)$, on note $m(C)$ le nombre de composantes de $E(n)$ contenant C.

DEFINITION ET NOTATION B.8.3.

Soit C une courbe irréductible de $X(n)$, on définit $\sigma(C)$ par

(i) si $m(C) = 2$, $\sigma(C) = (F,F')$ où F et F' sont les composantes de $E(n)$ contenant C et $F>F'$,

(ii) si $m(C) = 1$, $\sigma(C) = (F,-\infty)$ où F est la composante de $E(n)$ contenant contenant C,

(iii) si $m(C) = 0$, $\sigma(C) = (-\infty,-\infty)$.

On ordonne les $\sigma(C)$ par ordre lexicographique.

B.9. Nous allons maintenant prouver trois résultats généraux qui seront constamment utilisés dans la suite de cet article.

PROPOSITION B.9.1.

Etant donnés $(X(n).f,E(n))$ une modification, C une courbe de $X(n)$, $x(n)$ un point fermé de C, il existe un prolongement de $(X(n),f,E(n))$ par une suite d'éclatements $\pi(n+i)$, $0\leq i\leq t-1$, centrés en $x(n+i)$ points fermés au dessus de $x(n)$ sur les transformés stricts $C(n+i)$ de $C = C(n)$ telle que :

(i) $C(n+t)$ est à croisements normaux avec $E(n+t)$ en $x(n+t)$,

(ii) $\alpha(x(n+t)) = \alpha(C(n+t))$.

Alors, si $C\subset \mathrm{Sing}(X(n))$, $C(n+t)$ est permise en $x(n+t)$.

Preuve.

Il est bien connu (I.E.6.) que l'on peut obtenir (i) et que cette condition est stable par l'éclatement de $x(n+t)$. Nous pouvons donc supposer désormais que $C(n)$ est à croisements normaux avec $E(n)$ en $x(n)$. On a alors une p-base $(u.\lambda)$ de $O_{X(n),x(n)}$ adaptée en $x(n)$ et $I(C) = (u_1,u_2)$. Alors les $x(n+i)$ sont des points de croisement (I.F.4.1.) et donc, d'après le lemme de SANCHEZ [16] , pour i assez grand,

$\mathrm{ord}_{x(n+i)}(I(X(n+i),f,(u(i),\lambda))) = \mathrm{ord}_{I(C(n+i))}(I(X(n+i),f,(u(i),\lambda)))$,

avec $(u(i),\lambda) = (u_1/u_3^{\,i},u_2/u_3^{\,i},u_3,\lambda_4,\dots,\lambda_s)$, p-base adaptée en $x(n+i)$ (voir (I.F.4.1.)), d'après (I.A.6.(3)), cette égalité implique (ii). De plus, d'après (I.D.5.), si on a l'égalité (ii), $C(n+i)$ est permis en $x(n+i)$. Ceci met fin à la preuve de B.9.1. .

PROPOSITION B.9.2.

Etant donnée $(X(n),f,E(n))$ une modification, toute courbe irréductible $C\subset \mathrm{Sing}(X(n))$ est permise en presque tous ses points.

Preuve.

C'est une conséquence de I.D.1. car l'ordre de l'idéal $J(X(n),f,E(n),C)$ est constant sur un ouvert dense de C.

De B.9.1. et B.9.2. nous déduisons immédiatement :

PROPOSITION B.9.3.

Etant donnés $(X(n),f,E(n))$ une modification et C une courbe de $\mathrm{Sing}(X(n))$, il existe une suite finie d'éclatements $\pi(n+i)$ centrés en des points fermés de $C(n+i)$, transformé strict de C dans $X(n+i)$, $0\leq i\leq t-1$, telle que $C(n+t)$ est permis en tous ses points.

B.10. Etant donnée $(X(n),f,E(n))$ avec $S(2,n) \neq \phi$, $S(2,n)$ non transverse à $E(n)$, on suppose que l'on a la condition (*), nous allons construire une suite d'éclatements permis $\pi(n+i)$, $0\leq i\leq t-1$ telle que $S(2,n+t)$ est transverse à $E(n)$.

PROPOSITION B.10.1.

Soit $x(n)$ un point fermé de $S(2,n)$, soient (u_1,u_2,u_3) un s.r.p. de $O_{X(n),x(n)}$ et v une équation de $S(2,n)$ pour lesquels on a :

(★) $v = u_1+u_2^{\beta}u_3^{\gamma}$, $div(u_1)\subset E(n)\subset div(u_1u_2u_3)$, si $\beta\gamma \neq 0$ on a $div(u_2)\subset E(n)$.

On pose $C_2 = V(u_1,u_2)$, $C_3 = V(u_1,u_3)$, alors

(i) si $\beta \geq 1$, on a $\nu(C_2) = \nu(x(n)) = \nu(X(n))$,

si $\gamma\geq 1$ on a $\nu(C_3) = \nu(x(n)) = \nu(X(n))$,

(ii) si $\beta\geq 1$ et $div(u_2)\subset E(n)$, alors C_2 est permise, si $\gamma\geq 1$ et $div(u_3)\subset E(n)$, alors C_3 est permise,

(iii) si $\beta = 1$, $\gamma = 0$ alors $div(u_2)\subset E(n)$ ou bien $S(2,n)$ est transverse à $E(n)$ en $x(n)$.

Preuve de (i). Si $\beta\geq 1$ alors $I(C_2)\supset \nu O_{X(n),x(n)}$, donc $C_2\subset S(2,n)$, donc $\nu(C_2) = \nu(X(n)) = \nu(x(n))$. On fait de même pour le cas $\gamma \geq 1$.

Preuve de (ii). Si $\beta\geq 1$ et $div(u_2)\subset E(n)$, alors d'après B.6. , C_2 est combinatoire (I.A.5.(6)) et puisque

(1) $\nu(C_2) = \nu(x(n)) = \alpha(C_2) = \alpha(C_2,x(n))\geq 1$.

alors C_2 est permise en $x(n)$ (I.D.9.).

Preuve de (iii). Il suffit de remarquer que si $\beta = 1$, $\gamma = 0$ et $div(u_2)\not\subset E(n)$, alors $S(2,n) = V(v)$ est transverse à $div(u_1u_3)$ et donc à $E(n)$.

<u>DEFINITION</u> B.10.2.

Etant donnée $(X(n),f,E(n))$ avec $S(2,n) = 0$ et $S(2,n)$ non transverse à $E(n)$, on note (★★) la condition

(★★) on a (★) et toute composante de dimension 1 de $E(n) \cap S(2,n)$ telle que $E(n)$ et $S(2,n)$ ne sont pas transverses en son point générique est permise en tous ses points.

<u>PROPOSITION</u> B.10.3.

Etant donnée $(X(n),f,E(n))$ avec $S(2,n)$ non transverse à $E(n)$, on suppose que l'on a la condition (★). Alors il existe une suite $\pi(n+i) : X(n+i+1) \to X(n+i)$ d'éclatements de points fermés $x(n+i) \in X(n+i)$, $0\leq i\leq t-1$ telle que on a (★★) pour $(X(n+t),f,E(n+t))$.

Preuve.

A chaque étape on éclate les points fermés de $S(2,n+i)$ où passe une composante de dimension 1 du support de $I(E(n+i))O_{S(2,n+i)}$ telle que $E(n+i)$ et $S(2,n+i)$ ne sont pas transverses en son point générique.

D'après B.4., $S(2,n+i+1)$ est le transformé strict de $S(2,n+i)$.

Si en ξ, $E(n+i)$ n'est pas transverse à $S(2,n+i)$, alors on a (*) et donc $v = u_1+u_2^\beta u_3^\gamma$, $(u_1u_2u_3)$ s.r.p. de $O_{X(n+i),\xi}$. Si $\beta+\gamma\geq 2$, alors tout point fermé de $S(2,n+i+1)$ au dessus de ξ est sur le transformé strict de $\mathrm{div}(u_1)\subset E(n)$. Etudions par exemple l'ouvert où u_2 est l'équation du diviseur exceptionnel de $\pi(n+i)$. On a alors :

$v/u_2 = (u_1/u_2) + u_2^{\beta+\gamma-1}(u_3/u_2)^\gamma$,

en tout point de cet ouvert, on a clairement (*) et $S(2,n+i+1)\cap\pi(n+i)^{-1}(\xi)=V(u_1/u_2,u_2)$ est permise en tous ses points d'après B.10.1.(ii).

On n'a pas $\beta+\gamma = 1$, sinon on prend $\beta = 1$, $\gamma = 0$, alors d'après B.10.1.(iii), $\mathrm{div}(u_2)\subset E(n+i)$, et $C_2 = V(u_1,u_2)$ est permise et $V(u_1,u_2) = E(n+i)\cap S(2,n+i)$, donc le point ξ n'a pas à être éclaté. En résumé, quand on effectue un de nos éclatements, les composantes de dimension 1 de $S(2,n+i+1)\cap E(n+i+1)$ qui ne sont pas les transformées strictes de celles de $S(2,n+i)\cap E(n+i)$ sont permises, ou bien en tous leurs points, $S(2,n+i+1)$ est transverse à $E(n+i+1)$. Alors B.9.1. termine la preuve de B.10.3. .

<u>PROPOSITION</u> B.10.4.

Etant donnés $(X(n),f,E(n))$ satisfaisant à (*) et $x(n)$ un point fermé de $S(2,n)$ où $S(2,n)$ et $E(n)$ ne sont pas transverses, on pose (B.6.)

(1) $v = u_1+u_2^\beta u_3^\gamma$, $\mathrm{div}(u_1)\subset E(n)\subset \mathrm{div}(u_1u_2u_3)$ et $S(2,n) = \mathrm{div}(v)$.

(i) Il existe au moins une composante C de $S(2,n)\cap E(n)$ passant par $x(n)$ et telle que $E(n)$ et $S(2,n)$ ne sont pas transverses en son point générique.

(ii) Si C est comme dans (i) avec $m(C) = 1$, on a :

(1) $(C = V(u_1,u_2)$, $\beta\geq 2)$ ou $(C = V(u_1,u_3)$, $\gamma\geq 2)$.

(iii) Si C est comme dans (i) avec $m(C) = 2$, on a la condition :

(2) $(C = V(u_1,u_2)$ et $\beta\geq 1)$ ou $(C = V(u_1,u_3)$ et $\gamma\geq 1)$.

(iv) Une courbe C vérifiant la condition de B.10.4.(i) sera dite mauvaise.

Preuve de (i).

Si $\beta\gamma \neq 0$ alors $C_2 = V(u_1,u_2) \subset S(2,n) \cap E(n)$, $div(u_1u_2) \subset E(n)$, (cf.B.6.) il est clair que l'on peut prendre $C_2 = C$.

Si $\gamma = 0$, alors $\beta \neq 0$ et $C_2 = V(u_1,u_2) \subset S(2,n) \cap E(n)$, si $div(u_1u_2) \subset E(n)$, $C_2 = C$ convient, si $div(u_2) \not\subset E(n)$, on a $\beta \geqslant 2$, sinon $S(2,n)$ et $E(n)$ sont transverses en $x(n)$, et donc $C_2 = C$ convient encore. De même, si $\beta = 0$, $C_3 = V(u_1,u_3)$ convient.

Preuve de (ii).

Si $C \subset div(u_1)$, alors $C = V(u_1,u_2)$ ou $V(u_1,u_3)$. Si $C = V(u_1,u_2)$ alors $\beta \geqslant 1$ et, comme $m(C) = 1$ on a $div(u_2) \not\subset E(n)$, l'hypothèse de non transversalité au point générique entraine $\beta \geqslant 2$. De même, si $C = V(u_1,u_3)$ alors $\gamma \geqslant 2$.

Si $C \not\subset div(u_1)$ alors $C \subset div(u_2) \subset E(n)$ ou $C \subset div(u_3) \subset E(n)$. Regardons le cas où $C \subset div(u_2) \subset E(n)$, alors $\beta = 0$, sinon $C = V(u_1,u_2) \subset div(u_1)$, mais alors $S(2,n)$ et $E(n)$ sont transverses au point générique de C , ce cas est impossible, comme est impossible le cas $C \subset div(u_3) \subset E(n)$.

Preuve de (iii).

Par définition de m , on a $C = V(u_1,u_2)$ ou $V(u_1,u_3)$ ou $V(u_2,u_3)$. Montrons que le cas $C = V(u_2,u_3)$ est impossible ; en effet, sinon on a : $C \subset div(u_3) \cap S(2,n) = V(u_1+u_2^{\beta}u_3^{\gamma},u_3) \not\supset V(u_2,u_3)$. Donc $C = V(u_1,u_2)$ ou $V(u_1,u_3)$. Etudions le cas $C = V(u_1,u_2)$, alors en le point générique η de C , u_3 est inversible et $E(n) = div(u_1.u_2)$, alors $\beta \geqslant 1$, sinon $u_1(\eta)$ est inversible.

<u>PROPOSITION</u> B.10.5.

Avec les hypothèses et notations de B.10.4., si il existe deux composantes C et C' de $S(2,n) \cap E(n)$ passant par $x(n)$ et telles qu'en leurs points génériques η et η' $S(2,n)$ et $E(n)$ ne sont pas transverses, alors : $(m,\sigma)(C) \neq (m,\sigma)(C')$.

Preuve.

Si $m(C) \neq m(C')$, c'est évident.

Si $m(C) = m(C') = 1$, alors $\beta \geqslant 2$ et $\gamma \geqslant 2$, $div(u_2) \not\subset E(n)$, $div(u_3) \not\subset E(n)$ (B.10.4.(ii)) , c'est impossible (B.6.) .

Si $m(C) = m(C') = 2$ alors $\beta \geqslant 1$ et $\gamma \geqslant 1$, $E(n) = div(u_1u_2u_3)$ (B.10.4.(iii)) , d'après B.8.3.1., $\sigma(C) \neq \sigma(C')$.

PROPOSITION B.10.6.

Avec les hypothèses et notations de B.10.4., si on effectue l'éclatement $\pi(n)$ centré en une courbe C mauvaise (B.10.4.), alors il y a un et un seul point $x(n+1)$ au dessus de $x(n)$ dans $S(2,n+1)$. Soit $S(2,n+1)$ est transverse à $E(n+1)$ en $x(n+1)$, soit on a la relation (*) où (β,γ) est devenu $(\beta-1,\gamma)$ ou $(\beta,\gamma-1)$. De plus on a (*) pour $(X(n+1),f,E(n+1))$. De plus si $m(C) = 1$ ou ($m(C) = 2$ et il n'y a pas de courbe mauvaise D avec $m(D) = 1$ intersectant C) , on a (**) pour $(X(n+1),f,E(n+1))$.

Preuve.

L'éclatement $\pi(n)$ est permis, donc $S(2,n+1)$ est le transformé strict de $S(2,n)$, mais C' est un diviseur de $S(2,n)$, donc $\pi(n)$ restreint à $S(2,n)$ est un isomorphisme de $S(2,n+1)$ sur $S(2,n)$, d'où l'existence et l'unicité de $x(n+1)$. Pour les calculs, nous n'étudions que les cas où $C = V(u_1,u_2)$. Alors $v \in (u_1,u_2)$, donc $\beta \geqslant 1$, on pose $u'_1 = u_1/u_2$, $u'_2 = u_2$, $u'_3 = u_3$.

(1) $v/u_2 = u'_1 + u'^{\beta-1}_2 u'^{\gamma}_3$,

si $\beta+\gamma \geqslant 2$, il est clair que $u'_1(x(n+1)) = 0$, on a (*) en $x(n)$ et le nouveau couple d'exposants est $(\beta-1,\gamma)$.

Si $\beta+\gamma = 1$, alors , d'après B.10.5., $\beta = 1$, $\gamma = 0$ et $div(u_2) \subset E(n)$, on a $v/u_2 = u'_1+1$, donc $u'_1(x(n+1))$ est inversible, $E(n+1) \subset div(u'_2u'_3)$, $S(2,n+1)$ est transverse à $E(n+1)$ en $x(n+1)$.

On a (*) pour $(X(n+1),f,E(n+1))$ car on a fait l'éclatement d'une composante du support de $I(E(n))O_{S(2,n)}$ et donc $I(E(n+1))O_{S(2,n+1)}$ satisfait à B.5.(1), et comme $div(u'_2) \subset E(n+1)$, on a B.5.(2).

Si $\beta\geq 2$, alors la courbe $C' = S(2,n+1)\cap\pi(n+1)^{-1}(C) = V(u'_1,u'_2)$ est isomorphe à C et on a $v/u_2 = u'_1+u'^{\gamma}_3u'^{\beta-1}_2$, au point générique η' de C' $E(n+1)$ et $S(2,n+1)$ ne sont pas transverses, mais comme cette courbe est combinatoire, elle est permise en tous ses points (B.10.1.). De plus une autre composante D de $S(2,n+1)\cap E(n+1)$ est la transformée stricte d'une composante de $S(2,n)\cap E(n)$, si $E(n+1)$ et $S(2,n+1)$ ne sont pas transverses au point générique de D , alors D est permise en tous ses points sauf peut-être en $x(n+1)$, mais si D passe par $x(n+1)$, on a $D = V(u'_1,u'_3)$ (B.10.4.) avec $\gamma\geq 2$ ou($\gamma\geq 1$ et div $u'_3\subset E(n+1)$); si $m(C) = 1$, alors $m(D) = 2$ d'après B.6. ; si $m(C) = 2$ alors $m(D) = 2$ par hypothèse, donc D est une courbe combinatoire, d'après I.D.9., elle est permise en $x(n+1)$.

Si $\beta = 1$ alors on a $v/u_2 = u'_1+u'^{\gamma}_3$, $C' = S(2,n+1)\cap\pi(n+1)^{-1}(C) = V(u'_1+u'^{\gamma}_3,\ u'_2)$, $E(n+1)$ et $S(2,n+1)$ sont transverses en le point générique η' de C' , de plus les autres composantes de $S(2,n+1)\cap E(n+1)$ sont les transformées strictes des composantes de $S(2,n)\cap E(n)$, en raisonnant comme pour le cas $\beta>2$, on montre qu'on a (**). Ce qui termine la preuve de B.10.6.

PROPOSITION B.10.7.

Etant donnés $(X(n),f,E(n))$ et $x(n)$ un point fermé de $S(2,n)$ où l'on a (**) , si on effectue la suite d'éclatements $\pi(n+i)$, $0\leq i$, centrés en les courbes $Y(n+i)\ni x(n+i)$ où $x(n+i)$ est le point fermé au-dessus de $x(n)$ sur $S(2,n+i)$, $Y(n+i)$ étant la composante mauvaise de dimension 1 de $S(2,n)\cap E(n)$ où (m,σ) est minimal pour l'ordre lexicographique, alors, pour un entier $t\geq 0$, $S(2,n+t)$ est transverse à $E(n+t)$.

Preuve.

C'est un corollaire de B.10.5. et B.10.6. . Il suffit de remarquer qu'à chaque pas $\beta+\gamma$ décroît strictement en tous les points du centre de l'éclatement.

ALGORITHME B.10.8.

Etant donnée une modification $(X(n),f,E(n))$, avec $\nu(X(n))\geq 1$ et $S(2,n)\neq\phi$. on construit un prolongement $(X(n+r),f,E(n+r))$ de $(X(n),f,E(n))$ de longueur $n+r$. Pour $0\leq i\leq r$.

(i) si on n'a pas $(\star)$, $Y(n+i)$ est le plus petit fermé de $S(2,n+i) \cap E(n+i)$ tel qu'on a $(\star)$ sur $S(2,n+i)-Y(n+i)$,

(ii) si on a $(\star)$, $Y(n+i)$ est l'ensemble des points fermés de $F(n+i)$ où on n'a pas $(\star\star)$,

(iii) si il y a des points fermés où $S(2,n+i)$ n'est pas transverse à $E(n+i)$ et si on a $(\star\star)$, $Y(n+i)$ est la composante de dimension 1 de $E(n+i) \cap S(2,n+i)$ où (m, σ) est minimal pour l'ordre lexicographique ,

(iv) si $S(2,n+i)$ est partout transverse à $E(n+i)$, $Y(n+i) = S(2,n+i)$,

(v) si $S(2,n+i) = \phi$ ou si $\nu(X(n+i)) \leq \nu(X(n))$. on pose $r = i$.

Par B.4. B.10.3. B.10.4. B.10.5. B.10.7; B.10.8. cet algorithme est bien défini et ce prolongement est fini.

REMARQUE B.11.

Désormais nous nous astreindrons à effectuer des éclatements dont les centres sont permis en tous leurs points, (B.10.8.) nous permet de réduire le problème I.B. au problème suivant :

PROBLEME B.11.1.

Etant donnée une modification $(X(n),f,E(n))$ avec $S(2,n) = \phi$, $\nu(X(n)) \geq 1$, peut-on construire un prolongement de longueur totale $n+t$. tel que pour $0 \leq i \leq t-1$, $Y(n+i)$ est permis en tous ses points et $\nu(X(n+t)) < \nu(X(n))$?

C - L'ALGORITHME.

Dans ce paragraphe, $(X(n),f,E(n))$ est une modification donnée.

C.O. Un point fermé $x \in \mathrm{Sing}(X(n))$ est dit maigre si au voisinage de x , on a $\dim[\mathrm{Sing}_{\nu(x)}[X(n)]] \leq 1$.

C.O.1. Puisque désormais $S(2,n) = \phi$, tous les points de $\mathrm{Sing}_{\nu(X(n))}[X(n)]$ sont maigres.

C.O.2. Pour tout point maigre $x \in \mathrm{Sing}(X(n))$, on va définir par récurrence sur q des propriétés qui s'écrivent $\kappa(x) = q$, $q \in \{0,1,\dots,7\}$ et qui s'excluent mutuellement.

Une fois définie $\kappa(x) = q$, un algorithme permettra de tester si un point maigre x avec $\kappa(x) = q$ est bon ; ce qui signifiera qu'on sait construire une suite d'éclatements de courbes telle que tout point x' qui est ν-proche de x vérifie $\mathcal{K}(x') = q'$ avec $q'<q$.

C.O.3. D'après I.E.2.2, I.E.2.3. et I.E.2.4, si on effectue un éclatement $\pi : X' \to X(n)$ permis en x , tout point $x' \in X'$ qui est ν-proche de x est maigre.

DEFINITION C.1.

On dit que $\mathcal{K} = 0$ en $x(n)$ point fermé de $\mathrm{Sing}(X(n))$ et on note $\mathcal{K}(x(n)) = 0$ si l'algorithme suivant aboutit à un succès au bout d'un nombre fini de pas : on effectue la suite d'éclatements $\pi(n+i)$, $0 \leq i$, ainsi définie :

(i) $Y(n+i) = \{y \in X(n+i)$, y est ν-proche de $x(n)\}$ est le centre de $\pi(n+i)$,

(ii) si $Y(n+i+1)$ est infini, on a un échec au rang i ,

(iii) si $Y(n+i+1) = \emptyset$, on a un succès au rang i .

REMARQUE C.1.1.

D'après I.E.2.2.(7) et I.F.2.3.(7), si $\nu(x(n)) = 3$, alors $\mathcal{K}(x(n)) = 0$.

REMARQUE C.1.2.

Si $\mathcal{K}(x(n)) = 0$ alors $x(n)$ est isolé dans sa ν-strate.

ALGORITHME de $\mathcal{K} = 1$. C.2.

Soit x un point maigre de $\mathrm{Sing}(X(n))$. On lui applique l'algorithme suivant.

(i) On cherche les courbes irréductibles C passant par x avec $\alpha(C) \geq \nu(x)$ et telles que $(\nu(C), m(C), \alpha(C), \sigma(C))$ est maximal,

1 - si C n'existe pas, on a un échec,

2 - si il y a plusieurs courbes C , on a un échec,

3 - si C est unique, on passe à (ii).

(ii) 1 - Si C n'est pas permise en x , on a un échec,

2 - si C est permise en x et $\nu(C)<\nu(x)$, on passe à (iii),

3 - si C est permise en x et $\nu(C) = \nu(x)$, on passe à (iv).

(iii) On effectue l'éclatement $\pi : X' \to X(n)$ centré en C ,

1 - si dans X' il n'y a pas de point ν-proche de x , on a un succès,

2 - dans tous les autres cas, on a un échec.

(iv) On effectue l'éclatement $\pi : X' \to X(n)$ centré en C , 1 - si dans X' , il n'y a pas de point ν-proche de x , on a un succès,

2 - si dans X' , il y a plusieurs points ν-proches de x , on a un échec,

3 - si dans X' , il y a un et un seul point x' qui est ν-proche de x , on prolonge $(X(n),f,E(n))$ par π et on applique (i).

Si cet algorithme aboutit à un succès au bout d'un nombre fini de pas et si $\kappa(x)\neq 0$ alors on dit que $\kappa(x) = 1$.

REMARQUE C.2.1.

Le cas (iv)2 ne peut jamais se présenter.

Preuve .

En effet, d'après (I.E.2.2.(6),2.3.(7),2.4.), quand on effectue un éclatement permis centré en une courbe, il y a au plus un point ν-proche de $x(n)$.

REMARQUE C.2.2.

L'algorithme de C.2 ne peut pas boucler.

Preuve .

Si cet algorithme boucle , on est constamment dans le cas (iv)3 , on éclate donc toujours des courbes permises contenues dans $\mathrm{Sing}_{\nu}(X(n))$, d'après (I.E.2.2.(6),2.3.(6),2.4.), on ne crée pas de composantes verticales de $\mathrm{Sing}_{\nu}(X(n+1))$, donc il existe une courbe Γ de $\mathrm{Sing}_{\nu}(X(n))$ qui sera centre d'éclatement dans cet algorithme et on effectuera une infinité d'éclatements de courbes dont les points génériques sont ν-proches du point générique de Γ . En appliquant le résultat de [5] à $X(n)$ au point générique de Γ , on a une contradiction car, en dimension 2, on ne peut avoir une infinité de points ν-proches.

PROPOSITION C.2.3.

Soit Γ une courbe irréductible de point générique η , $\eta \in \mathrm{Sing}(X(n))$. On suppose que η n'est contenu dans aucune composante de dimension 2 de $\mathrm{Sing}_{\nu(\eta)}(X(n))$. Alors en presque tous les points fermés $x \in \Gamma$, on a $\nu(x) = \nu(\eta)$ et $\kappa(x) = 1$.

Preuve .

Comme ci-dessus, il suffit d'appliquer le résultat de [5] à $X(n)$ au point générique de Γ .

ALGORITHME DU POINT BON C.3.

Soit x un point maigre de $Sing(X(n))$ avec $\varkappa(x) = q$. On suppose que les relations $\varkappa(.) = q'$ ont été définies pour $0 \leq q' \leq q$. On applique l'algorithme suivant à x .

(i) On cherche les courbes C irréductibles passant par x avec $\alpha(C) \geq \nu(x)$ et telles que $(\nu(C), m(C), \alpha(C), \sigma(C))$ est maximal,

1 - si C n'existe pas, on a un échec,

2 - si il y a plusieurs courbes C , on a un échec,

3 - si C est unique on passe à (ii).

(ii)1 - Si C n'est pas permise en x , on a un échec,

2 - si C est permise en x et si $\nu(C) < \nu(x)$, on passe à (iii),

3 - si C est permise en x et $\nu(C) = \nu(x)$, on passe à (iv).

(iii) On effectue l'éclatement $\pi : X' \to X(n)$ centré en C ,

1 - si dans X' , il n'y a pas de point ν-proche de x , on a un succès,

2 - si dans X' , il y a un et un seul point x' qui est ν-proche de x et si $\varkappa(x') = q' < q$, on a un succès,

3 - dans tous les autres cas on a un échec.

(iv) On effectue l'éclatement $\pi : X' \to X(n)$ centré en C ,

1 - si dans X' , il n'y a pas de point ν-proche de x , on a un succès,

2 - si dans X' , il y a un et un seul point x' qui est ν-proche de x et si $\varkappa(x') = q' < q$, on a un succès,

3 - si dans X' , il y a un et un seul point x' qui est ν-proche de x et si $\varkappa(x') = q$, on lui applique (i),

4 - dans tous les autres cas, on a un échec.

C.3.1. Si cet algorithme aboutit à un succès au bout d'un nombre fini de pas, on dit que x est bon.

DEFINITION C.3.2.

Un point fermé maigre x de $Sing(X(n))$ qui n'est pas bon est dit mauvais.

REMARQUE C.3.3.

Tous les points maigres de Sing(X(n)) où $\varkappa$ vaut 1 sont bons.

REMARQUE C.3.4.

Pour vérifier qu'un point est bon, nous devons effectuer un algorithme décrit dans (C.3.), cet algorithme ne boucle pas.

La preuve est pratiquement identique à celle de (C.2.2.).

C.4. Dans les chapitres suivants, tous nos efforts vont tendre à définir $\varkappa(x) = q$ pour $q \geqslant 2$ et à prouver C.4.1 et C.4.4 qui suivent.

PROPOSITION C.4.1.

Soit x un point maigre et mauvais de Sing(X(n)) avec $\varkappa(x) = q$, alors, si on prolonge $(X(n),f,E(n))$ par l'éclatement $\pi : X' \to X(n)$ centré en x , en tous les points x' qui sont ν-proches de x , on a $\varkappa(x') = q'$ avec $q'<q$.

C.4.1.1. Puisque la propriété $\varkappa(.) = q$ sera définie par récurrence sur q , l'énoncé C.4.1 garantit en particulier que $\varkappa(y)$ est défini pour tout point ν-proche de x .

DEFINITION C.4.2.

Soit x un point maigre de Sing(X(n)) , alors, si on prolonge $(X(n),f,E(n))$ par des éclatements permis $\pi(n+i) : X(n+i+1) \to X(n+i)$, $0 \leqslant i \leqslant t-1$, tout point fermé $x' \in X(n+i)$ au-dessus de x avec $\nu(x) = \nu(x')$ sera dit $(\nu,\varkappa)$-proche de x si de plus $\varkappa(x') = \varkappa(x)$.

C.4.2.1. Cette définition est licite parce que tout point ν-proche de x est maigre (cf.B.4.).

C.4.3. On notera $(\nu(x),\varkappa(x)) = (\nu,\varkappa)(x)$.

THEOREME C.4.4.

Soit x un point maigre et mauvais de Sing(X(n)) alors on peut prolonger $(X(n),f,E(n))$ en $(X(n+t),f,E(n+t))$ où pour $0 \leqslant i \leqslant t-1$, $Y(n+i)$ est l'ensemble des points $y \in X(n+i)$ qui sont mauvais et $(\nu,\varkappa)$-proches de x .

C.4.5. Le théorème C.4.4 nous assure donc qu'au bout d'un nombre fini d'éclatements de points fermés, en tout point y qui est ν-proche de x , on a

$\kappa(y)<\kappa(x)$ ou ($\kappa(y) = \kappa(x)$ et y est bon).

C.5. A la fin de ce travail nous aurons prouvé que pour tout point maigre $x \in X(n)$, on a l'une des propriétés $\kappa(x) = q$ pour $q = 0,1,\dots,7$. Nous allons montrer que la résolution du problème A résulte de ce fait et de C.4.1 et C.4.4.

PROPOSITION C.5.1.

Supposons que $\dim[\mathrm{Sing}_{\nu(X(n))}(X(n))] = 0$ et que pour tout $x \in \mathrm{Sing}_{\nu(X(n))}(X(n))$ on a $\kappa(x)\geq 1$ et que x est bon. Alors on a les assertions qui suivent.

(i) Pour tout $x \in \mathrm{Sing}_{\nu(X(n))}(X(n))$, il existe une et une seule courbe irréductible D de $X(n)$ telle que $x \in D$, $\alpha(D)\geq\nu(x)$ et $(\nu,m,\alpha,\sigma)(D)$ est maximal. On la note C_x.

(ii) On a $\nu(C_x) = \nu(X(n))-1$, $\alpha(C_x) = \nu(X(n))$ et $m(C_x)\leq 1$.

(iii) Soit C la réunion des C_x telles que $(\nu,m,\alpha,\sigma)(C_x)$ soit maximal parmi les $(\nu,m,\alpha,\sigma)(C_x)$. Alors pour tout $x \in C\cap\mathrm{Sing}_{\nu(X(n))}(X(n))$ il existe un voisinage U tel que $C\cap U = C_x\cap U$.

Preuve.

La courbe C_x est la courbe C de C.3(i), C.3(i)3 nous assure l'existence et l'unicité.

On a prouvé (i). Prouvons (ii).

On a $\nu(C_x) = \nu(X(n))-1$ car $\dim[\mathrm{Sing}_{\nu(X(n))}(X(n))] = 0$, $\alpha(C_x) = \nu(x) = \nu(X(n))$ car C_x est permise en x et $m(C_x)\leq 1$, sinon C_x serait combinatoire et on aurait $\alpha(C_x) = \nu(C_x)$.

Prouvons (iii). Posons $\nu = \nu(x)$. Si D est une composante irréductible de C passant par x, alors par (ii), on a $\nu(D) = \nu(C_x)$ et $\alpha(D) = \alpha(C_x)$. De plus, par maximalité, $m(D) = m(C_x)$. Puisque D et C_x passent par x, $\sigma(D)$ et $\sigma(C_x)$ sont comparables (B.8.1.1) et donc sont égaux par maximalité. Donc, par définition du point bon, on a $D = C_x$, d'où (iii).

PROPOSITION C.5.2.

Supposons κ défini pour toute modification $(X(n),f,E(n))$ et pour tout point fermé maigre de $Sing(X(n))$ et C.4.1 et C.4.4 vrais. Etant donnée une modification $(X(n),f,E(n))$ avec $\dim(X(n)) = 3$ et $Sing(X(n)) \neq \phi$, l'algorithme suivant construit un prolongement $(X(n+t),f,E(n+t))$ de longueur totale $n+t<\infty$ avec $\nu(X(n+t))<\nu(X(n))$.

Ce qui résout le problème A et donc notre problème I.B.

ALGORITHME C.5.3.

1) Si $\dim[Sing_{\nu(X(n))}(X(n))] = 2$, on applique B.10.8.

2) Si $\dim[Sing_{\nu(X(n))}(X(n))] \leq 1$,

(i) si il existe des points fermés de $Sing_{\nu(X(n))}(X(n))$ où $\kappa(.) = 0$ ou qui sont mauvais, alors on prend pour $Y(n)$ l'ensemble de ces points et $\pi(n) : X(n+1) \to X(n)$ est l'éclatement centré en $Y(n)$,

(ii) si tous les points fermés de $Sing_{\nu(X(n))}(X(n))$ sont bons et vérifient $\kappa(.)\geq 1$, si de plus $\dim[Sing_{\nu(X(n))}(X(n))] = 1$, alors on effectue l'éclatement $\pi(n) : X(n+1) \to X(n)$ dont le centre $Y(n)$ est la réunion des composantes C de dimension 1 de $Sing_{\nu(X(n))}(X(n))$ avec $\alpha(C)\geq\nu(X(n))$ et où $(\nu,m,\alpha.\sigma)$ est maximal pour l'ordre lexicographique,

(iii) si $\dim[Sing_{\nu(X(n))}(X(n))] = 0$ et si tous les points de $Sing_{\nu(X(n))}(X(n))$ ont leur $\kappa(.)\geq 1$ et sont bons.

On appelle alors C la courbe définie en C.5.1.

a) si il y a des points fermés de C où elle n'est pas permise, on prend pour $Y(n)$ l'ensemble de ces points et on effectue l'éclatement $\pi(n) : X(n+1) \to X(n)$ centré en $Y(n)$,

b) si C est permise en tous ses points, on prend $Y(n) = C$ et on effectue l'éclatement $\pi(n) : X(n+1) \to X(n)$ centré en C.

3) Si $\nu(X(n+1))<\nu(X(n))$, on arrête le prolongement en $(X(n+1),f,E(n+1))$, si $\nu(X(n+1)) = \nu(X(n))$, on applique 1) ou 2) à $(X(n+1),f,E(n+1))$.

C.5.4. Prouvons C.5.3. Par B.10.8, nous pouvons supposer que $S(2,n) = \phi$. Posons $\nu = \nu(x)$.

A- L'algorithme impose d'effectuer un éclatement de centre permis tant que $\mathrm{Sing}_\nu(X(n+i)) \neq \phi$, $i \geq 0$.

B- Si $x \in Y(n+i)$, où $Y(n+i)$ est le centre de l'éclatement $\pi(n+i)$, $i \geq 0$ et si $\nu(x) = \nu$ et si $\kappa(x) \geq 1$ et si x est bon alors $\pi(n+i)$ est, en x , l'éclatement défini par l'algorithme du point bon

C- Si $x \in Y(n+i)$ et si $\nu(x) = \nu$ et $\kappa(x) = 0$ ou si x est mauvais, on a $Y(n+i) = \{x\}$ localement.

D- Pour tout $x \in \mathrm{Sing}_\nu(X(n))$, l'algorithme est fini au-dessus de x . En effet, au-dessus de x , soit on effectue l'algorithme du point bon, ce qui en un nombre fini de pas fait strictement baisser $\kappa(.)$, soit on effectue des éclatements de points mauvais ou de points où $\kappa(.) = 0$, leur nombre est fini par C.4.1. ou par définition de $\kappa(.) = 0$.

E- L'algorithme est fini au-dessus d'un ouvert dense de $K = \{x \in \mathrm{Sing}_\nu(X(n)) \mid \dim_x[\mathrm{Sing}_\nu(X(n))] = 1\}$.

En effet, par C.2.3, il existe un ouvert dense U de K tel qu'on a $\kappa(x) = 1$ en tout point fermé $x \in U$ et K est irréductible en x . Par l'algorithme de $\kappa = 1$ et par (I.E.2.2(6), 2.3(6),2.4), les éclatements dont les projections des centres passent par x sont centrés en des courbes se projetant sur U . Appliquons [5] à $X(n)$ aux points génériques des composantes de K . L'algorithme est fini au-dessus de U puisqu'en dimension 2 , on ne peut avoir une infinité de points ν-proches.

F- On déduit de E et D que l'algorithme est fini au-dessus de $\mathrm{Sing}_\nu(X(n))$.

G- On déduit de F que le nombre d'éclatements centrés en des courbes qui ne se projettent pas sur $\mathrm{Sing}_\nu(X(n))$ est fini.

H- De G et B.9.1, on déduit que le nombre d'éclatements de C.5.3 3)a) est fini, c'est à dire que le nombre d'éclatements dont les projections des centres ne rencontrent pas $\mathrm{Sing}_\nu(X(n))$ est fini.

I- De F et H on déduit que l'algorithme est fini et donc par A . que pour un $i \geq 1$ on a $\mathrm{Sing}_\nu(X(n+i)) = \phi$.

C.5.4. Cet algorithme est stable par tout automorphisme de $X(0) = X$ mais il ne commute pas à la restriction à un ouvert.

Voyons l'exemple suivant aimablement suggéré par F. CANO:

$$\begin{cases} f = u_2^{A(2)}(u_1^p(u_2+u_1u_3+u_1^2)) \\ E(n) = \mathrm{div}(u_2) \ , \ A(2)+1 \nmid 0(p) \ , \ A(2)+2 \nmid 0(p) \ . \end{cases}$$

On a $h(x) = u_2^{A(2)}$,

$J(X(n),f,E(n)) = u_1^p\ (u_1,u_2,u_3)$

$\nu(x) = p+1$,

x est isolé dans $\mathrm{Sing}_\nu(X(n))$, $\mathrm{Sing}_{\nu-1}(X(n)) = \mathrm{div}(u_1)$.

Alors $C=V(u_1,u_2)=E(n)\cap \mathrm{Sing}_{\nu-1}(X(n))$ est la courbe où $\alpha(C)\geqslant\nu(x)$ et $(\nu(C),m(C),\alpha(C),\sigma(C))$ est maximal. Son éclatement ne procure pas de point ν-proche de x , donc $\kappa(x)\leqslant 1$. De plus si on effectue l'éclatement $\pi : X' \to X(n)$ centré en x , soit x' le point de paramètres $u' = (u_1u_3^{-1},u_2u_3^{-1},u_3)$, on a $f = h(x')(u_1'^P(u_2'+u_1'u_3'+u_1'^2u_3'))$ et $V(u_1',u_3')\subset \mathrm{Sing}_{\nu(x)}(X')$, donc $\kappa(x') \nmid 0$ et donc $\kappa(x) \nmid 0$. Donc $\kappa(x) = 1$.

Donc l'algorithme impose d'effectuer l'éclatement centré en C . Mais restreint à l'ouvert $U = X(n)-\{x\}$, on a $\nu(U) = p$ et l'algorithme impose d'effectuer l'éclatement centré en $\mathrm{div}(u_1)$. Les deux algorithmes diffèrent donc le long de $V(u_1,u_2)-\{x\}$.

III - QUELQUES CAS OU $\kappa \leq 1$.

Dans ce chapitre, une modification $(X(n),f,E(n))$ est donnée.

PROPOSITION 1.

Soient $x(n)$ un point fermé de $\mathrm{Sing}_{\nu(X(n))}(X(n))$ et une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x(n)}$ adaptée à $x(n)$ tels que

(1) $\exists(\varphi_1,\varphi_2) \in I(X(n),f,(u,\lambda))^2$ avec

$\varphi_1 = u_2 g$, $\mathrm{ord}_{x(n)}(g) = \nu-1 = \nu(x(n))-1$,

$\varphi_2 = u_1^a u_3^b + u_2\psi_2$, $(a,b) \in \mathbb{N}^2$.

On pose

(2) $C_1 = V(u_1,u_2)$, $C_3 = V(u_3,u_2)$.

Alors $\alpha(x(n)) = \nu(x(n))$ et $U_2 \in V\,\mathrm{Dir}(x(n))$. De plus,

(i) si $a<\nu$ et $b<\nu$ alors $\kappa(x(n)) = 0$,

(ii) si $a = \nu$, $b<\nu$ et $\alpha(C_1)<\nu$ alors $\kappa(x(n)) = 0$,

(iii) si $a+b<2\nu$ et $\alpha(C_1) = \nu$ et $C_1 \subset \mathrm{Sing}(X(n))$, l'éclatement de C_1 ne crée pas de point ν-proche de $x(n)$, de plus,

si $C_1 \subset \mathrm{Sing}_\nu(X(n))$

ou si $\mathrm{div}(u_2) \subset E(n)$ et si c'est la plus ancienne composante de $E(n)$, alors l'algorithme de $\kappa = 1$ nous impose l'éclatement de C_1 et $\kappa(x(n)) \leq 1$.

(iv) si $a = b = \nu = \alpha(C_1) = \alpha(C_3)$ et si de plus $E(n) = \mathrm{div}(u_1u_2u_3)$ alors $\mathrm{Sing}_\nu(X(n)) = C_1 \cup C_3$ et $\kappa(x(n)) = 1$; si $a = b = \nu = \alpha(C_1) = \alpha(C_3)$ et si $E(n) = \mathrm{div}(u_1u_2)$ on a $\mathrm{Sing}_\nu(x(n)) \supset C_1$ et $\kappa(x(n)) = 1$,

(v) si $\nu = 1$ et $(a,b) = (2,0)$ alors $\mathrm{div}(u_2) \subset E(n)$ et $I(X(n),f,(u,\lambda)) \supsetneq (u_2,u_1^2)$, si on a $I(X(n),f,(u,\lambda)) = (u_2,u_1^2)$ alors $C_1 = \mathrm{Sing}(X(n))$ et $\kappa(x(n)) = 1$.

Preuve.

Clairement on a $\mathrm{ord}_{x(n)}(\varphi_1) = \nu$ et U_2 divise $\mathrm{cl}^\nu(\varphi_1)$. On en déduit que $\alpha(x(n)) = \nu(x(n))$ et que $U_2 \in V\,\mathrm{Dir}(x(n))$.

Puisque $\mathrm{ord}(g)<\nu$, on a

(3) $\mathrm{Sing}_\nu(X(n))\subset V(u_2)$.

Grace à φ_2 , on en tire

(4) $a+b\geq\nu$,

(5) $\mathrm{Sing}_\nu(X(n))\subset C_1\cup C_3$.

1.1. Voyons ce que l'on obtient si on effectue l'éclatement $\pi(x) : X(n+1) \to X(n$ centré en $x(n)$. Soit $x' \in X(n+1)$ un point ν-proche de $x(n)$. Bien sûr, x' est sur le transformé strict de $\mathrm{div}(u_2)$.

Si x' n'est pas sur le transformé strict de $u_1 = 0$, on pose

$v_1 = u_1$, $v_2 = u_2/u_1$, $v_3 = u_3/u_1$, d'où des éléments de $J(X(n+1).f.E(n+1))$:

$$(6)\quad \begin{cases} \varphi_1' = u_1^{-\nu}\varphi_1 = v_2(gu_1^{-\nu+1}) = v_2g' , \\ \varphi_2' = u_1^{-\nu}\varphi_2 = v_1^{a+b-\nu}\, v_3^b + v_2(\psi_2u_1^{-\nu+1}) = v_1^{a+b-\nu}v_3^b + v_2\psi_2' . \end{cases}$$

On sait que v_2 est nul en tout point ν-proche x' donc

(7) $\mathrm{ord}_{x'} v_1^{a+b-\nu}v_3^b\geq\nu$,

$$(8)\quad \begin{cases} \text{si } a+b-\nu<\nu \text{ on a } \mathrm{ord}_{x'}(v_3)>0 \text{ et } \varphi_1' \text{ et } \varphi_2' \text{ appartiennent à} \\ I(X(n+1),f,(v,\lambda)) . \end{cases}$$

On a donc au plus deux points proches situés sur les transformés stricts de C_1 et C_3 dans le cas où $a+b<2\nu$ et ils satisfont aux hypothèses de la proposition

Si de plus $\mathrm{Sup}(a.b)\leq\nu$ on a

(9) $(a+b-\nu)+b<2\nu$ et $\mathrm{Sup}(a+b-\nu,b)\leq\nu$.

Si de plus $\mathrm{Sup}(a,b)<\nu$ on a

(10) $\mathrm{Sup}(a+b-\nu.b)<\nu$ et $(a+b-\nu)+b<a+b$.

Ceci prouve (i) puisque u_1 et u_3 jouent des rôles symétriques.

Prouvons (ii), au point y situé sur le transformé strict de C_3 , le couple (ν,b) devient (b,b) et donc $\kappa(y) = 0$ par (i) . Au point z situé sur le transformé strict C_1' de C_1 le couple (ν,b) reste $(\nu.b)$. mais $\alpha(C_1)<\nu$. par II.B.9.1 , donc $\kappa(z) = 0$ et $\kappa(x(n)) = 0$.

1.2. Si $\alpha(C_1) = \nu$, on a $a \geq \nu$ et si $C_1 \subset \mathrm{Sing}(X(n))$ (par exemple, si $\nu \geq 2$ ou si C_1 est combinatoire, c'est à dire si $\mathrm{div}(u_1u_2) \subset E(n)$) alors C_1 est permise en $x(n)$. Effectuons alors l'éclatement $\pi(n) : X(n+1) \to X(n)$ centré en C_1 .

On a au plus un point $x' \in X(n+1)$ qui est ν-proche de $x(n)$, c'est le point de paramètres $v = (u_1, u_2/u_1, u_3)$. D'où on a deux éléments de $I(X(n+1), f, (v, \lambda))$

$$(11)\begin{cases} \varphi'_1 = v_2\, g\, u_1^{-\nu+1} = v_2\, g' \ , \ \mathrm{ord}_{x'}(g') \leq \nu-1 \ , \\ \varphi'_2 = v_1^{a-\nu} v_3^b + v_2(\psi_2 u_1^{-\nu+1}) = v_1^{a-\nu} v_3^b + v_2 \psi'_2 \ . \end{cases}$$

Autrement dit, l'hypothèse (1) est vérifiée en x' . De plus, si $(a-\nu)+b<\nu$, $\mathrm{ord}_{x'}(\varphi'_2)<\nu$ et donc x' n'est pas ν-proche de $x(n)$.

Si $a+b = 2\nu$, on a $(a-\nu)+b = \nu$, donc x' est dans le cas (i) et $\chi(x') = 0$ sauf si $(a-\nu, b) = (\nu, 0)$ ou $(0, \nu)$.

Si $(a-\nu, b) = (\nu, 0)$ et $\alpha(V(v_1, v_2))<\nu$, par (ii), on a $\chi(x') = 0$.

Si $(a-\nu, b) = (\nu, 0)$ et si $\alpha(V(v_1, v_2))=\nu$,et si $V(v_1, v_2) \subset \mathrm{Sing}(X(n+1))$ (par exemple si $\nu \geq 2$ ou si $\mathrm{div}(v_1v_2) \subset E(n+1)$, c'est à dire si $\mathrm{div}(u_2) \subset E(n)$) alors l'éclatement centré en $V(v_1, v_2)$ n'engendre pas de point ν-proche.

Si $(a-\nu, b) = (0, \nu)$, on observe que $V(v_1, v_3) = C'_3$ est le transformé strict de C_3 donc $\alpha(C'_3) = \alpha(C_3)$.

Si $\alpha(C_3)<\nu$ on a $\chi(x')=0$, si $\alpha(C_3) = \nu$ et si $C'_3 \subset \mathrm{Sing}(X(n))$, c'est à dire $C_3 \subset \mathrm{Sing}(X(n))$ alors l'éclatement de C'_3 n'engendre pas de point proche de x' .

Prouvons (iii). Puisque l'éclatement centré en C_1 ne crée pas de point ν-proche, on a

(12) $C_1 \supset \mathrm{Sing}_\nu(X(n))$.

D'où, si $C_1 \subset Sing_\nu(X(n))$, on a $C_1 = Sing_\nu(X(n))$, $x(n)$ n'est pas isolé dans sa ν-strate , donc $\kappa(x(n)) \neq 0$ et l'algorithme de $\kappa = 1$ impose son éclatement et donc $\kappa(x(n)) = 1$.

Si $C_1 \not\subset Sing_\nu(X(n))$ alors $x(n)$ est isolé dans sa ν-strate. L'algorithme de $\kappa = 1$ nous impose de chercher les courbes Γ avec $\alpha(\Gamma) \geqslant \nu$, $\Gamma \subset Sing(X(n))$ et Γ dans la plus ancienne composante de $E(n)$ qui est ici $div(u_2)$. Par (2), on a $Sing(X(n)) \cap div(u_2) \subset C_1 \cup C_3$, et $\alpha(C_3) \leqslant b < 2\nu - a \leqslant \nu$ et donc l'algorithme de $\kappa = 1$ impose d'effectuer l'éclatement en C_1 . D'où $\kappa(x(n)) \leqslant 1$.

Prouvons (iv). Si $E(n) = div(u_1u_2u_3)$ alors C_1 et C_3 sont combinatoires et donc (5) implique que

(13) $Sing_\nu(X(n)) = C_1 \cup C_3$.

Donc $x(n)$ n'est pas isolé dans sa ν-strate et donc $\kappa(x(n)) \neq 0$. L'ordre sur les composantes de $E(n)$ nous permet de distinguer C_1 et C_3 et on a $\kappa(x(n)) = 1$.

Si $E(n) = div(u_1u_2)$, alors C_1 est combinatoire et donc $C_1 \subset Sing_\nu(X(n))$, donc $x(n)$ n'est pas isolé dans sa ν-strate. De plus C_1 est la seule courbe passant par $x(n)$ avec $m(C_1) = 2$, l'algorithme de $\kappa = 1$ impose son éclatement. Avec les notations du début de 1.2. , si $\nu(x') < \nu$ alors $\kappa(x(n)) = 1$, si $\nu(x') = \nu$ et $\nu(C_3') = \nu$, alors $Sing_\nu(X(n)) = C_1 \cup C_3$ et $\kappa(x(n)) = 1$. si $\nu(x') = \nu$ et $\nu(C_3') < \nu$ et $C_3 \subset Sing(X(n))$ alors par (11), C_3 est la seule courbe de $Sing(X(n))$ contenue dans $div(v_2)$ qui est localement la plus ancienne composante de $E(n+1)$, l'algorithme de $\kappa = 1$ impose son éclatement, on a $\kappa(x(n)) = 1$. Si $\nu(x') = \nu$ et $\nu(C_3') < \nu$ je dis que $\nu \geqslant 2$ et que $C_3 \subset Sing(X(n))$.

En effet, si $\nu = 1$ alors par (11), on a

(14) $\varphi_2' = v_3 \bmod (v_2)$ et $E(n+1) = div(v_1v_2)$

Comme $\varphi_2' \in I(X(n+1).f,(v,\lambda))$, on a

$\mathrm{ord}_{x'}\left[h(x')^{-1}.\ D^{v,\lambda}_{[3]}f\right] = 0$ et donc $\nu(x') = 0$,

ce qui est une contradiction.

1.3. Prouvons (v). Nous avons $\nu = 1$, donc g est inversible et, quitte à modifier φ_1 et φ_2 , on a

(15) $\varphi_1 = u_2$, $\varphi_2 = u_1^2$.

Ce qui prouve que

(16) $(u_1^2,u_2) \subset I(X(n),f,(u,\lambda))$.

On a $\mathrm{div}(u_2) \subset E(n)$, sinon par (15), on aurait $\mathrm{ord}(h(x(n))^{-1}\ D^{u.\lambda}_{[2]}f) = 0$.

Supposons maintenant que $I(X(n),f,(u,\lambda)) = (u_1^2.u_2)$. Alors on a clairement

(17) $(u_1,u_2) \supset J(X(n),f,E(n)) \supset (u_1^2.u_2)$.

Donc $C_1 \subset \mathrm{Sing}_\nu(X(n))$ et C_1 est permise en $x(n)$. Effectuons l'éclatement $\pi(n)$ centré en C_1 , comme $U_2 \in V\ \mathrm{Dir}(x(n))$, dans $X(n+1)$, il y a au plus un point ν-proche de $x(n)$, c'est le point y de paramètres $u' = (u_1,u_2/u_1,u_3)$.

On a $I(X(n+1),f,(u'.\lambda)) = u_1^{-1}I(X(n).f.(u.\lambda)) = (u_1',u_2')$.

De plus, $E(n+1) \supset \mathrm{div}(u_1'\ u_2')$ et donc

(18) $I(X(n+1),f,(u',\lambda)) = J(X(n+1),f,E(n+1),V(u_1',u_2')) = (u_1',u_2')$.

Ainsi $\alpha[V(u_1',u_2')] = 1$ et $V(u_1'.u_2')$ est combinatoire, donc (I.A.1.6) $\nu[V(u_1',u_2')] = 1$; $V(u_1',u_2')$ est permise en y et par (18), si on effectue l'éclatement de $X(n+1)$ centré en $V(u_1',u_2')$, il n'y a pas de point singulier au-dessus de y . Donc $V(u_1',u_2') = \mathrm{Sing}(X(n+1))$ et $C_1 = \mathrm{Sing}(X(n))$ et par II.C. , $\kappa(x(n)) = 1$.

PROPOSITION 2.

Soit $x(n)$ un point fermé de $\mathrm{Sing}(X(n))$ vérifiant :

(i) $\alpha(x(n)) = \nu(x(n)) = \nu$,

(ii) il existe une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x(n)}$ adaptée à $x(n)$ telle que

$f = h(x(n))(u_2g+\mu u_1^{\nu}u_3) + R(f,u,\lambda)$, μ inversible.

On pose $C = V(u_1,u_2)$, alors ,

1) Si $\nu\geq 2$ et $\alpha(C) = \nu$, on a $\kappa(x(n))\leq 1$ si $(E(n)\supset \mathrm{div}(u_1u_2)$ ou $(\nu(x(n)) = 1$ et $\nu\geq 3)$ ou $C\subset \mathrm{Sing}_{\nu}(X(n))$ ou $\mathrm{div}(u_2)$ est la plus vieille composante de $E(n))$;

2) si $\nu(x(n))\geq 3$ et $\alpha(C)<\nu$, on a $\kappa(x(n)) = 0$;

3) si $\nu(x(n)) = 2$, $\alpha(C)<\nu$, on a l'implication :

$\kappa(x(n)) \neq 0 \Rightarrow \left[cl^{\nu-1}(g) = \gamma U_3 , A(3)+1 = 0(p) , A(1)+2A(2)+2 = 0(p) , A(2) \neq 0(p), A(2)+1 \neq 0(p) , \gamma\in k(x(n))\right]$, cette dernière condition sera notée (*), les exposants $A(i)$, $1\leq i\leq 3$, sont définis en (I.A.5.(10));

4) si $\nu(x(n)) = 1$, on a $A(2)>0$ et u_1 et u_3 jouent le même rôle. De plus

(i) si $A(1)>0$ ou $A(3)>0$ et $\left[A(1)+A(2)+1 \neq 0(p)\right.$ ou $A(3) = 0(p)$ ou $A(1) = 0(p)$ ou $\left.A(2) = 0(p)\right]$, alors $\kappa(x(n))\leq 1$; la condition entre crochets sera notée (**) ;

(ii) si $(A(3)>0$ et $A(1) = 0)$, on a $\kappa(x(n))\leq 1$;

(iii) si $A(1) = A(3) = 0$, alors $x(n)$ est un point isolé de $\mathrm{Sing}(X(n))$ et si on l'éclate, en tout point fermé ν-proche $x(n+1)$ de $x(n)$,on a $\kappa(x(n+1)) = 1$.

Preuve .

2.1. Puisque $\alpha(x(n)) = \nu(x(n))$, pour déterminer $\mathrm{Dir}(x(n))$, on doit considérer l'idéal $cl^{\nu}(I(X(n),f,(u,\lambda)) = (F_1,\ldots,F_s)$ (I.E.2.2.(4), notations de I.F.4.2.1.(4)) il est clair que U_2 divise tous les F_i et donc que $U_2 \in \mathbb{V}\,\mathrm{Dir}(x(n))$ (I.E.1.5.1.3.). On prouvera 1). (2) et 3)) et 4) séparément et, dans chaque cas, le fait que $x(n)$ est maigre.

Preuve de 1) .

Si $\nu\geq 2$ et $\alpha(C) = \nu$, alors C est permise, en effet d'après (I.D.5.), il suffit de vérifier que $C\subset \mathrm{Sing}(X(n))$, or $\nu(C)\geq\alpha(C)-1\geq 1$ (I.A.3.(VII)).

Effectuons l'éclatement $\pi(n)$ centré en C , comme $U_2 \in \mathbb{V}\,\mathrm{Dir}(x(n))$;

il y a au plus un point ν-proche $x(n+1)$ de $x(n)$, c'est le point de paramètres $(u_1,u_2/u_1,u_3) = (v_1,v_2,v_3)$ et on a :

$$f = v_1^{A(1)+A(2)+\nu} v_2^{A(2)} v_3^{A(3)}(v_2 g'+\mu v_3)+R(f,v,\lambda) \quad , \quad \text{avec} \quad g' = g/u_2^{\nu-1} .$$

On constate que $\nu(x(n+1))\leq\alpha(x(n+1))\leq 1$, donc $\pi(n)$ n'engendre pas de point ν-proche de $x(n)$ et $x(n)$ est maigre. Mais ceci ne prouve pas que $\kappa(x(n)) = 1$, il faut vérifier que C satisfait aux conditions de (II.C.3.).

Si $C\subset \mathrm{Sing}_\nu(X(n))$, comme $\pi(n)$ n'engendre pas de point ν-proche de $x(n)$, localement on a $C = \mathrm{Sing}_\nu(X(n))$, on est dans le cas 2) de (II.C.3.).

Si $C\not\subset \mathrm{Sing}_\nu(X(n))$, comme $\pi(n)$ n'engendre pas de point ν-proche de $x(n)$, $x(n)$ est isolé dans $\mathrm{Sing}_\nu(X(n))$. Remarquons qu'on a $E(n)\not\supset \mathrm{div}(u_1u_2)$, sinon C serait combinatoire. Montrons que C satisfait à II.C.3(i).

Supposons qu'il existe une autre courbe irréductible Γ passant par $x(n)$ avec $\alpha(\Gamma) = \nu$. Alors au-dessus de $x(n)$ il existe un point fermé y par où passe Γ' , le transformé strict de Γ , et $\alpha(\Gamma') = \alpha(\Gamma) = \nu$, donc

(1) $\nu(y)\geq\nu(\Gamma)\geq\alpha(\Gamma)\geq\nu-1$.

D'après (I.F.3.(iii)), si $\nu(x(n)) = 1$, alors $y = x(n+1)$. or on a vu que $\alpha(x(n+1))\leq 1<\nu$, si $\nu\geq 3$, on a une contradiction, (II.C.3(i)) est bien vérifié en $x(n)$ par C.

D'après l'expression de f (cf.(ii)), on a $C = \mathrm{Sing}_{\nu-1}(X(n))\cap \mathrm{div}(u_2)$ et donc, si $\mathrm{div}(u_2)$ est la plus ancienne composante de $E(n)$, on a II.C.3(i) pour C .

2.2. Preuve de 2) et de 3) .

Effectuons l'éclatement $\pi(n)$ centré en $x(n)$.

2.2.1. Etudions d'abord l'ouvert de $X(n)$ où u_1 est l'équation du diviseur exceptionnel de $\pi(n)$. On pose $(u_1,u_2/u_1,u_3/u_1) = (u'_1,u'_2,u'_3)$, soit $x(n+1)$ un point au-dessus de $x(n)$ dans $\mathrm{Proj}(U_2)$ (on se rappelle que $U_2 \in \mathrm{VDir}(x(n))$ alors $u'_2(x(n+1)) = 0$, avec les notations de (I.F.4.2.1.(4)) , on a :

$f'_i = u_2 g_i+\mu_i u_1^\nu u_3$, $1\leq i\leq s$, $\exists i$, $1\leq i\leq s$, μ_i inversible

et $\exists i'$, $1\leq i'\leq s$, $\mathrm{ord}_{x(n)}(g_{i'}) = \nu-1$.

On note $G_i = cl^{\nu-1}(g_i)$, $1\leq i\leq s$,

et $G = cl^{\nu-1}(g)$.

D'après (I.E.1.), $\forall i$, $1\leq i\leq s$, $f'_i/u'^{\nu}_1 \in J(X(n+1),f,E(n+1))$, or :

$f'_i/u'^{\nu}_1 = u'_2G_i(1,u'_2,u'_3)+\mu_iu'_1u'_3 \bmod(u'_1u'_2)$, $1\leq i\leq s$.

Donc $\exists i$, $1\leq i\leq s$, $ord_{x(n+1)}(f'_i/u'^{\nu}_1)\leq ord_{x(n+1)}(u'_1u'_3)\leq 2$; si $\nu\geq 3$, dans l'ouvert considéré, il n'y a pas de point ν-proche de $x(n)$, si $\nu = 2$, dans l'ouvert considéré, il y a au plus un point ν-proche, c'est le point où u'_3 n'est pas inversible, c'est à dire le point $x(n+1)$ de paramètres (u'_1,u'_2,u'_3) , en ce point on a (I.F.4.1.) :

$f = h(x(n+1))(u'_2g'+\mu u'_1u'_3)+R(f,u',\lambda)$,

ce qui donne, en choisissant un corps de représentants de $k(x(n))$ dans $\hat{O}_{X(n+1),x(n+1)}/(u'_1u'_2)$:

$(f-R(f,u',\lambda))/h(x(n+1)) = u'_2G(1,u'_2,u'_3)+\mu u'_1u'_3 \bmod(u'_1u'_2)$

$= u'_2(\alpha+\beta u'_2+\gamma u'_3)+\mu u'_1u'_3 \bmod(u'_1u'_2)$.

Si $G \notin k(x(n))[U_2,U_3]$, on a $\nu(x(n+1))\leq\alpha(x(n+1)) = 1$, $x(n+1)$ n'est pas ν-proche de $x(n)$. Désormais, nous supposerons que $x(n+1)$ est ν-proche de $x(n)$, ce qui implique donc $\alpha=0$ et, en posant $F'_i = cl^2(DM^{u',\lambda}_{[i]}f)/h(x(n+1))$, on a :

$F'_i = U'_2(\beta(i)U'_2+\gamma(i)U'_3)+\mu(i)U'_1U'_3+\delta(i)U'_1U'_2$, $1\leq i\leq s$.

Cherchons à déterminer $VDir(x(n+1))$, d'après (I.E.1.5.1.2.), on a :

$((D^{U',\bar{\lambda}}_{[1]}F'_i, D^{U',\bar{\lambda}}_{[3]}F'_i)$, $1\leq i\leq s) = (\delta(i)U'_2+\mu(i)U'_3, \mu(i)U'_1+\gamma(i)U'_2$, $1\leq i\leq s)\subset VDir(x(n+1))$

comme μ est inversible , $\exists i$, $1\leq i\leq s$, $\mu(i) \neq 0$, on en déduit les implications :

(2) $U'_2 \in VDir(x(n+1)) \Rightarrow \nu(x(n+1)) = 3 \Rightarrow K(x(n+1)) = 0$.

Si $\gamma = 0$, alors $D^{U',\bar{\lambda}}_{[3]}(F'_i) = \mu(i)U'_1$, comme les $\mu(i)$ ne sont pas tous nuls $U'_1 \in VDir(x(n+1))$. De plus, β et γ ne sont pas tous deux nuls car $G \neq 0$, donc $\exists i'$, $1\leq i'\leq s$, tel que $\beta(i') \neq 0$ et comme $F'_{i'} \in VDir(x(n+1))$

(I.E.6.) et que $F'_{i'} = \beta(i')U_2'^2 \bmod(U'_1)$, on a $U'_2 \in$ VDir(x(n+1)) , ce qui implique $K(x(n+1)) = 0$ ((2)). On a donc l'implication :

(3) $\gamma = 0 \Rightarrow K(x(n+1)) = 0$.

Désormais, nous étudions le cas $v(x(n+1)) \leq 2$, d'après (3), $\gamma \neq 0$, donc $\exists i'$, $1 \leq i' \leq s$, $\gamma(i') \neq 0$, or, $(\gamma(i')U'_2+\mu(i')U'_1, \delta(i')U'_2+\mu(i')U'_3)$ est contenu dans VDir(x(n+1)) , donc $\mu(i') \neq 0$ ((2)) , donc :

(4) $\mathrm{VDir}(x(n+1)) = (\varphi,\Psi) = (U'_1+(\gamma(i')/\mu(i'))U'_2, \delta(i')U'_2+\mu(i')U'_3)$.

On a donc,: $\forall i$, $1 \leq i \leq s$:

$F'_i = \lambda(i)\varphi^2+\mu(i)\varphi\Psi+\nu(i)\Psi^2$, en regardant les termes en $U_1'^2$ et $U_3'^2$, on a : $\lambda(i) = \nu(i) = 0$, les F'_i sont proportionnels. On pose :

(5) $h(x(n+1)) = u_1'^{A'(1)}u_2'^{A(2)}u_3'^{A(3)} = u_1'^{A(1)+A(2)+A(3)+2}u_2'^{A(2)}u_3'^{A(3)}$,

on a alors :

$F'_1 = \beta A'(1)U_2'^2+\gamma A'(1)U'_2U'_3+\delta(A'(1)+1)U'_2U'_1+\bar{\mu}(A'(1)+1)U'_1U'_3$,

$F'_2 = \beta(A(2)+2)U_2'^2+\gamma(A(2)+1)U'_2U'_3+\delta(A(2)+1)U'_2U'_1+\bar{\mu}A(2)U'_1U'_3$,

$F'_3 = \beta A(3)U_2'^2+\gamma(A(3)+1)U'_2U'_3+\delta A(3)U'_2U'_1+\bar{\mu}(A(3)+1)U'_1U'_3$,

comme γ et $\bar{\mu}$ sont tous deux non nuls, en comparant les deuxième et quatrième monômes de F'_2 et F'_3 , on obtient :

(6) $A(3)+1 = 0(p)$.

En comparant F'_1 et F'_3 , on remarque que si $F'_3 = 0$, on a : $A'(1)+1 = 0(p)$, $\gamma A'(1) = 0$, comme $\gamma \neq 0$, on a $A'(1) = 0(p)$, c'est une absurdité, donc $F'_3 = 0$, comme $A'(3) = -1(p)$, on a :

(7) $\beta = \delta = 0$.

En comparant les deuxième et quatrième monômes de F'_1 et F'_2 , on a :

$A'(1)A(2) = (A'(1)+1)(A(2)+1) \Rightarrow A'(1)+A(2)+1 = 0(p)$, ce qui donne :

(8) $A(1)+2A(2)+2 = 0(p)$.

Si $A(2) = 0(p)$, $F'_2 = \gamma U'_2U'_3$, donc $U'_2 \in$ VDir(x(n+1)) (I.E.6.), c'est impossible donc

(9) $A(2) \neq 0(p)$.

De même, si $A(2)+1 = O(p)$, $F_2' = -\mu U_1' U_3'$, on en déduit $(U_1', U_3') \subset \mathrm{VDir}(x(n+1))$ ce qui contredit (4) c'est impossible donc :

(10) $A(2)+1 \neq O(p)$.

2.2.2. Il faut étudier maintenant le point y de paramètres $v_1 = u_1/u_3$, $v_2 = u_2/u_3$, $v_3 = u_3$, c'est à dire le point au-dessus de $x(n)$ sur le transformé strict de $C = V(u_1,u_2)$, posons $F = U_2G$ (notations de (I.F.4.2.1.(4.)), on a :

$f = h(y)(v_2G(v_1,v_2,1)+v_2v_3g''+\mu v_1^{\nu}v_3)+R(f,v,\lambda)$, $g'' \in O_{X(n+1),y}$.

Si ce point est ν-proche de $x(n)$, comme $\nu(y) \leq \alpha(y) \leq 1+\mathrm{ord}_y(G(v_1,v_2,1)) \leq \nu$, on a $G \in k(x(n))[U_1,U_2]$ et donc on a (non (*)). Donc, si $\nu \geq 3$ et si y est ν-proche de $x(n)$, y satisfait aux conditions (i) et (ii) de la proposition avec $\alpha(C) = \alpha(V(v_1,v_2)) < \nu$, si $\nu = 2$ et si y est ν-proche de $x(n)$, y satisfait aux conditions (i), (ii) et (non(*)) de la proposition.

2.2.3. Prouvons (2) et (3). Si on éclate $x(n)$, il y a au plus deux points ν-proches, l'un, noté y , est sur le transformé strict de C , il satisfait aux conditions (i) et (ii) de la proposition et, si $\nu = 2$, il satisfait à (non(*)), l'autre, noté $x(n+1)$ vérifie $\nu(x(n+1)) = 2$, $v(x(n+1)) = 3$ car on vient de voir que $v(x(n+1)) \leq 2 \Longrightarrow$ (*) , c'est à dire que, si on applique l'algorithme de la définition de $\kappa = 0$ (II.C.1.), les seuls points où le résultat n'est pas clair sont les points au-dessus de $x(n)$ sur le transformé strict de C , mais, comme $\alpha(C) < \nu$, d'après (II.B.9.1.), l'algorithme aboutira à un succès. Donc $\kappa(x) = 0$ et x est maigre.

2.3. Preuve de 4).

On a :

$f = h(x(n))(u_2g+\mu u_1u_3)+R(f,u,\lambda)$.

Bien sûr, g est inversible. De plus, $A(2)>0$, en effet, si $A(2) = 0$, $V(u_2) \not\subset E(n)$ et donc $\mathrm{ord}_{x(n)}((D^{u,\lambda}_{[2]}f)/h(x(n))) = 0 = \nu(x(n))$, ce qui est une contradiction.

Maintenant, remarquons que (4)(ii) est une conséquence de (4)(i).

2.3.1. Prouvons donc 4(i). On a $\nu = 1$ et g inversible.

Avec les notations de (I.F.4.2.1.(4)), on a

$$(11)\quad \begin{cases} f'_1 = u_2[A(1)g+u_1D^{u,\lambda}_{[1]}g] + u_1u_3[(A(1)+1)\mu+u_1D^{u,\lambda}_{[1]}\mu] , \\ f'_2 = u_2[(A(2)+1)g+u_2D^{u,\lambda}_{[2]}g] + u_1u_3[A(2)\mu+u_2D^{u,\lambda}_{[2]}\mu] . \\ f'_3 = u_2[A(3)g+u_3D^{u,\lambda}_{[3]}g] + u_1u_3[(A(3)+1)\mu+u_3D^{u,\lambda}_{[3]}\mu] . \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} f'_1 = A(1)u_2g+(A(1)+1)\mu u_1u_3 \bmod.(u_2,u_1u_3)\mathfrak{m} , \\ f'_2 = [A(2)+1]u_2g+A(2)\mu u_1u_3 \bmod.(u_2,u_1u_3)\mathfrak{m} , \\ f'_3 = A(3)u_2g+(A(3)+1)\mu u_1u_3 \bmod.(u_2,u_1u_3)\mathfrak{m} , \\ f'_4 = u_2DM^{u,\lambda}_{[4]}g + u_1u_3\ DM^{u,\lambda}_{[4]}\mu \bmod.(u_2,u_1u_3)\mathfrak{m} . \end{cases}$$

Les hypothèses de (4)(i) impliquent qu'un des mineurs d'ordre 2 de la matrice

$$\begin{bmatrix} A(1) & A(1)+1 \\ A(2)+1 & A(2) \\ A(3) & A(3)+1 \end{bmatrix}$$

est non nul mod.p ou que $gu_2h(x(n))$ ou $\mu u_1u_3h(x(n))$ est une puissance p-ème et qu'on peut prendre $g = \lambda_4$ ou $\mu = \lambda_4$. Alors, on a

$$(13)\quad u_2 \in I(X(n),f,(u,\lambda)),u_1u_3 \in I(X(n),f,(u,\lambda)) .$$

Comme $div(u_2)\subset E(n)$, on a $E(n) = div(u_1u_2u_3)$ ou $div(u_1u_2)$ ou $div(u_2u_3)$, (4)(i) et le fait que $x(n)$ est maigre découlent de l'assertion (iv) de la proposition 1. qui précède.

2.3.2. Preuve de (4)(iii).

On a $A(1) = A(3) = 0$. Par 2.3, on a donc $E(n) = div(u_2)$.

D'après I.A.1., on a :

$J(X(n),f,E(n)) = (DM^{u,\lambda}_{[2]}f,D^{u,\lambda}_{[i]}f,i\neq 2,1\leq i\leq s)/h(x(n))$,

$J(X(n),f,E(n),\{x(n)\}) = (DM^{u,\lambda}_{[2]}f,\mathfrak{m}D^{u,\lambda}_{[i]}f,i\neq 2,1\leq i\leq s)/h(x(n))$,

$J(X(n).f,E(n)) \supset (u_1+u_2A, u_3+u_2B.u_2+Cu_1u_3)$, $A.B,C \in O_{X(n).x(n)}$,

$J(X(n),f,E(n)) = (u_1,u_2,u_3) = \mathfrak{m}$. On en déduit que $Sing(X(n)) = \{x(n)\}$ et

$J(X(n),f,E(n),\{x(n)\}) \supset \mathfrak{m}(u_1+u_2A, u_3+u_2B)+(u_2+Cu_1u_3)$,

$J(X(n),f,E(n),\{x(n)\}) = (u_2, u_1^2, u_3^2, u_1u_3)$.

Effectuons l'éclatement $\pi(n)$ centré en $x(n)$, comme u_1 et u_3 jouent des rôles symétriques et que $U_2 \in \mathrm{VDir}(x(n))$, nous ne considérons que l'ouvert où u_1 est l'équation du diviseur exceptionnel de $\pi(n)$. On pose donc : $u'_1 = u_1$, $u'_2 = u_2/u_1$, $u'_3 = u_3$. Soit $x(n+1)$ un point au-dessus de $x(n)$, d'après I.E.1., on a :

$J(X(n+1),f,E(n+1)) = J(X(n),f,E(n),\{x(n)\})u_1^{-1}$,

$J(X(n+1),f,E(n+1)) = (u'_2, u'_1, u'_1u_3'^2, u'_1u'_3) = (u'_1,u'_2)$.

On en déduit que $Sing_1(X(n+1)) = V(u'_1,u'_2)$ et que $x(n)$ est maigre. Alors, comme $E(n+1) = div(u'_1u'_2)$, $V(u'_1,u'_2)$ est l'intersection des deux composantes de $E(n+1)$. $V(u'_1,u'_2)$ est combinatoire et d'après I.D.9., elle est permise en tous ses points.

On a d'après I.A.1. :

$J(X(n+1),f,E(n+1),V(u'_1,u'_2)) = (DM^{u,\lambda}_{[1]}f, DM^{u,\lambda}_{[2]}f, D^{u,\lambda}_{[i]}f, 3\leq i\leq s)h(x(n+1))^{-1}$,

$J(X(n+1),f,E(n+1),V(u'_1,u'_2)) = J(X(n+1),f,E(n+1)) = (u'_1,u'_2)$.

D'après I.E.1., si on effectue l'éclatement $\pi(n+1)$ centré en $V(u'_1,u'_2)$ on a :

$J(X(n+2),f,E(n+2)) = J(X(n+1),f,E(n+2),V(u'_1,u'_2))(u'_1,u'_2)^{-1}$,

$J(X(n+2),f,E(n+2)) = O_{X(n+2)}$.

D'après II.C.2., $\kappa(x(n+1)) = 1$.

DEFINITION ET NOTATION 3.

Soit x un point fermé de $Sing(X(n))$ et soit $C \subset X(n)$ une courbe irréductible et régulière en x et à croisements normaux avec $E(n)$ dans un voisinage de x . Soit de plus J un idéal de $O_{X(n),x}$, on pose $t(C,J.x) = ord_x[in_C(J)]$.

3.1. Si $(u.\lambda)$ est une p-base de $O_{X(n).x}$ adaptée à $(x.C)$ avec $C = V(u_i.u_j)$, on a

(1) $t(C.J.x) = \inf\{ord_x[\gamma_{a,b} \bmod.(u_i,u_j)] \ ; \exists\varphi \in J \ , \varphi = \sum_{a+b=\alpha} \gamma_{a,b}u_i^a u_j^b \ , \alpha = ord_C(J)\}$

DEFINITION 3.2.

Avec les hypothèses et notations de 3, on suppose que $\nu = \nu(x)>\alpha = \alpha(C)$. On note
$t(C,x) = t(C,J(X(n).f.E(n),C,\{x\}).x)$ où
$J(X(n).f,E(n).C,\{x\}) = h(x(n))^{-1}(Df \ ; D \in \mathcal{D}(X,E.C)\cap\mathcal{D}(X,E,\{x\}))$.

PROPOSITION 3.2.1.

Toujours avec les hypothèses et notations de 3, on a
$t(C,x) = t(C,I(X(n),f,(u.\lambda)).x)$.

Preuve.

On a clairement
$I(X(n),f.(u.\lambda))\subset J(X(n),f,E(n),C,\{x\})$.
et les ordres de ces deux idéaux au point générique η de C sont égaux.
Donc $t(C,x)\leq t(C,I(X(n).f,(u,\lambda)),x)$.

Posons $\mathfrak{p} = I(C)$, avec les notations de I. A.1, on a un système de générateurs de $J(X(n),f,E(n),C,\{x\})$ qui est donné par

(1) $h(x)^{-1}(DM^{u.\lambda}_{[i]}f \ , \ 1\leq i\leq t \ , \mathfrak{p}\ D^{u.\lambda}_{[i]}f \ , \ 1+t\leq i<k \ ,$
$\mathfrak{m}_{X(n),x}D^{u,\lambda}_{[i]}f \ , \ k+1\leq i\leq r \ , \ D^{u.\lambda}_{[i]}f \ , \ r+1\leq i\leq s)$.

Soit φ un élément de ce système tel que $ord_\eta(\varphi) = \alpha$ où η est le point générique de C et tel que, avec les notations de 3.1, on a
$t(C,x) = \inf\{ord_x[\gamma_{a,b} \bmod.(u_i.u_j)] \ , \ \varphi=\sum\gamma_{a,b}u_i^a u_j^b\}$

Si $\varphi \in I(X(n),f,(u,\lambda))$, on a clairement $t(C.x)\geq t(C,I(X(n),f,(u,\lambda)).x)$.

Sinon, on a $\varphi = h(x)^{-1}u_a D^{u.\lambda}_{[b]}f$ avec $a \neq b$.

Alors je dis que

(2) $b\leq k$.

Sinon on a $k+1\leq b$ et puisque ici $r = 3$, on a $b = k+1 = 3$ et donc $a\leq k=2$.
Alors on a $ord_\eta[h(x)^{-1}u_a \ D^{u.\lambda}_{[b]}f]\geq\alpha+1$, ce qui est impossible. Cette contradiction

prouve (2).

Alors on a

(3) $t+1\leq b$.

Sinon, par (1), on aurait $a=b$.

Mais alors, par (1), $u_a \in I(C)$ et donc

$$\mathrm{ord}_\eta[h(x)^{-1}u_a\, D^{u,\lambda}_{[b]}f] = \mathrm{ord}_\eta[h(x)^{-1}u_b\, D^{u,\lambda}_{[b]}f] = \alpha$$

et on vérifie que

$$\mathrm{ord}_x\,[c\ell^\alpha_\eta(h(x)^{-1}u_a\, D^{u,\lambda}_{[b]}f)] = \mathrm{ord}_x[c\ell^\alpha_\eta(h(x)^{-1}u_b\, D^{u,\lambda}_{[b]}f)] \quad \text{d'où}$$

$t(C,x)\geq t(C,I(X(n),f,(u,\lambda)),x)$.

Ce qui finit de prouver 3.2.

DEFINITION 3.3.

Toujours et encore avec les hypothèses et notations de 3, on note $\theta(x,C)$ le plus petit entier t tel que si on prolonge $(X(n),f,E(n))$ par la suite d'éclatements $\pi(i) : X(n+i+1) \to X(n+i)$, $0\leq i\leq t$, centrés en $Y(i) = \{x(i)\}$ point de $X(n+i)$ au-dessus de $x = x(0)$ sur le transformé strict $C(i)\subset X(n+i)$ de $C = C(0)$, on a $\nu(x(n+t))<\nu(x)$.

3.3.1. On remarque que

$\theta(C,x)\leq t(C,x)\ (\nu-\alpha)^{-1}\leq t(C,x)$, où $\nu = \nu(x)$ et $\alpha = \alpha(C)$.

3.4. Si il n'y a pas d'ambiguité, on écrira $t(C)$ et $\theta(C)$ au lieu de $t(C,x)$ et $\theta(C,x)$.

PROPOSITION 3.5.

Toujours avec les hypothèses et notations de 3, soit (u,λ) une p-base de $O_{X(n),x}$ adaptée à x et telle que

(1) $C = V(u_1,u_2)$.

Prolongeons $(X(n),f,E(n))$ en effectuant l'éclatement $\pi : X(n+1) \to X(n)$ centré en x (resp. centré en $V(u_1,u_3)$ et $V(u_1,u_3)$ est permis en x).

Soit $x' \in X(n+1)$ le point au dessus de x sur le transformé strict C' de C .

On suppose que $\nu(x')>\alpha(C)$.

Alors on a $t(C') = t(C)-(\nu(x)-\alpha(C))$ (resp. $t(C')\leq t(C)-1$) .

Preuve.

Bien sûr. on a $\alpha(C') = \alpha(C)$. Soit $\varphi \in I(X(n).f.(u.\lambda))$, on pose $\varphi = \sum_{a+b=\alpha} \gamma_{a,b}\, u_1^a u_2^b$ où $\alpha = \alpha(C)$.

Regardons le cas où π est centré en x . Alors x' a pour paramètres $u' = (u_1u_3^{-1}.u_2u_3^{-1},u_3)$ et

(1) $I(X(n+1),f,(u',\lambda)) = I(X(n).f.(u.\lambda))u_3^{-\alpha(x)}$.

Or $\varphi.u_3^{-\alpha} = \sum_{a+b=\alpha} \gamma_{ab}.u_3^{-\alpha(x)+\alpha}\, u_1^a u_2^b$. on a

(2) $\begin{cases} \mathrm{ord}_{x'}(\gamma_{a,b}.u_3^{-\alpha(x)+\alpha}) \leq \mathrm{ord}_x(\gamma_{a,b})-\alpha(x)+\alpha \, . \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \leq \mathrm{ord}_x(\gamma_{a,b})-\alpha(x)+\nu \, . \end{cases}$

où $\nu = \nu(x)$.

Ce qui prouve 3.5 en ce cas.

Si π est centré en $V(u_1.u_3)$ et si $V(u_1.u_3)$ est permis en x alors $\alpha' = \alpha[V(u_1,u_3)] \geq \nu(x)$ et x' a pour paramètres $u' = (u_1u_3^{-1}.u_2,u_3)$ et on a

(3) $I(X(n+1),f,(u',\lambda)) = I(X(n).f.(u.\lambda))u_3^{-\alpha'}$.

Alors 3.5 se prouve comme ci-dessus.

LEMME 4.

Soit x un point fermé de $\mathrm{Sing}_2(X(n))$ et soit $(u.\lambda)$ une p-base de $O_{X(n).x}$ adaptée en x. Soit une courbe Γ avec

(1) $\Gamma \subset \mathrm{Sing}_{\nu-1}(X) \cap \mathrm{div}(u_1)$. $\mathrm{div}(u_1) \subset E$, où $\nu = \nu(x)$.

On pose

(2) $I(\Gamma) = (u_1.\varphi)$.

Alors $g \in J(X,f,E)$,

(i) $\varphi^{\nu-1}$ divise g mod.(u_1) .

(ii) $\mathrm{in}_x(\varphi^{\nu-1})$ divise $\mathrm{in}(g)$ mod.(u_1) .

La preuve est claire.

PROPOSITION 4.1.

Soit x un point fermé de $\mathrm{Sing}(X(n))$ tel que $\alpha(x) = \nu(x)$. $v(x) = 2$ et tel qu'il existe une courbe $\Gamma \ni x$ permise en x . Posons $\nu = \nu(x)$. Alors

(i) On peut choisir une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ adaptée en x et telle que $\Gamma = V(u_1,u_2)$ et $V\,\mathrm{Dir}(x) = \langle U_1,U_2\rangle$.

(ii) On a $\mathrm{Sing}_\nu(X(n)) \subset \Gamma$.

(iii) On a une des conditions suivantes

(1) $\Gamma = \mathrm{Sing}_\nu(X(n))$,

(2) $\nu \geq 2$ et $\Gamma = \mathrm{Sing}_{\nu-1}(X(n))$,

(3) $\nu \geq 3$, $m(\Gamma) = 1$ et $\Gamma = \mathrm{Sing}_{\nu-1}(X(n)) \cap E(n)$,

(4) $\nu \geq 3$, $m(\Gamma)=1$, $m(x)=2$, $E(n)=E' \cup E''$, $\Gamma = \mathrm{Sing}_{\nu-1}(X(n)) \cap E'$ et $\mathrm{Sing}_{\nu-1}(X(n)) \cap E''$ est une courbe C régulière en x et à croisements normaux avec $E(n)$ et $\alpha(C) = \nu-1$.

(iv) x est maigre et $\kappa(x) \leq 1$.

Preuve.

Par définition de la permissibilité, on peut choisir une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ adaptée en x et telle que

$\Gamma = V(u_1,u_2)$.

Par I.D.1, on a $\alpha(\Gamma) = \alpha(x) = \nu(x) = \nu$. Alors, par I.F.3.5.1, on a $J(X(n),f,E(n),\Gamma) \subset (u_1,u_2)^\nu$,

d'où $I(X(n),f,(u,\lambda)) \subset J(X(n),f,E(n),\Gamma) \subset (u_1,u_2)^\nu$.

Comme $\alpha(x) = \nu(x)$, on a $V\,\mathrm{Dir}(x) = V\,\mathrm{Dir}(I(X(n),f,(u,\lambda))$

d'où, puisque $v(x) = 2$,

(5) $V\,\mathrm{Dir}(x) = V\,\mathrm{Dir}[J(X(n),f,E(n),\Gamma)] = \langle U_1,U_2\rangle$.

On a prouvé (i).

Par (5), il est clair que si on effectue l'éclatement $\pi : X' \to X(n)$ centré en Γ, il n'y a pas de point ν-proche de x. On a clairement (ii). De plus, (iii) entraîne que π est imposé par l'algorithme de $\kappa = 1$. Donc (iv) découle de (iii) et il n'y a plus qu'à prouver (iii).

Si $\Gamma \subset \mathrm{Sing}_\nu(X(n))$, alors on a $\Gamma = \mathrm{Sing}_\nu(X(n))$, on a (1) et (iii) est clair.

Si $\Gamma \not\subset \mathrm{Sing}_\nu(X(n))$, alors, on a $\mathrm{div}(u_1u_2) \not\subset E(n)$, sinon Γ serait combinatoire (I.A.1(6)) et on aurait $\alpha(\Gamma) = \nu(\Gamma) = \nu$. Quitte à permuter u_1 et u_2 nous supposons désormais :

(6) $\mathrm{div}(u_1) \not\subset E(n)$.

On remarque que si on pose

$f = h(x)g+R(f,u,\lambda)$, alors

(7) $\mathrm{cl}^\nu(g) = G \in k(x)[U_1^p,U_2]$,

sinon $\mathrm{ord}_x[h(x)^{-1} D^{u,\lambda}_{[1]}G] \leqslant \nu-1$, ce qui contredit $\nu(x) = \nu$. Par (5), $G \notin k(n)[U_2]$, donc $\nu \geqslant p$.

Si $\nu = 2$, par I.F.3.4, dans X', il n'y a pas de point singulier et donc Γ est la seule courbe de $\mathrm{Sing}(X(n))$ passant par x. On a donc (2).

Désormais nous supposons

(8) $\nu = \nu(x) \geqslant 3$.

Puisque $\nu(\Gamma)<\nu$ et $\alpha(\Gamma) = \nu$, on a

(9) $\nu(\Gamma) = \nu-1$.

Voyons le cas où $\mathrm{div}(u_2) \not\subset E(n)$. Nous allons montrer que localement $\Gamma = \mathrm{Sing}_{\nu-1}(X(n))$ et on aura (2). Puisque $E(n) \subset \mathrm{div}(u_3)$, étant donné un point rationnel $x' \in X'$ au-dessus de x, on peut choisir u_1 et u_2 tels que x' est le point de paramètres $u' = (u_1,u_2u_1^{-1},u_3)$, alors on a par I.E.1 et (7)

$$(10) \begin{cases} f = h(x')gu_1^{-\nu}+R(f,u',\lambda) \\ \mathrm{ord}_{x'}(gu_1^{-\nu}) \leqslant \nu-p \leqslant \nu-2 . \end{cases}$$

D'autre part pour un point x' irrationnel sur x, on a $\nu(x')\leqslant\nu-2$, sinon on aurait $cl^{\nu}[J(X(n).f.E(n),\Gamma)] = (\phi(U_1,U_2)^{\nu-1})$ où ϕ est un polynôme homogène irréductible de degré $d\geqslant 2$ de $k(x)[U_1,U_2]$, par (8) c'est impossible. Donc au-dessus de x, on a toujours $\nu(x')\leqslant\nu-2$ donc $\Gamma = Sing_{\nu-1}(X(n))$, comme annoncé.

Voyons le cas où $div(u_2)\subset E(n)$. Nous allons prouver qu'on a (3) ou (4). Supposons qu'on n'a pas (3) alors soit C une courbe de $Sing_{\nu-1}(X(n))\cap div(u_i)$, $i = 2$ ou 3 avec $C \neq \Gamma$.

Alors, on a $I(C) = (\varphi,u_i)$, d'autre part par (7), il existe $g' \in J(X(n),f,E(n),\{x\})$ avec $G' = cl^{\nu}(g') \in k(x)[U_1^p,U_2]$ et $G' \notin k(x)[U_2]$ alors par 4., $in_x(\varphi^{\nu-1})$ divise G' mod.(u_2) et $\varphi = au_1+bu_2+cu_3$ avec $ord_x(a) = 0$. Si $i = 2$ et puisque $C \neq \Gamma$, le transformé strict C' de C passe par le point x' de paramètres $u' = (u_1,u_2u_1^{-1},u_3)$ qui est le point au-dessus de x sur le transformé strict de $div(u_2)$.

Par (10), on a $\nu(x')\leqslant\nu-p<\nu-1 = \nu(C)$, c'est impossible. Donc on a $i = 3$. Puisque $i = 3$, on a $I(C) = (au_1+bu_2,u_3)$, quitte à modifier u_1, on peut prendre

(11) $I(C) = (u_1,u_3)$.

Alors, on a $I(X(n),f,(u,\lambda))\subset J(X(n),f,E(n),C)$ et par (5), on a $\nu-1\geqslant ord_C[I(X(n).f,(u,\lambda))]\geqslant ord_C[J(X(n),f,E(n),C)]>\alpha(C)$ donc $\alpha(C)\leqslant\nu-1$, ce qui avec (11) montre qu'on a (4).

<u>PROPOSITION</u> 4.2

Soit $x \in Sing(X(n))$ et soit (u,λ) une p-base de $O_{X(n),x}$ adaptée en x telle que

(1) $I(X(n),f,(u,\lambda)) = (u_1^{\nu})$ mod.(u_2), où $\nu = \nu(x)$,

(2) $\nu(x)\geqslant 2$.

Alors $\alpha(x) = \nu(x) = \nu$ et

(i) $V\ Dir(x)=<U_1,U_2>$

(ii) si $\alpha[V(u_1,u_2)]<\nu$ on a $\kappa(x) = 0$,

(iii) si $\alpha[V(u_1,u_2)] = \nu$ on a $\kappa(x)\leq 1$.

Preuve.

En vertu de (1), on a $\alpha(x) = \nu(x) = \nu$.

Donc $V\ Dir(x) = V\ Dir[I(X(n),f,(u,\lambda)]$ et d'après I.E.1.5.1.4 puisque $\dim V\ Dir(x)\geq 2$, on a $V\ Dir(x)\supset<U_1,U_2>$.

Si on n'a pas égalité on a $\kappa(x) = 0$.

Dorénavant, nous supposons donc

(4) $V\ Dir(x) = <U_1,U_2>$.

4.2.1.1. Si $\alpha[V(u_1,u_2)] = \nu$ alors je dis que

(5) $V(u_1,u_2)\subset Sing(X(n))$.

En effet, sinon on a $\nu[V(u_1,u_2)] = \alpha[V(u_1,u_2)]-1 = \nu-1$ et donc $\nu = 1$. Alors $div(u_1u_2)\subset E(n)$, en effet, sinon on a $cl^{\nu}[I(X(n),f,(u,\lambda))] = (U_1,U_2)$ et donc $\nu\leq ord_x(h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[i]}) = 0$ pour $div(u_i)\not\subset E(n)$ et $i = 1$ ou 2 . Donc $V(u_1,u_2)$ est combinatoire et $\alpha[V(u_1,u_2)] = \nu[V(u_1,u_2)] = \nu\geq 1$, ce qui est une contradiction qui prouve (5).

Alors par (5) et I.D.4, si $\alpha[V(u_1,u_2)] = \nu$, $V(u_1,u_2)$ est permis et par 4.1, on a $\kappa(x)\leq 1$, ce qui prouve (iii).

4.2.1.2. Si $\alpha[V(u_1,u_2)]<\nu$, on effectue l'éclatement $\pi : X' \to X(n)$ centré en x . Par (4), il y a au plus un point ν-proche de x dans X' . C'est le point x' de paramètres $u' = (u_1u_3^{-1},u_2u_3^{-1},u_3)$.

Par I.F.4.1., on a

$$I(X',f,(u',\lambda)) = u_3^{-\nu}\ I(X(n).f,(u.\lambda))$$
$$= (u'^{\nu}_1)\ \mathrm{mod}.(u'_2)\ .$$

Si $\nu(x') = \nu$ alors $(x',(u'.\lambda))$ satisfont à (1)(2) et par 3.5, on a

(6) $t[V(u'_1,u'_2)] \leq t[V(u_1,u_2)]-1$.

Une récurrence décroissante sur $t[V(u_1,u_2)]$ donne (ii).

IV. $\mathcal{K} = 2$.

Le but de ce chapitre est de définir $\mathcal{K} = 2$, de prouver (II. 4.1. et 4.4.) en tout point fermé $x(n) \in X(n)$ avec $\mathcal{K}(x(n)) = 2$. Dans tout ce chapitre, une modification $(X(n),f,E(n))$ est donnée.

A. GENERALITES - DIRECTRICE QUASI-TRANSVERSE.

DEFINITION A.1.

Soit $x(n)$ un point fermé de $X(n)$, on dit que $x(n)$ est à directrice quasi transverse si il existe une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x(n)}$ adaptée en $x(n)$ telle que

(i) si $\alpha(x(n)) = \nu(x(n))$, alors $E(n) \subset V(u_2u_3)$ et

$V\,Dir(x(n)) \not\subset \langle U_2,U_3\rangle$.

Ce qui est équivalent à :

(i') si $\alpha(x(n)) = \nu(x(n))$, alors il existe $Z \in VDir(x(n)) \subset \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ tel que $div(Z)$ est transverse à $E(n)$, ce qui veut dire que Z n'est pas combinaison linéaire des formes initiales des équations des composantes de $E(n)$.

(ii) Si $\alpha(x(n)) = \nu(x(n)) + 1$, alors $E(n) = div(u_3)$ et

a) si on pose $G_2 = cl^{\nu}[(D^{u,\lambda}_{[2]} f).h(x(n))^{-1}]$, on a :

$$G_2(U_1,U_2,0) \in k(x(n))\ [U_1^p,U_2],$$

b) $U_1 \in VDir(G_2(U_1,U_2,0))$,

c) $(D^{u,\lambda}_{[1]} f).h(x(n))^{-1} \in u_3\ O_{X(n),x(n)}$.

Si $x(n)$ est à directrice quasi-transverse on écrira que $x(n)$ est à D.Q.

Preuve et remarque.

On voit que (i) et (i') sont équivalents, on remarque que dans (ii), ((b) et (c)) entraîne (a).

DEFINITION A.1.0.

Si $x(n)$ est à D.Q. et est maigre et si $\kappa(x(n)) \notin \{0,1\}$, on dit que $\kappa(x(n)) = 2$.

PROPOSITION A.1.1.

Si $x(n)$ est à D.Q., il existe une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x(n)}$ vérifiant les conditions de A.1. et telle que $U_1 \in V\mathrm{Dir}(x(n))$.

Preuve.

(i) Si $\alpha(x(n)) = \nu(x(n))$, on a $U_1 + L(U_2,U_3) \in V\mathrm{Dir}(x(n))$, avec L convenable, si $L = 0$, il n'y a rien à faire, si $L \neq 0$, on note v_1 un relèvement dans $O_{X(n),x(n)}$ de $U_1 + L(U_2,U_3)$, il est clair que (v_1,u_2,u_3,λ_i) est une p-base de $O_{X(n),x(n)}$ adaptée en $x(n)$; comme $\mathrm{Dir}(x(n))$ est indépendante de la p-base choisie (I.E.2.2.1.)), on a $V_1 \in \mathrm{Dir}(x(n))$.

(ii) Si $\alpha(x(n)) = \nu(x(n)) + 1$, on a $U_1 + \gamma U_3 \in V\mathrm{Dir}(x(n))$ (I.E.1.5.1.5.) où $\gamma \in k(x(n))$, si $\gamma = 0$, il n'y a rien à faire, si $\gamma \neq 0$, on note v_1 un relèvement dans $O_{X(n),x(n)}$ de $U_1 + \gamma U_3$, il est clair que (v_1,u_2,u_3,λ_i) est une p-base de $O_{X(n),x(n)}$ adaptée en $x(n)$, de plus $\mathrm{Dir}(x(n))$ étant indépendante de la p-base choisie (I.E.2.3.1.), on a $V_1 \in V\mathrm{Dir}(x(n))$, de plus un calcul simple montre que $cl^{\nu}((D^{u,\lambda}_{[2]} f)/h(x(n))) = cl^{\nu}((D^{v,\lambda}_{[2]} f)/h(x(n)))$ et que $(D^{v,\lambda}_{[1]} f)\, h(x(n))^{-1} =$
$= (D^{u,\lambda}_{[1]} f).h(x(n))^{-1} = 0 \mod (v_3)$.

PROPOSITION A.1.2.

Soit $x(n)$ un point fermé à D.Q. de $X(n)$ avec $\alpha(x(n)) = \nu(x(n))$. Alors, avec les notations de A.1., $F = cl^{\nu}((f-R(f,u,\lambda))/h(x(n)))$ est dans $k(x(n))\,[U_1^p,U_2,U_3]$ et $F \notin k(x(n))[U_2,U_3]$.

Preuve.

Comme $V\,\mathrm{Dir}(x(n)) \not\subset \langle U_2,U_3\rangle$, $F \notin k(x(n))\,[U_2,U_3]$, d'autre part

$F \in k(x(n))[U_1^p, U_2, U_3]$, sinon on aurait $\mathrm{ord}_{x(n)}((D_{[1]}^{u,\lambda} f)/h(x(n))) \leq \alpha(x(n))^{-1}$, ce qui est une contradiction.

PROPOSITION A.1.3.

Soit $x(n)$ un point fermé à D.Q. de $X(n)$. Alors $\nu(x(n)) \geq p$. Si $v(x(n)) = 1$, alors $\nu(x(n)) = 0(p)$.

Preuve.

Si $\alpha(x(n)) = \nu(x(n))$, c'est une conséquence de A.1.1. et A.1.2., si $\alpha(x(n)) = \nu(x(n)) + 1$, c'est une conséquence de A.1. (ii) et A.1.1.

B - LA CONDITION (**).

LEMME B.1.

Soit x un point fermé de $X(n)$ et soit (u,λ) une p-base de $O_{X(n),x}$ adaptée à x et telle que

$$f = u_3^{A(3)}(u_3 g + g') + R(f,u,\lambda), \text{ avec}$$

$\mathrm{ord}_x(g') = \nu(x) + 1 = 1 + \nu = \mathrm{ord}_x[g' \bmod. (u_3)]$, $E(n) = \mathrm{div}(u_3)$,

$h(x) = u_3^{A(3)}$, $\alpha(x) = \nu(x) = \nu$, $h(x)^{-1} D_{[1]}^{u,\lambda} f \in (u_3)$ et,

si l'on pose $G_i' = cl_x^{\nu}[D_{[i]}^{u,\lambda} g']$, $i=1$ ou 2,

on a $G_2'(U_1,U_2,0) \in k(x)[U_1^p, U_2]$, $V\,\mathrm{Dir}[G_2'(U_1,U_2,0)] = \langle U_1, U_2 \rangle$.

Alors on a $\kappa(x) = 0$.

Preuve.

B.1.1. Effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ et montrons que tout point fermé $x' \in X'$ qui est ν-proche de x est rationnel sur x et est sur le transformé strict de $\mathrm{div}(u_3)$ et n'est pas sur celui de $\mathrm{div}(u_2)$.

On remarque que U_3 divise les $cl^{\nu}[h(x)^{-1} DM_{[i]}^{u,\lambda} f]$, $1 \leq i \leq s$ et que celles-ci ne sont pas toutes nulles puisque $\alpha(x) = \nu(x) = \nu$ et donc

(1) $U_3 \in V\,\mathrm{Dir}(x)$.

Donc x' est sur le transformé strict de $\mathrm{div}(u_3)$. Si x' est sur le transformé strict de $\mathrm{div}(u_2)$, c'est le point de paramètres $u' = (u_1, u_2 u_1^{-1}, u_3 u_1^{-1})$. On a par I.E.1.

$u_1^{-\nu+1}h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[2]}f = u_1\ G'_2(1,u'_2,0)\mathrm{mod.}(u_1'^2,u'_3) \in J(X',f,E')$.

Les hypothèses sur G'_2 donnent

$$\mathrm{ord}_{x'}[J(X',f,E')] \leq 1+\mathrm{ord}_{x'}[G'_2(1,u'_2,0)] \leq \nu+1-p \leq \nu-1 ,$$

ce qui contredit le fait que x' est ν-proche de x.

Donc x' n'est pas sur le transformé strict de $\mathrm{div}(u_2)$.

Montrons que x' est rationnel sur x. Si $v(x) \geq 2$, comme $x' \in \mathrm{Proj}(\mathrm{Dir}(x))$, c'est évident.

Voyons donc le cas où $v(x) = 1$. Par (1), on a $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_3 \rangle$. Par I.E.4.1., on a alors $f = u_3^{A(3)}(\gamma u_3^{\nu}+g') + R(f,u,\lambda)$, avec les notations de l'énoncé, on a $\gamma u_3^{\nu} = u_3 g$ et γ est inversible puisque $\alpha(x) = \nu(x) = \nu$.

Les hypothèses sur g' donnent

$$(2) \qquad \mathrm{cl}_x^{1+\nu}(g') = \sum_{2 \leq i \leq 1+\nu} U_3^{\nu-i+1}\ G_i(U_1,U_2) = G'(U_1,U_2,U_3),$$

G_i polynôme homogène de degré i de $k(x)[U_1,U_2]$ ou $G_i = 0$.

Posons

$$(3) \qquad u' = (u_1 u_2^{-1}\ ,\ u_2\ ,\ u_3\ u_2^{-1}\ ),$$

on a vu que $u'_2(x') = u'_3(x') = 0$. On a

$$\mathrm{cl}_x^{\nu}[h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[j]}f] = \sum_{2 \leq i \leq 1+\nu} U_3^{\nu-i+1}\ G_{i,j}(U_1,U_2),\ j=1,2.$$

Bien sûr, on a $G'_2(U_1,U_2,0) = G_{\nu+1,2}(U_1,U_2) \neq 0$. Par I.E.1, on a $u'_2 \sum_{2 \leq i \leq 1+\nu} u_3'^{\nu-i+1}\ G_{i,j}(u'_1,1) \in J(X',f,E')\mathrm{mod.}(u_3'^{\nu},u_2'^2)$. On en déduit que $\mathrm{ord}_{x'}[G_{\nu+1,2}(u'_1,1)] \leq \nu-1$.

Le point x' a pour paramètres (v_1,u'_2,u'_3) avec $v_1 = \phi(u'_1,1)\mathrm{mod.}(u'_2)$, Φ polynôme irréductible de $k(x)[U_1,U_2]$ (I.F.4). Donc $\phi^{i-2} | G_{i,j}(U_1,U_2)$. Or $G_{\nu+1,2}$ n'est pas nul et est de degré ν et si $\deg \phi > 1$, on a forcément $\deg \phi = 2 = \nu \geq p$. Donc $p = 2$. Par la formule d'Euler, on a $G_3 = G_{\nu+1} = 3G_3 = U_1\ G_{3,1}+U_2\ G_{3,2}$ et est divisible par ϕ, donc $G_3 = (aU_1 + bU_2)\phi \neq 0$. Au point x', on a

$$f = u_2'^{A(3)+\nu} u_3'^{A(3)}\ v_1 u'_2(au'_1+b) + R(f,u,\lambda)\mathrm{mod.}(u_3'^{A(3)+1},u_2'^{A(3)+\nu+2}) ,$$

et au'_1+b est inversible en x' car $\phi \nmid aU_1 + bU_2$. On en déduit que

$\mathrm{ord}_{x'}[h(x')^{-1}\ D^{v,u}_{[1]}f] \leq \nu-1 = 1$, où (v,μ) est une p-base complétant (v_1,u'_2,u'_3). On a donc $\nu(x') \leq \nu-1$, c'est une contradiction qui prouve que x' est rationnel sur x.

B.1.2. Nous allons montrer que $\mathcal{K}(x') = 0$, ce qui entraînera par définition de $\mathcal{K}(.) = 0$ que $\mathcal{K}(x) = 0$. Par B.1.1., on peut trouver $a \in O_{X(n),x}$ tel que $((u_1+au_2)u_2^{-1}\ ,\ u_2,\ u_3u_2^{-1})$ est un s.r.p. de $O_{X',x'}$. Remarquons qu'en remplaçant u_1 par u_1+au_2 dans (u,λ) nous ne modifions pas les hypothèses, donc nous supposons que

(4) $\quad u' = (u_1u_2^{-1}, u_2, u_3u_2^{-1})$ est un s.r.p. de $O_{X',x'}$.

Par I.E.1., on a $\mathrm{ord}_{x'}[u_2G'_i(u'_1,1,0)\ ;\ i=1,2] \geq \nu$. Ce qui implique que $U_1^{\nu-1} | G'_i$, $i=1,2$ et donc

(5) $$\begin{cases} G'(U_1,U_2,0) = \lambda_o\ U_1^{1+\nu} + \lambda_1\ U_1^{\nu}\ U_2 + \lambda_2\ U_1^{\nu-1}\ U_2^2 + G'' \\ (\nu-1)\lambda_2 = 0 \quad \text{et} \quad G'' \in k(x)[U_1^p, U_2^p]. \end{cases}$$

Puisque $h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[1]}\ f \in (u_3)$, on a $G'_1(U_1,U_2,0) = 0$. D'où

(6) $$(\nu+1)\lambda_o = \nu\lambda_1 = (\nu-1)\lambda_2 = 0.$$

Si $2\lambda_2 = 0$ alors $G'_2(U_1,U_2,0) = \lambda_1\ U_1^{\nu}$, ce qui contredit l'hypothèse $\nu\mathrm{Dir}(G'_2(U_1,U_2,0)) = \langle U_1,U_2 \rangle$. Donc

(7) $$2\lambda_2 \neq 0\ ,\ \nu-1 = O(p),\ p \neq 2.$$

Donc $\nu(\nu+1) \neq O(p)$ et par (6), $\lambda_o = \lambda_1 = 0$ et dans (5), on a $G'' = 0$. Donc on a

(8) $$G'(U_1,U_2,U_3) = \lambda_2\ U_1^{\nu-1}\ U_2^2 + U_3\ K(U_1,U_2,U_3).$$

Posons $G(U_1,U_2,U_3) = \mathrm{cl}_x^{\nu-1}(g)$ (cf. les hypothèses). On a

$$\begin{cases} cl^{\nu}_{x'}\left[(f-k(f,u',\lambda))h(x')^{-1}\right] = \\ U'_3G(U'_1,1,U'_3)+\lambda_2U'_2U'^{\nu-1}_1+U'_2U'_3K(U'_1,1,U'_3)+U'^2_2L(U'_1,U'_2,U'_3). \end{cases}$$

On a $U'_3G(U'_1,1,U'_3) = \sum_{(\nu-1)p^{-1} \geq k \geq 0} \beta_k\, U'^{kp}_1\, U'^{\nu-kp}_3$, $h(x') = u'^{A(3)+\nu}_2\, u'^{A(3)}_3$, avec $\nu = 1(p)$.

Nous allons prouver que $v(x') = 3$ d'où il résultera que $\kappa(x') = 0$. Posons pour $1 \leq i \leq s$

$$\begin{cases} f_i = cl^{\nu}_{x'}\left[h(x')^{-1}\, DM^{u',\lambda}_{[i]}f\right] \\ \quad = \Sigma\, \beta_{k,i}\, U'^{kp}_1\, U'^{\nu-kp}_3 + \mu_i\, U'_2U'^{\nu-1}_1 \ \mathrm{mod.}(U'_2U'_3,U'^2_2)\ , \end{cases}$$

avec pour $i=2,3$.

$$\begin{cases} f_2 = cl^{\nu}_{x'}\left[h(x')^{-1}\, DM^{u',\lambda}_{[2]}f\right] \\ \quad = \Sigma(A(3)+1)\, \beta_k\, U'^{kp}_1\, U'^{\nu-kp}_3 + (A(3)+2)\lambda_2\, U'_2U'^{\nu-1}_1 \ \mathrm{mod.}(U'_2U'_3,U'^2_2)\ , \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_3 = cl^{\nu}_{x'}\left[h(x')^{-1}\, DM^{u',\lambda}_{[3]}f\right] \\ \quad = \Sigma(A(3)+1)\beta_k\, U'^{kp}_1\, U'^{\nu-kp}_3 + A(3)\lambda_2\, U'_2\, U'^{\nu-1}_1 \ \mathrm{mod.}(U'_2U'_3,U'^2_2)\ . \end{cases}$$

Donc $f_2-f_3 = 2\lambda_2\, U'_2\, U'^{\ -1}_1 \ \mathrm{mod.}(U'_2U'_3,U'^2_2)$, par I.E.1.5.1.3., on a $U'_2 \in \mathrm{VDir}(x')$. Par I.E.1.5.1.5, $\mathrm{VDir}(\Sigma\beta_{k,i}\, U'^{kp}_1\, U'^{\nu-kp}_3) \subset \mathrm{VDir}(x')$, puisque $G \neq 0$, ces polynômes sont non tous nuls et divisibles par U'_3 , donc $U'_3 \in \mathrm{VDir}(x')$, de plus puisque $\lambda_2 \neq 0$, par I.E.4.1., on a $U'_1 \in \mathrm{VDir}(x')$, d'où $\kappa(x') = 0$ et donc $\kappa(x) = 0$.

DEFINITION B.2.

Soit x un point fermé maigre à D.Q. de Sing(X(n)) et soit (u,λ) une p-base de $O_{X(n),x}$ adaptée en x, on dit qu'on a (IV $\star$) pour $(x,(u,\lambda))$ si on a un des deux cas

(i) $\alpha(x) = \nu(x)$, $\mathrm{div}(u_1) \not\subset E(n)$ et $\deg_{u_1}\left[cl^{\nu}\left[(f-R(f,u,\lambda))h(x)^{-1}\right]\right] = \nu = \nu(x)$,

(ii) $\alpha(x) = 1+\nu(x)$, x et (u,λ) satisfont à A.1. (ii) et $\deg_{u_1}\left[G_2(U_1,U_2,0)\right] = \nu$.

On dit qu'on a (IV $\star$) pour (x,t) si on a (IV $\star$) pour $(x,(u,\lambda))$

avec $u_1 = t$.
On dit qu'on a (IV $\star$) pour x si on a (IV $\star$) pour $(x,(u,\lambda))$ avec (u,λ) convenable.

B.2.1. Bien sûr, si on a (IV $\star$) pour x, on a $\nu(x) = O(p)$.

PROPOSITION B.2.2.

Soit x un point fermé maigre de $\mathrm{Sing}(X)$, on suppose qu'on a les conditions suivantes :

(1) $\exists v_1, v_3 \in O_{X,x}$ avec $v_1(x) = 0$, $\mathrm{div}(v_1)$ régulier en x et $\mathrm{div}(v_1)$ transverse à E, et $\mathrm{div}(v_3) \subset E$ et on a :

$$J(X,f,E) = (v_1^{\nu})\mathrm{mod}.(v_3) \text{ , avec } \nu = \nu(x)$$

(2) $\exists \Delta \in \mathcal{D}(X,E)$, $\exists r \in \mathbb{N}$ tels que

$$\Delta f = 0 \text{ et } \Delta(v_1) = v_1^r \mathrm{mod}.(v_3) \text{ , } \qquad \Delta \in (v_1^r, v_3)\mathcal{D}(X,E).$$

Alors

(i) $\kappa(x) \leq 2$,

(ii) pour toute p-base (w,μ) de $O_{X,x}$ adaptée en x et avec $w_1 = v_1 \mathrm{mod}.(v_3)$, $w_3 = v_3$, on peut trouver $z_2 = aw_1 + bw_2$, $a \in O_{X,x}$, $b \in O_{X,x}^{\star}$ tel qu'on a (IV $\star$) pour (w_1, z_2, w_3, μ).

Preuve.

Si $J(X,f,E,\{x\}) = (v_1^{\nu})\mathrm{mod}.(v_3)$, comme $\mathrm{div}(v_1)$ est transverse à E, on a clairement $\alpha(x) = \nu$ et x est à D.Q. donc $\kappa(x) \leq 2$. Prouvons (ii) ;on a $J(X,f,E,\{x\}) = (w_1^{\nu})\mathrm{mod}.(w_3)$ et donc $I(X,f,(w,\mu)) = (w_1^{\nu})\mathrm{mod}.(w_3)$, on a donc (IV $\star$) pour (w,μ), ce qui prouve (ii) en prenant $a = 0$.

Voyons le cas où $J(X,f,E,\{x\}) \neq (v_1^{\nu})\mathrm{mod}.(v_3)$. Prenons une p-base (w,μ) de $O_{X,x}$ adaptée en x avec $w_1 = v_1 \mathrm{mod}.(v_3)$ et $w_3 = v_3$. Alors

(3) $\begin{cases} J(X,f,E,\{x\}) \neq (w_1^\nu) \bmod. (w_3) , \\ J(X,f,E) = (w_1^\nu) \bmod. (w_3) . \end{cases}$

Posons :

(4) $$\begin{cases} D_i = DM^{w,\mu}_{[i]} & \text{si } \operatorname{div}(w_i) \subset E , \ 1 \leq i \leq s, \\ \quad = D^{w,\mu}_{[i]} & \text{si } \operatorname{div}(w_i) \not\subset E , \ 1 \leq i \leq s. \end{cases}$$

Donc $D_i = DM^{w,\mu}_{[i]}$ pour $4 \leq i \leq s$.

Si $E = \operatorname{div}(w_2\, w_3)$, par (3), on a $cl^\nu[h(x)^{-1}D_1 f] = \rho_1 W_1^\nu \bmod. (W_3)$, ρ_1 inversible, $cl^\nu[h(x)^{-1}D_i f] = 0 \bmod. (W_3)$, $2 \leq i \leq s$.

Alors $0 = cl^{r+\nu}[h(x)^{-1}\Delta f] = \rho_1 W_1^{r+\nu} \bmod (W_3) \neq 0$. On a une contradiction, donc

(5) $E = \operatorname{div}(w_3)$.

Alors par (3), on a

(6) $\begin{cases} cl^\nu [h(x)^{-1}D_i f] = \bar{\rho}_i\, W_1^\nu \bmod. (W_3) , \\ \rho_i \in \mathfrak{m}_{X,x} \quad \text{si} \quad i \neq 1 \quad \text{ou } 2 \quad \text{et} \quad (\rho_1 \quad \text{ou} \quad \rho_2 \quad \text{inversibles}). \end{cases}$

Si $\alpha(x) = \nu(x)$ ceci prouve (i).

Alors

$$\begin{aligned} 0 &= cl^{r+\nu}(h(x)^{-1}\, \Delta f \bmod. (w_3)) \\ &= \rho_1\, W_1^\nu\, cl^r(\Delta(w_1)) + \rho_2\, W_2^\nu\, cl^r(\Delta(w_2)) \quad \bmod. (W_3) \\ &= \rho_1\, W_1^{\nu+r} + \rho_2\, W_2^\nu\, cl^r(\Delta(w_2)) \bmod. (W_3) . \end{aligned}$$

Donc si ρ_1 est inversible alors ρ_2 est inversible. Par (6), si $\rho_1 \in \mathfrak{m}_{X,x}$ alors ρ_2 est inversible. Ceci prouve (i) pour $\alpha(x) = \nu(x)+1$.

Par (5) et (6), on a

$f = w_3^{A(3)}(\theta\, w_1^\nu + w_3 y) + R(f,w,\mu)$, avec $\operatorname{ord}_x(\theta) = 1$. Par (6), on a

$h(x)^{-1}\, D_1 f = \nu\theta w_1^{\nu-1} + w_1^\nu\, D_1(\theta) = \rho_1\, w_1^\nu \bmod. (w_3)$,

$h(x)^{-1}\, D_2 f = D_2(\theta) w_1^\nu \bmod. (w_3) = \rho_2\, w_1^\nu \bmod. (w_3)$.

On en déduit que $\nu\theta \in (w_1, w_3)$ et que $D_2\theta$ est inversible, donc $\nu = O(p)$ et $(w_1, \theta_2, w_3, \mu)$ est une p-base de $O_{X,x}$ adaptée en x, on a $\theta = aw_1 + bw_2 \bmod. (w_3)$ avec b inversible. On achève la preuve de (ii) en prenant $z_2 = \theta$.

<u>COROLLAIRE B.2.3.</u>

Soit $x \in \mathrm{Sing}(X(n))$ avec $\alpha(x) = \nu(x)$. Soit (u,λ) une p-base de $O_{X(n),x}$ adaptée en x point fermé maigre et telle que

(1) $J(X(n),f,E(n),\{x\}) = (u_1+u_2)^{\nu} + \mathfrak{m}^{\nu+1}$

(2) $cl^{\nu}[h(x)^{-1}(DM^{u,\lambda}_{[1]} + DM^{u,\lambda}_{[2]} + DM^{u,\lambda}_{[3]})(f)] \neq 0$ ou

$\exists i,\ 3 \leq i \leq s$ tel que $cl^{\nu}[h(x)^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[i]} f] \neq 0$.

Effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x, soit x' un point fermé de X' ν-proche de x et non sur le transformé de $V(u_1,u_2)$. Alors

(i) $\kappa(x') \leq 2$,

(ii) si $\kappa(x') = 2$, on a (IV $*$) pour x' .

Preuve .

Notre point $x' \in X'$ a pour paramètres $v = (1+u_1u_2^{-1},u_2,v_3)$, v_3 choisi comme en I.F.4. Par (1), on a $cl^{\nu}[J(X(n),f,E(n)),\{x\}] = (U_1+U_2)^{\nu}$. D'où, par I.E.11,

(3) $J(X',f,E') = (v_1^{\nu})\mathrm{mod.}(v_2)$.

Complétons notre s.r.p. v en une p-base (v,μ) de $O_{X',x'}$ (cf. I.F.4). Par (3), on a

$$(4)\quad \begin{cases} f = h(x')(\rho\, v_1^{\nu} + v_2 g) + R(f,v,\mu) , \\ \text{avec } \mathrm{ord}_{x'}(\rho \bmod.(v_2)) \leq 1,\ \mathrm{div}(v_2) \subset E' \subset \mathrm{div}(v_2v_3). \end{cases}$$

Si $\mathrm{ord}_{x'}(\rho \bmod.(v_2)) = 0$, alors (i) et (ii) sont clairs. Regardons le cas où $\mathrm{ord}_{x'}(\rho \bmod.(v_2)) = 1$. Alors, on a

$$(5)\quad \begin{cases} J(X',f,E',\{x'\}) \neq (v_1^{\nu})\,\mathrm{mod.}(v_2)\ , \\ \forall D\in \mathcal{D}(X',E',\{x'\}),\ \mathrm{ord}_{x'}\ [(h(x')^{-1}Df)\ \mathrm{mod.}(v_2)] > \nu \end{cases} .$$

Par I.F.4.4 (i), (5) implique

$$(6)\qquad cl^{\nu}[h(x)^{-1}(DM^{u,\lambda}_{[1]} + DM^{u,\lambda}_{[2]} + DM^{u,\lambda}_{[3]})(f)] = 0.$$

Donc, par (2), on a, pour un i, $3\leq i\leq s$,

$$(7)\qquad cl^{\nu}[h(x)^{-1}DM^{u,\lambda}_{[i]}f] \neq 0.$$

Posons

$$(8)\quad \begin{cases} f_j = h(x)^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[j]}\ f\quad ,\ 1\leq j\leq s\ , \\ \Delta = f_i\ DM^{u,\lambda}_{[1]} - f_1\ DM^{u,\lambda}_{[i]} \in \mathcal{D}(X,E,\{\bar{x}\}), \end{cases}$$

pour un i fixé satisfaisant à $3\leq i\leq s$ et $cl^{\nu}(f_i)\neq 0$.

On a

$$(9)\qquad \Delta f = 0.$$

Par (1), on a

$$(10)\quad \begin{cases} cl^{\nu}(f_j) = \rho_j\ (U+U_2)^{\nu} \qquad ,\quad 1\leq j\leq s\ , \\ u_2^{-\nu}\ f_j = \rho_j\ v_1^{\nu}\ \mathrm{mod.}(v_2) \qquad \text{et}\ \ \rho_i\ \ \text{inversible (cf. (8)).} \end{cases}$$

Par I.F.4.2.(9), I.F.4.3.1.(4) et I.F.4.3.2.(4) $u_2^{-\nu}\Delta$ se prolonge en une dérivation $\Delta'\in\mathcal{D}(X',E')$,

$$(11)\quad \begin{cases} \Delta' = u_2^{-\nu}\ f_i\ D^{v,\mu}_{[1]} + \sum_{3\leq j\leq s} \gamma_j\ D^{v,\mu}_{[j]}\ , \\ \gamma_j \in u_2^{-\nu}\ (f_1,f_i) = (v_1^{\nu})\mathrm{mod.}(v_2). \end{cases}$$

Par (9), on a

(12) $\Delta' f = 0$

Alors, par (12) et (11), et en permutant v_2 et v_3 ,$(x',(v,\mu))$ satisfont aux hypothèses de la proposition précédente et (i) et (ii) sont clairs.

DEFINITION B.2.4.

Soit x un point maigre de $\mathrm{Sing}(X(n))$ avec $\kappa(x) = 2$ et tel qu'on a les conditions de B.2.2. pour x et deux paramètres (v_1,v_3), on dira alors qu'on a (IV $**$) pour x et (v_1,v_3).

B.2.4.1 On remarque que si on a (IV $*$) pour x et un s.r.p. (u_1,u_2,u_3) et si de plus $J(X(n),f,E(n)) = (u_1^{\nu})\mathrm{mod}.(u_3)$ alors on a (IV $**$) pour x et (u_1,u_3). Il suffit de prendre $r=\nu$ et

$$\Delta = (h(x)^{-1}Df)D_{[1]}^{u,\lambda} - (h(x)^{-1}D_{[1]}^{u,\lambda}f)D$$

où $D = \rho\, DM_{[i]}^{u,\lambda}$, $2 \leq i \leq s$ si $\alpha(x) = \nu(x)$ avec $h(x)^{-1}Df = u_1^{\nu} \bmod \mathfrak{M}_{X,x}^{1+\nu}$,et oì $D = \rho D_{[2]}^{u,\lambda}$ si $\alpha(x) = 1+\nu(x)$ avec ρ convenable dans $O_{X,x}^{*}$.

B.2.5. On remarque que si on a (IV $**$) pour $(x,(u_1,u_3))$ et si $v(x) \geq 2$, l'hypothèse $J(X(n),f,E(n)) = (u_1^{\nu})\mathrm{mod}.(u_3)$ et I.E.1.5.1.5. impliquent que

(1) $\mathrm{VDir}(x) \supset \langle U_1,U_3\rangle$.

PROPOSITION B.3.

Soit x un point fermé et maigre de $\mathrm{Sing}(X(n))$ avec

(1) $\alpha(x) = \nu(x) = \nu, v(x) = 1$ et x est à D.Q.

Alors

(i) $\vartheta(x) = O(p)$ et on a (IV $*$) pour x.

Effectuons l'éclatement $\pi: X' \longrightarrow X(n)$ centré en x. Soit x' un point fermé de X' avec $(\nu,\kappa)(x') = (\nu(x),2)$.

(ii) On a (IV $**$) pour (u_1',t) avec $tO_{X'',x'} = \mathfrak{M}_{X(n),x}\, O_{X',x'}$,

$u_1' = u_1 t^{-1}$ où $\langle in_x(u_1)\rangle$ = VDir(x).

(iii) Si $m(x) = 1$ et si x' est rationnel sur x, on a $\alpha(x') = \nu(x')$.

Preuve.

Choisissons une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ adaptée en x et telle que $\langle U_1\rangle$ = VDir(x) et $\mathrm{div}(u_1) \not\subset E(n)$ (cf. A.1.1.). Puisque $\alpha(x) = \nu(x)$, on a

$$(2) \qquad J(X(n),f,E(n),\{x\}) = (u_1^{\nu}) \mathrm{mod.} \mathfrak{m}_{X(n),x}^{\nu+1} \quad \text{où} \quad \nu = \nu(x).$$

Par A.1.2., on a $\nu = O(p)$, par B.2, on a (IV $*$) en x. On a prouvé (i). Effectuons π. Quitte à permuter u_2 et u_3, x' est dans l'ouvert affine de x' ou $\mathrm{div}(u_2) = \pi^{-1}(x)$. Posons $u' = (u_1u_2^{-1}, u_2, u_3u_2^{-1})$. Par (2) et I.E.1., on a

$$(3) \qquad J(X',f,E') = (u_1'^{\nu}) \ \mathrm{mod.}(u_2').$$

De plus, par (2) et puisque $\nu = O(p)$, il existe

$$(4) \qquad \begin{cases} D = \beta_1 (DM_{[1]}^{u,\lambda} + DM_{[2]}^{u,\lambda} + DM_{[3]}^{u,\lambda}) + \sum_{3 \leq i \leq s} \beta_i \ DM_{[i]}^{u,\lambda} \\ \beta_1 \ , \quad \beta_i \in O_{X(n),x} \ , \end{cases}$$

telle que

$$(5) \qquad h(x)^{-1} \ Df = u_1^{\nu} \ \mathrm{mod.} \mathfrak{m}_{X,x}^{\nu+1} \quad .$$

Posons

$$(6) \qquad \Delta = u_2 h(x)^{-1} \left[(Df) D_{[1]}^{u,\lambda} - (D_{[1]}^{u,\lambda} f) D\right] .$$

On a $\Delta(f) = 0$. De plus $u_2 h(x)^{-1} \ D_{[1]}^{u,\lambda} \ f \in \mathfrak{m}_{X(n),x}^{1+\nu}$, donc

$$(7) \qquad \Delta \in (u_1^{\nu} + \mathfrak{m}_{\alpha(n),x}^{1+\nu}) \mathcal{D}(X(n),E(n),\{x\}).$$

De plus, par I.F.4., $u_2^{-\nu}\Delta$ se prolonge en une dérivation $\Delta' \in \mathcal{D}(X',E')$ au voisinage de x' , $\Delta' = h(x')^{-1}[(D'f)\, D_{[1]}^{u',\lambda} - (D_{[1]}^{u',\lambda} f)D']$ où $D' = \beta_1\, DM_{[2]}^{u',\lambda} + \sum_{3 \leq i \leq s} \beta_i\, DM_{[i]}^{u',\lambda}$. On a $\Delta' f = 0$ et par (5) , $\Delta(u_1') = u_1'^{\nu}$ mod. (u_2') et par (7), $\Delta' \in (u_1'^{\nu},u_2')\mathcal{D}(X',E')$.

On a donc pour (u_1',u_2') les conditions (1) et (2) de (IV $**$) avec $r = \nu$. Ce qui prouve (ii).

Prouvons (iii). Puisque $m(x) = 1$ et que x' est rationnel sur x, on peut choisir une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ adaptée en x telle que x' est un point de croisement pour (u,λ) (cf. I.F.4.1.). Ainsi on a

$$\begin{aligned} I(X',f,(u',\lambda)) &= u_2^{-\nu}\, I(X(n),f,(u,\lambda)) \\ &= (u_1'^{\nu}) \text{ mod. } (u_2'). \end{aligned}$$

Ce qui prouve (iii).

B.4. Soit un point maigre $x \in X(n)$ avec $\kappa(x) = 2$, effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x. Alors,

(i) en tout point fermé ν-proche x' de x, on a $\kappa(x') \leq 2$,

(ii) si en x on a la condition

($**$) (x satisfait à (IV $**$)) ou ($\alpha(x) = \nu(x)$ et $v(x) = 1$),

alors on a ($**$) en tout point fermé x' qui est ν-proche de x avec $\kappa(x') = 2$.

(iii) De plus, si $\pi(n+i): X(n+i+1) \longrightarrow X(n+i)$, $i \in \mathbb{N}$ est une suite infinie d'éclatements centrés en $x(n+i)$ points fermés (ν,κ)-proches de $x = x(n)$, pour un $r \in \mathbb{N}$, on a ($**$) en $x(n+i)$, $i \geq r$.

Ces résultats seront prouvés dans ce paragraphe B.4. ainsi que quelques résultats complémentaires.

Rappelons d'abord un lemme connu.

LEMME B.4.1.

Soit X un schéma régulier noethérien de dimension 3. Soit une suite d'éclatements $\pi(n) : X(n+1) \longrightarrow X(n)$, $n \geqslant 0$, avec $X(0) = X$ et $\pi(n)$ centré en $x(n)$ point fermé de $X(n)$. On suppose de plus que $x(n+1) \in \pi(n)^{-1}(x(n))$ et est rationnel sur $x(n)$ et que pour tout $n \geqslant 1$, $x(n)$ n'est pas sur le transformé strict de $\pi(n-1)^{-1}(x(n-1))$.

Alors il existe deux séries formelles $u = u_1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i t^i$, $v = u_2 + \sum_{i=1}^{\infty} d_i t^i$, $c_i \in O_{X,x(0)}$, $d_i \in O_{X,x(0)}$, où (u_1, u_2, t) est un s.r.p. de $O_{X,x(0)}$ et telles que $\forall n$, $n \geqslant 0$, $x(n)$ est sur le transformé strict $C(n)$ de $C = C(0) = V(u,v)$.

Preuve.

Nous construisons les suites c_n et d_n par récurrence. Nous supposons que $\left(u' = (u_1 + \sum_{i=1}^{n} c_i t^i).t^{-n}\right.$, $v' = (u_2 + \sum_{i=1}^{n} d_i t^i).t^{-n}$, $\left.t\right)$ forment un s.r.p. de $x(n)$ et que localement, $\pi(n-1)^{-1}(x_{n-1}) = V(t)$. Alors, comme $x(n+1)$ n'est pas sur le transformé strict de $V(t)$, on a un s.r.p. de $x(n+1)$ de la forme (u'', v'', t). Comme $x(n+1)$ est rationnel sur $x(n)$, on peut prendre u'' et v'' tels que $u'' = u't^{-1} + \gamma_{n+1} \bmod(t)$, $v'' = v't^{-1} + \delta_{n+1} \bmod(t)$, où $(\gamma_{n+1}, \delta_{n+1}) \in k(x(n+1))^2 = k(x(n))^2 = k(x(0))^2$. On peut prendre alors pour c_{n+1} et d_{n+1} qui sont des relèvements de γ_{n+1}, δ_{n+1} dans $O_{X,x(0)}$.

Ayant ainsi défini nos suites u et v, le résultat du lemme est clair.

PROPOSITION B.4.2.

Soit x un point fermé maigre de $\mathrm{Sing}\,(X(n))$, alors si $v(x) = 2$ et si $\mathrm{VDir}(x)$ est transverse à $E(n)$ et si $\alpha(x) = \nu(x)$, on a $\kappa(x) \leq 1$.

Preuve.

Soit (u,λ) une p-base de $O_{X(n),x}$ adaptée en x avec $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1,U_2\rangle$ et $E(n) \subset \mathrm{div}(u_3)$. Effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ de centre x alors dans X' il y a au plus un point x' qui est ν-proche de x, c'est le point de paramètres $u' = (u_1u_3^{-1}, u_2u_3^{-1}, u_3)$. Si $\nu(x') < \nu(x)$ alors on a $\kappa(x) = 0$.

Si $\nu(x') = \nu(x)$ alors, par I.F.4., on a

$$I(X',f,(u',\lambda)) = u_3^{-\alpha(x)}\, I(X(n),f,(u,\lambda)).$$

On en déduit que $\alpha(x') = \nu(x')$ et que $\mathrm{VDir}(x') = \langle U_1',U_2'\rangle \bmod. (U_3')$.

Si $v(x') = 3$ alors on a $\kappa(x') = 0$ et donc $\kappa(x) = 0$. Sinon, on a $v(x') = 2$ et $\mathrm{VDir}(x')$ transverse à $E' = \mathrm{div}(u_3')$. Si $\kappa(x) \neq 0$ alors, par récurrence, on construit une suite infinie $\pi(n+i) : X(n+i+1) \longrightarrow X(n+i)$, $i \geq 0$ d'éclatements centrés en $x(n+i) \in X(n+i)$ point ν-proche de $x = x(n)$ avec $\mathrm{VDir}(x(n+i))$ transverse à $E(n+i)$ et $v(x(n+i)) = 2$ et $x(n+i+1) \notin \pi(n+i-1)^{-1}(x(n+i-1))$, $\forall i \geq 1$.

Par B.4.1., on en déduit qu'il existe une courbe $C \subset X(n)$ telle que $C = V(v_1,v_2)$, $v_1 = u_1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i\, u_3^i$, $v_2 = u_2 + \sum_{i=1}^{\infty} d_i\, t^i$.

Par II.B.9.1., on a $\alpha(C) = \alpha(x) = \nu(x) \geq p$. et donc C est permise en x.

Par III.4.1. on a $\kappa(x) \leq 1$.

PROPOSITION B.4.3.

Soit x un point maigre de $\mathrm{Sing}(X(n))$ tel que

$$(1)\begin{cases} x \text{ est à D.Q., } v(x) = 2 \text{ et } \mathrm{VDir}(x) \text{ est transverse à } E(n), \\ \alpha(x) = 1+\nu(x). \end{cases}$$

Alors

(i) on n'a pas (IV $**$) en x.

Effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x.

(ii) Il y a au plus un point $x' \in X'$ qui est ν-proche de x et on a $\mathcal{H}(x') \leq 2$,

(iii) si $\alpha(x') = \nu(x') = \nu(x)$ et $\mathcal{H}(x') = 2$ alors pour une p-base (u',λ) de $O_{X',x'}$ adaptée en x' on a

$$(**')\begin{cases} cl^{\nu}(J(X',f,E')\mathrm{mod.}(u_3')) \subset k(x')\,[U_1'^{p},U_2'^{p}] \\ \langle U_1',U_2'\rangle = \mathrm{VDir}[J(X',f,E')\mathrm{mod.}(u_3')]\ , \quad E' = \mathrm{div}(u_3')\ , \\ \alpha(x') = \nu(x') = O(p), \end{cases}$$

(iv) si $\alpha(x') = 1+\nu(x') = 1+\nu(x)$ alors x' satisfait à (1),

(v) s'il existe une suite infinie d'éclatements $\pi(n+i) = X(n+i+1) \longrightarrow X(n+i)$ centrés en $x(n+i)$ points ν-proches de $x = x(n)$ avec $\mathcal{H}(x(n+i)) = 2$ pour $i \geq 0$, alors pour un $r \geq 0$, on a $\alpha[x(n+r)] = \nu[x(n+r)]$ et on a $(**')$ pour $x(n+r)$ et une p-base (v,λ) de $O_{X(n+r),x(n+r)}$ adaptée en $x(n+r)$.

Preuve .

Par (i), A.1 (ii) et A.1.1., on peut trouver une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ avec $U_1 \in \mathrm{VDir}(x)$ et $E(n) = \mathrm{div}(u_3)$, d'où par (1), on a

$$(2)\qquad \mathrm{VDir}(x) = \langle U_1, U_2+\lambda U_3\rangle\ , \quad \lambda \in k(x).$$

Quitte à remplacer u_2 par un relèvement de $U_2+\lambda U_3$ (ce qui ne modifie pas $G_2 = cl^{\nu(x)}[h(x)^{-1}\, D^{u,\lambda}_{[2]}f]$ mod. (U_3)), on a

$$(3)\qquad \mathrm{VDir}(x) = \langle U_1, U_2\rangle\ .$$

On remarque que (i) est une conséquence de B.2.5. (1).

Posons alors $\nu = \nu(x)$ et

$$(4)\qquad f = h(x)g + R(f,u,\lambda) \quad \text{et} \quad G(U_1,U_2,U_3) = cl^{1+\nu}(g).$$

Puisque $\alpha(x) = 1+\nu(x)$ et $E(n) = \mathrm{div}(u_3)$, on a

(5) $\quad \mathrm{VDir}(x) = \mathrm{VDir}[h(x)^{-1}(D^{u,\lambda}_{[1]}, D^{u,\lambda}_{[2]})(f)] = \langle U_1,U_2\rangle$.

D'où par (3)

(6) $\quad G(U_1,U_2,U_3) = F(U_1,U_2) + U_3K(U_1^p,U_2^p,U_3)$.

Effectuons π , alors par (3), il y a au plus un point ν-proche x' de x, c'est le point de paramètres $u' = (u_1u_3^{-1},u_2u_3^{-1},u_3)$. On a

(7) $$\begin{cases} f = h(x')\ g\ u_3^{-1-\nu} + R(f,u',\lambda) , \\ g\ u_3^{-1-\nu} = F(u_1',u_2') + K(u_1',u_2',1)\mathrm{mod.}(u_3'). \end{cases}$$

Si $K \notin k(x)[U_1,U_2]$, on a $\alpha(x') \leq \nu-1$ et donc $\nu(x') < \nu$, d'où $\kappa(x) = 0$.
Si $K \in k(x)[U_1,U_2]$ et $K \neq 0$ alors $\alpha(x') = \nu$; si de plus $\nu(x') = \nu$ alors x' est à D.Q. Si $\mathrm{VDir}(x') = \langle U_1',U_2'\rangle\ \mathrm{mod.}(U_3')$, par B.4.1., on a $\kappa(x') \leq 1$. Si $\kappa(x') > 1$ alors par A.1.2 , on a $\nu(x') = O(p)$ et par (5), on a $\mathrm{VDir}[J(X',f,E')\mathrm{mod.}(u_3')] = \langle U_1',U_2'\rangle$.

D'autre part, puisque x est à D.Q., dans (6), on a

$$(\partial/\partial U_2)(F(U_1,U_2)) = G_2(U_1,U_2,0) \in k(x)[U_1^p,U_2]$$

et comme $\nu(x') = \nu(x) = O(p)$, on a

$$F(U_1,U_2) = U_1\ F_1(U_1^p,U_2^p) + U_2\ F_2\ (U_1^p,U_2^p) .$$

On déduit alors de (7) que :

(8) $\quad \mathrm{cl}^{\nu}_{x'}(J(X',f,E')\ \mathrm{mod.}(u_3')) \subset k(x')[U_1'^p,U_2'^p]$.

Si $\nu(x') = \alpha(x') = \nu$ et $K = 0$ alors f,x' et (u',λ) satisfont aux hypothèses de B.1.1. et donc $\kappa(x') = 0$ et donc $\kappa(x) = 0$.

On a prouvé (iii). Pour prouver (iv) et finir de prouver (ii), regardons le cas où $\nu(x') = \nu$ et $\alpha(x') = 1+\nu$. Alors $K = 0$ et par (7) et (3), on a $\mathrm{VDir}(x') = \langle U_1',U_2'\rangle\ \mathrm{mod.}(U_3')$.
Si $v(x') = 3$ alors $0 = \kappa(x') = \kappa(x)$.

D'autre part, on a

(8) $$h(x')^{-1}D^{u',\lambda}_{[i]}f = u_3^{-\nu}h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[i]}f\ ,\ i=1 \text{ ou } 2.$$

D'où $v(x') = 2$ alors on a (1) et (2) pour x' et x' est à D.Q., ce qui prouve (iv) et achève de prouver (ii).

Prouvons (v). Supposons qu'on a pour tout $i \geqslant 0$, $\alpha(x(n+i)) = 1+\nu(x(n+i))$. Alors par (iv), on a toujours (1) et (2) en $x(n+i)$, $i \geqslant 0$ et donc $x(n+i) \notin \pi(n+i-1)^{-1}[x(n+i-1)]$ pour $i \geqslant 1$. Par B.4.1., il existe une courbe $C = V(v_1,v_2) \subset X(n)$ avec $v_1 = u_1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i\ u_3^i$, $v_2 = u_2 + \sum_{i=1}^{\infty} d_i\ u_3^i$ telle que $\alpha(C) = 1+\nu$. Donc $C \subset \mathrm{Sing}_\nu(x(n))$ et C est permise en x. Effectuons l'éclatement $\pi' : X'' \longrightarrow X(n)$ centré en C, par (5) et I.E.1., dans X'' il n'y a pas de point ν-proche de x, donc $C = \mathrm{Sing}_\nu(X(n))$ et $\kappa(x) = 1$, ce qui est une contradiction. Donc pour un $r \geqslant 1$ on a $\alpha[x(n+r)] = \nu(x(n+r))$ et $\alpha(x(n+r-1)) = 1+\nu(x(n+r-1))$ et par (iii) on a ($**'$) en $x(n+r)$ pour une p-base (v,λ) de $O_{X(n+r),x(n+r)}$ adaptée en $x(n+r)$. Q.E.D.

PROPOSITION B.4.4.

Soit x un point maigre de $\mathrm{Sing}(X(n))$ vérifiant

(1) x est à D.Q., $v(x) = 2$ et $\mathrm{VDir}(x)$ n'est pas transverse à $E(n)$,

(2) $\alpha(x) = 1+\nu(x)$.

Alors

(i) on a (IV $*$) pour x et $\nu(x) = O(p)$,

(ii) pour toute p-base (u,λ) satisfaisant à A.1. (ii) avec $U_1 \in \mathrm{VDir}(x)$ on a $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1,U_3\rangle$, si on effectue l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x, il y a au plus un point ν-proche de x, c'est le point x' de paramètres $u' = (u_1u_2^{-1},u_2,u_3u_2^{-1})$, on a $E' = \mathrm{div}(u'_2.u'_3)$, si $\nu(x') = \nu(x)$, alors $\alpha(x') = \nu(x')$ et x' est à D.Q. et on a (IV $*$) pour x' et u'_1 de plus si on a (IV $**$) pour x, on a (IV $**$) pour $(x', (u'_1,u'_3))$.

Preuve.

Par A.1.1., on peut trouver une p-base (u,λ) satisfaisant à A.1 (ii) avec $U_1 \in VDir(x)$ alors puisque $E(n) = div(u_3)$ et $v(x) = 2$ et $VDir(x)$ non transverse à $E(n)$, on a

(3) $\qquad VDir(x) = \langle U_1, U_3 \rangle$.

D'où dans A.1(ii), on a $G_2(U_1,U_2,0) = \gamma U_1^{\nu(x)}$, $\gamma \in k(x)^*$ et donc on a (IV $*$) pour x et $\nu(x) = O(p)$. On a prouvé (i).

Finissons de prouver (ii). Par (2), x' est le seul point de X' qui peut être ν-proche de x et $E' = div(u_2', u_3')$. Par I.F.4.1., on a

(4) $\qquad u_2^{-1-\nu(x)} h(x)^{-1}\, DM_{[2]}^{u,\lambda} f \in I(X',f,(u',\lambda))$.

Donc $G_2(u_1', 1, u_3') \in I(X',f,(u',\lambda)) \bmod. (u_2')$ d'où $u_1'^{\nu(x)} \in I(X',f,(u',\lambda)) \bmod. (u_2',u_3')$, ce qui prouve qu'on a $\alpha(x') = \nu(x) = \nu(x')$ et que x' est à D.Q. et qu'on a (IV $*$) pour (x', u_1').

Si on a (IV $**$) pour x, alors puisque $E(x) = div(u_3)$, on a $J(X(n),f,E(n)) = (u_1^{\nu}) \bmod. (u_3)$ et puisque $\alpha(x) = 1+\nu$, $J(X(n),f,E(n),\{x\}) = \mathfrak{m}_{X(n),x}\, u_1^{\nu} \bmod. (u_3)$ et par I.E.1. $J(X',f,E') = (u_1'^{\nu}) \bmod. (u_3')$, on a donc (IV $**$) pour $(x',(u_1',u_3'))$.

B.4.5. Terminons l'étude du cas où $\alpha(x) = 1+\nu(x)$, il n'y a plus qu'à regarder le cas où $v(x) = 1$ puisque si $v(x) = 3$, on a $\kappa(x) = 0$.

PROPOSITION B.4.6.

Soit x un point maigre à D.Q. de $Sing(X(n))$ avec

(1) $\quad \alpha(x) = 1+\nu(x)$ et $v(x) = 1$.

Alors

(i) $\nu(x) = O(p)$ et on a (IV $*$) en x.

Effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x.

(ii) Si $J(X(n),f,E(n),\{x\}) = \mathcal{M}_{X(n),x}\, u_1^{\nu(x)} \bmod .\mathcal{M}_{X(n),x}^{2+\nu(x)}$, $u_1 \in O_{X(n),x}$ alors en tout point $x' \in X'$ qui est ν-proche de x, on a (IV $**$) pour (u_1', t) où $tO_{X',x'} = \mathcal{M}_{X(n,x}\, O_{X',x'}$ et $u_1' = u_1 t^{-1}$.

(iii) Si $\mathcal{H}(x) \neq 0$ et si on n'a pas (ii) alors pour toute p-base (u,λ) satisfaisant à A.1 (ii) avec $U_1 \in \mathrm{VDir}(x)$, on a

$$(2)\quad \begin{cases} f = h(x)g + R(f,u,\lambda) \\ G = cl_x^{1+\nu}(g) = \gamma U_2 U_1^{\nu} + U_3 \sum\limits_{0 \leq q \leq \nu/p} U_1^{\nu-qp}\, \gamma_q (\delta\, U_2 + \varepsilon U_3)^{qp}, \\ (\gamma_q, \delta, \varepsilon) \in k(x)^3, \quad (\delta,\varepsilon) \neq (0,0) \\ \text{et pour un } q,\ 1 \leq q \leq \nu/p, \text{ on a } \gamma_q \neq 0. \end{cases}$$

Alors dans X il y a un et un seul point ν-proche x' de x. Si $\delta = 0$, alors x' est le point de paramètres $(u_1 u_2^{-1}, u_2, u_3 u_2^{-1})$ on a (IV $*$) pour x' et $u_1 u_2^{-1}$, si on a (IV $**$) pour $(x,(u_1,u_3))$, on a (IV $**$) pour $(x',(u_1 u_2^{-1}, u_3 u_2^{-1}))$.

Si $\delta \neq 0$, x' est le point de paramètres $v = (u_1 u_3^{-1}, (\delta u_2 + \varepsilon u_3) u_3^{-1}, u_3)$, x' est à D.Q. et on a

$$(**')\quad \begin{cases} cl^{\nu}[J(X',f,E') \bmod .(v_3)] \subset k(x)[V_1^p, V_2^p] , \\ \langle V_1, V_2 \rangle = \mathrm{VDir}[J(X',f,E') \bmod .(v_3)] , \quad E' = \mathrm{div}(v_3), \\ \alpha(x') = \nu(x'). \end{cases}$$

Preuve .

Puisque $v(x) = 1$, dans A. 1(ii), on a

$$(1)\qquad G_2 = aU_1^{\nu} \quad , \ a \in k(x)^*$$

et donc $\nu(x) = O(p)$ et on a (IV $*$) en x. Ce qui prouve (i).

Prouvons (ii). Bien sûr, $U_1 \in \mathrm{VDir}(x) = \mathrm{VDir}(J(X(n),f,E(n)))$. On peut trouver $t \in O_{X(n),x}$ tel que (u_1,t) fait partie d'une p-base (u,λ) adaptée de $O_{X(n),x}$ et tel que $u_1 t^{-1}(x') = 0$ et $tO_{X',x'} = \mathcal{M}_{X(n),x}\, O_{X',x'}$.
Soit alors Δ la dérivation ainsi définie

(2) $\quad \Delta = h(x)^{-1}(D^{u,\lambda}_{[2]}f)D^{u,\lambda}_{[1]} - h(x)^{-1}(D^{u,\lambda}_{[1]}f)D^{u,\lambda}_{[2]}$.

Alors $\Delta' = t^{-\nu+1}\Delta \in \mathcal{D}(X',E')$ en effet

$\Delta' = t^{-\nu}\ h(x)^{-1}(D^{u,\lambda}_{[2]}f)tD^{u,\lambda}_{[1]} - t^{-\nu}h(x)^{-1}(D^{u,\lambda}_{[1]}f)\ tD^{u,\lambda}_{[2]}$.

Comme on a vu en I.F.4. , $tD^{u,\lambda}_{[i]} \in \mathcal{D}(X(n),E(n),\{x(n)\})$ se prolonge en une dérivation appartenant à $\mathcal{D}(X',E')$, $1 \leq i \leq s$. De plus, par hypothèse, on a $t^{-\nu}h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[2]}f = a(u_1t^{-1})^{\nu}$ mod.(t) (cf. (1)) et $t^{-\nu}h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[1]}f \in ((u_1t^{-1})^{\nu},t)$. Donc $\Delta' \in ((u_1t^{-1})^{\nu},t)\mathcal{D}(X',E')$. De plus, on a

$$\Delta'(u_1t^{-1}) = (t^{-\nu}h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[2]}f)t\ D^{u,\lambda}_{[1]}(u_1t^{-1}) - (t^{-\nu}h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[1]}f)t\ D^{u,\lambda}_{[2]}(u_1t^{-1})$$

Bien sûr, on a $t\ D^{u,\lambda}_{[1]}(u_1t^{-1}) = D^{u,\lambda}_{[1]}(u_1) = 1$. De plus $t\ D^{u,\lambda}_{[2]}(u_1t^{-1}) = -t\ u_1\ D^{u,\lambda}_{[2]}(t)t^{-2} = -(u_1t^{-1})\ D^{u,\lambda}_{[2]}(t)$. On en déduit que

(3) $\quad \Delta'(u_1t^{-1}) = a(u_1t^{-1})^{\nu}$ mod.(t), $a \in k(x)^*$.

Clairement on a (IV $**$) pour $(x',(u_1t^{-1},t))$. Ce qui prouve (ii).

Prouvons (iii). Posons donc

(4) $\quad f = h(x)\ g + R(f,u,\lambda)$.

Puisque $E(n) = \mathrm{div}(u_3)$ et que $\alpha(x) = 1+\nu(x)$, on a $\mathrm{VDir}(x) = \mathrm{VDir}[h(x)^{-1}(D^{u,\lambda}_{[1]},D^{u,\lambda}_{[2]})(f)]$. De plus, par A.1 (ii), on a $\mathrm{cl}^{\nu}[h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[1]}f] \in (U_3)$, d'où

(5) $\quad \mathrm{cl}^{1+\nu}(g) = G = aU_2U_1^{\nu} + K(U_1^p,U_2^p,U_3)$,

$a \in k(x)^*$, $\nu = \nu(x)$ et $U_1^{\nu} \nmid K$ puisqu'on n'est pas dans le cas (ii).

Comme $\nu = \nu(x) = 0(p)$, on a

(6) $\quad K(U_1^p,U_2^p,U_3) = U_3Q(U_1^p,U_2^p,U_3^p)$, $U_1^{\nu} \nmid Q$.

Or $\mathrm{cl}_x^{1+\nu}[h(x)^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[2]}f] = aU_2U_1^{\nu} \neq 0$, par (5) et (6) il existe

$D \in \mathcal{D}(X(n),E(n),\{x(n)\})$ telle que

$$(7)\qquad cl_x^{1+\nu}[h(x)^{-1}\, Df] = U_3 \sum_{1\leq q\leq \nu p^{-1}} U_1^{\nu-qp}\, R_q(U_2^p,U_3^p) \neq 0.$$

Effectuons $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ l'éclatement centré en x ; puisque $\kappa(x) \neq 0$, il existe au moins un point $x' \in X'$ qui est ν-proche de x. Par I.E.1., on a $t^{-\nu-1}h(x)^{-1}\, Df \in J(X',f,E')$ et $u_1t^{-1}(x') = 0$. Donc $ord_{x'}[t^{-pq-1}\, u_3R_q(u_2^p,u_3^p)] \geq pq$, donc pour tout q, $1 \leq q \leq \nu p^{-1}$, $R_q(U_2^p,U_3^p)$ est colinéaire à $(\delta U_2+\varepsilon U_3)^{pq}$ avec δ et ε non tous deux nuls et x' est le point sur le transformé strict de $V(u_1,\bar{\delta}u_2+\bar{\varepsilon}u_3)$ où $\bar{\delta}$ et $\bar{\varepsilon}$ relèvent δ et ε , donc au-dessus de x il y a un et un seul point ν-proche de x.

Donc pour tout $D' \in \mathcal{D}(X(n),E(n),\{x(n)\})$, on a

$$(8)\qquad cl_x^{1+\nu}[h(x)^{-1}\, D'f] = \delta' U_2U_1^{\nu} + U_3 \sum_{0\leq q\leq \nu p^{-1}} \gamma'_q\, U_1^{\nu-pq}\, (\delta U_2+\varepsilon U_3)^{qp}.$$

On en déduit que

$$(9)\quad G = cl_x^{1+\nu}(g) = aU_2U_1^{\nu} + U_3 \sum_{0\leq q\leq \nu p^{-1}} \gamma'_q\, U_1^{\nu-qp}(\delta U_2+\varepsilon U_3)^{qp}.$$

Quitte à modifier les γ_q et à multiplier U_3 par un inversible, on peut supposer

$$(10)\qquad \delta = 0 \text{ ou } 1\ ,\quad \varepsilon = 0 \text{ ou } 1.$$

B.4.6.1. Regardons le cas où $\delta = 0$, alors par (10), on a $\varepsilon = 1$ et x' est le point de paramètres $u' = (u_1u_2^{-1},u_2,u_3u_2^{-1})$, on a

$$(11)\quad \begin{cases} f = h(x')\, g\, u_2^{-1-\nu} + R(f,u',\lambda) \\ u_3^{-1-\nu}\, g = a\, u_1'^{\nu} + u_3' \displaystyle\sum_{0\leq q\leq \nu p^{-1}} \gamma_q\, u_1'^{\nu-qp}\, u_3'^{qp} \bmod.(u_2') \end{cases}$$

On a donc $\alpha(x') = \nu(x')$ et (IV $*$) pour x' et u_1'. De plus, si on a (IV $**$) pour $(x,(u_1,u_3))$, on a (IV $**$) pour $(x',(u_1',u_3'))$.

B.4.6.2. Regardons le cas où $\delta = 1$. Alors x' est le point de paramètres $v = (u'_1, u'_2+\varepsilon, u'_3)$ où $u' = (u_1u_3^{-1}, u_2u_3^{-1}, u_3)$.

Par (9), il existe $D' \in (DM^{u,\lambda}_{[1]}+DM^{u,\lambda}_{[2]}+DM^{u,\lambda}_{[3]}, DM^{u,\lambda}_{[i]};\ 4 \leq i \leq s)$ tel que

$$(12)\quad \begin{cases} cl_x^{\nu+1}[h(x)^{-1}\ D'f] = \gamma'\ U_1^{\nu}\ U_2 + U_3 \sum\limits_{0\leq q\leq \nu p^{-1}} \gamma'_q\ U_1^{\nu-qp}(U_2+\varepsilon U_3)^{qp}, \\ \text{et pour un } q,\ 1 \leq q \leq \nu p^{-1},\ \text{on a } \gamma'_q \neq 0. \end{cases}$$

Alors par I.E.1. et I.F.4.2.(9), on a

$$(13)\quad v_3^{-\nu}\ h(x)^{-1}\ D'f \in J(X', f, E', \{x'\}).$$

Donc

$$(14)\quad \gamma'\ v_1^{\nu}(v_2-\varepsilon) + \sum_{0\leq q\leq \nu p^{-1}} \gamma'_q\ v_1^{\nu-qp}\ v_2^{qp} \in J(X', f, E', \{x'\})\text{mod. } v_3,$$

pour un q, on a $\gamma'_q \neq 0$.

On en déduit que $\alpha(x') = \nu(x')$ et que x est à D.Q.

De plus, par I.E.1., on a

$$J(X', f, E') = u_3^{-1-\nu} J(X(n), f, E(n), \{x(n)\}).$$

D'où par (9)

$$(15)\quad cl^{\nu}_{x'}[J(X', f, E')\text{mod.}(v_3)] \subset k(x')[V_1^p, V_2^p].$$

De plus, $u_3^{-\nu} h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[2]} f \in J(X', f, E')$, donc

$$(16)\quad v_1^{\nu} \in J(X', f, E')\text{mod.}(v_3)$$

De (16) et (14), on déduit que

$$(17)\quad \langle V_1, V_2\rangle \subset \text{VDir}(J(X', f, E')\text{mod.}(v_3)).$$

Ce qui finit de prouver (iii).

Remarquons que si $\gamma_\nu = 0$, alors d'après (14), $V_1 \mid cl^{\nu}[v_3^{-\nu} h(x)^{-1}\ D'f]$.

On en déduit que $\langle V_1, V_2\rangle \subset \mathrm{VDir}(J(X',f,E',\{x'\})$ et par B.4.2., on a $\mathcal{K}(x') \leq 1$. On en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE B.4.6.4.

Sous les hypothèses de B.4.6.(ii), si on a $\delta \neq 0$ et $\gamma_\nu = 0$, alors on a $\mathcal{K}(x') \leq 1$.

EXEMPLE B.4.6.5.

$f = u_3^{A(3)}(u_1^\nu u_2 + u_2^\nu u_3 + u_3^{3\nu+1})$, $A(3)+1 \neq 0(p)$ et $\nu = 0(p)$, $E(n) = \mathrm{div}(u_3)$.

Bien sûr, x est à D.Q. et $\alpha(x) = 1+\nu(x) = 1+\nu$. On a

$$J(X(n),f,E(n)) = (u_1^\nu, (A(3)+1)u_3(u_2^\nu + u_3^{3\nu}))$$

$$J(X(n),f,E(n),\{x\}) = (\mathcal{M}_{X(n),x}\ u_1^\nu, (A(3)+1)u_3(u_2^\nu + u_3^{3\nu})).$$

On est dans le cas B.4.6.(iii) avec $\varepsilon = 0$ et on a (IV $**$) en x.

$$f = u_3'^{A(3)+1+\nu}(u_2'^\nu + u_3'^{2\nu} + u_1'^\nu u_2').$$

On a $\alpha(x') = \nu(x')$ et $\mathrm{VDir}(x') = \langle U_2'\rangle$. Ainsi on remarque qu'on a (IV $*$) pour (x,u_1) et (IV $*$) pour (x',u_2') et pas pour (x',u_1').

PROPOSITION B.4.6.6 .

Soit x un point maigre à D.Q. de $X(n)$ et tel que pour une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ adaptée à x, on a

$$(**')\ \begin{cases} \alpha(x) = \nu(x) = \nu,\ E(n) = \mathrm{div}(u_3)\ , \\ \mathrm{cl}_x^\nu[J(X(n),f,E(n))\mathrm{mod.}(u_3)] \subset k(x)[U_1^p, U_2^p]\ , \\ \langle U_1, U_2\rangle = \mathrm{VDir}[J(X(n),f,E(n))\mathrm{mod.}(u_3)]\ . \end{cases}$$

Alors, si $\mathcal{K}(x) = 2$, on a $v(x) = 1$ et $(**)$ en x.

Preuve.

Bien sûr, si $\mathcal{K}(x) = 2$, on a $v(x) \leq 2$. Regardons le cas où $v(x) = 2$.

Par B.4.2., VDir(x) n'est pas transverse à $E(n) = \mathrm{div}(u_3)$. Alors, quitte à modifier u_1 et u_3, par A.1.1., en plus de (**'), on a

(1) $\quad \mathrm{VDir}(x) = \langle U_1, U_3 \rangle$.

Par (**'), il existe un polynôme $P(U_1^p, U_2^p) \notin k(x)[U_1]$, avec $P(U_1^p,U_2^p) \in \mathrm{cl}^{\nu}[J(X(n),f,E(n))\mathrm{mod}.(u_3)]$. Effectuons $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ l'éclatement centré en x, dans X' il y a un seul point ν-proche x' de x, c'est le point de paramètres $u' = (u_1u_2^{-1}, u_2, u_3u_2^{-1})$. Par I.E.1., on a

$$u_2' P(u_1'^p, 1) \in J(X',f,E')\mathrm{mod}.(u_3') \ .$$

Donc $\nu(x') \leq \nu - p + 1 \leq \nu - 1$, c'est une contradiction qui prouve que $v(x) \neq 2$ et donc $v(x) = 1$. Pour terminer on remarque qu'on a $\alpha(x) = \nu(x)$ et $v(x) = 1$ et donc qu'on a (**) en x.

B.4.7. Nous avons prouvé B.4.(i)(ii) (stabilité de $\kappa(x) \leq 2$ et de (**)) dans le cas où $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$. Pour finir de prouver B.4.(i)(ii), par B.2.3. et B.4.2., il n'y a plus qu'à regarder le cas où $\alpha(x) = \nu(x)$ et $v(x) = 2$ et VDir(x) non transverse à E(n). Ce qui implique $e(x) = 2$ ou 3.

On prouvera B.4.(iii) en B.4.11.2.

PROPOSITION B.4.8.

Soit x un point fermé maigre à D.Q. de Sing(X(n)) avec

(1) $\quad v(x) = 2,\ e(x) = 3,\ \alpha(x) = \nu(x)$ et $\kappa(x) \neq 0$.

(i) Alors on n'a pas (**) en x. Effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x.

(ii) Il existe un et un seul point $x' \in X'$ qui est ν-proche de x et si $\kappa(x') > 1$ alors $\kappa(x') = 2$ et $\nu(x) = 0(p)$.

(iii) Si $\kappa(x') = 2$ et $\alpha(x') = \nu(x')$ alors pour une p-base (v,λ) de $O_{X',x'}$ adaptée en x', on a

(**') $\begin{cases} cl^{\nu}_{x'}[J(X',f,E')\mathrm{mod.}(v_3)] \subset k(x')[V_1^p,V_2^p], \ \alpha(x') = \nu(x') = O(p), \\ \langle V_1,V_2\rangle = \mathrm{VDir}[J(X',f,E')\mathrm{mod.}(v_3)], \ E' = \mathrm{div}(v_3). \end{cases}$

(iv) Si $\alpha(x') = 1+\nu(x')$ alors $v(x') = 2$ et $\mathrm{VDir}(x')$ est transverse à E',

Preuve .

Par A.1.1., on peut trouver une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ adaptée en x avec

(2) $\quad U_1 \in \mathrm{VDir}(x)$.

Puisque $e(x) = 3$, quitte à multiplier u_2 par un inversible, on a

(3) $\quad \langle U_1, U_2 + U_3\rangle = \mathrm{VDir}(x)$.

D'où par I.E.1.5.1.6., on n'a pas $J(X(n),f,E(n)) = (u_1^{\nu})\mathrm{mod.}(u_i)$, $i=2$ ou 3, donc on n'a pas (IV **) en x, par (3) et B.4., on a (i). De plus on a

(4) $\quad E(n) = \mathrm{div}(u_2u_3)$,

sinon on pourrait remplacer u_2 ou u_3 par u_2+u_3 dans (u,λ) et on aurait $e(x) = 2$.
Puisque $\kappa(x) \neq 0$, dans X il y a au moins un point ν-proche de x, par (3) c'est le point x' de paramètres $v = (u_1', 1+u_2', u_3')$ où $u' = (u_1u_3^{-1}, u_2u_3^{-1}, u_3)$. Puisque $\alpha(x) = \nu(x)$, on a $\mathrm{VDir}(x) = \mathrm{VDir}[J(X(n),f,E(n),\{x\})]$.

D'où par (3) et I.E.1.

(5) $\quad \mathrm{VDir}[J(X',f,E')] = \langle V_1,V_2\rangle\ \mathrm{mod.}(V_3)$.

De plus, x' est rationnel sur x et par I.F.4.2.(8) appliqué avec $\delta = \varepsilon = 0$ et $\gamma = 1$ ec en permutant les indices 2 et 3, on a

$$(6)\begin{cases} h(x')^{-1}\ D_{[1]}^{v,\lambda}f = u_1'^{-1}G_1(v_1,v_2-1,1) = 0 \text{ mod.}(v_3) \\ h(x')^{-1}\ D_{[2]}^{v,\lambda}f = (v_2-1)^{-1}\ G_2(v_1,v_2-1,1)\text{mod.}(v_3) \\ h(x')^{-1}\ DM_{[3]}^{v,\lambda}f = (G_1+G_2+G_3)(v_1,v_2-1,1)\text{mod.}(v_3) \\ h(x')^{-1}\ DM_{[i]}^{v,\lambda}f = G_i(v_1,v_2-1,1)\text{mod.}(v_3),\ 4\leq i\leq s, \end{cases}$$

où $G_i(U_1,U_2,U_3) = cl_x^{\nu}\left[h(x)^{-1}\ DM_{[i]}^{u,\lambda}f\right]$, $1\leq i\leq s$.

On rappelle que puisque x est à D.Q., on a $G_1 = 0$. Si $\mathrm{VDir}(x) = \mathrm{VDir}(G_1+G_2+G_3,G_i\ ;\ 4\leq i\leq s)$, alors par (6), on a $\alpha(x') = \nu(x)$ et

(7) $\quad \mathrm{VDir}(x') = \langle V_1,V_2\rangle \text{ mod.}(V_3)$, $E' = \mathrm{div}(v_3)$,

et par B.4.2., on a $\tau(x')\leq 1$ et (i) et (ii) en ce cas. Si $(G_1+G_2+G_3,G_i\ ;\ 4\leq i\leq s) = (L(U_1,U_2,U_3)^{\nu})$ alors par (6), on a $\alpha(x') = \nu(x')$ et

(8) $\quad \mathrm{VDir}(x') = \langle L(V_1,V_2-1,1)\rangle \text{ mod.}(V_3)$.

On a donc (IV $*$) pour x' et $L(v_1,v_2-1,1)$, donc $\nu(x) = 0(p)$ et par A.1.2. et (3), on a $cl^{\nu}\left[J(X(n),f,E(n),\{x\})\right] \subset k(x)\left[U_1^p,(U_2+U_3)^p\right]$ et par I.E.1.

(9) $\quad w_1^{\nu}\in J(X',f,E')\text{mod.}(w_3)\subset (w_1^p,w_2^p)\text{mod.}(w_3),\ \ \nu = 0(p)$.

où w est un s.r.p. de $O_{X',x'}$ avec $w_1 = L(v_1,v_2-1,1)$ et $w_3 = v_3$.
On a donc (ii) et (iii) en ce cas. Maintenant il n'y a plus qu'à étudier le cas où

$$cl^{\nu}(G_1+G_2+G_3,G_i\ ;\ 4\leq i\leq s) = 0.$$

Alors je dis que

(10) $\quad \alpha(x') = 1+\nu(x') = 1(p)$.

ce qui achèvera de prouver (iii).
En effet, si on n'a pas (10), alors par (6), on a que V_3 divise

$cl^{\nu}[J(X',f,E',\{x'\})]$ ce qui avec (5), implique qu'on a les hypothèses de B.1.1. pour $(x',(v,\lambda))$ et donc $\kappa(x') = 0$, ce qui est une contradiction. Alors on a par définition $\mathrm{VDir}(x') = \mathrm{VDir}[J(X',f,E')]$ et par (5), $v(x') \geq 2$ mais $\kappa(x') \neq 0$ sinon $\kappa(x) = 0$, donc $v(x') = 2$ et toujours par (5), $\mathrm{VDir}(x')$ est transverse à E'.

De plus, on a $G_1 = G_i = 0$, $4 \leq i \leq s$ et $G_2 = -G_3 \neq 0$ et $G_2 \in k(x)[U_1^p,(U_2+U_3)^p]$ or,

$$(11) \qquad h(x')^{-1}\, D_{[2]}^{v,\lambda} f = (v_2-1)^{-1}\, G_2(v_1,v_2-1,1) \bmod .(v_3).$$

De plus, par (6),

$$h(x')^{-1}\, D_{[1]}^{v,\lambda} f \in (v_3).$$

Les conditions de A.1(ii) sont vérifiées, le point x' est à D.Q. Ce qui achève de prouver (iv).

PROPOSITION B.4.9.

Soit x un point maigre et à D.Q. de $\mathrm{Sing}(X(n))$ tel que

(1) $\quad v(x) = e(x) = 2, \quad \kappa(x) = 2$ et $\alpha(x) = \nu(x)$.

(i) Effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x, alors il existe un et un seul point $x' \in X'$ qui est ν-proche de x. On a $\alpha(x') = \nu(x')$ et $v(x') = 2$. Si on a (IV $**$) pour x, on a (IV $**$) en x'.

(ii) Si on peut construire une suite infinie d'éclatements $\pi(n+i) : X(n+i+1) \longrightarrow X(n+i)$, $i \in \mathbb{N}$ centré en $x(n+i) \in X(n+i)$ point ν-proche de $x = x(n)$ avec $\kappa(x(n+i)) = 2$, $i \geq 0$, alors il existe $r \geq 0$ tel que $[\alpha(x(n+r)) = \nu(x(n+r))$ et $v(x(n+r)) = 2$ et $e(x(n+r)) = 3]$.

Preuve.

Par définition de $v(x)$ et $e(x)$, il existe une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ adaptée en x et telle que

(2) $\quad \mathrm{VDir}(x) = \langle U_1, U_2 \rangle$.

De plus, puisque $\kappa(x) = 2$, par B.4.2. et A.1.1, quitte à échanger u_1 et u_2, on a

(3) $\quad \mathrm{div}(u_2) \subset E(n) \subset \mathrm{div}(u_2 u_3)$.

Puisque $\kappa(x) \neq 0$, par (2), il existe un et un seul point de X' qui est ν-proche de x, c'est le point x' de paramètres $u' = (u_1 u_3^{-1}, u_2 u_3^{-1}, u_3)$. Par I.F.4., on a

(4) $\quad I(X', f, (u', \lambda)) = u_3^{-\nu(x)} \, I(X(n), f, (u, \lambda))$

D'où $\alpha(x') = \nu(x') = \nu(x)$ et

(5) $\quad \mathrm{VDir}(x') = \langle U_1', U_2' \rangle \ \mathrm{mod.}(u_3')$.

De plus, si on a (IV $**$) en x, par (2), on a (IV $**$) pour $(x, (u_1, u_2))$ et par (4), on a (IV $**$) pour $(x', (u_1', u_2'))$. On a prouvé (i).
Prouvons (ii). Soit r le plus grand entier tel que pour $0 \leq i \leq r-1$, on a $\alpha(x(n+i)) = \nu(x(n+i))$ et $v(x(n+i)) = e(x(n+i)) = 2$. Alors, par (i), on a $\alpha(x(n+r)) = \nu(x(n+r))$ et $v(x(n+r)) = 2$, donc $e(x(n+2)) = 3$.
Si r est infini, pour chaque $i \geqslant 1$, le point $x(n+i+1)$ n'est pas sur le transformé strict de $\pi(n+i-1)^{-1}(x(n+i-1))$, $i \geqslant 1$, il est rationnel sur $x(n+i)$, $i \geqslant 0$ et il est sur le transformé strict de $\mathrm{div}(u_2) \subset X(n)$.
Par B.4.2., il existe une courbe $C \subset \mathrm{div}(u_2) \subset X(n)$ telle que $\alpha(C) = \nu(x) \geqslant 2$, C est à croisements normaux avec $E(n)$. Donc C est permise en x et $\alpha(x) = \nu(x)$ et $v(x) = 2$, par III.4.1, on a $\kappa(x) \leq 1$, c'est impossible.

B.4.10. Nous avons prouvé B.4. (i)(ii). On remarque que B.4.(i) entraîne que le théorème II.C.4.1. est vérifié pour $\kappa(x) = 2$.

B.4.11. Nous allons prouver B.4. (ii)(iii)

PROPOSITION B.4.11.1.

Soit x un point maigre à D.Q. de $\mathrm{Sing}(X(n))$ tel qu'on a $(**)$ (cf.B.4) et soit (u,λ) une p-base de $O_{X(n),x}$ adaptée en x satisfaisant aux conditions de A.1.1. Effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x et soit $x' \in X'$ un point fermé de X' avec $\kappa(x') = 2$. Alors

(i) on a $(**)$ en x' ;

(ii) soit $\theta \in O_{X(n),x}$ tel que $\theta O_{X',x'} = \mathfrak{m}_{X(n),x} O_{X',x'}$ et soit $u_1' = u_1\, \theta^{-1}$. Chacune des conditions (1)(2)(3) ci-dessous entraîne (4).

(1) $\alpha(x) = \nu(x)$,

(2) $\alpha(x) = 1+\nu(x)$ et $v(x) = 2$,

(3) $\alpha(x) = 1+\nu(x)$ et $v(x) = 1$ et

$$J(X(n),f,E(n),\{x\}) = u_1^{\nu}\, \mathfrak{m}_{X(n),x} \bmod .\mathfrak{m}_{X(n),x}^{\nu+2} ,$$

(4) il existe $t \in O_{X',x'}$ avec $\mathrm{div}(t) \subset E'$ et tel que on a (IV $**$) pour $(x',(u_1',t))$.

Preuve de (ii).

Par B.3 ((1) et $v(x) = 1) \Longrightarrow$ (4)

Par B.4.8.(i) ((1) et $v(x) = 2) \Longrightarrow (e(x) = 2)$ et par B.4.9.(i) on a (4).

Par B.4.3.(i), (2) entraîne que $\mathrm{VDir}(x)$ n'est pas transverse à $E(n)$ et B.4.4.(ii) donne (4).

Par B.4.6.(ii), (3) $\Longrightarrow$ (4).

Prouvons (i). Puisque (4) $\Longrightarrow (**)$, il reste à étudier le cas $\alpha(x) = 1+\nu(x)$, $v(x) = 1$ et on n'a pas (3). Alors, par B.4.6.(iii) on a soit (4) soit $(**')$ en x', mais d'après B.4.6.4. on a $(**') \Longrightarrow (**)$.

Il est clair que B.4.11.1 prouve B.4.(ii).

B.4.11.2. Prouvons B.4.(iii).

(P). Si $\alpha(x) = \nu(x)$ et $v(x) = 1$, on prend $r = 0$.

(Q) Si $\alpha(x) = 1+\nu(x)$ et $v(x) = 1$, par B.4.6.(ii)(iii), on peut prendre $r = 1$.

(R) Si $\alpha(x) = 1+\nu(x)$ et si $v(x) = 2$ et si VDir(x) est transverse à E(n), B.4.3.(v) donne le résultat.

(S) Si $\alpha(x) = \nu(x)$ et $v(x) = 2$ et $e(x) = 3$. Soit $\alpha(x(n+1)) = \nu(x(n+1))$ et par B.4.8, on a (**') en x(n+1) et par B.4.11.1, on a (**) en x(n+1), alors on prend $r = 1$. Soit $\alpha(x(n+1)) = 1+\nu(x(n+1))$ et par B.4.8 (iv), on est dans le cas (R).

(T) Si $\alpha(x) = \nu(x)$ et $v(x) = e(x) = 2$ alors par B.4.2., VDir(x) n'est pas transverse à E(n) et par B.4.9, soit on a (IV **) en x et donc $r = 0$, soit pour un $i \in \mathbb{N}$, on a (S) en x(n+i).

(U) Si $\alpha(x) = 1+\nu(x)$, si $v(x) = 2$ et si VDir(x) n'est pas transverse à E(n), par B.4.3.(v), on a $\alpha(x(n+1)) = \nu(x(n+1))$, c'est-à-dire qu'en x(n+1), on a (P) ou (S) ou (T)

Il est clair qu'il n'y a pas d'autre cas.

PROPOSITION B.5.

Le théorème II.C.4.4. est vérifié pour $\kappa(x) = 2$ et $\nu(x) \neq O(p)$.

On remarque en effet que si on a $\nu(x) \neq O(p)$, on ne peut pas avoir (**). (cf. A.1.3., B.2.2. et B.2.1.). Donc par B.4.(iii), il n'existe pas de suite infinie $\pi(n+i) : X(n+i+1) \longrightarrow X(n+i)$, $i \geq 0$ où $\pi(n+i)$ est l'éclatement centré en x(n+i) point de X(n+i) qui est (ν, κ)-proche de $x = x(n)$.

B.6. Nous n'avons plus qu'à prouver que le théorème II.C.4.4. est vérifié pour $\kappa(x) = 2$ et $\nu(x) = O(p)$. Par B.4.(iii), nous nous limitons au cas où on a (**) en x. Nous allons devoir utiliser des invariants très fins dont l'étude nécessitera les paragraphes C et D qui suivent.

C. PREPARATION D'UN IDEAL.

C.1. RAPPELS.

Soit R un anneau noethérien, $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} R$ tel que $R_{\mathfrak{P}} = R'$ est régulier. et R séparé pour la filtration $\mathfrak{P}$-adique.

Soit $(u_1, \ldots, u_d)$ une suite régulière de R engendrant $\mathfrak{P} \subset R$, donc l'image de $(u_1, \ldots, u_d)$ dans $R_{\mathfrak{P}}$ est un s.r.p. de $R_{\mathfrak{P}} = R'$ et on a $\mathfrak{P}R_{\mathfrak{P}} \cap R = \mathfrak{P}$.

Soit L une forme linéaire sur $\mathbb{R}^d$ à coefficients tous strictement positifs. On définit sur R' une valuation $v_{L,u,R'}$ par

$$(1) \qquad v_{L,u,R'}(u_1^{a(1)} \ldots u_d^{a(d)}) = L(a(1), \ldots, a(d)).$$

L'image de $v_{L,u,R'}$ engendre un sous-groupe de $\mathbb{R}$, $v_{L,u,R'}$ définit donc une filtration de R' dont le gradué associé $gr_{L,u,R'}(R')$ est isomorphe en tant que k'-algèbre graduée à $k'[U_1, \ldots, U_d]$, où $k' = R'/\mathfrak{P}R'$, $k'[U_1, \ldots, U_d]$ étant munie de degrés

$$(2) \qquad \deg(U_i) = L(0, \ldots, 1, \ldots, 0) , \qquad 1 \leq i \leq d .$$

L'isomorphisme est défini par

$$(3) \qquad in_{L,u,R'}(u_i) \longmapsto U_i , \quad 1 \leq i \leq d.$$

On a une preuve et des explications détaillées dans [11] (2).

Plus généralement, on peut définir sur R une valuation $v_{L,u,R}$, une filtration et le gradué associé par

$$(1') \qquad v_{L,u,R}(u_1^{a(1)} \ldots u_d^{a(d)}) = L(a(1), \ldots, a(d)).$$

C.1.1. Alors je dis que les $in_{L,u,R}(u^A)$ avec $L(A) = n$ forment une base sur $k = R/P$ de $gr^n_{L,u,\bar{R}}(R)$, $n \in \mathbb{N}$.

En effet, si on a

$$\sum_{L(A) = n} \lambda_A u^A = \sum_{L(B) > n} \mu_B u^B .$$

comme les $in_{L,u,R'}(u^A)$ avec $L(A) = n$ forment une base de $gr^n_{L,u,R'}(R')$, les images de λ_A dans R' sont dans PR'. Or, $PR' \cap R = P$, donc les λ_A sont dans $P = (u_1,\dots,u_d)$.

C.1.2. De plus, $\forall g \in R$, si on désigne par g' son image dans R', on a

$$(4) \qquad v_{L,u,R}(g) = v_{L,u,R'}(g').$$

Il est clair que $v_{L,u,R'}(g') \geq v_{L,u,R}(g)$; d'autre part si l'inégalité est stricte, $\exists s \in R \setminus P$

$$sg = s \sum_{L(A)=n} \lambda_A u^A = \sum_{L(B) > n} \mu_B u^B \quad , \ n = v_{L,u,R}\, g.$$

c'est en contradiction avec C.1.1.

Désormais, on pourra noter $v_{L,u}$ au lieu de $v_{L,u,R}$ ou $v_{L,u,R'}$.

C.1.3. De C.1.1. et C.1.2., on déduit qu'on a un morphisme d'anneaux

$$\theta_{R,R',u,L} : gr_{L,u,R}(R) \longrightarrow gr_{L,u,R'}(R')$$

et que $gr_{L,u,R}(R)$ est isomorphe en tant que k-algèbre graduée à $k[U_1,\dots,U_d]$ où $k = R/P$ et $k[U_1,\dots,U_d]$ est muni des degrés

$$(2') \qquad \deg(U_i) = L(0,\dots,1,\dots,0) \quad , \ 1 \leq i \leq d.$$

L'isomorphisme est défini par

(3') $\quad in_{L,u,R}(u_i) \longmapsto U_i \ , \ 1 \leq i \leq d.$

Le morphisme $\theta_{R,R',u,L}$ induisant le morphisme $k[U_1,\dots,U_d] \longrightarrow k'[U_1,\dots,U_d]$, $U_i \longmapsto U_i$, $1\leq i\leq d$, à tout élément g de k on fait correspondre son image g' dans k' par le morphisme canonique.

C.1.4. Avec les notations précédente J étant un idéal de R, on pose

(5) $$\{J,L\}_u^a = \{f\in J \ ; \ v_{L,u}(f) \geqslant a\} \ ,$$
$$\{J,L\}_u^{a+} = \{f\in J \ ; \ v_{L,u}(f) > a\} \ , \qquad a\in \mathbb{R}_+ \ .$$

C.1.4. Plus généralement, si Δ est un convexe de $\mathbb{R}_+^d$ avec $\Delta = \Delta + \mathbb{R}_d^+$, on note

(6) $\quad I(\Delta)_u$ l'idéal de R engendré par les monômes u^A , $A\in\Delta$.

LEMME C.1.4.1.

Si $f\in I(\Delta)_u$, alors on a

(1) $$f = \sum_{A\in\Delta\,,\,|A|=\,ord_P(f),} \lambda_A\, u^A + \sum_{|B|>\,ord_P(f),B\in\Delta} \lambda_B\, u^B \ .$$

l'ensemble des exposants $\{A\in\Delta \ , \ |A| = ord_P(f), \ \lambda_A \notin P\}$ est unique et les images $\bar\lambda_A$ des λ_A dans R/P sont uniques et on a

(2) $\quad in_P(f) = \sum \bar\lambda_A\, u^A$.

Preuve :

On note $n = ord_P(f)$. Puisque $f\in I(\Delta)_u$, on peut écrire

$$f = \sum_{A\in\Delta\,,\,|A|\leq n} \lambda_A\, u^A + \sum_{B\in\Delta\,,\,|B|>n} \lambda_B\, u^B \ ,$$

Soit $m = \inf\{|A|\}$. Si $m<n$, alors, dans $gr_P^m(R) \simeq k[U_1,\dots,U_d]$, on a

$$\sum_{A\in\Delta,|A|=m} \bar{\lambda}_A u^A = 0$$, donc les $\bar{\lambda}_A$ sont nuls,

les λ_A sont dans P, on peut décomposer les λ_A sur $(u_1,\ldots,u_d)$. Comme $\Delta = \Delta + \mathbb{R}_+^d$ on obtient alors un nouveau développement de f où $\inf\{|A|\}$ a augmenté strictement. On a donc un développement du type,

$$f = \sum_{A\in\Delta,|A|=n} \lambda_A u^A + \sum_{B\in\Delta,|A|>n} \lambda_B u^B .$$

De plus, si un λ_A est dans P, on le décompose sur $(u_1,\ldots,u_d)$ et on obtient la relation de l'énoncé. De plus, on a clairement

$$in_P(f) = \sum \bar{\lambda}_A u^A \in gr^n(R) ,$$

d'où l'unicité des A et des $\bar{\lambda}_A$.

LEMME C.1.4.2.

Si Δ_1 et Δ_2 sont deux convexes de $\mathbb{R}_+^d$ avec $\Delta_i = \Delta_i + \mathbb{R}_+^d$, $i = 1,2$, on a

$$I(\Delta_1)_u \cap I(\Delta_2)_u = I(\Delta_1 \cap \Delta_2)_u .$$

Preuve .

Il est clair que $I(\Delta_1\cap\Delta_2)_u \subset I(\Delta_1)_u \cap I(\Delta_2)_u$. Nous allons montrer que pour tout $m\in\mathbb{N}$, on a

$$I(\Delta_1)_u \cap I(\Delta_2)_u \subset I(\Delta_1\cap\Delta_2)_u + P^m.$$

Le résultat sera donc obtenu par séparation. Soit $f\in I(\Delta_1)_u\cap I(\Delta_2)_u$, $n = ord_P(f)$. On a donc

$$f = \sum_{|A|=n,A\in\Delta_1} \lambda_{A,1} u^A + \sum_{|B|>n} \lambda_{B,1} u^B = \sum_{|C|=n,c\in\Delta_2} \lambda_{C,2} u^C + \sum_{|B|>n} \lambda_{C,2} u^D .$$

Si $n \geqslant m-1$ on a clairement $f\in I(\Delta_1\cap\Delta_2)_u + P^m$. Sinon, d'après C.1.4.2., on a

$$\sum \lambda_{A,1} u^A = \sum \lambda_{C,2} u^C \mod (P^{n+1}).$$

Donc les indices A de la première somme sont dans $\Delta_1\cap\Delta_2$.
On pose alors $g = f - \sum\lambda_{A,1} u^A \in I(\Delta_1\cap\Delta_2)_u$, on a $ord_P(g) > ord_P(f)$. Une

récurrence croissante sur ord (g) donne le résultat.

LEMME C.1.4.3.

Si Δ_i, $i\in I$, est une famille de convexes de $\mathbb{R}^d_+$ avec $\Delta_i = \Delta_i + \mathbb{R}^d_+$, $\forall i\in I$, alors

$$I(\bigcap_{i\in I} \Delta_i)_u = \bigcap_{i\in I} (\Delta_i)_u .$$

Preuve.

Si I est fini, le résultat est clair par C.1.4.2.. Si I est infini. il suffit de prouver

$$\forall m\in \mathbb{N} , \ I(\bigcap_{i\in I} \Delta_i)_u = \bigcap_{i\in I} (\Delta_i)_u \mod(\mathfrak{p}^m).$$

Mais, pour m fixé on se ramène au cas de la famille finie.

C.2. Avec les hypothèses et notations de C.1., soit J un idéal de R, soit :

(1) $\nu = \mathrm{ord}_{u_1}(JS)$ avec $S = R/(u_2,\dots,u_d)$.

On désigne par $\Delta(J \ ; u_d,\dots,u_2 \ ; u_1)$ le plus petit des convexes Δ de $\mathbb{R}^{d-1}$ tel que $J\in I(D)$ où D est le convexe de $\mathbb{R}^d$ défini par :

$$D = \{(x_1,\dots,x_d) \mid x_1 \geqslant \nu \ \text{ ou } \ (x_2,\dots,x_d)(\nu-x_1)^{-1}\in \Delta\} .$$

On montre l'existence de $\Delta = \Delta(J \ ; u_d,\dots,u_2 \ ; u_1)$ par C.1. (7), et de plus, on montre [11] (1) que Δ est un polyèdre dont les sommets sont dans $\mathbb{N}^{d-1} . (\nu!)^{-1}$. Toujours par C.1. (7), pour tout élément $f\in J$, on a un développement fini mais non unique :

(2) $$f = (\sum_{1\leqslant j\leqslant \nu ,a\in\Delta} f_{j,a} u_1^{\nu-j} u_2^{ja(2)}\dots u_d^{ja(d)}) + f_o u_1^{\nu} + u_1^{\nu+1} g ,$$

avec $f_{j,a}\in R$, $f_o\in R$, $g\in R$ et $\Delta=\Delta(J \ ; u_d,\dots,u_2 \ ; u_1)$, et pour un $f\in J$,

f_o est inversible (cf. (1)).

Soit Λ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^{d-1}$ à coefficients tous strictement positifs, on définit L forme linéaire sur $\mathbb{R}^d$ par :

(3) $\quad L(a(d),\ldots,a(1)) = a(1) + \Lambda(a(d),\ldots,a(2)).$

Bien sûr, L est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^d$ à coefficients tous > 0. Par (2), on a les équivalences

(4) $\quad (\forall v \in \Delta\, ,\ \Lambda(v) \geqslant 1) \Longleftrightarrow (\forall f \in J,\ v_{L,u}(f) \geqslant \nu)\ ,$

$\quad (\forall v \in \Delta\, ,\ \Lambda(v) > 1) \Longleftrightarrow (\forall f \in J,\ c\ell^{\nu}_{L,u}(f) = \gamma U_1^{\nu})\,,$

où $c\ell^{\nu}_{L,u}(f)$ est l'image de f dans $gr^{\nu}_{L,u}(R) \subset gr_{L,u}(R) \simeq k[U_1,\ldots,U_d]$, et où $\Delta = \Delta(J\ ;\ u_d,\ldots,u_2\ ;\ u_1)$.

Soit v un sommet de Δ, alors on peut trouver une forme linéaire Λ sur $\mathbb{R}^{d-1}$ à coefficients strictement positifs telle que

(5) $\quad \{w \in \Delta\, ,\ \Lambda(w) \geqslant 1\} = \{v\}\ .$

On a alors, $\forall f \in J$ et avec les notations de (2)

(6) $$c\ell^{\nu}_{L,u}(f) = \sum_{j=1}^{\nu} U_1^{\nu-j}\ \Gamma_{j,v}\, U_2^{jv(2)} \ldots U_d^{jv(d)} + \Gamma_o\, U_1^{\nu}\ ,$$

$$\Gamma_{j,v} = c\ell^{o}_{L,u}(f_{j,v}) \in k \quad \text{et} \quad \Gamma_o = c\ell^{o}_{L,u}(f_o) \in k\,,$$

$(v(d),\ldots,v(2))$ étant les coordonnées de v (C.2. (2)).

Par C.1.4.1, $c\ell^{\nu}_{L,u}(f)$ ne dépend pas du choix de Λ satisfaisant à (5), on pose donc :

(7) $$c\ell_v^\nu(f) = \sum_{j=1}^{\nu} U_1^{\nu-j}\ \Gamma_{j,v} + \Gamma_o\, U_1^\nu ,$$

$c\ell_v^\nu(f) \in k\,[U_1,\ldots,U_d]$, et on note

(8) $in_v(J\ ;\ u_d,\ldots,u_2\ ;\ u_1)$ ou plus simplement $in_v(J)$ l'idéal de $k[U_1,\ldots,U_d]$ engendré par les $c\ell_v^\nu(f)$, $f \in J$.

D'autre part, avec les hypothèses et notations de C.2.1., en désignant par $\bar{\Gamma}$ l'image dans k' de $\Gamma \in k$. on a par C.2.1. (3) et (4) et avec des notations évidentes :

(9) $$c\ell_{v,R'}^\nu = \sum_{1 \leq j \leq \nu} U_1^{\nu-j}\ \bar{\Gamma}_{j,v} + \bar{\Gamma}_o\, U_1^\nu \in k'[U_1,\ldots,U_d] .$$

On note $\delta(J\ ;\ u_d,\ldots,u_2\ ;\ u_1)$ ou plus simplement $\delta(J)$ ou même δ , le nombre

(9') $$\delta = \inf\ \{|v|,\ v \in \Delta\}$$

où on pose $|v| = v(d)+\ldots v(2)$.

<u>REMARQUE</u> C.2.1.

D'après (2), pour tout sommet v de Δ , $\exists j$, $0 \leq j \leq \nu-1$, $jv \in \mathbb{N}^{d-1}$, donc

(10) $\forall v$, v sommet de Δ , $v \in (1/\nu!)\mathbb{N}^{d-1}$,

(11) $\delta \in (1/\nu!)\ \mathbb{N}$.

<u>PROPOSITION</u> C.2.2.

Avec les hypothèses et notations précédentes, on rappelle que $R' = R_P$ où $P \in \operatorname{Spec} R$, $P = (u_1,\ldots,u_d)$, on a

(1) $\quad \nu = \mathrm{ord}_{u_1}(JS')$ où $S' = R'/(u_2,\dots,u_d)\,R'$.

Alors, pour toute forme linéaire Λ sur $\mathbb{R}^{d-1}$ à coefficients tous > 0, si L est la forme linéaire associée sur $\mathbb{R}^d$ (cf. C.2. (3)), on a, en notant $v_{L,u,R}$ et $v_{L,u,R'}$ les valuations associées à L et u dans R et R'

(2) $\quad \forall f \in R\,,\ v_{L,u,R}(f) = v_{L,u,R'}(f)$.

De plus on a un morphisme $\theta_{R,R',u,L}$

(3) $\theta_{R,R',u,L} : gr_{L,u,R}(R) \longrightarrow gr_{L,u,R'}(R')$ défini par :

$$in_{L,u,R}(u_i) \longmapsto in_{L,u,R'}(u_i)\ ,\ 1 \leq i \leq d$$

et le morphisme canonique $k \longrightarrow k' = R'/(u_1,\dots,u_d)R'$, $\theta_{R,R',u,L}$ est le morphisme naturel $k[U_1,\dots,U_\alpha] \longrightarrow k'[U_1,\dots,U_\alpha]$.

Enfin, on a l'égalité :

(4) $\quad \Delta(J\ ;\ u_d,\dots,u_2\ ;\ u_1) = \Delta(JR'\ ;\ u_d,\dots,u_2\ ;\ u_1)$.

Preuve .

Les relations (2) et (3) sont claires. Si Δ est un polyèdre convexe de $\mathbb{R}_+^{d-1}$ tel que $\Delta = \Delta + \mathbb{R}_+^{d-1}$, alors $\Delta = \bigcap_{\Lambda \in E} \{v, \Lambda(v) = 1\}$, où E est l'ensemble des formes linéaires Λ sur $\mathbb{R}^{d-1}$ à coefficients > 0 telles que $\Delta \subset \{u\ ;\ \Lambda(v) \geqslant 1\}$. La relation (4) découle alors de C.2. (2) et C.2. (4).

C.3. LA PREPARATION.

DEFINITION C.3.1.

Avec les hypothèses et notations de C.1 et C.2, soit v un sommet de

$\Delta(J\ ;\ u_d,\dots,u_2\ ;\ u_1)$, de coordonnées $(v(d),\dots,v(2))$, on dit que v est <u>soluble</u> si v est à coordonnées entières et si on peut trouver $\lambda \in k$ tel que

$$(1) \qquad in_v(J\ ;\ u_d,\dots,u_2\ ;\ u_1) = ((U_1 + \lambda U_d^{v(d)} \dots U_2^{v(2)})^{\nu}),$$

on dit que v est <u>préparé</u> s'il n'est pas soluble.

REMARQUE C.3.2.

Un sommet à coordonnées non entières est toujours préparé.

DEFINITION C.3.3.

On dit que $\Delta(J\ ;\ u_d,\dots,u_2\ ;\ u_1)$ est préparé si <u>tous ses sommets</u> sont préparés.

PROPOSITION C.3.4.

Avec les hypothèses et notations de C.1 et C.2, on suppose de plus que

(1) R est local régulier, $(u_1,\dots,u_d)$ est un s.r.p. de R, R est d'égale caractéristique. On choisit un corps de représentants dans $\hat{R}$ le complété de R, alors on peut trouver $v_1 \in \hat{R} = k[[u_1,\dots,u_d]]$ tel que

$$(2)\ v_1 = u_1 + \sum \lambda_{a(d),\dots,a(2)}\ u_d^{a(d)} \dots u_2^{a(2)},$$

$$(a(d),\dots,a(2)) \in \Delta(J\ ;\ u_d,\dots,u_2\ ;\ u_1),$$

et $\Delta(J\ ;\ u_d,\dots,u_2\ ;\ v_1)$ est préparé.

De plus

$$(3) \qquad \Delta(J\ ;\ u_d,\dots,u_2\ ;\ v_1) \subset \Delta(J\ ;\ u_d,\dots,u_2\ ;\ u_1).$$

Preuve.

On ordonne les points de $\mathbb{R}_+^{d-1}$ par :

(4) $(v \leq v') \Longleftrightarrow (|v| < |v'|$ ou $(|v| = |v'|$ et $v \leq v'$ pour l'ordre lexicographique)).

Si $\Delta(J \,;\, u_d,\dots,u_2 \,;\, u_1)$ est préparé, bien sûr, on prend $u_1 = v_1$.

Sinon, on désigne par v le plus petit sommet de $\Delta(J \,;\, u_d,\dots,u_2 \,;\, u_1)$ tel que v n'est pas préparé. On a donc $in_v(J) = ((U_1 + \bar{\lambda} U_2^{a(2)} \dots U_d^{a(d)})^{\nu})$, on pose $w_1 = v_1 + \lambda u_2^{a(2)} \dots u_d^{a(d)}$, alors d'après [11 (3.10)],

(5) $\Delta(J \,;\, u_d,\dots,u_2 \,;\, u_1) \subset \Delta(J \,;\, u_d,\dots,u_2 \,;\, w_1)$ et $v \notin \Delta(J \,;\, u_d,\dots,u_2 \,;\, w_1)$.

Si w_1 ne convient pas, on itère ce procédé avec $(J \,;\, u_d,\dots,u_2 \,;\, w_1)$, on obtient le résultat par passage à la limite dans $\hat{R}$.

On trouvera une démonstration complète dans [11 (3)], qui ne nécessite pas l'hypothèse d'égale caractéristique.

C.4. Nous supposons désormais que $R = O_X(X)$ où X est un schéma affine régulier noethérien de dimension 3 satisfaisant aux hypothèses de I.A.1 et soit x un point fermé de X, on note $R' = O_{X,x}$. On suppose que $(u_1,\dots,u_d) = (u_1,u_2,u_3) \subset R$ est un s.r.p. de $O_{X,x} = R'$. Soit η le point générique de $Y = V(u_1,u_3)$. Alors (u_1,u_3) est un s.r.p. de $O_{X,\eta} = R''$.

Soit J un idéal de $O_X(X) = R$ tel que

(1) $\operatorname{ord}_{u_1}(JS) = \operatorname{ord}_{u_1}(JT) = \operatorname{ord}_{u_1}(JT') = \operatorname{ord}_{u_1}(JS') = \operatorname{ord}_{u_1}(JS'') = \operatorname{ord}_{u_1}(JT'') = \nu$

où $T = R/u_3R$, $S = R/(u_2,u_3)R$, $T' = R'/u_3R'$, $S' = R'/(u_2,u_3)R'$, $T'' = R''/u_3R''$, $S'' = R''/(u_2,u_3)R''$.

Ce qui veut dire que tout élément f de JR s'écrit $f = su_1^{\nu} + u_3 g$ et pour un f on a $s(x) \neq 0$.

Alors (C.2), $\Delta(J : u_3 ; u_1)$ est une demi-droite de $\mathbb{R}$, on note
(2) $a(3,J ; u_3, u_2 ; u_1)$ ou plus simplement $a(3)$ l'abscisse de l'unique sommet de $\Delta(J ; u_3 ; u_1)$.

D'après C.2.1 (4), on a

(3) $$\Delta(J ; u_3 ; u_1) = \Delta(JR' ; u_3 ; u_1) = \Delta(JR'' ; u_3 ; u_1).$$

D'après (1), on remarque que $J \subset (u_1,u_3)$ et donc

(4) $$a(3,J ; u_3,u_2 ; u_1) > 0.$$

PROPOSITION C.4.1.

Sous les hypothèses précédentes, $a(3,J ; u_3,u_2 ; u_1)$ est le minimum des abscisses des points de $\Delta(J ; u_3,u_2 ; u_1)$.

Preuve.

Notons $(a'(3),\beta)$ les coordonnées du sommet v d'abscisse minimale de $\Delta(J ; u_3,u_2 ; u_1)$. Alors par C.2. (2) et C.2. (4), on a pour tout $f \in J$

(1) $$f = \sum_{1\leq j\leq \nu} u_1^{\nu-j}\, u_3^{a(3,j)}(u_2^{a(2,j)} g_j + u_3 g_j') + f_o\, u_1^{\nu}$$

avec g_j, g_j' et f_o dans R et ($g_j \neq 0 \Longrightarrow g_j$ inversible dans $R' = O_{X,x}$) avec $a(3,j) \geqslant ja'(3)$, $a(2,j) \geqslant j\beta$ si $a(3,j) = ja'(3)$ et, par C.4. (3), pour un $f \in JR'$, il existe un j, $1 \leq j \leq \nu$, tel que $a(3,j) = ja'(3)$ et $a(2,j) = j\beta$ et g_j inversible dans R'.

D'après C.4 (1), on a

(2) $$a'(3) > 0.$$

Soit L la forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ définie par $L(x_1,x_3) = x_1 + x_3 . a'(3)^{-1}$.

Elle définit $v_{L,u,R}$, $v_{L,u,R'}$ et $v_{L,u,R''}$ pour $u = (u_1,u_3)$. On a $\forall f \in JR'$, $v_{L,u,R'}(f) \geq \nu$. Or, $\forall f' \in JR''$, on a $f' = f.g^{-1}$ avec $g \notin (u_1,u_3)$, donc $v_{L,u,R''}(g) = 0$, donc $v_{L,u,R''}(f') \geq \nu$. Par C.2. (4), on en déduit

(3) $\quad a(3,J \; ; u_3, u_2 \; ; u_1) \geq a'(3)$.

Posons $L(x_1,x_3) = x_1 + x_3 \, a(3,J \; ; u_3, u_2 \; ; u_1)^{-1}$. Alors pour tout $f \in J$ on a $v_{L,u,R''}(f) = v_{L,u,R}(f) \geq \nu$ et donc par définition de $\Delta(J \; ; u_3, u_2 \; ; u_1)$, on a

$$\Delta(J \; ; u_3, u_2 \; ; u_1) \subset \{(x_2,x_3) \mid x_3 \geq a(3, J \; ; u_3, u_2 \; ; u_1)\}$$

d'où $a'(3) \geq a(3, J \; ; u_3, u_2 \; ; u_1)$.

Ce qui prouve C.4.1.

C.4.1.1. Avec les notations de C.4.1. et de sa preuve, on a le tableau commutatif

(1)
$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, hook] \arrow[d] & R' \arrow[r, hook] \arrow[d] & R'' \arrow[d] \\
gr_{L,u,R}(R) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & gr_{L,u,R'}(R') \arrow[r] \arrow[d] & gr_{L,u,R''}(R'') \arrow[d, "\wr"] \\
(R/(u_1,u_3))[U_1,U_3] \arrow[r] & (R'/(u_1,u_3))[U_1,U_3] \arrow[r] & k(\eta)[U_1,U_3]
\end{tikzcd}$$

De plus, $\forall f \in R$, par C.2.1 (2), on a les égalités

(2) $$v_{L,u,R}(f) = v_{L,u,R'}(f) = v_{L,u,R''}(f) \; .$$

PROPOSITION C.4.1.2.

Sous les hypothèses de C.4., avec les notations de C.4.1 et C.4.1.1., si $(f_1,\dots,f_o)$ est une base de JR, on pose :

(1) $$f_i = g_{i,o}\, u_1^{\nu} + \sum_{1\leq j\leq \nu} u_1^{\nu-j}\, u_3^{a(3,i,j)}(g_{i,j} + u_3\, g'_{i,j}) ,$$

$1\leq i\leq s$, $a(3,i,j)\geq ja(3)$, $g_{i,j}\in R$, $g'_{i,j}\in R$ pour un couple (i,j), $1\leq j\leq \nu$, $1\leq i\leq s$, $g_{i,j}\notin (u_1,u_3)R$ et $a(3,i,j) = ja(3)$.
Alors on a

(2) $$c\ell^{\nu}_{L,u,R} = \overline{g_{i,o}}\; U_1^{\nu} + \sum_{1\leq j\leq \nu} U_1^{\nu-j}\, U_3^{ja(3)}\; \overline{g_{i,j}} \quad , 1\leq i\leq s ,$$

où $\overline{g_{i,j}}$ est l'image de $g_{i,j}$ dans $R/(u_1,u_3)$.

Alors si $(a(3),\beta)$ sont les coordonnées du sommet d'abscisse minimale de $\Delta(JR' ; u_3, u_2 ; u_1)$, on a $\beta = \inf\{(\mathrm{ord}_x(\overline{g_{i,j}})).j^{-1} ; 1\leq i\leq s , 1\leq j\leq \nu\}$.

Preuve.

Les relations (1) et (2) découlent du fait que $a(3)$ est le minimum des abscisses des points de $\Delta(J ; u_3, u_2 ; u_1)$ ou de $\Delta(JR' ; u_3, u_2 ; u_1)$ (cf. C.4.1 et C.4. (3)).

Posons $\beta' = \inf\{(\mathrm{ord}_x(\overline{g_{i,j}}).j^{-1} , 1\leq i\leq s, 1\leq j\leq \nu\}$. Désignons par v le point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(a(3),\beta')$. Nous allons montrer que v est le sommet d'abscisse minimale de $\Delta(JR' ; u_3, u_2 ; u_1)$. Soit Λ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ à coefficients > 0 telle que

(3) $\Lambda(a(3),\beta') = 1$ et $\Lambda(x_3,x_2) > 1$ si $x_3\geq a(3)+(\nu!)^{-1}$ et $x_2\geq 0$.

Par exemple

$$\Lambda(x_3,x_2) = (a(3)+(2.\nu!)^{-1})^{-1}x_3+[1-a(3).(a(3)+(2.\nu!)^{-1})^{-1}]\,\beta'^{-1}\, x_2 .$$

Alors on pose $L(x_1,x_2,x_3) = x_1+\Lambda(x_3,x_2)$ (C.2. (3)). On a alors $v_{L,u,R'}(f_i)\geq \nu$,

$1 \leq i \leq s$ et pour tout i tel qu'il existe j, $1 \leq j \leq \nu$, $a(3,j,i) = ja(3)$, $\mathrm{ord}_x(\bar{g}_{i,j}) = j\beta'$, alors $c\ell^{\nu}_{L,u,R'}(f_i) \neq \gamma U_1$. Par C.2. (4), on a

(4) $\quad \Delta(JR' \; ; u_3, u_2 \; ; u_1) \cap \{w \mid \Lambda(w)\} = 1 \neq \emptyset$.

D'après C.2.1. (10) et par (3), comme $a(3)$ est le minimum des abscisses des points de $\Delta(JR' \; ; u_3, u_2 \; ; u_1)$ (C.4.1. et C.4.13)), on a

(5) $\quad \Delta(JR' \; ; u_3, u_2 \; ; u_1) \cap \{w \mid \Lambda(w)\} = 1\} = \{v\}$.

Ce qui prouve que v est sommet de $\Delta(J \; ; u_3, u_2 \; ; u_1)$. Q.E.D.

C.4.2. Désormais, en plus des hypothèses de C.4., nous supposons que

(1) $\quad Y = \mathrm{Spec}(R/(u_1,u_3))$ est une droite affine.

Plus précisément, on se donne un sous-corps k de $O_Y(Y)$ et on suppose que

(2) $\quad O_Y(Y) = k[U_2]$ où U_2 est la classe de u_2 mod (u_1,u_3) .

Alors, par C.4., on a que

(3) x est le point fermé de Y où s'annule U_2.

Il est clair que x est rationnel sur k.

On suppose de plus que

(4) $\quad \Delta(J \; ; u_3 \; ; u_1)$ est préparé.

Soient $(f_1,\ldots,f_s)$ des générateurs de $J\subset R$, on pose

(5) $$c\ell^{\nu}_{L,u,R}(f_i) = F_{i,o}\,U_1^{\nu} + \sum_{1\leq j\leq \nu} F_{i,j}\,(U_2)U_1^{\nu-1}\,U_3^{ja(3)} = F'_i$$

où L est la forme linéaire définie par $L(x_1,x_3) = x_1+x_3.a(3)^{-1}$ (C.4. (2)). Comme $gr_{L,u,R}(R) = R/(u_1,u_3)\,[U_1,U_3] = k[U_2].[U_1,U_3]$, les $F_{i,j}$ sont des polynômes de $k[U_2]$, $1\leq i\leq s$, $0\leq j\leq \nu$.

On suppose enfin que

(6) $$\exists i\ ,\ 1\leq i\leq s\ ,\ F_{i,o}\in k^{*}.$$

Prouvons que

(7) $$\Delta(JR''\ ;\ u_3\ ;\ u_1) \text{ est préparé.}$$

D'après (6), il existe i, $1\leq i\leq s$ (que l'on peut prendre égal à 1) tel que $F_{1,0}\in k^{*}$. Supposons que $\Delta(JR''\ ;\ u_3\ ;\ u_1)$ n'est pas préparé, alors on a pour tout i, $1\leq i\leq s$

$$c\ell^{\nu}_{L,u,R''}(f_i) = P_i(U_2).Q_i(U_2)^{-1}.(U_1+\lambda(U_2).\mu(U_2)^{-1}.U_3^{a(3)})^{\nu}$$

$$= \Theta_{L,u,R,R''}\,[c\ell^{\nu}_{L,u,R}(f_i)] \qquad \text{(C.2.1.)}$$

avec P_i, Q_i, λ et μ dans $k[U_2]$.

Alors, on a $P_1.Q_1^{-1} = F_{1,0}\in k^{*}$ et donc

(8) $$(U_1 + \lambda(U_2).\mu(U_2)^{-1}\,U_3^{a(3)})^{\nu} = F_{1,0}^{-1}.F'_p\in k[U_1,U_2,U_3]\ .$$

Ainsi, $\forall i$, $2\leq i\leq s$, on a

$$c\ell^{\nu}_{L,u,R}(f_i).F_{1,0}.Q_i(U_2) = P_i(U_2)\ F'_p\ ,$$

par le lemme de Gauss, on en déduit que F'_1 divise les F'_i, (8) implique alors que $\Delta(J\ ;\ u_3\ ;\ u_1)$ n'est pas préparé, ce qui est une contradiction.

C.4.2.1. Soit y un point fermé de $Y = \operatorname{Spec} k[U_2]$, il est défini par un polynôme irréductible $\Phi(U_2)$, on a $d^\circ\Phi = [k(y) : k]$. Soit v_2 un relèvement de $\Phi[U_2]$ dans $O_{X,y}$, (u_1,v_2,u_3) est alors un s.r.p. de $O_{X,y}$ et, on pose :

(2) $\begin{cases} v_1 = u_1 + u_3^a g & \text{avec } a(3) \leq a,\ g \in O_{X,y}, \\ v_3 = u_3. \end{cases}$

On choisit $\mu_4,\dots,\mu_s$ dans $O_{X,y}$ de façon que

(3) $(v_1,v_2,v_3,\mu_4,\dots,\mu_s)$ soit une p-base de $O_{X,y}$.

On pose $v(i,j) = \operatorname{val}_{U_2}(F_{i,j})$ et on définit $G_{i,j}$ et ψ par

(4) $F_{i,j} = U_2^{v(i,j)}\, G_{i,j}$, $1 \leq i \leq s$, $0 \leq j \leq \nu$,

$\psi(i\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1) = \sup[(\deg(G_{i,j}))/j\ ;\ 1 \leq j \leq \nu]$,

où $F_{i,j}$ est défini en C.4.2. (5).
On rappelle que :

$$\beta(J\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1) = \inf\{v(i,j)/j\ ,\ 1 \leq i \leq s\ ,\ 1 \leq j \leq \nu\ ,\ F_{i,j} \neq 0\}.$$

On pose :

(5) $\varphi(J\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1) = \sup\{(\deg F_{i,j})/j\ ,\ 1 \leq i \leq s\ ,\ 1 \leq j \leq \nu\ ,\ F_{ij} \neq 0\}$

$$e(J\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1) = \varphi(J\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1) - \beta(J\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1)\ .$$

Bien sûr, pour tout i, $1 \leq i \leq s$ tel qu'il existe j, $1 \leq j \leq \nu$, $F_{i,j} \neq 0$, on a :

(6) $\psi(i\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1) \leq e(J\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1)$.

PROPOSITION C.4.2.2.

Avec les hypothèses et notations de C.4.2 et C.4.2.1., on pose $J_x = JO_{X,x}$ et $J_y = JO_{X,y}$. On suppose de plus que les $F_{i,o}$ sont dans k. Alors on a :

(i) (1) $a(3, J_x ; u_3, u_2 ; u_1) = a(3, J_y ; v_3, v_2 ; v_1)$,

(2) $\beta(J_y ; v_3, v_2 ; v_1) \leq \varphi(J_x ; u_3, u_2 ; u_1)$.

(ii) Si $x \neq y$ et si on a une des conditions suivantes

(a) $a > a(3, J ; u_3, u_2 ; u_1)$ (C.4.6 (2))

(b) $a(3, J ; u_3, u_2 ; u_1) \notin \mathbb{N}$,

alors

(3) $\beta(J_y ; v_3, v_2 ; v_1) \leq \inf [\psi(i ; u_3, u_2 ; u_1)/[h(y):h] ; 1 \leq i \leq s]$.

(iii) Si $x \neq y$ et si, pour un i_o, $1 \leq i_o \leq s$, on a $F_{i_o} \neq 0$ et une des conditions

(a) $\exists j,\ 0 \leq j < \nu$ avec $\binom{\nu}{j} \neq 0$ et $F_{i_o,j} = 0$,

(b) $\exists j,\ 1 \leq j \leq \nu$ avec $\binom{\nu}{j} = 0$ et $F_{i_o,j} \neq 0$,

alors

(4) $\beta(J_y ; v_3, v_2 ; v_1) \leq \sup [\psi(i, u_3, u_2 ; u_1)/[k(y):k] ; 1 \leq i \leq s]$.

(iv) Si $x \neq y$ et si $(F'_1,\ldots,F'_s)$ n'est pas monogène alors

(5) $\beta(J_y ; v_3, v_2 ; v_1) \leq e(J_x ; u_3, u_2 ; u_1)/[k(y):k]$.

(v) Si $x \neq y$ et si $(F'_1,\ldots,F'_s) = (F'_1)$ et si on a une des deux conditions

(a) $\nu \neq 0(p)$,

(b) $\nu = p^r q$, $(p,q) = 1$ et $F_{1,p^r} = F_{1,o}\, Q^{p^r}$ pour un $Q \in k[U_2]$,

alors on a (5).

(vi) Si $x \neq y$ et si $\nu = 0(p)$, $\nu = p^r q$, $(p,q) = 1$ et $(F'_1,\ldots,F'_s) = F'_1$ et $F^{-1}_{1,o} F_{1,p^r}$ non puissance p^r-ème alors on a

$$(6) \quad \begin{cases} \beta(J_y ; v_3, v_2 ; v_1) \leq (e(J_x ; u_3, u_2 ; u_1)/[k(y):k]) + 1/p , \\ \beta(J_y ; v_3, v_2 ; v_1) < \lfloor e(J_x ; u_3, u_2 ; u_1)/[k(y):k]\rfloor + 1 . \end{cases}$$

Preuve.

C.4.2.2.1. Rappelons une notation bien connue.

Pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$, on pose

$$(7)\quad \begin{cases} \lfloor \varphi \rfloor = \text{partie entière inférieure de } \varphi, \\ \lceil \varphi \rceil = \text{partie entière supérieure de } \varphi, \\ [\varphi] = \text{partie fractionnaire de } \varphi. \end{cases}$$

On a donc

$$\varphi = \lfloor \varphi \rfloor + [\varphi]$$

$$-\lfloor \varphi \rfloor = \lceil -\varphi \rceil$$

C'est cette notation qui est employée dans (6).

C.4.2.2.2. Posons

$$R_y = O_{X,y}\ ,\ T_y = R_y/(u_1,u_3),\ S_y = R_y/u_3\,R_y\ .$$

Alors d'après C.4.2 (5) (6), on a :

$$\mathrm{ord}_{u_1}(JS) = \mathrm{ord}_{u_1}(JT) = \mathrm{ord}_{u_1}(JT'') = \mathrm{ord}_{u_1}(JS'') = \mathrm{ord}_{u_1}(JS_y) = \mathrm{ord}_{u_1}(JT_y) = \nu\ .$$

Nous pouvons donc appliquer à y, η et X les résultats de C.4.1 et C.4.1.2., on a

$$(8)\qquad a(3,J_y\ ;\ v_3,\ v_2\ ;\ v_1) + \mathbb{R}_+ = \Delta(J_\eta\ ;\ v_3\ ;\ v_1) = \Delta(J_\eta\ ;\ u_3\ ;\ v_1).$$

Soit L sa forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$L(x_1,x_3) = x_1 + x_3/a(3,\ J\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1)$, on pose $v = (v_1,v_3)$, d'après C.1. (4) et (5), on a :

$$(9)\qquad v_{L,u}(v_1) = v_{L,u}(u_1+u_3^a g) = 1\ ,\quad v_{L,u} = v_{L,v}\ ,$$

$$\{J,L\}_u^b = \{J,L\}_v^b \quad\text{et}\quad \{J,L\}_u^{b+} = \{J,L\}_v^{b+}\ ,\ \forall b\in\mathbb{R}_+$$

On a donc $gr_{L,u}(R_y) = gr_{L,v}(R_y)$, $v_{L,u}(J_y) = v_{L,u}(J_y) = \nu$.

On pose :

$$(10)\qquad c\ell^1_{L,u}(v_1) = c\ell^1_{L,v}(v_1) = U_1 + c\ell^1_{L,u}(u_3^a g) = V_1\ ,$$

$$V_3 = c\ell^1_{L,u}(V_3)$$

C.4.2.2.3. Si on a

$$(11) \qquad c\ell^{1}_{L,u}(u_3^a g) = 0$$

alors on a $V_1 = U_1$ et :

$$c\ell^{\nu}_{L,u}(f_i) = F'_i = \sum_{j=o}^{\nu} V_1^{\nu-j}\, V_3^{ja(3)}\, F_{i,j}(U_2),\ 1\leq i\leq s .$$

On a alors clairement $a(3, J ; v_3, v_2 ; v_1) = a(3)$ donc (11) $\Longrightarrow$ (1). De plus, on a $\beta(J ; v_3, v_2 ; v_1) \leq \inf(\mathrm{ord}_y(F_{i,j}(U_2)))\ j^{-1}$, donc (11) $\Longrightarrow$ (2) et si $x \neq y$, (11) $\Longrightarrow$ (3). Or (3) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (5) $\Longrightarrow$ (6).

De plus, (ii) (b) $\Longrightarrow$ (ii)(a) $\longrightarrow$ (11), de même (g non inversible au point η) $\Longrightarrow$ (11). On a prouvé (ii) et la proposition quand on a (11).

C.4.2.2.3. Il reste à prouver la proposition lorsque l'on n'a pas (11) . On suppose désormais

(12) $a = a(3, J_x ; u_3, u_2 ; u_1) = a(3) \in \mathbb{N}$ et g est inversible en η .

On a alors dans $gr_{L,v}(R_y)$

$$(13)\begin{cases} c\ell^{\nu}_{L,v}(f_i) = \sum_{j=o}^{\nu} (V_1 - U_3^{a(3)}G)^{\nu-j}\, U_3^{ja(3)}\, F_{i,j}(U_2) = F'_i = c\ell^{\nu}_{L,u}(f_i),\ 1\leq i\leq s ,\\ c\ell^{\nu}_{L,v}(f_i) = \sum_{j=o}^{\nu} V_1^{\nu-j}\, U_3^{ja\,3)}\, F'_{i,j} = F'_i ,\ 1\leq i\leq s ,\\ F'_{i,j}\in k[U_2],\ G = c\ell^{o}_{L,u}(g) \in k[U_2]_y . \end{cases}$$

D'autre part, comme $\Delta(J ; u_3 ; u_1)$ est préparé, (C.4.2. (7)), $\exists\, i,\ 1\leq i\leq s,\ F'_i \neq F_{i,o}\, V_1^{\nu}$ (C.2. (4)).

Donc

(14) $\exists (i,j),\ 1\leq i\leq s,\ 1\leq j\leq \nu$, $F'_{i,j} \neq 0$.

Donc $\Delta(J ; u_3 ; v_1) = a(3) + \mathbb{R}_+$, ce qui entraîne (1) d'après C.4.1.

On remarque alors que l'on a :

$$c\ell^1_{L,u}(v_1) = c\ell^1_{L,v}(v_1) = V_1 = U_1 + U_3^{a(3)} G.$$

La relation (13) nous donne alors :

$$(15) \quad \begin{cases} F'_{i,j} = F_{i,j} + (-1)^j \binom{\nu}{j} F_{i,o} G^j + \sum_{h=1}^{j-1} (-1)^{j-h} \binom{\nu-h}{j-h} F_{i,h} G^{j-h} , \\ F'_{i,j} \in k(U_2), \ 1 \le i \le s , \ 1 \le j \le \nu . \end{cases}$$

Comme $\Delta(J_\eta ; u_3 ; u_1)$ est préparé, on a $(F'_1,\dots,F'_o) \ne (V_1^\nu)$, et donc les $F'_{i,j}$ ne sont pas tous nuls.

C.4.2.2.4. Regardons le cas où :

$$(16) \quad \begin{cases} \exists (i_o,j), \ 1 \le i_o \le s, \ 1 \le j \le \nu , \ F_{i_o,j} \ne 0 \ \text{et} \\ \mathrm{ord}_y(G) > \inf([\mathrm{ord}_y(F_{i_o,j})]/j \ ; \ 1 \le j \le \nu). \end{cases}$$

Soit j_o tel que $[\mathrm{ord}_y(F_{i_o,j_o})]/j_o$ est minimal, $1 \le j_o \le \nu$, alors dans (15), on a :

$$\mathrm{ord}_y(F'_{i_o,j_o}) = \mathrm{ord}_y(F_{i_o,j_o}) ,$$

ce qui nous prouve (2) en ce cas, et si $x \ne y$, on a

$\mathrm{ord}_y(F'_{i_o,j_o}) = \mathrm{ord}_y(F_{i_o,j_o}) \le j_o \Psi(i_o \ ; u_3, u_2 \ ; u_1)/[k(y) : k]$,

ce qui nous donne (2) et (4) si $x \ne y$ et donc prouve la proposition en ce cas.

C.4.2.2.5. Regardons le cas où :

$$(17) \quad \begin{cases} \exists (i_o,j), \ 1 \le i_o \le s, \ 1 \le j \le \nu , \ F_{i_o,j} \ne 0 \ \text{et} \\ \mathrm{ord}_y(G) < \inf([\mathrm{ord}_y(F_{i_o,k})]/k \ ; \ 1 \le k \le \nu). \end{cases}$$

Soit j_o minimal tel que $F_{i_o,j_o} \neq 0$ et $1 \leq j_o \leq \nu$, alors (15) devient :

$$F'_{i_o,j_o} = F_{i_o,j_o} + (-1)^{j_o} \binom{\nu}{j_o} F_{i_o,0} G^{j_o} .$$

Il est clair que l'on a (2) et, si $x \neq y$, on a (4) ce qui prouve la proposition en ce cas.

C.4.2.2.6. Prouvons (iii). Voyons le cas où $F_{i_o} \neq 0$ et $F_{i_o,0} = 0$.

Soit j_o minimal tel que $F_{i_o,j_o} \neq 0$, d'après (15), on a :

$$F'_{i_o,j_o} = F_{i_o,j_o} .$$

Ce qui donne (2) et, si $x \neq y$, on a (4), ce qui prouve la proposition en ce cas.

Désormais, dans le cas (iii), nous supposons $F_{i_o,0} \neq 0$. Posons

(18) $\gamma = \sup \left[\mathrm{ord}_y(F_{i_o,j})/j \ ; \ 1 \leq j \leq \nu\right]$.

Alors, d'après C.4.2.2.2, nous pouvons supposer que

(19) $\mathrm{ord}_y(G) \leq \gamma$.

Nous allons montrer que

(20) $\inf\left[\mathrm{ord}_y(F'_{i_o,j})/j \ ; \ 1 \leq j \leq \nu\right] \leq \gamma$.

Ce qui entraînera (2). De plus, si $x \neq y$, on a clairement $\gamma \leq \psi(i_o \ ; u_3, u_2 \ ; u_1)/[k(y):k]$, et donc (20) donne (4) et finit de prouver la proposition sous la condition (iii)(a) ou (b).

Supposons que (20) ne soit pas vérifiée, donc, $\forall j$, $1 \leq j \leq \nu$, $\mathrm{ord}_y(F'_{i_o,j}) > j\gamma$, cette dernière inégalité étant équivalente à : $\mathrm{ord}_y(F'_{i_o,j}) \geq \lfloor j\gamma \rfloor + 1$.

Cela nous implique que :

$$F'_{i_o} = F_{i_o,0} V_1^{\nu} \ \mathrm{mof}(V_1^{\nu-j} U_3^{ja} \Phi^{\lfloor j\gamma \rfloor+1} \ ; \ 1 \leq j \leq \nu),$$

$$F'_{i_o} = F_{i_o,0} (U_1 + U_3^a b)^{\nu} \ \mathrm{mod.} \ (U_1^{\nu-j} U_3^{ja} \phi^{\lfloor j\gamma \rfloor+1} \ ; \ 1 \leq j \leq \nu \ )$$

ce qui donne pour tout j, $1 \leq j \leq \nu$.

(21) $\quad F_{i_o,j} = F_{i_o,0} \binom{\nu}{j} G^j \bmod. (\phi^{\lfloor j\gamma\rfloor+1})$.

Donc, si $\binom{\nu}{j} \neq 0$, on a

$$\mathrm{ord}_g\, F_{i_o,j} = j\, \mathrm{ord}_y\, (G)$$

et donc si $\binom{\nu}{j} \neq 0$, on a $F_{i_o,j} \neq 0$, ce qui contredit (iii)(a). Si on a (iii)(b), pour un j, $1 \leq j \leq \nu$, on a $F_{i_o,j} \neq 0$ et $\binom{\nu}{j} = 0$, d'où $\mathrm{ord}_y\, F_{i_o,j} \geqslant \lfloor j\gamma\rfloor+1 > j\gamma$, ce qui contredit (18) et finit d'établir (iii).

C.4.2.2.7. Prouvons (iv) et (2) dans le cas où $(F'_1,\ldots,F'_s)$ n'est pas monogène. Alors, on peut construire $F' = \sum_{1\leq i\leq s} \lambda_i F'_i = \sum_{1\leq j\leq\nu} F_j(U_2)U_1^{\nu-j}U_3^{ja(3)} \neq 0$ avec $\lambda_i \in k$. Pour tout j, $1\leq j\leq\nu$ avec $F_j \neq 0$, on a $F_j = U_2^{v(j)}\, G_j$, $v(j) \geqslant j\beta(J\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1)$, $\deg G_j \leq j e(J_x\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1)$.

En appliquant C.4.2.2.6 à $(F',F'_1,\ldots,F'_s)$, on obtient (2) et (5) et donc on a prouvé la proposition dans le cas où $(F'_1,\ldots,F'_s)$ n'est pas monogène.

C.4.2.2.8. Désormais, nous supposons que $(F'_1,\ldots,F'_s) = (F')$ où

$$F' = U_1^{\nu} + \sum_{1\leq j\leq\nu} U_3^{\nu-j}\, F_j(u_2)\, U_3^{ja}$$

(22) Si on a $U_2^{v(j)}\, G_j(U_2) = Q^{p^r}$,

alors posons $W_1 = U_1 + QU_3^a$ et on a

$$F = W_1^{\nu} + \sum_{1\leq j\leq\nu} W_1^{\nu-j}\, U_3^{ja}\, F''_j \quad \text{où}$$

$$F''_j = F_j + (-1)^j \binom{\nu}{j} F_j\, Q^j + \sum_{1\leq h\leq j-1} (-1)^{j-h} \binom{\nu-h}{j-h} F_h\, Q^{j-h} .$$

Donc $F''_{p^r} = 0$. De plus, si $F''_j \neq 0$, on a

$$\deg F''_j \leq j\varphi(J\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1)\ ,$$

$$\mathrm{val}\, F''_j \geqslant j\beta(J\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1).$$

Par C.2(4), on a $F \neq W_1^{\nu}$ et donc, en appliquant C.4.2.2.5, on a (2) et, si $x \neq y$, on a (5). Ce qui prouve la proposition en ce cas. D'autre part, si $\nu \neq 0(p)$, on a $p^r = 1$ et on a (22). Donc on a prouvé (v).

C.4.2.2.9. D'après les calculs précédents, nous pouvons désormais supposer que

$$(23) \quad \begin{cases} a = a(3) \in \mathbb{N}\ ,\ \nu = 0(p),\ (F'_1,\dots,F'_s) = F',\ F_{p^r} \notin (k[U_2])^{p^r} \text{ et} \\ (F_j = 0 \Longleftrightarrow \binom{\nu}{j} = 0). \end{cases}$$

Nous allons prouver (2), et, si $x \neq y$, (6) et (7) sous cette condition (23). Cela terminera la preuve de la proposition.

Posons

$$(24) \quad s = \sup\{t \in \mathbb{N}\ ;\ F_{p^r} \in (k[U_2])^{p^t}\}.$$

On a donc

$$(25) \quad F_{p^r} = Q^{p^s}\ ,\ Q \in k[U_2]\ ,\ Q \notin (k[U_2])^p\ ,\ 0 \leq s \leq r\ .$$

Posons $F' = V_1^{\nu} + \sum\limits_{1 \leq j \leq \nu} F'_j(U_2)U_3^{ja}\, V_1^{\nu-j}$. Par (15), on a

$$(26) \quad F'_{p^r} = (Q + G^{p^{r-s}})^{p^s}.$$

Soit $v = \mathrm{val}_{U_2}(F_{p^r}) = \mathrm{val}_{U_2}(Q^{p^s}) = p^s w\ ,\ w \in \mathbb{N}$. On a $vp^{-r} \geq \inf\{j^{-1}\ \mathrm{val}_{U_2}(F_j)\ ;\ F_j \neq 0\}$. On pose $Q = U_2^w\, Q'$, $Q' \in k[U_2]$.
Soit $(\lambda_3,\dots,\lambda_t)$ une p-base de k, alors $(U,\lambda) = (U_2,\lambda_3,\dots,\lambda_t)$ est une p-base de $k[U_2]_y$, comme Q n'est pas puissance p-ème, $\exists i,\ 2 \leq i \leq t$, tel que $D^{U,\lambda}_{[i]}\, Q \neq 0$.

Bien sûr, on a

Or, $D^{U,\lambda}_{[i]}\, Q = D^{U,\lambda}_{[i]}\, (Q + qG^{p^{r-s}})$.

Regardons le cas où :

$$(27) \quad D^{U,\lambda}_{[2]}\, Q \neq 0.$$

On a $D^{U,\lambda}_{[2]}\, Q = U_2^{w-1}(U_2\, D^{U,\lambda}_{[2]}\, Q' + \rho Q')$

Posons $d = [k(y);k]$, on a

$$\operatorname{ord}_y(Q + qG^{p^{r-s}}) \leq \operatorname{ord}_y(D^{u,\lambda}_{[2]}\ Q)+1 \leq (\deg_{u_2}(Q)-1)d^{-1} + 1$$

et donc

$$(28)\qquad p^{-r}\ \operatorname{ord}_y(F'_{p^r}) \leq p^{-r}[p^s(\deg(Q)-1)d^{-1}+p^s] \leq p^{-r}\ \deg F_{p^r}$$

ce qui prouve (2) en ce cas

Pour finir d'établir (vi) quand on a (26), regardons le cas où $x \neq y$. On a

$$(29)\qquad \operatorname{ord}_y(Q + qG^{p^{r-s}}) \leq \operatorname{ord}_y(\mathcal{D}M^{u,\lambda}_{[2]}\ Q' + \rho Q') + 1\ ,$$

$$\operatorname{ord}_y(Q + qG^{p^{r-s}}) \leq (\deg Q'/[k(y) : k]) + 1\ ,$$

donc

$$(30)\qquad \operatorname{ord}_y(F'_{1,p^r}) \leq p^s\ (\deg Q')/[k(y) : k] + p^s\ ,$$

$$\operatorname{ord}_y(F'_{1,p^r})/p^r \leq \deg(G_{1,p^r})/p^r.[k(y) : k] + p^{s-t}\ ,$$

$$(31)\qquad \operatorname{ord}_y(F'_{1,p^r})/p^r \leq e(J\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1)/[k(y) : k] + p^{s-r}$$

comme $s-r \leq 1$, C.2.5.1. entraîne la première inégalité de (6).

Prouvons la deuxième inégalité de (6). Posons

$$(33)\qquad N = \lfloor e(J\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1)/[k(y) : k]\rfloor + 1.$$

D'après (27), on a :

$$(34)\qquad \operatorname{ord}_y[D^{u,\lambda}_{[2]}\ (Q+qg^{p^{r-s}})] \leq p^{r-s}\ e(J\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1)/[k(y) : k] < p^{r-s}\ N.$$

Soit $V_2 \in k[u_2]$ tel que V_2 est un paramètre de $O_{X,y}$ mod (u_1,u_3). Soit $\mu_4,\dots,\mu_s \in k[u_2]$ tel que $(V,u) = V_2,\ u_4,\dots,u_s$ est une p-base de $k\ _2$.

D'après (34), on a :

(35) $\exists i$, $i=2$ ou $4 \leq i \leq s$, $\mathrm{ord}_y\left[D^{V,\mu}_{[i]} (Q + qp^{p^{r-s}})\right] \leq p^{r-s} N$.

Si dans (35), on a $4 \leq i \leq s$, alors on a :

(36) $(\mathrm{ord}_y(Q + qG^{p^{r-s}})) < p^{r-s} N$.

Si dans (35), on a $i = 2$, alors on a :

(37) $\mathrm{ord}_y\left[D^{V,\mu}_{[2]} (Q + qG^{p^{r-s}})\right] \leq p^{r-s} N - 1$.

Mais l'ordre d'une dérivée $D^{V,\mu}_{[2]} \theta$, ne peut être égal à $p-1$ mod p ; donc on a :

(38) $\mathrm{ord}_y\left[D^{V,\mu}_{[2]} (Q + qG^{p^{r-s}})\right] \leq p^{r-s} N - 2$,

ce qui implique que (36) est vraie d'où

(39) $(\mathrm{ord}_y(F'_{1,p^r}))/p^r < N$,

ce qui prouve (4).

Pour terminer la preuve de C.4.2.2., il reste à étudier le cas :

(40) $D^{U,\lambda}_{[2]} Q = 0$, $\exists i$, $3 \leq i \leq t$, $D^{U,\lambda}_{[i]} (Q) \neq 0$.

On a :

(41) $D^{U,\lambda}_{[i]} (Q) = U_2^w D^{U,\lambda}_{[i]} Q'$, $3 \leq i \leq t$.

Si y est rationnel sur x ou si l'extension $k|k(y)$ est séparable, on a :

$$\mathrm{ord}_y(Q + qG^{p^{r-s}}) \leq \mathrm{ord}_y(D^{u,\lambda}_{[i]}\ Q) \leq d^{-1}\deg Q \leq p^{r-s}\ \varphi(J\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1)\ d^{-1}\ .$$

Ce qui implique (2) et (7) en ce cas. De plus, si $x \neq y$,

$$\mathrm{ord}_y(Q + pG^{p^{r-s}}) \leq \mathrm{ord}_y(D^{u,\lambda}_{[i]}\ Q')\ ,\ \text{donc :}$$

(42) $$\mathrm{ord}_y(Q + qG^{p^{r-s}}) \leq d^{-1}\ \deg Q' \leq p^{r-s}\ e(J\ ;\ u_3,\ u_2\ ;\ u_1)\ d^{-1}\ .$$

Ce qui donne (5) en ce cas. Bien sûr, (5) implique (6).

Il ne reste plus qu'à traiter le cas où l'extension $k/k(y)$ est inséparable. On a donc $x \neq y$ et

(43) $$\mathrm{ord}_y(Q + qG^{p^{r-s}}) \leq 1+\mathrm{ord}_y(D^{u,\lambda}_{[i]}\ Q') \leq 1+d^{-1}\ \deg Q'\ .$$

On a donc (31) qui donne la première inégalité de (6), pour obtenir la seconde, il suffit de recopier mot pour mot la preuve du cas précédent à partir de (34).

C.5.0. Etant donnés une modification $(X(n),f,E(n))$ et x un point fermé de $\mathrm{Sing}(X(n))$, nous allons devoir étudier le complété $\hat{O}_{X(n),x}$ de $O_{X(n),x}$. Soit alors

$$p\ :\ \hat{X}(n) = \mathrm{Spec}\ \widehat{O}_{X(n),x} \longrightarrow X(n)$$

la projection canonique.

Soit $\widehat{E(n)}$ l'image réciproque de $E(n)$. Il y a bijection entre les composantes de $\widehat{E(n)}$ et celles de $E(n)$ passant par x. On met sur les composantes de $\widehat{E(n)}$ l'ordre induit par l'ordre sur les composantes de $E(n)$ (II.B.8.1.). On peut alors définir $J(\widehat{X(n)},f,\widehat{E(n)})$ et clairement

(1) $$\begin{cases} J(\widehat{X(n)},f,\widehat{E(n)}) = J(X(n),f,E(n))\ \hat{O}_{X(n),x}\ , \\ J(\widehat{X(n)},f,\widehat{E(n)},\{\hat{x}\}) = J(X(n),f,E(n),\{x\})\ \hat{O}_{X(n),x}\ . \end{cases}$$

De plus, pour tout $i \geq 1$, on a

$$\mathrm{Sing}_i(\widehat{X(n)}) = p^{-1}[\mathrm{Sing}_i(X(n))].$$

Si C est une courbe de $X(n)$ telle que $\hat{C} = p^{-1}(C)$ est à c.n. avec $\widehat{E(n)}$ alors C est à c.n. avec $E(n)$ en x et on a :

(2) $$J(\widehat{X(n)},f,\widehat{E(n)},\hat{C}) = J(X(n),f,E(n),C)\ \hat{O}_{X(n),x}\ .$$

Si C est une courbe de $X(n)$ telle que $\hat{C} = p^{-1}(C)$ est permise dans $\widehat{X(n)}$, alors par (1), (2) et I.D.1., C est permise en x.

PROPOSITION C.5.

Soient $x \in \mathrm{Sing}(X(n))$ et (u,λ) une p-base de $\hat{O}_{X(n),x}$ adaptée à $\hat{x}$ et satisfaisant aux trois conditions qui suivent.

(1) $I(\widehat{X(n)},f,(u,\lambda)) = (u_1^\nu)\mathrm{mod}.(u_2,u_3)$ où $\nu = \nu(x)$.

(2) $\Delta = \Delta[I(\widehat{X(n)},f,(u,\lambda))\ ;\ u_3,u_2\ ;\ u_1]$

n'a qu'un sommet $(c(u,\lambda),d(u,\lambda))$.

(3) si $\mathrm{div}(u_i) \subset E(n)$, $1 \leq i \leq 3$ alors $u_i \in O_{X(n),x}$, de plus, $\mathrm{div}(u_3) \subset E(n)$ et si $E(n) = \mathrm{div}(u_1u_3)$, on a $\mathrm{div}(u_3) < \mathrm{div}(u_1)$ et si $E(n) = \mathrm{div}(u_1u_2u_3)$, on a $(\mathrm{div}(u_2) < \mathrm{div}(u_1)$ et $\mathrm{div}(u_2) < \mathrm{div}(u_3))$, on n'impose aucune condition d'ordre si $\mathrm{div}(u_1) \not\subset E(n)$.

Alors

(i) $\alpha(x) = \nu$,

(ii) $c(u,\lambda) + d(u,\lambda) \geq 1$,

(iii) si $c(u,\lambda) < 1$ et $d(u,\lambda) < 1$ alors $\kappa(x) = 0$,

(iv) $\mathrm{Sing}_\nu(\widehat{X(n)}) \cap \mathrm{div}(u_1) \subset V(u_1,u_2) \cup V(u_1,u_3)$.

De plus, si Δ est préparé, on a

(v) $\mathrm{Sing}_\nu(\widehat{X(n)}) \subset V(u_1,u_2) \cup V(u_1,u_3)$,

(vi) si $\kappa(x) \geq 1$ et si on applique à $x \in X(n)$ l'algorithme de $\kappa = 1$ ou celui du point bon, le premier éclatement est défini et permis et il est centré en la courbe notée $C(j)$, qui est la projection sur $X(n)$ de $\hat{C}(j) = v(u_1,u_j) \subset \widehat{X(n)}$ avec $j=2$ ou 3 et $\alpha(\hat{C}(j)) \geq \nu$ et $(\nu,m,\alpha,\sigma)(\hat{C}(j))$ maximal,

(vii) si $[c(u,\lambda)] + [d(u,\lambda)] < 1$, alors $\kappa(x) \leq 1$,

(viii) si $\kappa(x) = 2$, alors x est bon.

Preuve.

C.5.1. Par (1), on a clairement $\alpha(x) = \nu$, ce qui prouve (i). Par définition de Δ, on a

(4) $$\alpha(x) = \mathrm{ord}_x[I(\widehat{X(n)},f,(u,\lambda))] \leq \nu(c(u,\lambda)+d(u,\lambda)),$$

ce qui donne (ii).

C.5.2. Prouvons (iii). Effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x. Si dans X' il n'y a pas de point ν-proche de x, le résultat est clair. Etudions le cas où dans X' il existe un point x' ν-proche de x. Alors en x, on a

(5) $$\mathrm{cl}_x^{\nu}[I(\widehat{X(n)},f,(u,\lambda))] = (U_1^{\nu}).$$

En effet, (ii) et les inégalités $c(u,\lambda) < 1$ et $d(u,\lambda) < 1$ impliquent

(6) $$c(u,\lambda) > 0 \quad \text{et} \quad d(u,\lambda) > 0.$$

Si on n'a pas (5), par (2) et (6), on peut appliquer I.E.5.1.6 (iii). On a donc $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1,U_2,U_3 \rangle$, ce qui contredit l'existence de x'. On a donc (5) qui nous donne

(7) $$\langle U_1 \rangle = \mathrm{VDir}(x).$$

Etudions le cas où x' est dans l'ouvert de X' où $\mathrm{div}(u_3) = \pi^{-1}(x)$. Posons donc

(8) $$u' = (u_1u_3^{-1},u_2u_3^{-1},u_3).$$

Par (7), on a $u'_1(x') = 0$. Si u' est un s.r.p. de $O_{X',x'}$, on vérifie facilement (voir par exemple [12] p.127) que $(x',X',(u',\lambda))$ satisfont à (1) (2) (3) avec

$$(9) \qquad \begin{cases} c(u',\lambda) = c(u,\lambda) + d(u,\lambda)-1 < c(u,\lambda) \\ d(u',\lambda) = d(u,\lambda). \end{cases}$$

Montrons que u' est forcément un s.r.p. de $O_{X',x'}$. Sinon $u'_2(x')$ serait inversible et par (2), $\exists g \in I(\widehat{X(n)},f,(u,\lambda))$ avec

$$\begin{cases} g = a_o u_1^{\nu} + \sum\limits_{1\leq j\leq \nu} a_j\ u_1^{\nu-j}\ u_2^{d(j)}\ u_3^{c(j)} \ \mathrm{mod.}\{O_{X(n),x},L\}_u^{\nu} , \\ a_j \in O_{X(n),x}\ ,\ a_j \ \text{inversible ou nul},\ 0\leq j\leq \nu\ ,\ \exists j,\ 1\leq j\leq \nu\ ,\ a_j \neq 0, \\ d(j) = jd(u,\lambda),\ c(j) = jc(u,\lambda),\ 1\leq j\leq \nu\ , \\ L(x_1,x_2,x_3) = x_1 + (x_2+x_3)\ \delta^{-1} \qquad (\mathrm{C.2.}\ (9\ )). \end{cases}$$

Alors, avec les notations de C.1.4. :

$$(10) \qquad \begin{cases} g\ u_3^{-\nu} = a_o\ u_1'^{\nu} + \sum\limits_{1\leq j\leq \nu} a_j\ u_1'^{\nu-j}\ u_3'^{c(j)+d(j)-j}\ u_2'^{d(j)} \\ \mathrm{mod.}\{\hat{O}_{X(n),x},L\}_u^{\nu}\ .u_3^{-\nu}\ . \end{cases}$$

Comme $g \in I(\widehat{X(n)},f,(u,\lambda)) \subset J(\widehat{X(n)},f,E(n),\{x\})$, par I.E.1., on a $gu_3^{-\nu} \in J(X',f,E')$. De plus, si $u'_2(x') \neq 0$, par (9), on a pour un j, $1\leq j\leq \nu$,

$$(11) \qquad \mathrm{ord}_{x'}(gu_3^{-\nu}) \leq \nu-j+c(j)+d(j)-j \leq \nu-j+j(c(u,\lambda)+d(u,\lambda)) < \nu\ ,$$

ce qui contredit l'hypothèse $\nu(x') = \nu$, d'où $u'_2(x') = 0$, comme annoncé.

Regardonc le cas où x' pour paramètres

$$(12) \qquad u'' = (u_1u_2^{-1},u_2,u_3u_2^{-1})\ .$$

Alors on vérifie facilement ([12] p.127) que $(x',X',(u'',\lambda))$ satisfont à (1) (2) (3) avec

$$(13) \qquad \begin{cases} c(u'',\lambda) = c(u,\lambda) \\ d(u'',\lambda) = c(u,\lambda) + d(u,\lambda) - 1 < d(u,\lambda). \end{cases}$$

Par (9), (13) et une récurrence décroissante sur $c(u,\lambda) + d(u,\lambda)$, on a $\mathcal{K}(x) = 0$. On a prouvé (iii).

C.5.3. Prouvons C.5 (iv). Par (2) et par définition de Δ , on peut trouver $g \in I(\widehat{X(n)},f,(u,\lambda))$ dont le développement dans $\hat{O}_{X(n),x} = k(x)[[u_1,u_2,u_3]]$ s'écrit

$$g = \sum_{1 \leq j \leq \nu} \gamma_j \, u_1^{\nu-j} \, u_2^{d(j)} \, u_3^{c(j)} + \gamma u_1^{\nu} ,$$

$$\gamma_j \in k(x)\,[[u_2,u_3]] \ , \ \gamma \in \hat{O}_{X(n),x} ,$$

$c(j) \geq j c(u,\lambda)$, $d(j) \geq j d(u,\lambda)$ et, pour un j', $1 \leq j' \leq \nu$, on a $d(j') = j'd(u,\lambda)$, $c(j') = j'c(u,\lambda)$ et $\gamma_{j'}$ inversible.

Posons $D = [(\nu-j')!]^{-1} \ \partial^{\nu-j'}/\partial u_1^{\nu-j'}$. On a

$$Dg = \rho \, u_2^{d(j')} \, u_3^{c(j')} \ \mathrm{mod.}(u_1), \quad \rho \text{ inversible.}$$

Bien sûr, $Dg \in I[\mathrm{Sing}_{\nu-j'+1}(\widehat{X(n)})]$, ce qui donne (iv).

C.5.4. Remarquons que dans C.5.3, si on a $j' \geq 2$ (ce qui est le cas si $(c(u,\lambda),d(u,\lambda)) \notin \mathbb{N}^2$), alors on a

$$\mathrm{Sing}_{\nu-1}(\widehat{X(n)}) \cap \mathrm{div}(u_1) \subset V(u_1,u_2) \cup V(u_1,u_3).$$

C.5.5. Avant de continuer la preuve de C.5, comparons les idéaux $J = J(\widehat{X(n)},f,\widehat{E(n)})$ et $I = I(\widehat{X(n)},f,(u,\lambda))$. Notons $\eta(j)$ le point générique de $C(j) = V(u_1,u_j)$, j=2 ou 3. Alors

(i) si $\mathrm{div}(u_1) \subset \widehat{E(n)}$, $JO_{\widehat{X(n)},\eta(3)} = I\, O_{\widehat{X(n)},\eta(3)}$,

(ii) si pour un $A \in \mathbb{N}$, on a

$$I \subset (u_1)^{\nu} + (u_1,u_j)^A \quad \text{alors} \quad J \subset (u_1)^{\nu} + (u_1,u_j)^{A-1} \ , \ j=2 \text{ ou } 3 ,$$

(iii) si $A(1) = 0$, alors $\nu = O(p)$.

La relation (iii) est claire car alors x est à D.Q., (i) est clair, (ii) est clair si $V(u_1,u_j)$ est combinatoire, on a même en ce cas

$$J \subset (u_1^{\nu}) + (u_1,u_j)^A .$$

Si $\hat{C}(j) = V(u_1,u_j)$ n'est pas combinatoire, on a

$$f - R(f,u,\lambda) = h(r\, u_1^{\nu} + g),\ r \in \hat{O}^{*}_{X(n),x}\ ,\ g \in (u_1,u_j)^A\ ,\ h = h(x).$$

Pour tout $D \in \mathcal{D}(X(\hat{n}),E(\hat{n}))$, on a

$$(14)\qquad \begin{cases} h^{-1}D[hg] = g' \in (u_1,u_j)^{A-1}\ , \\ h^{-1}D[hru_1^{\nu}] = r'\ u_1^{\nu}\quad ,\ r' \in \hat{O}_{X(n),x}\ . \end{cases}$$

La première égalité est triviale. La dernière égalité est claire si $A(1) \neq 0$, si $A(1) = 0$ alors $\mathrm{div}(u_1) \not\subset E(\hat{n})$ et donc $\nu = 0(p)$, ce qui donne l'égalité.

C.5.5. Avec les hypothèses et notations de C.5., on a les implications

(i) $c(u,\lambda) > 0 \Longrightarrow \mathrm{Sing}(X(\hat{n})) \cap \mathrm{div}(u_3) = \hat{C}(3)$,

(ii) $c(u,\lambda) \geq 1 \Longrightarrow \alpha[\hat{C}(3)] = \nu$ et $C(3)$ est permise dans $X(\hat{n})$,

(iii) $[(c(u,\lambda) = 1$ et $A(1) > 0)$ ou $c(u,\lambda) > 1] \Longrightarrow$

$\hat{C}(3) = \mathrm{Sing}_{\nu}(X(\hat{n})) \cap \mathrm{div}(u_3)$,

(iv) $d(u,\lambda) \geq 1 \Longrightarrow \alpha[\hat{C}(2)] = \nu$ et $\nu[\hat{C}(3)] \geq \nu - 1$, de plus $[d(u,\lambda) \geq 1$ et $(A(2) > 0$ ou $\nu \geq 2)] \Longrightarrow \hat{C}(2)$ est permise dans $X(n)$,

(v) $d(u,\lambda) > 1 \Longrightarrow [\hat{C}(2) = \mathrm{Sing}_{\nu}(\hat{X}(n)) \cap \mathrm{div}(u_2)$ et $\hat{C}(2)$ est permise$]$

(vi) $(c(u,\lambda)d(u,\lambda)) = (0,1) \Longrightarrow \hat{C}(2)$ est permise.

Preuve.

(i) est clair.

Si $c(u,\lambda) \geq 1$ alors on a $\alpha[\hat{C}(3)] = \nu = \nu(x)$. Si $\nu \geq 2$, $\hat{C}(3)$ est permise. Si $\nu = 1$, par C.5.4. (iii), on a $A(1) > 0$ et donc $\hat{C}(3)$ est combinatoire d'où $\nu[\hat{C}(3)] = 1$ et $\hat{C}(3)$ est permise.

Si $c(u,\lambda) > 1$, on a $I \subset (u_1^{\nu}) + (u_1,u_3)^{1+\nu}$ et par C.5.5 (iii), on a donc $\hat{C}(3) = \mathrm{Sing}_{\nu}(X(\hat{n})) \cap \mathrm{div}(u_3)$.

Si $c(u,\lambda) = 1$ alors $I \subset (u_1^{\nu}) + (u_1,u_3)^{\nu}$. Si de plus $A(1) > 0$, alors $\hat{C}(u_3)$ est combinatoire et donc par C.5.5 (i), $J \subset (u_1^{\nu}) + (u_1,u_3)^{\nu}$ et donc $\hat{C}(3) = \mathrm{Sing}_{\nu}(\hat{X}(n)) \cap \mathrm{div}(u_3)$. On a (iii).

Les implications de (iv) et (v) découlent de C.5.5 (iii) et leur preuve est quasiment identique à celle de (iii).

Prouvons (vi). Par (iv), l'implication est vraie si $\nu \geq 2$. Or par C.5.4 (iii), $\nu = 1$ entraîne $A(1) > 0$. De plus, $(c(u,\lambda),d(u,\lambda)) = (0,1)$ implique

$$f = h(ru_1+su_2) + R(f,u,\lambda),$$
$$(r,s) \in \hat{O}^{*2}_{X(n),x}.$$

Il en résulte que $A(2) > 0$, sinon $\nu = 0$ et donc $\hat{C}(2)$ est combinatoire et permise.

C.5.6. Par (3), $\mathrm{div}(u_3)$ est une composante de $\hat{E}(n)$ dans $\hat{X}(n)$, c'est donc l'image réciproque par p d'une composante E' de $E(n)$ dans $X(n)$. Si $c(u,\lambda) > 0$, posons $C(3) = \mathrm{Sing}(X(n)) \cap E'$ alors

$$p^{-1}[C(3)] = \mathrm{Sing}(\hat{X}(n)) \cap \mathrm{div}(u_3) = V(u_1,u_3) = \hat{C}(3).$$

Alors, par C.5.0, $C(3)$ est transverse à $E(n)$ en x et, si $\hat{C}(3)$ est permise dans $\hat{X}(n)$, $C(3)$ est permise dans $X(n)$ en x.

Par contre, si $V(u_1,u_2) = \hat{C}(2)$ est permise dans $\hat{X}(n)$ en $\hat{x}$, nous ne pouvons pas affirmer a priori qu'il existe une courbe $C(2)$ de $X(n)$ avec $\hat{C}(2) = p^{-1}[C(2)]$.

C.5.7. Sous les hypothèses de C.5. et si de plus

(15) $\Delta = \Delta[I(\hat{X}(n),f,(u,\lambda))\ ;\ u_3,u_2\ ;\ u_1]$ est préparé,

(16) $(c(u,\lambda)d(u,\lambda)) = (1,0)$ ou $(0,1)$,

on a

(i) $\mathrm{Sing}_\nu(\hat{X}(n)) \subset V(u_1,u_3)$ si $(c(u,\lambda),d(u,\lambda)) = (1,0)$,

$\mathrm{Sing}_\nu(\hat{X}(n)) \subset V(u_1,u_2)$ si $(c(u,\lambda),d(u,\lambda)) = (0,1)$,

(ii) $\kappa(x) \leq 1$.

Preuve.

On pose $j=2$ si $(c(u,\lambda),d(u,\lambda)) = (0,1)$, $j=3$ si $(c(u,\lambda),d(u,\lambda)) = (1,0)$).

D'après C.5.5. (ii)(v), la courbe $\hat{C}(j)$ est permise dans $\hat{X}(n)$. De plus, comme Δ est préparé, on a

(17) $\quad \mathrm{VDir}(x) = \langle U_1, U_j \rangle$.

On a dans $\hat{X}(n)$ les hypothèses de III.4.1 et donc

$\hat{C}(j) = \mathrm{Sing}_\nu(\hat{X}(n))$,

ou $\hat{C}(j) = \mathrm{Sing}_{\nu-1}(\hat{X}(n))$ et $\nu \geq 2$,

ou $\hat{C}(j) = \mathrm{Sing}_{\nu-1}(\hat{X}(n)) \cap \hat{E}(n)$ et $\nu \geq 3$,

ou $\begin{cases} \hat{C}(j) = \mathrm{Sing}_{\nu-1}(\hat{X}(n)) \cap \hat{E}' \text{ et } \hat{E}(n) = \hat{E}' \cup \hat{E}'' \\ \text{et } \mathrm{Sing}_{\nu-1}(\hat{X}(n)) \cap \hat{E}'' = \hat{C}' \text{ est une courbe à croisements normaux} \\ \text{avec } \hat{E}(x). \end{cases}$

ce qui prouve (i)

Dans les trois premiers cas, on définit une courbe $C(j)$ de $X(n)$ par

$C(j) = \mathrm{Sing}_\nu(X(n))$,

ou $C(j) = \mathrm{Sing}_{\nu-1}(X(n))$ et $\nu \geq 2$,

ou $C(j) = \mathrm{Sing}_{\nu-1}(X(n)) \cap E(n)$ et $\nu \geq 3$.

Dans le dernier cas, on définit $C(j)$ et C' par

$C(j) = \mathrm{Sing}_{\nu-1}(X(n)) \cap E'$ où $\hat{E}' = p^{-1}(E')$,

$E(n) = E' \cup E''$ et $\mathrm{Sing}_{\nu-1}(X(n)) \cap E'' = C'$.

Il est clair que $\hat{C}(j) = p^{-1}[C(j)]$ et $\hat{C}' = p^{-1}(C')$.

On a $\alpha[C(j)] = \alpha[\hat{C}(j)]$ et $\nu[C(j)] = \nu[\hat{C}(j)]$, $C(j)$ est permise en x dans $X(n)$. Par III.4.1, appliqué cette fois dans $X(n)$, on a $\kappa(x) \leq 1$.

C.5.8. Nous allons prouver (v)(vi)(vii)(viii) par récurrence sur $\delta(u,\lambda) = c(u,\lambda) + d(u,\lambda)$. Nous rappelons que par hypothèse, Δ est préparé. D'autre part, si $E(n) = \mathrm{div}(u_2 u_3)$, les paramètres u_2 et u_3 jouent le même rôle et, quitte à les permuter, nous pouvons supposer

(18) si $E(n) = \mathrm{div}(u_2 u_3)$ alors $\mathrm{div}(u_3) > \mathrm{div}(u_2)$.

On a vu en (iii) que si $c(u,\lambda) < 1$ et $d(u,\lambda) < 1$ alors $\kappa(x) = 0$, alors x est isolé dans $\mathrm{Sing}_\nu(X(n))$, donc (v) est vrai et (vi)(vii) et (viii) sont vides.

Si $(c(u,\lambda),d(u,\lambda)) = (1,0)$ ou $(0,1)$, (v) (vi) et (vii) sont des conséquences de C.5.3.3. et (viii) est vide.

Par (ii) et (iii), nous commençons la récurrence au cas où

(19) $\delta(u,\lambda) > 1, (d(u,\lambda) \geqslant 1$ ou $c(u,\lambda) \geqslant 1)$.

Par définition de Δ, on a

(20) $c\ell^{\nu}[I(\hat{X}(n),f,(u,\lambda))] = (U_1^{\nu})$, $\mathrm{VDir}(x) = \langle U_1 \rangle$.

Posons

(21) $\hat{C}(2) = V(u_1,u_2)$, $\hat{C}(3) = V(u_1,u_3)$.

C.5.9. Regardons le cas où $c(u,\lambda) \geqslant 1$. Alors, par C.5.5 (ii), $\hat{C}(3)$ est permise dans $\hat{X}(n)$. Par C.5.6, il existe une courbe $C(3) \subset X(n)$ avec $\hat{C}(3) = p^{-1}[C(3)]$ et $C(3)$ est permise en x dans $X(n)$. Effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en $C(3)$, par changement de base plat, cet éclatement commute au passage au complété et on a un diagramme commutatif.

$$\begin{tikzcd} \hat{X}' \arrow[r, "\hat{\pi}"] \arrow[d, "p'"'] & \hat{X}(n) \arrow[d, "p"] \\ X' \arrow[r, "\pi"] & X(n) \end{tikzcd}$$

où $\hat{\pi}$ est l'éclatement centré en $\hat{C}(3)$.

Par (20), au dessus de $x \in \hat{X}(n)$ il y a au plus un point singulier $x' \in \hat{X}'$, c'est le point de paramètres $u' = (u_1 u_3^{-1}, u_2, u_3)$. On a

$$I(\hat{X}',f,(u',\lambda)) = u_3^{-\nu}\ I(\widehat{X(n)},f,(u,\lambda))$$

et donc par [12] (T.3 p.125)

(22) $\begin{cases} \Delta' = \Delta(I(\hat{X}',f,(u',\lambda))\ ;\ u_3',u_2'\ ;\ u_1') = (c(u,\lambda)-1,d(u,\lambda)) + \mathbb{R}_+^2, \\ \Delta' \text{ est préparé.} \end{cases}$

C.5.9.1. Voyons le cas où $\nu(x') < \nu$. Ce qui est le cas si $\delta(u,\lambda) < 2$ car alors par (22), on a $\alpha(x')<\nu$. Alors, $\hat{C}(3) \supset \mathrm{Sing}_\nu(\widehat{X}(n))$, on a (v). De plus, $C(3) \supset \mathrm{Sing}_\nu(X(n))$. Si $\hat{C}(3) = \mathrm{Sing}_\nu(\widehat{X(x)})$, alors $C(3) = \mathrm{Sing}_\nu(X(n))$, on a $\kappa(x) = 1$, (vi) et (vii) sont clairs et (viii) est vide. Si $\hat{C}(3) \not\subset \mathrm{Sing}_\nu(X(n))$ alors, par C.5.5. (ii), on a $\mathrm{div}(u_1) \not\subset E(n)$. Par (23), l'algorithme du point bon ou de $\kappa = 1$ exige de chercher le centre d'éclatements dans $\mathrm{div}(u_3)$. Par C.5.6, π est imposé, on a donc $\kappa(x) \leq 1$, (vi) et (vii) sont clairs et (viii) est vide.

C.5.9.2. Pour terminer l'étude du cas où $c(u,\lambda) \geqslant 1$, regardons le cas où $\nu(x') = \nu$. Alors, par récurrence on a

(23) $\mathrm{Sing}_\nu(\hat{X}(n+1)) \subset V(u'_1,u'_3) \cup V(u'_1,u'_2)$.

On remarque que pour avoir les hypothèses de C.5. pour $(x',(u,\lambda))$ il est nécessaire de permuter les indices 2 et 3 dans C.5. (3). Par (23), on a (v).

Si $\hat{C}(3) \subset \mathrm{Sing}_\nu(\hat{X}(n))$, par C.5.6., on a $\hat{C}(3) = p^{-1}[C(3)]$ avec $C(3)$ permise en x dans $X(n)$. Comme par (3) et (18), on a $\sigma[C(3)] > \sigma[C(2)]$, l'algorithme de $\kappa = 1$ ou du point bon impose d'effectuer π , on a (vi) (ii) et (viii) par récurrence en remarquant que

$$[c(u,\lambda)-1] = [c(u,\lambda)] .$$

Si $\hat{C}(3) \not\subset \mathrm{Sing}_\nu(\hat{X}(n))$ et $\hat{C}(2) \subset \mathrm{Sing}_\nu(\hat{X}(n))$, alors on a $d(u,\lambda) \geqslant 1$. Par C.5.5., on a $c(u,\lambda) = 1$ et par (v), on a $\hat{C}(2) = \mathrm{Sing}_\nu(\hat{X}(n))$. Par C.5.0 il existe $C(2)$ courbe de $X(n)$ avec $\hat{C}(2) = p^{-1}[C(2)]$ et $C(2) = \mathrm{Sing}_\nu(X(n))$ et $C(2)$ est permise en x dans $X(n)$. L'algorithme de $\kappa = 1$ ou du point bon impose d'effectuer l'éclatement centré en $C(2)$. On a donc (vi). Les assertions (vii) et (viii) découlent de la récurrence sur $d(u,\lambda)+c(u,\lambda)$.

Si $\hat{C}(3) \not\subset \mathrm{Sing}_\nu(\hat{X}(n))$ et $\hat{C}(2) \not\subset \mathrm{Sing}_\nu(\hat{X}(n))$. Par (v), $\mathrm{Sing}_\nu(\hat{X}(n)) = \{\hat{x}\}$. Par C.5.5 (iii), $A(1) = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{div}(u_1) \not\subset E(n)$ Par (3) et (18), l'algorithme de $\kappa = 1$ ou du point bon impose d'effectuer l'éclatement en une courbe de $\mathrm{div}(u_3)$, par C.5.5 (i) et C.5.6, cette courbe est $C(3)$. On en déduit (vi). On a (vii) et (viii) par récurrence.

C.5.10. On a terminé le cas où $c(u,\lambda) \geqslant 1$, pour finir, regardons le cas où $d(u,\lambda) \geqslant 1$ et $c(u,\lambda) < 1$. Remarquons que

(24) $\hat{C}(2)$ est permise dans $\widehat{X(n)}$

En effet, si $\nu \geqslant 2$, (24) découle de C.5.5 (iv); si $\nu = 1$, par 5.2.1. on a $(c(u,\lambda),d(u,\lambda)) \in \mathbb{N}$ et donc $c(u,\lambda) = 0$, on a alors (24) par C.5.5 (v)(vi).

Effectuons l'éclatement $\pi' : \hat{X}'' \longrightarrow \widehat{X(n)}$ centré en $\hat{C}(2)$. Par (20), au-dessus de x, il y a au plus un point $x'' \in X''$ avec $\nu(x'') > 0$, c'est le point de paramètres $u'' = (u_1 u_2^{-1}, u_2, u_3)$. On a

$$I(\hat{X}'',f,(u'',\lambda)) = u_3^{-\nu}\; I(\hat{X}(n),f,(u,\lambda))$$

et par [12] (T.3 p.125), on a

(25) $\Delta'' = \Delta[I(\hat{X}'',f,(u'',\lambda))\ ;\ u_3'',u_2'';u_1''] = (c(u,\lambda)-1,d(u,\lambda))+\mathbb{R}_+^2$.

C.5.10.1. Regardons le cas où $\nu(x'') = \nu$, alors par (25), on a $c(u,\lambda)+d(u,\lambda) \geqslant 2$, donc $d(u,\lambda) > 1$ et par C.5.5.(v), $\hat{C}(2) \subset \mathrm{Sing}_\nu(\hat{X}(n))$. De plus, par récurrence, on a

$$\mathrm{Sing}_\nu(\hat{X}'') \subset V(u_1'',u_2'') \cup V(u_1'',u_3'').$$

On en déduit (v) en ce cas.

De plus, puisque $c(u,\lambda) < 1$, on a $\alpha[\hat{C}(3)] < \nu$ et donc

(26) $\mathrm{Sing}_\nu(\hat{X}(n)) = \hat{C}(2)$.

On en déduit qu'il existe une courbe $C(2)$ de $X(n)$ telle que $\hat{C}(2) = p^{-1}(C(2))$ et $C(2) = \mathrm{Sing}_\nu(X(n))$ et $C(2)$ est permise en x dans $X(n)$. Par (26), l'algorithme du point bon ou de $\kappa = 1$ impose d'effectuer l'éclatement centré en $C(2)$. On a donc (vi). On a clairement (vii) et (viii) par récurrence sur $c(u,\lambda)+d(u,\lambda)$.

C.5.10.2. Regardons le cas où $\nu(x'')<\nu$.

Si $\hat{C}(2)\subset \mathrm{Sing}_{\nu}(\hat{X}(n))$, on a alors $\hat{C}(2) = \mathrm{Sing}_{\nu}(\hat{X}(n))$. Donc $C(2) = \mathrm{Sing}_{\nu}(X(n))$ est une courbe régulière permise en x dans $X(n)$. On a donc (v) et (vi) en ce cas et de plus $\tau(x) = 1$, ce qui donne (vii) et (viii) est vide.

C.5.10.3. Si $\hat{C}(2)\not\subset \mathrm{Sing}_{\nu}(\hat{X}(n))$, par C.5.5. (v), on a $d(u,\lambda) = 1$. De plus, par (19), on a

$$0< c(u,\lambda) < 1$$

On a donc $\mathrm{Sing}_{\nu}(\hat{X}(n)) = \{\hat{x}\}$, ce qui prouve (v) en ce dernier cas. Nous allons prouver que l'algorithme de $\tau = 1$ impose d'effectuer l'éclatement centré en $p[\hat{C}(2)]$ qui est une courbe permise en x dans $X(n)$. Cela prouvera (vi) et que $\tau(x) \leq 1$, on aura donc (vii) et (viii) sera vide.

A - Si $\nu(x'') \leq \nu-2$, alors on a

$$\hat{C}(2) = \mathrm{Sing}_{\nu-1}[\hat{X}(n)]$$

Donc $C(2) = \mathrm{Sing}_{\nu-1}[X(n)]$ est une courbe permise en x dans $X(n)$ et $\hat{C}(2) = p^{-1}[C(2)]$, le résultat est clair.

B - Si $\mathrm{div}(u_1)\subset E(n)$, alors $\mathrm{div}(u_2)\not\subset E(n)$, sinon $\hat{C}(2)$ serait combinatoire et on aurait $\nu(\hat{C}(2)) = \nu$, ce qui est une contradiction. Donc

$$E(n) = \mathrm{div}(u_1u_3).$$

Puisque $c(u,\lambda)\notin \mathbb{N}$, par C.5.4., on a

$$\mathrm{Sing}_{\nu-1}(\hat{X}(n))\cap \mathrm{div}(u_1)\subset \hat{C}(2)\cup \hat{C}(3).$$

De plus, par C.5.5. (i), on a $\hat{C}(3) = \mathrm{Sing}(\hat{X}(n))\cap \mathrm{div}(u_3)$, donc $\hat{C}(2)$ est la composante de $\mathrm{Sing}_{\nu-1}(\hat{X}(n))$ qui n'est pas dans $\mathrm{div}(u_3)$. On en déduit qu'il existe une courbe $C(2)$ de $X(n)$ qui est la composante de $\mathrm{Sing}_{\nu-1}(X(n))$ qui n'est pas dans $\mathrm{div}(u_3)$. De plus, $\hat{C}(2) = p^{-1}(C(2))$ et $C(2)$ est permise en x dans $X(n)$. Comme $c(u,\lambda) < 1$, on a $\alpha[\hat{C}(3)] < \nu$, donc l'algorithme de $\tau = 1$ impose l'éclatement centré en $C(2)$, le résultat est clair en ce cas.

C - Il n'y a plus qu'à étudier le cas où

$$\nu(x'') = \nu-1 \quad \text{et} \quad \mathrm{div}(u_1) \not\subset E(n).$$

Alors, par (20), x est à D.Q. et $\nu = 0(p)$.

Nous allons montrer que

(26) $\quad \mathrm{Sing}_{\nu-1}(\hat{X}'') \subset V(u_1'',u_3'')$

ce qui entraîne que $\mathrm{Sing}_{\nu-1}(\hat{X}(n)) \subset \hat{C}(3) \cup \hat{C}(2)$. De plus $\hat{C}(2) \subset \mathrm{Sing}_{\nu-1}(\hat{X}(n))$. Donc, il existe une et une seule composante de dimension 1 de $\mathrm{Sing}_{\nu-1}(X(n))$ qui n'est pas dans $\mathrm{div}(u_3)$. Notons la $C(2)$, on a $\hat{C}(2) = p^{-1}(C(2))$ et $C(2)$ est permise en x dans $X(n)$. Comme $\alpha[\hat{C}(3)] < \nu$, $C(2)$ est la courbe C_x de II.C.5.1.(i) et son éclatement est imposé par l'algorithme de $\pi = 1$, comme annoncé au début de C.5.10.3. Il n'y a donc plus qu'à prouver (26).

Par (25), on a

$$f = u_2''^{\nu} u_3''^{\nu} g + R(f,u'',\lambda) \quad \text{où}$$

$$g = \rho\, u_1''^{\nu} + \sum_{1\leq j\leq \nu} \gamma_j\, u_1''^{\nu-j}\, u_2''^{d(j)}\, u_3''^{c(j)} \in k(x)[[u_1'',u_2'',u_3'']] ,$$

$$d(j) \geq j(d(u,\lambda)-1) = 0 \quad , \quad c(j) \geq jc(u,\lambda) ,$$

$$\rho \in \widehat{O}^{*}_{X(n),x} , \quad \gamma_j \in k(x)[[u_2'',u_3'']] .$$

De plus, pour un j', $1 \leq j' \leq \nu$, on a

(27) $\quad \gamma_{j'}$ inversible, $c(j') = j'c(u,\lambda)$, $d(j') = 0$

On a $\mathrm{ord}_{x''}(g) = \alpha(x'') \geq \nu(x'') = \nu-1$ et pour tout j' tel qu'on a (27):

$$\mathrm{ord}_{x''}(g) \leq \nu - j' + c(j') + d(j') = \nu - j'(1-c(u,\lambda)) < \nu ,$$

d'où

$$\alpha(x'') = \nu(x'') = \nu-1 = \nu - j'(1-c(u,\lambda)),$$

(28) $\quad c(u,\lambda) = 1 - j'^{-1}.$

On en déduit l'unicité de j' et donc, on a

(29) $\quad \mathrm{ord}_{x''}(\gamma_j\, u_1''^{\nu-j}\, u_2''^{d(j)}\, u_3''^{c(j)}) \geqslant \nu \quad$ pour $1 \leq j \leq \nu$, $j \neq j'$.

De plus, puisque $\mathrm{ord}_{x''}(\gamma_{j'}\, u_1''^{\nu-j'}\, u_2''^{d(j')}\, u_3''^{c(j')}) = \nu-1$ et que $\mathrm{div}(u_1'') \not\subset E''$, par IV.A.1., on a $\nu-j' = 0(p)$. D'où

(30) $\quad j' = 0(p)$.

Pour tout i, $1 \leq i \leq s$, nous posons

$$g_i = h(x'')^{-1}\, DM^{u'',\lambda}_{[i]}\, f = \rho(i) u_1''^{\nu} + \sum_{1 \leq j \leq \nu} \gamma_{j,i}\, u_1''^{\nu-j}\, u_2''^{d(j)}\, u_3''^{c(j)} ,$$

$$\rho(i) \in \widehat{O}_{X(n),x} , \quad \gamma_{j,i} \in k(x)\, [[u_2'',u_3'']] .$$

Remarquons que pour un i', $1 \leq i' \leq s$, on a $\rho(i')$ inversible et pour un i'' , $1 \leq i'' \leq s$, on a $\gamma_{j',i''}$ inversible. Posons $D = (\nu-j')!^{-1} (\partial/\partial u_1'')^{\nu-j'}$, on a

$$Dg_{i''} = \rho'\, u_1''^{j'} + \sum_{j'+1 \leq j \leq \nu} A_j\, u_1''^{j-j'}\, u_3''^{c(j)} + A u_3''^{c(j')}$$

avec A inversible.

Posons $D' = (j'-2)!^{-1}\ (\partial/\partial u_3'')^{j'-2}$, comme $c(j') = j'-1 = -1(p)$, on a

(31) $$D'Dg_{i''} = \rho''\, u_1''^{j'} + \sum_{j'+1 \leq j \leq \nu} B_j\, u_1''^{j-j'}\, u_3''^{c(j)-j'+1} + Bu_3''$$

avec B inversible.

Remarquons que

$$c(j'-1) \geqslant (j'-1)c(u,\lambda) = (j'-1)(1-j'^{-1}) = j'-2+j'^{-1} > j'-2 .$$

D'où $c(j'-1) \geqslant j'-1$ et dans (31), on a

$$D'Dg_{i''} = Bu_3'' + Cu_1''\, u_3'' + Du_1''^2 , \ B \text{ inversible.}$$

On en déduit que

(32) $$u_3'' + Eu_1''^2 \in I(\mathrm{Sing}_{\nu-1}(X'')) , \ E \in \widehat{O}_{X(n),x} .$$

Remarquons que, si $\rho(i'')$ n'est pas inversible, alors dans (31), on a
non inversible et par (29), on a que dans (32), E n'est pas inversible.

De plus, $g_{i'} \in I(\mathrm{Sing}_{\nu-1}(X''))$, donc , en utilisant (32), on a

$$(33) \quad \rho(i')\, u_1''^{\nu} + \sum_{1\leq j\leq \nu} \gamma_{j,i'}\, u_1''^{\nu-j}\, u_2''^{d(j)} (-E)^{c(j)}\, u_1''^{2c(j)} \in I(\mathrm{Sing}_{\nu-1}(X'')) \ .$$

Si $j' \geqslant 3$, on a $c(u,\lambda) \geqslant 2/3 > 1/2$ et donc, pour tout j, on a $c(j) > j/2$ et

$$\mathrm{ord}_{x''}(\gamma_{j,i'}\, u_1''^{\nu-j}\, u_2''^{d(j)} (-E)^{c(j)}\, u_1''^{2c(j)}) > \nu-j+j = \nu$$

et donc par (33), $u_1''^{\nu} \in I(\mathrm{Sing}_{\nu-1}(X''))$, ce qui, avec (32) prouve (26).

Si $j' \leq 2$, par (28) et (30), on a

$$j' = p = 2 \quad \text{et} \quad c(u,\lambda) = 1/2.$$

Si $A(3) \neq O(2)$, on prend $i' = 3$ et on a $c(j') = 1$ et $A(3) + c(j') = O(2)$ et $\gamma_{2,3}$ non inversible. Alors, par (29), on a pour tout j , $1 \leq j \leq \nu$

$$\mathrm{ord}_{x''}(\gamma_{j,3}\, u_1''^{\nu-j}\, u_2''^{d(j)}\, u_3''^{c(j)}) \geqslant \nu \quad ,$$

$$\mathrm{ord}_{x''}(\gamma_{j,3}\, u_1''^{\nu-j}\, u_2''^{d(j)} (-E)^{c(j)}\, u_1''^{2c(j)}) \geqslant \nu + c(j) > \nu \quad ,$$

on en déduit (26) comme précédemment.

Si $A(3) = O(2)$, on prend $i'' = 3$ et on a $\rho(i'')$ non inversible, donc, comme on l'a remarqué après (32), on a $\mathrm{ord}_{x''}(E) \geqslant 1$ et donc pour $1 \leq j \leq \nu$, on a

$$\mathrm{ord}_{x''}(\gamma_{j,i'}\, u_1''^{\nu-j}\, u_2''^{d(j)} (-E)^{c(j)}\, u_1''^{2c(j)}) \geqslant \nu-j+3c(j) \geqslant \nu+j/2 > \nu \quad ,$$

ce qui donne (26) dans ce dernier cas.

Ce qui met un point final à la preuve de C.5.

PROPOSITION ET NOTATION C.6.

Soient $x \in \mathrm{Sing}(X(n))$ et (u,λ) une p-base de $O_{X(n),x}$ adaptée à x et tels qu'on a

(1) $\quad I(X(n),f,(u,\lambda)) = (u_1^{\alpha}) \bmod.(u_2,u_3)$

où $\alpha = \alpha(x)$.

On pose

(2) $\Delta(u,\lambda) = \Delta\left[I(X(n),f,(u,\lambda))\ ;\ u_3,u_2\ ;\ u_1\right]$,

$$c(u,\lambda) = \inf\{c \mid (c,d) \in \Delta(u,\lambda)\},$$
$$d(u,\lambda) = \inf\{d \mid (c,d) \in \Delta(u,\lambda)\},$$

$$\delta(u,\lambda) = \inf\{c+d \mid (c,d) \in \Delta(u,\lambda)\},$$
$$\beta(u,\lambda) = \inf\{d \mid (c(u,\lambda),d) \in \Delta(u,\lambda)\},$$
$$\gamma(u,\lambda) = \inf\{c \mid (c,d(u,\lambda)) \in \Delta(u,\lambda)\},$$
$$e(u,\lambda) = \delta(u,\lambda)-d(u,\lambda)-c(u,\lambda).$$

On effectue l'éclatement

(3) $\quad \pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x.

Soit $x' \in X'$ le point de paramètres $v = (u_1u_3^{-1},u_2u_3^{-1},u_3)$ et soit $x'' \in X'$ le point de paramètres $w = (u_1u_2^{-1},u_2,u_3u_2^{-1})$.

(i) Si on a $I(X',f,(v,\lambda)) = v_1^{\alpha} \bmod.(v_2,v_3)$, alors

$$c(v,\lambda) = \delta(u,\lambda)-1, \quad \beta(v,\lambda) \leq \beta(u,\lambda), d(v,\lambda) = d(u,\lambda) ,$$

$$e(v,\lambda) \leq e(u,\lambda), \quad \gamma(v,\lambda) = \gamma(u,\lambda)+d(u,\lambda)-1 ,$$

$$\beta(v,\lambda)-d(v,\lambda) \leq \beta(u,\lambda)-d(u,\lambda),$$

$\gamma(v,\lambda)-c(v,\lambda) \leq \gamma(u,\lambda)-c(u,\lambda)$, cette dernière égalité est stricte si $\gamma(u,\lambda)-c(u,\lambda) > 0$.

Si de plus on a

$$\gamma(u,\lambda) = \delta(u,\lambda)-d(u,\lambda)$$

alors $e(v,\lambda) = 0$.

(ii) Si on a $I(X',f,(w,\lambda)) = w_1^{\alpha}$ mod. (w_2,w_3) alors

$$d(w,\lambda) = \delta(u,\lambda)-1, \quad \gamma(w,\lambda) \leq \gamma(u,\lambda), c(w,\lambda) = c(u,\lambda),$$

$$e(w,\lambda) \leq e(u,\lambda), \quad \beta(w,\gamma) = \beta(u,\lambda)+c(u,\lambda)-1,$$

$$\gamma(w,\lambda)-c(w,\lambda) \leq \gamma(u,\lambda)-c(u,\lambda), \quad e(w,\lambda) \leq \sup(1,\beta(u,\lambda)-1)$$

$\beta(w,\lambda)-d(w,\lambda) \leq \beta(u,\lambda)-d(u,\lambda)$, cette dernière égalité est stricte si $\beta(u,\lambda)-d(u,\lambda) > 0$.

Si de plus on a

$$\beta(u,\lambda) = \delta(u,\lambda)-c(u,\lambda),$$

alors $e(w,\lambda) = 0$.

Si de plus on a

$e(w,\lambda) = 1 = \beta(u,\lambda)-1$ alors

$$\begin{cases} \gamma(w,\lambda) = \delta(w,\lambda)-d(w,\lambda) & \text{et} \\ \beta(w,\lambda) = \delta(w,\lambda)-c(w,\lambda). \end{cases}$$

Preuve.

Ces résultats sont plus ou moins prouvés dans [12]. Voyons (i). Par I.F.4.1., on a

(4) $\quad I(X',f,(v,\lambda)) = u_3^{-\alpha}\, I(X(n),f,(u,\lambda))$.

Alors puisque $I(X',f,(v,\lambda)) = v_1^{\alpha}$ mod.(v_2,v_3), le polygone

(5) $\quad \Delta_3 = \Delta(I(X',f,(v,\lambda))\ ;\ w_3,v_2\ ;\ v_1)$

est défini.

La transformation affine faisant passer de Δ à Δ_3 est décrite en [12] p.127, les relations de (i) sont faciles (mais fastidieuses) à prouver.

De même pour (ii), on a

(6) $\quad I(X',f,(w,\lambda)) = u_2^{-\alpha}\, I(X(n),f,(u,\lambda))$.

Alors, puisque $I(X',f,(w,\lambda)) = w_1^{\alpha}$ mod.(w_2,w_3), le polygone

(7) $\quad \Delta_2 = \Delta(I(X',f,(w,\lambda))\ ;\ w_3,w_2\ ;\ w_1)$

est défini.

La transformation affine faisant passer de Δ à Δ_2 est décrite en [12] p.125, les relations de (ii) sont aussi faciles et fastidieuses que celles de (i).

On rappelle que pour désingulariser en dimension 2, seules les variations de $e(u,\lambda)$ et $\beta(u,\lambda)$ suffisent à établir les démonstrations [12] p.90, 93, lemmas 6.2.3. and 6.2.4., (où e est noté ω).

PROPOSITION C.7.

Soit x un point maigre de $\mathrm{Sing}(X(n))$ et soit (u,λ) une p-base de $O_{X(n),x}$ adaptée à x tels que $I(X(n),f,(u,\lambda)) = u_1^{\alpha} \bmod.(u_2,u_3)$ où $\alpha = \alpha(x)$.

(i) Alors $\Delta = \Delta(I(X(n),f,(u,\lambda))\ ;\ u_3,u_2\ ;\ u_1)$ n'est pas vide.

(ii) Supposons qu'il existe une suite infinie d'éclatements

$$\pi(n+i) : X(n+i+1) \longrightarrow X(n+i),\ i \geqslant 0 ,$$

centrés en $x(n+i)$ point ν-proche de $x(n) = x$ avec $\alpha(x(n+i)) = \alpha$, $i \geqslant 0$ et on a une p-base $(u(i),\lambda)$ de $O_{X(n+i),x(n+i)}$ adaptée en $x(n+i)$ telle que $(u(0),\lambda) = (u,\lambda)$ et pour $i \geqslant 1$,

$$\left| \begin{array}{l} u(i) = (u_1(i-1)u_2(i-1)^{-1},\ u_2(i-1), u_3(i-1)\,u_2(i-1)^{-1}) \quad \text{ou} \\ u(i) = (u_1(i-1)u_3(i-1)^{-1},\ u_2(i-1)u_3(i-1)^{-1},\ u_3(i-1)). \end{array} \right.$$

Alors, pour $i \geqslant 0$, on a

(1) $\qquad I(X(n+i),f,(u(i),\lambda)) = u_1(i)^{\alpha} \bmod.\ (u_2(i),u_3(i))$

et, il existe $r \geqslant 0$ tel que pour tout $i \geqslant r$, on a

(2) $\qquad \Delta(i) = \Delta[I(X(n+i),f,(u(i),\lambda))\ ;\ u_3(i),u_2(i)\ ;\ u_1(i)]$

n'a qu'un sommet.

C.7.1. Prouvons (i). Si Δ est vide, alors

u_1^{α} divise $I(X(n),f,(u,\lambda))$.

On en déduit que $u_1^{\alpha-1}$ divise $J(X(n),f,E(n))$.

Donc si $\alpha(x) = 1+\nu(x)$, on a

(3) $\qquad \mathrm{div}(u_1) \subset \mathrm{Sing}_{\nu(x)}\ (X(n))$

et x n'est pas maigre, ce qui est une contradiction. Si $\alpha(x) = \nu(x)$ et $\mathrm{div}(u_1) \subset E(n)$, alors au point générique de $\mathrm{div}(u_1)$, $I(X(n),f,(u,\lambda))$ et $J(X(n),f,E(n))$ sont égaux et donc $u_1^{\nu(x)}$ divise $J(X(n),f,E(n))$ et on a encore (3) et x n'est pas maigre, ce qui est une contradiction.

Si $\alpha(x) = \nu(x)$ et $\mathrm{div}(u_1) \not\subset E(n)$, alors x est à D.Q. et $\alpha = O(p)$. Donc, si u_1^{α} divise $h(x)^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[i]}\ f$, u_1^{α} divise également $h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[1]}\ f$ et donc encore une fois, u_1^{α} divise $J(X(n),f,E(n))$ au point générique de $div(u_1)$ et donc on a encore (3). Ce qui est une contradiction dans ce dernier cas. On a donc (i).

C.7.2. Prouvons (ii). Comme on a posé $\alpha = \alpha(x)$, on a

(4) $\quad I(X(n),f,(u,\lambda)) = (u_1^{\alpha})\mathrm{mod.}(u_2,u_3)^{\alpha}$.

On a $I(X(n+1),f,(u(1),\lambda)) = u_j^{-\alpha}\, I(X(n),f,(u,\lambda))$, où $j=2$ ou 3.

Si $c\ell^{\alpha}[I(X(n),f,(u,\lambda))] = (U_1^{\alpha})$, alors on a

$I(X(n+1),f,(u(1),\lambda)) = (u_1(1)^{\alpha})\,\mathrm{mod.}(u_j)$.

Si $c\ell^{\alpha}[I(X(n),f,(u,\lambda))] \neq (U_1^{\alpha})$ alors, puisque $\alpha(x(n+1)) = \alpha$, on a $\deg_{U_j}\{c\ell^{\alpha}[I(X(n),f,(u,\lambda))]\} = 0$.

Donc $c\ell^{\alpha}[I(X(n),f,(u,\lambda))] = (U_1^{\alpha})\mathrm{mod.}(U_{j'}^{\alpha})$ où $j'=2$ ou 3 et $j'\neq j$.

D'où

$$I(X(n+1),f,(u(1),\lambda)) = (u_1^{\alpha})\mathrm{mod.}(u_j,u_{j'}).$$

On prouve ainsi (1) par récurrence sur i. Prouvons (ii). D'abord on remarque qu'avec les notations de C.6., on a l'équivalence

$(\Delta(i)$ n'a qu'un sommet$) \Longleftrightarrow e(u(i),\lambda) = 0$.

Par C.6. (i) (ii), si $e(u(i),\lambda) = 0$ alors $e(u(i+1),\lambda) = 0$ et donc $\Delta(i+1)$ n'a qu'un sommet. Donc pour finir de prouver (ii), il suffit de montrer que pour $r \gg 0$, $\Delta(r)$ n'a qu'un sommet. Mais, si $e(u(i),\lambda) > 0$, alors on a $\beta(u(i),\lambda) > d(u(i),\lambda)$ et $\gamma(u(i),\lambda) > c(u(i),\lambda)$. Donc par C.6, on a

$(\beta(u(i+1),\lambda)-d(u(i+1),\lambda)) + (\gamma(u(i+1),\lambda)-c(u(i+1),\lambda)) <$
$(\beta(u(i),\lambda)-d(u(i),\lambda)) + (\gamma(u(i),\lambda)-c(u(i),\lambda))$,

Or par C.2.1, ces rationnels sont dans $(1|\alpha!)\mathbb{N}$ et donc une récurrence décroissante donne le résultat.

PROPOSITION ET DEFINITION C.8.

Soient x un point fermé de $\mathrm{Sing}(X(n))$ et (u,λ) une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ adaptée en x tels que

(1) $\quad I(X(n),f,(u,\lambda)) = (u_1^{\alpha})\mathrm{mod.}(u_2,u_3)$, $\quad \alpha \geq 1$.

Alors on peut trouver une p-base (v,λ) de $\hat{O}_{X(n),x}$ adaptée en x telle que l'on a $v_2 = u_2$, $v_3 = u_3$ et $I(X(n),f,(v,\lambda)) = v_1^{\alpha} \bmod.(v_2,v_3)$, et, si on pose

(2) $\qquad f = h(x)g' + R(f,v,\lambda)$,

tout sommet w du polygone $\Delta(g';v_3,v_2\ ;\ v_1)$ à coordonnées entières (c,d) n'est pas soluble. Cette dernière condition signifie que l'on ne peut pas trouver μ et μ' dans $k(x)$, ni $G \in k(x)[U_1,U_2,U_3]$ tels que

(3) $\qquad \mathrm{in}_x[h(x)]\,\mathrm{in}_w(g') = \mathrm{in}_x(h(x))\mu(V_1+\mu' V_2^d V_3^c)^{\nu} + G^p$.

De plus, on a

(4) $\qquad v_1 = u_1 + \sum \lambda_{a,b}\, u_3^a u_3^b$ avec $(a,b) \in \Delta[I(X(n),f,(u,\ ))\ ;\ u_3,u_2\ ;\ u_1]$.

Si on a (2) et (3) on dira que $\Delta(g';\ v_3,v_2\ ;\ v_1)$ est préparé. Si $\alpha = \nu(x)$ et si x est à D.Q. et si on a (IV $\star$) pour x et u_1, on a IV ($\star$) pour x et v_1 et on dira que $((v,\lambda),x)$ satisfait à ($\star\star\star$).

Preuve.

On procède comme dans [11] (3) et C.3.4. Or ordonne donc les points de $\mathbb{R}_+^2$ par $w \leqslant w' \Longleftrightarrow (|w|<|w'|$ ou $(|w| = |w'|$ et $w \leq w'$ pour l'ordre lexicographique)).

Supposons que $\Delta(g'\ ;\ v_3,v_2\ ;\ v_1)$ n'est pas préparé. Soit alors w le plus petit sommet de $\Delta(g\ ;\ u_3,u_2\ ;\ u_1)$ ne vérifiant pas les conditions de l'énoncé. On prend comme nouvelle p-base de $O_{X(n),x}$ la p-base (v,λ) ainsi définie : $v_1 = u_1 + \tilde{\mu}' u_2^{a(3)}$, $v_2 = u_2$, $v_3 = u_3$, $\lambda_i = \lambda_i$, $4 \leq i \leq s$, $\tilde{\mu}'$ étant un relèvement de μ'. On a alors :

(5) $\qquad f = h(x(n))g + R(f,u,\lambda) = h(x(n))g' + R(f,v,\lambda)$,

(6) $\qquad v \notin \Delta(g\ ;\ v_3,v_2\ ;\ v_1) \subset \Delta(g'\ ;\ v_3,v_2\ ;\ v_1)$, $c\ell^{\nu}(g) = c\ell^{\nu}(g') \bmod.(U_2,U_3)$,

de plus, d'après [11] (3-10), pour tout sommet $w' \neq w$ de $\Delta(g\ ;\ u_3,u_2\ ;\ u_1)$

(7) $\quad in_{x(n)} h(x(n)) in_{w'}(g)_{u_3,u_2\ ;\ u_1} = in_{x(n)}(h(x(n)))\ in_w(g)_{v_3,v_2\ ;\ v_1}$,

donc $v',f,(v,\lambda)$ satisfont aux conditions de l'énoncé pour tout $w' < w$. Pour finir la preuve on fait un passage à la limite comme dans C.3.4.

D'après le lemme C.8.1. qui suit, on trouve

(8) $\quad v_1 = u_1 + \sum \lambda_{a,b}\ u_3^a\ u_2^b$ avec $(a,b) \in \Delta(I\ ;\ u_3,u_2\ ;\ u_1)$,

avec $I = I(X(n),f,(u,\lambda))$. On remarque que par (5), on a

$$g = g' = \gamma u_1^\alpha \bmod.(u_2,u_3) = \gamma v_1^\alpha \bmod.(v_2,v_3) ,$$

ce qui entraîne clairement $I(X(n),f,(v,\lambda)) = (v_1^\alpha) \bmod.(v_2,v_3)$ et finit la preuve de C.8. modulo C.8.1.

LEMME C.8.1.

Soient x un point fermé de $Sing(X(n))$ et (u,λ) une p-base de $O_{X(n),x}$ adaptée en x, on pose :

$$f = h(x(n))\ g + R(f,u,\lambda).$$

Alors, pour tout polyèdre convexe $\Delta \subset \mathbb{R}_+^3$, stable par addition de $\mathbb{R}_+^2$, on a l'équivalence : $g \in I(\Delta)_u \Longleftrightarrow I(X(n),f,(u,\lambda)) \subset I(\Delta)_u$.

En particulier, sous les hypothèses de D.1., on a :

$$\Delta(g\ ;\ u_3,u_2\ ;\ u_1) = \Delta(I(X(n),f,(u,\lambda))\ ;\ u_3,u_2\ ;\ u_1).$$

Preuve.

Reprenons les notations de I.A.5., c'est-à-dire

(1) $\quad (\lambda_1,\ldots,\lambda_s) = (u_1,u_2,u_3,\lambda_4,\ldots,\lambda_s)$

(2) $\quad f = \sum_{a \ll p} f_a^p\ \lambda^a\ ,\ f_a \in O_{X(n),x}$.

D'après I.A.3., on a pour $a \ll p$, $a \neq 0$

(3) $\quad f_a^p\ \lambda^a = h(x)\ \varphi_a\ ,\quad \varphi_a \in O_{X(n),x}$.

D'où

$$f = h(x) \sum_{o\neq a, a<<p} \varphi_a + f_o^p = h(x)g + f_o^p = h(x)g + R(f,u,\lambda).$$

Soit L une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ à coefficients tous positifs, alors, avec les notations de C.2, on a

(4) $$v_{L,u}(g) = \inf\{v_{L,u}(\varphi_a),\ a \neq 0,\ a<<p\} .$$

En effet, posons $d = \inf\{v_{L,u}(\varphi_a),\ a \neq 0,\ a<<p\}$, et $e = v_{L,u}[h(x)]$. On a alors

(5) $$c\ell^{d+e}_{L,u}(f_a^p \lambda^a) = F_a^p \bar{\lambda}^a \in k(x)\ [U_1,U_2,U_3]$$

où $\bar{\lambda}_i = in_{L,u}(\lambda_i)$, $1 \leq i < s$.

Comme $(\bar{\lambda}_1,\dots,\bar{\lambda}_s)$ est une p-base de $k(x)[U_1,U_2,U_3]$, on a $\sum_{o\neq a<<p} F_a^p \bar{\lambda}^a \neq 0$, ce qui prouve (4).

Terminons la preuve de C.8.1. Posons

(6) $$H = in_{L,u}(h(x)) \quad \text{et} \quad f_i' = h(x)^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[i]}\ f\ ,\ 1\leq i \leq s.$$

On a

(7)
$$H\ c\ell^d_{L,u}(g) = \sum_{o\neq a<<p} F_a^p\ \bar{\lambda}^a$$
$$H\ c\ell^d_{L,u}(f_i') = \sum_{o\neq a<<p} a(i)\ F_a^p\ \bar{\lambda}^a\ ,\ 1 \leq i \leq s\ .$$

Donc, si $c\ell^d_{L,u}(g) \notin k(x)[U_1]$, pour un i, $1 \leq i \leq s$, on a $c\ell^d_{L,u}(f_i') \notin k(x)[U_1]$ et $v_{L,u}(f_i') = v_{L,u}(g) = d$. Comme pour tout i, $1 \leq i \leq s$, on a $v_{L,u}(f_i') \geq d$, on a C.8.1.

C.8.2. Bien sûr, si on a un corps de représentants de $k(x)$ dans $O_{X(n),x}$, dans C.8. (4), on peut prendre des $\lambda_{a,b}$ dans $k(x)$.

PROPOSITION C.9.

Soit x un point fermé de $\mathrm{Sing}(X(n))$ et soit (u,λ) une p-base de $O_{X(n),x}$ adaptée en x telle que

(1) $I(X(n),f,(u,\lambda)) = (u_1^{\alpha}) \bmod .(u_2,u_3)$, $\alpha \geqslant 1$, $\alpha = O(p)$.

Alors on a l'équivalence

($\Delta(g,u_3,u_2 ; u_1)$ est préparé $\Longleftrightarrow$

$\Delta(I(X(n),f,(u,\lambda)) ; u_3,u_2 ; u_1)$ est préparé).

On notera ce polygone $\Delta(u,\lambda)$.

Preuve.

Revenons à la preuve de C.8.1. ci-dessus et remarquons que C.8.1. (7) nous donne

(2) $$c\ell^{d}_{L,u}(f_i') = H^{-1}\left[DM^{\bar{u},\bar{\lambda}}_{[i]}\left[in_{L,u}(f)\right]\right].$$

Alors, comme $\alpha = O(p)$, on a l'équivalence

(3) $$\begin{cases} c\ell^{d}_{L,u}(g) = \mu(U_1+\mu' U_2^{b} U_3^{c})^{\alpha} \Longleftrightarrow \\ \forall i,\ 1\leq i\leq s,\ c\ell^{d}_{L,u}(f_i') = A(i)\mu(U_1+\mu' U_2^{b} U_3^{c})^{\alpha} \end{cases}$$

où $h(x) = \prod_{1\leq i\leq s} u_i^{A(i)}$.

Soit w un sommet de $\Delta = \Delta(g ; u_3,u_2 ; u_1) = \Delta(I ; u_3,u_2 ; u_1)$ où $I = I(X(n),f,(u,\lambda))$, il existe une forme linéaire Λ sur $\mathbb{R}^2$ à coefficients strictement positifs telle que $\Delta \cap \{v\in\mathbb{R}^2,\ \Lambda(v) = 0\} = \{w\}$. Alors, par C.2. (5)(7), il existe une forme linéaire L sur $\mathbb{R}^3$ à coefficients strictement positifs telle que

(4) $$in_{L,u}(g) = in_w(g) \quad \text{et} \quad c\ell^{\alpha}_{L,u}(I) = in_w(I).$$

Alors (3) et (4) prouvent que w est soluble pour g si et seulement si il est soluble pour I. Ce qui prouve C.9.

PROPOSITION C.10.

Soit x un point maigre de $\mathrm{Sing}(X(n))$ et soit (u,λ) une p-base de $\mathcal{O}_{X(n),x}$ adaptée à x tels que

(1) $I(X(n),f,(u,\lambda)) = (u_1^{\alpha})\mathrm{mod.}(u_2,u_3)$, où $\alpha = \alpha(x)$.

De plus, supposons que

(2) $E(n) = \mathrm{div}(u_3)$

et

(3) $h(x)^{-1}(DM_{[i]}^{u,\lambda} f, D_{[2]}^{u,\lambda} f \;;\; 1 \leq i \leq s) = (u_1^{\alpha})\mathrm{mod.}(u_2,u_3)$.

Posons

(4) $$\begin{cases} h(x)^{-1}(DM_{[i]}^{u,\lambda} \,,\; D_{[2]}^{u,\lambda} f \;;\; 1 \leq i \leq s) = I'(u,\lambda), \\ \Delta'(u,\lambda) = \Delta[I'(u,\lambda) \;;\; u_3,u_2 \;;\; u_1] \end{cases}$$

Notons

(5) $(c'(u,\lambda),\beta'(u,\lambda))$

le sommet d'abscisse minimale de $\Delta'(u,\lambda)$.

Alors , avec les notations de C.4.2.2.1., on a

(i) $c'(u,\lambda)=c(u,\lambda)$, $\lfloor\beta'(u,\lambda)\rfloor \leq \beta'(u,\lambda) \leq \beta(u,\lambda) \leq \lceil\beta(u,\lambda)\rceil \leq 1+\lfloor\beta'(u,\lambda)\rfloor$,

(ii) si $\beta(u,\lambda) \notin \mathbb{N}$, on a $\lfloor\beta(u,\lambda)\rfloor = \lfloor\beta'(u,\lambda)\rfloor$,

(iii) si $h(x)^{-1}\, DM_{[1]}^{u,\lambda} f \in (u_1^{\alpha}, u_1^{\alpha-j}\, u_3^{\lfloor jc(u,\lambda)\rfloor+1} \;;\; 1 \leq j \leq \alpha)$ et si $\alpha = O(p)$, alors on a $\lfloor\beta(u,\lambda)\rfloor = \lfloor\beta'(u,\lambda)\rfloor$, en particulier si $\beta(u,\lambda) \in \mathbb{N}$, on a $\beta'(u,\lambda) = \beta(u,\lambda)$.

Preuve.

Les deux idéaux $I'(u,\lambda)$ et $I(X(n),f,(u,\lambda))$ sont égaux au point générique de $V(u_1,u_3)$, de C.4.1., on déduit : $c(u,\lambda) = c'(u,\lambda)$.

Développons f dans $k(x)\,[[u_1,u_2,u_3]] = \hat{O}_{X(n),x}$. On a

(6) $$f = h(x)(\gamma u_1^{\alpha} + \sum_{1 \leq j \leq \alpha} u_1^{\alpha-j}\, u_3^{a}\, u_2^{b}\, \ell_{j,b,a}) + R(f,u,\lambda),$$

où $\ell_{j,b,a} \in k(x)$ et $1 \leq j \leq \alpha$, $0 \leq c$, $0 \leq d$ et $\gamma \in \hat{O}_{X(n),x}$.

On a

$\beta(u,\lambda) = \inf\{bj^{-1} | a = j\ c(u,\lambda),\ \ell_{j,b,a} \neq 0\}$,

$\beta'(u,\lambda) = \inf\{\{(b-1)j^{-1} | a = j\ c(u,\lambda),\ b\ell_{j,b,a} \neq 0\}\ ,\ \beta(u,\lambda)\}$.

D'où

$$\beta'(u,\lambda) \leq \beta(u,\lambda).$$

Si pour un (j,b,a) tel que $b\ell_{j,b,a} \neq 0$ on a $\beta'(u,\lambda) = (b-1)j^{-1}$ alors on a

$$\beta(u,\lambda) \leq bj^{-1}$$

$$j\beta(u,\lambda) \leq j\beta'(u,\lambda)+1 \leq j(\lfloor \beta'(u,\lambda) \rfloor +1).$$

Ce qui finit de prouver (i).

Prouvons (ii), nous regardons le cas où $\beta(u,\lambda) \notin \mathbb{N}$ et $\beta'(u,\lambda) < \beta(u,\lambda)$. Alors pour un $\ell_{j,b,a} \neq 0$, on a $\beta'(u,\lambda) = (b-1)j^{-1} \geqslant \beta(u,\lambda)-j^{-1} > \lfloor \beta(u,\lambda) \rfloor -j^{-1}$, $b-1 > j\lfloor \beta(u,\lambda) \rfloor -1$ et $b-1 \geqslant j\lfloor \beta(u,\lambda) \rfloor$, d'où $\beta'(u,\lambda) \geqslant \lfloor \beta(u,\lambda) \rfloor$ et $\lfloor \beta'(u,\lambda) \rfloor = \lfloor \beta(u,\lambda) \rfloor$.

Prouvons (iii). La relation

$$h(x)^{-1}\ DM^{u,\lambda}_{[1]}\ f \in (u_1^{\nu},\ u_1^{\nu-j}\ u_3^{\lfloor j(c,u,\lambda) \rfloor +1}\ ;\ 1 \leq j \leq \nu)$$

est équivalente à

$$[(\ell_{j,b,a} \neq 0 \text{ et } a = jc(u,\lambda)) \Longleftrightarrow \nu-j = 0(p)] .$$

Or puisque nous supposons $\alpha = 0(p)$, si $\beta(u,\lambda) \in \mathbb{N}$, pour $\ell_{j,b,a} \neq 0$ tel que $a = jc(u,\lambda)$ et $b = j\beta(u,\lambda)$ alors $b = 0(p)$ et $b\ell_{j,b,a} = 0(p)$, donc si $\beta'(u,\lambda) = (b-1)j^{-1}$, pour un certain $\ell_{j,b,a}$ on a $a = jc(u,\lambda)$ et $b > j\beta(u,\lambda)$ et $b-1 \geqslant j\beta(u,\lambda)$, d'où $\beta'(u,\lambda) \geqslant \beta(u,\lambda)$ et par (i) $\beta'(u,\lambda) = \beta(u,\lambda)$; si $\beta'(u,\lambda) = bj^{-1}$ pour un certain $\ell_{j,b,a} \neq 0$ avec $a = jc(u,\lambda)$, on a $\beta(u,\lambda) \leq bj^{-1} \leq \beta'(u,\lambda)$ d'où $\beta'(u,\lambda) = \beta(u,\lambda)$. Le cas $\beta(u,\lambda) \notin \mathbb{N}$ a été traité en (ii).

C.11. Pour les relations $\tau(x) = 2$ et $\tau(x) = 4$ ou $\tau(x) = 5$, nous devrons utiliser l'idéal $I(X(n),f,(u,\lambda))$ que l'on notera $I(u,\lambda)$ et si $E(n) = \mathrm{div}(u_3)$ l'idéal $I'(u,\lambda) = h(x)^{-1}(D^{u,\lambda}_{[2]}\ f,\ DM^{u,\lambda}_{[i]}\ f\ ;\ 1 \leq i \leq s)$. Si $I'(u,\lambda) = u_1^{\alpha}\ \mathrm{mod.}(u_2,u_3)$, $\alpha \geqslant 1$, on pose

(1) $\qquad \Delta'(u,\lambda) = \Delta(I'(u,\lambda)\ ;\ u_3,u_2\ ;\ u_1)$,

on note

(2) $\qquad (c'(u,\lambda),\beta'(u,\lambda))$

le sommet d'abscisse minimale de $\Delta'(u,\lambda)$.

PROPOSITION C.12.

Soit $x(n)$ un point maigre de $\mathrm{Sing}(X(n))$ et soit (u,λ) une p-base de $O_{X(n),x}$ adaptée à x.

Soit $q \in \mathbb{R}_+^*$ et L une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ définie par $L(x_1,x_3) = x_1+x_3\, q^{-1}$. Posons

$$(1)\quad \begin{cases} v_1 = u_1+au_3^c \quad \text{avec} \quad a \in O_{X(n),x} \quad \text{et} \quad c \geq q, \\ v = (v_1,u_2,u_3) \end{cases}$$

(i) Alors (v,λ) est une p-base de $O_{X(n),x}$ et on a $v_{L,u} = v_{L,v}$ et pour tout idéal J de $O_{X(n),x}$, avec les notations de C.1.4. (5), on a

$$\{J,L\}_u^{\alpha} = \{J,L\}_v^{\alpha},$$
$$\{J,L\}_u^{\alpha+} = \{J,L\}_v^{\alpha+}.$$

(ii) On suppose désormais $\mathrm{div}(u_1) \not\subset E(n)$. Alors

(a) la p-base (v,λ) est adaptée à x,

(b) $h(x)^{-1}\, D_{[1]}^{u,\lambda} f = \gamma h(x)^{-1}\, D_{[1]}^{u,\lambda} f$, $\gamma \in O^*_{X(n),x}$,

(c) si $I(u,\lambda) = u_1^{\alpha} \bmod.(u_2,u_3)$, $\alpha \geq 1$ et si $c \geq c(u,\lambda) = q > 0$, on a

$$I(v,\lambda) \subset \{\mathfrak{m}_{X(n),x},L\}_u^{\alpha}, \qquad I(v,\lambda) = v_1^{\alpha} \bmod.(v_3)$$

si de plus $c > c(u,\lambda) = q > 0$, alors

$$I(u,\lambda) = I(v,\lambda) \bmod.\{\mathfrak{m}_{X(n),x},L\}_u^{\alpha+},$$

(d) si on a une des deux conditions

$$(2)\qquad I(u,\lambda) = u_1^{\alpha} \bmod.(u_2,u_3),\ \alpha \geq 2,\ c \geq c(u,\lambda) = q > 0$$

ou

$$(3)\qquad \begin{cases} I'(u,\lambda) = u_1^{\alpha} \bmod.(u_2,u_3),\ \alpha \geq 2,\ c \geq c'(u,\lambda) = q > 0, \\ E(n) = \mathrm{div}(u_3), \end{cases}$$

on a $\quad h(x)^{-1}\, D_{[1]}^{u,\lambda} f \in \{\mathfrak{m}_{X(n),x},L\}_u^{\alpha-1} = \{\mathfrak{m}_{X(n),x},L\}_v^{\alpha-1}$, si de plus on a $h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[1]}\, f \in \{\mathfrak{m}_{X(n),x}, L\}^{\alpha+}_{u}$, dans le cas (2), on a $I(u,\lambda) = I(v,\lambda) \mod. \{\mathfrak{m}_{X(n),x}, L\}^{\alpha+}_{u}$ et dans le cas (3), on a $I'(u,\lambda) = I'(v,\lambda) \mod. \{\mathfrak{m}_{X(n),x}, L\}^{\alpha+}_{u}$,

(e) si $E(n) = \mathrm{div}(u_3)$ et $I'(u,\lambda) = (u_1^{\alpha}) \mod. (u_2, u_3)$ et si $c \geqslant c'(u,\lambda) = q > 0$, on a

$$I'(v,\lambda) \subset \{\mathfrak{m}_{X(n),x}, L\}^{\alpha}_{u} \ , \ I'(v,\lambda) = (v_1^{\alpha}) \mod. (v_3) \ ,$$

si de plus $c > c'(u,\lambda) = q > 0$ alors

$$I'(u,\lambda) = I'(v,\lambda) \mod. \{\mathfrak{m}_{X(n),x}, L\}^{\alpha+}_{u} \ .$$

C.12.1 Prouvons (i). Il est clair que (v,λ) est une p-base de $O_{X(n),x}$. On a $u_1^{\alpha}\, u_2^{\beta}\, u_3^{\gamma} = (v_1 - a v_3^{c})^{\alpha}\, v_2^{\beta}\, v_3^{\gamma}$, d'où

$$v_{L,v}(u_1^{\alpha}\, u_2^{\beta}\, u_3^{\gamma}) = \alpha\, v_{L,v}(v_1 - u v_3^{c}) + \gamma c^{-1}$$
$$= \alpha + \gamma c^{-1} = v_{L,u}(u_1^{\alpha}\, u_2^{\beta}\, u_3^{\gamma}) .$$

D'où $v_{L,u} = v_{L,v}$ et pour tout idéal J de $O_{X(n),x}$,

$$\begin{cases} \{J,L\}^{\alpha}_{u} = \{J,L\}^{\alpha}_{v} \ , & \alpha \in \mathbb{R}_+ \\ \{J,L\}^{\alpha+}_{u} = \{J,L\}^{\alpha+}_{v} \ . & \end{cases}$$

C.12.2. L'assertion (ii)(a) est claire.

Prouvons (ii)(b). Posons

$$da = a_1\, du_1 + a_2\, du_2 + a_3\, du_3 + \sum_{3 \leq i \leq s} a_i\, d\lambda_i \ .$$

Alors

$$fv_1 = (1 + a_1 u_3^{c})\, du_1 + a_2 u_3^{c} du_2 + (a_3 u_3^{c} + c a u_3^{c-1})\, du_3 + \sum a_i u_3^{c} d\lambda_i \ .$$

On en déduit

$$(4) \qquad \begin{cases} h(x)^{-1}\, D^{u,\lambda}_{[1]}\, f = h(x)^{-1}(1 + a_1 u_3^{c})\, D^{v,\lambda}_{[1]}\, f \ , \\ h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[2]}\, f = h(x)^{-1}(DM^{v,\lambda}_{[2]}\, f + a_2 u_2 u_3^{c}\, D^{v,\lambda}_{[1]}\, f) \\ h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[3]}\, f = h(x)^{-1}\, (DM^{v,\lambda}_{[3]}\, f + (a_3 u_3 + ca)\, u_3^{c}\, D^{v,\lambda}_{[1]}\, f) \\ h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[i]}\, f = h(x)^{-1}\, (DM^{v,\lambda}_{[i]}\, f + a_i\, \lambda_i\, u_3^{c}\, D^{v,\lambda}_{[1]}\, f) \ , \ 4 \leq i \leq s. \end{cases}$$

La première égalité de (4) prouve (ii) (b).

C.12.3. Prouvons (ii)(c) et (ii)(d) quand (2) est vérifié. Par définition de $c(u,\lambda)$, on a $I(u,\lambda) \subset \{\mathcal{M}_{X(n),x}, L\}_u^{\alpha}$. Par (4), on a

(5) $\quad I(u,\lambda) = I(v,\lambda) \bmod.\ u_3^c\ h(x)^{-1}\ D_{[1]}^{u,\lambda} f$.

Or $h(x)^{-1}\ DM_{[1]}^{u,\lambda} f \in I(u,\lambda) \subset \{\mathcal{M}_{X(n),x}, L\}_u^{\alpha}$ donc $v_{L,u}[h(x)^{-1}\ DM_{[1]}^{u,\lambda} f] \geqslant \alpha$ et

$$(6)\qquad \begin{aligned} &v_{L,u}[h(x)^{-1}\ D_{[1]}^{u,\lambda} f] \geqslant \alpha - 1 ,\\ &v_{L,u}[u_3^c\ h(x)^{-1}\ D_{[1]}^{u,\lambda} f] \geqslant c.c(u,\lambda)^{-1} + \alpha - 1 \geqslant \alpha . \end{aligned}$$

Donc par (5) et (6), on a $I(v,\lambda) \subset \{\mathcal{M}_{X(n),x}, L\}_u^{\alpha}$. Puisque $c(u,\lambda) > 0$, on a $I(u,\lambda) = u_1^{\alpha} \bmod.(u_3)$, d'où par (5) $I(v,\lambda) = u_1^{\alpha} \bmod.(u_3) = v_1^{\alpha} \bmod.(v_3)$. Si $c > c(u,\lambda)$ alors $c.c(u,\lambda)^{-1} > 1$ et donc par (6), on a

$$u_3^c h(x)^{-1}\ D_{[1]}^{u,\lambda} f \in \{\mathcal{M}_{X(n),x}, L\}_u^{\alpha +} , \text{ d'où par (5)}$$
$$I(u,\lambda) = I(v,\lambda) \bmod.\ \{\mathcal{M}_{X(n),x}, L\}_u^{\alpha +}$$

ce qui finit de prouver (ii)(c).

Supposons (2) vérifié et prouvons (ii) (d) en ce cas. Par (5), on a $h(x)\ D_{[1]}^{u,\lambda} f \in \{\mathcal{M}_{X(n),x}, L\}_u^{\alpha - 1}$. D'autre part, si $h(x)^{-1}\ DM_{[1]}^{u,\lambda} f \in \{\mathcal{M}_{X(n),x}, L\}_u^{\alpha +}$, on a $v_{L,u}[h(x)^{-1}\ DM_{[1]}^{u,\lambda} f] > \alpha$ et donc $v_{L,u}[h(x)^{-1}\ u_3^c\ D_{[1]}^{u,\lambda} f] > c.c(u,\lambda)^{-1} + \alpha - 1 \geqslant \alpha$. Alors, par (5), on a

$$I(u\ ,\lambda) = I(v,\lambda) \bmod.\ \{\mathcal{M}_{X(n),x}, L\}_u^{\alpha +} .$$

C.12.4. La démonstration de (ii)(e) et (ii)(c) quand (3) est vérifié est en tout point pareille à C.12.3.

D. FIN DE $\kappa = 2$

D'après B.7 nous n'avons plus qu'à prouver que le théorème II.C.4.4. est vérifié pour $\nu(x) = O(p)$ et $\kappa(x) = 2$. D'après B.6, on peut se limiter au cas où on a (**) pour x. Nous allons devoir définir des invariants très fins pour résoudre ce problème.

D.1. Voyons d'abord le cas où $\alpha(x) = \nu(x)$ entier que l'on note ν. D'après C.8, nous pouvons construire une p-base (u,λ) de $\hat{O}_{X(n),x}$ adaptée à x et telle que $((v,\lambda),x)$ satisfait à (***).

PROPOSITION D.1.1.

Soit x un point fermé maigre et à D.Q. de Sing(X(n)), soit (u,λ) une p-base de $O_{X(n),x}$ tels que : $\alpha(x) = \nu(x) = \nu = O(p)$, $v(x) = 1$ et, on a (***) pour $((u,\lambda),x)$.

Alors $\langle U_1\rangle = \mathrm{VDir}(x)$.

Preuve.

Supposons le contraire, alors comme on a (IV *) pour u_1, (E.1.), il existe a et b dans $k(x)$ tels que $U_1+aU_2+bU_3 \in \mathrm{VDir}(x)$, a ou $b \neq 0$. Comme $v(x) = 1$, alors $\langle U_1+aU_2+bU_3\rangle = \mathrm{VDir}(x)$. Donc $c\ell^{\nu}(I(X(n),f,(u,\lambda))) = (U_1+aU_2+bU_3)^{\nu}$. Supposons par exemple $a \neq 0$, alors, si v est le point de coordonnées $(0,1)$, on a :

$$(1) \qquad in_v(I(X(n),f,(u,\lambda))) = (U_1+aU_2)^{\nu} ,$$

ce point est un sommet soluble de $\Delta(u,\lambda)$ (cf. C.9), c'est en contradiction avec C.9 et (***). On en déduit que $U_1 \in \mathrm{VDir}(x)$ et donc $\langle U_1\rangle = \mathrm{VDir}(x)$.

D.1.1.1. On remarque que

(1) $\quad I(X(n),f,(u,\lambda)) = h(x)^{-1}\, \mathcal{J}(X(n),f,F)$

où $F = \mathrm{div}(u_1u_2u_3)$. Donc $I(X(n),f,(u,\lambda))$ et $\Delta(u,\lambda)$ ne varient pas si on modifie les λ_i, $4 \leq i \leq s$ ou si on multiplie les u_i par des inversibles, $1 \leq i \leq 3$ (cf. I.A.5.(11)).

PROPOSITION D.1.1.2.

Soit x un point fermé à D.Q. de $\mathrm{Sing}(X(n))$ et soit (u,λ) une p-base de $O_{X(n),x}$ tels que : on a (IV $*$) pour (x,u_1), $\alpha(x) = \nu(x) = \nu = O(p)$, $v(x) = 2$ on a ($***$) pour $((u,\lambda),x)$ et de plus $U_1 \notin \mathrm{VDir}(x)$. Alors :

(i) $E(n) = \mathrm{div}(u_2u_3)$,

(ii) $e(x) = 3$,

(iii) avec les notations de E.1., $\Delta(u,\lambda)$ a pour sommets $(1,0)$ et $(0,1)$, on peut choisir a, b, c inversibles dans $O_{X(n),x}$ tels que si on pose $(v,\lambda) = (u_1+au_2,u_2,u_3,\lambda_i)$, on a ($***$) pour $((v,\lambda),x)$, $\Delta(v,\lambda) = \Delta(u,\lambda)$ et $\mathrm{VDir}(x) = \langle V_1,V_2+V_3\rangle$.

Preuve.

Soit $(U_1+aU_2+bU_3,cU_2+dU_3)$ une base de $\mathrm{VDir}(x)$. Si $d \neq 0$ alors $\mathrm{div}(u_3) \subset E(n)$ sinon, en modifiant u_2 et u_3, on a $e(x) = 2$. Comme c ou d est non nul, par D.1.1.1, on peut supposer $d=1$ et, quitte à modifier notre base de $\mathrm{VDir}(x)$, $b = 0$, alors $a \neq 0$ par hypothèse. Donc (U_1+aU_2,cU_2+U_3) est une base de $\mathrm{VDir}(x)$. Toujours par D.1.1.1, on peut supposer $a = 1$, $c = 0$ ou 1. En notant comme d'habitude $F_i = c\ell^{\nu}[DM^{u,\lambda}_{[i]}(f).h(x)^{-1}]$, $1 \leq i \leq s$, on a :

(1) $\quad F_i = \sum_{j=0}^{\nu} a_{i,j}\, (U_1+U_2)^{\nu-j}(U_3+cU_2)^j \in k(x)\,[U_1,U_2,U_3]$,

avec $a_{i,\nu} \neq 0$ pour au moins un i (IV $*$).

Si $c = 0$, alors, si on note v le point $(0,1)$, en posant

$g_i = DM^{u,\lambda}_{[i]}(f).h(x)^{-1}$, on déduit de (1) :

$$(2) \qquad in_v(g_i) = a_{i,\nu}(U_1+U_2)^{\nu} .$$

Donc ce point $v = (0,1)$ est sommet de $\Delta(u,\lambda)$ et est soluble, c'est en contradiction avec (***), donc $c = 1$ et donc $div(u_2) \subset E(n)$, sinon on aurait $e(x) = 2$. D'après (1), (1,0) et (0,1) sont sommets de $\Delta(u,\lambda)$ et ce sont clairement les seuls. Bien sûr, on prend pour v_1 un relèvement de U_1+U_2 dans $O_{X(n),x}$, alors $V_1 \in VDir(x)$, on a $VDir(x) = \langle V_1 , V_2+V_3 \rangle$, donc, si on pose $g_i = DM^{v,\lambda}_{[i]}(f).h(x)^{-1}$ et $G_i = c\ell^{\nu}_x(g_i)$, $1 \leq i \leq s$, on a :

$$(3) \qquad G_i = \sum_{j=o}^{\nu} b_{i,j} V_1^{\nu-j}(V_2+V_3)^j , \text{ avec un } b_{i,\nu} \neq 0 \text{ par (IV *)}.$$

Alors $\Delta(u,\lambda)$ a pour sommets $v = (1,0)$, $v' = (0,1)$ et ces sommets ne sont pas solubles, sinon par exemple, on aurait

$$(4) \qquad in_v(g_i) = \sum_{j=o}^{\nu} b_{i,j} V_1^{\nu-j} V_3^j = b_{i,\nu}(V_1+eV_3)^{\nu} , \ e \in k(x),$$

ce qui implique par (3) que $G_i = b_{i,\nu}(V_1+e(V_2+V_3))^{\nu}$, c'est-à-dire que $v(x) = 1$, ce qui est une contradiction. D'où la preuve de (iii).

REMARQUE D.1.1.3.

D'après D.1.1. et D.1.1.2., quand on a $\alpha(x) = \beta(x)$ et (***) pour $((u,\lambda),x)$, nous supposons de plus que $U_1 \in VDir(x)$.

REMARQUE D.1.1.4.

Soient $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ trois éléments de $O_{X(n),x}$ et soit $v = (\gamma_1 u_1, \gamma_2 u_2, \gamma_3 u_3)$. Alors, (v,λ) est une p-base de $O_{X(n),x}$, de plus on a par D.1.1.1. $\Delta(v,\lambda) = \Delta(u,\lambda)$, $I(v,\lambda) = I(u,\lambda)$.

Pour toute forme L sur $\mathbb{R}^2$ à coefficients ≥ 0, $v_{L,u} = v_{L,v}$ et si a est un sommet de $\Delta(u,\lambda)$, on a $in_a[I(u,\lambda)] = in_a[I(v,\lambda)]$, donc, si on a (***) pour $(x,(u,\lambda))$ on a (***) pour $(x,(v,\lambda))$.

NOTATION D.1.1.5.

Soient x un point fermé maigre à D.Q. de $Sing(X(n))$ et (u,λ) une p-base de $O_{X(x),x}$ tels qu'on a (IV *) pour $(x,(u,\lambda))$. Choisissons un corps de représentants de $k(x)$ dans $\hat{O}_{X(n),x}$. Posons

(1) $f = h(x)g + R(f,u,\lambda)$,

(2) $$\begin{cases} g = \sum_{1\leq j\leq \nu, 0\leq a, 0\leq b} u_1^{\nu-j}\, \ell_{j,b,a}\, u_2^b\, u_3^a \bmod.(u_1^{\nu}) , \\ \nu = \nu(n), \quad \ell_{j,b,a}\in k(x), \quad g\in \hat{O}_{X(n),x} = k(x)[[u_1,u_2,u_3]] . \end{cases}$$

Alors, par C.6, C.8.1 et C.10, on a

(3) $$\begin{aligned} c(u,\lambda) &= \inf\{aj^{-1} \; ; \; 1\leq j\leq \nu , \; \ell_{j,b,a} \neq 0\} , \\ \beta(u,\lambda) &= \inf\{bj^{-1} \; ; \; 1\leq j\leq \nu , \; a=jc(u,\lambda), \; \ell_{j,b,a} \neq 0\}, \\ \delta(u,\lambda) &= \inf\{(a+b)j^{-1} \; ; \; 1\leq j\leq \nu , \; \ell_{j,b,a} \neq 0\} , \\ d(u,\lambda) &= \inf\{bj^{-1} \; ; \; 1\leq j\leq \nu , \; \ell_{j,b,a} \neq 0\}, \\ c(u,\lambda) &= \delta(u,\lambda) - c(u,\lambda) - d(u,\lambda) , \\ \beta'(u,\lambda) &= \inf\{\beta(u,\lambda), \inf\{(b-1)j^{-1} \; ; \; 1\leq j\leq \nu , \; a=jc(u,\lambda), \; b\neq 0(p), \\ &\qquad \ell_{j,b,a} = 0\}\} . \end{aligned}$$

On a par C.10

(4) $\lfloor\beta'(u,\lambda)\rfloor \leq \beta'(u,\lambda)\leq \beta(u,\lambda)\leq \lceil\beta(u,\lambda)\rceil \leq 1+ \lfloor\beta'(u,\lambda)\rfloor$.

DEFINITION D.1.2.

Soient x un point fermé maigre à D.Q. de $Sing(X(n))$ et

(u,λ) une p-base de $O_{X(n),x}$ tels qu'on a $\alpha(x) = \nu(x)$ et (***) pour $(x,(u,\lambda))$.

Alors, avec les notations de C.6. et C.10 et D.1.1.5, on pose

$\beta(x) = \inf\{\beta(u,\lambda)$; on a (***) pour $(x,(u,\lambda))\}$,

$e(x) = \inf\{e(u,\lambda)$; on a (***) pour $(x,(u,\lambda))\}$.

(1) Si $m(x) = 2$, et si $e(x) \geq 0,5$ on pose $\mathcal{E}(x) = 1 + \lfloor e(x) \rfloor$,

si $m(x) = 2$ et $e(x) < 0,5$, on pose $\mathcal{E}(x) = 0,75$,

(2) Si $m(x) = 1$ et $\beta(x) \notin \mathbb{N}$ on pose $\mathcal{E}(x) = \lceil \beta(x) \rceil - 0,5$.

(3) Si $m(x) = 1$ et $\beta(x) \in \mathbb{N}^*$ et si pour une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ telle qu'on a (***) pour $(x,(u,\lambda))$ et $\beta(u,\lambda) = \beta(x)$, on a pour un j,b,a, $\ell_{j,b,a} \neq 0$, $bj^{-1} = \beta(u,\lambda)$, $aj^{-1} = c(u,\lambda)$, $j \neq 0(p)$ alors on pose $\mathcal{E}(x) = \lceil \beta(x) \rceil - 0,25$.

(4) Si $m(x) = 1$ et $\beta(x) \in \mathbb{N}$ et si on n'a pas la condition précédente, on pose $\mathcal{E}(x) = \lceil \beta(x) \rceil = \beta(x)$.

(5) Si $m(x) = 0$, on pose $\mathcal{E}(x) = +\infty$.

REMARQUE D.1.2.1.

Par C.7, on a $\Delta(u,\lambda) \neq \emptyset$ et donc $\beta(u,\lambda)$ et $e(u,\lambda)$ et $\mathcal{E}(x)$ sont bien définis.

EXEMPLE D.1.2.3.

Si on a (IV **') (voir B.4.6.4.) en x avec $\tau(x) = 2$, alors pour toute p-base (u,λ) telle qu'on a (***) pour $(x,(u,\lambda))$, on a

$\langle U_1,U_2\rangle = \mathrm{VDir}[J(X(n),f,E(n)) \bmod.(u_3)]$, et donc $c(u,\lambda) = 0$.

De plus, on a $c\ell^{\nu}[J(X(n),f,E(n)) \bmod.(u_3)] \subset k(x)[U_1^p,U_2^p]$ et donc il existe $F \in c\ell^{\nu}[J(X(n),f,E(n))]$ tel que

$$F = \sum_{0 \leq k < \nu p^{-1}} \gamma_k U_1^{\nu - kp} U_2^{kp} \text{ mod. } (U_3)$$

et $U_1^{\nu} \nmid F$ et $U_1 F$ ou $U_2 F \in I(X(n), f, (u,\lambda))_{1+\nu}$. Donc

$$\beta(u,\lambda) \leq kp.(kp-1)^{-1} < 2$$

ou $\beta(u,\lambda) \leq (kp+1)(kp)^{-1} < 2$.

Donc $\beta(u,\lambda) < 2$ et

(2) $\varepsilon(x) \leq 1,5$.

D.2. Maintenant que nous avons défini nos invariants dans le cas où $\alpha(x) = \nu(x)$, passons au cas où $\alpha(x) = 1+\nu(x)$.

DEFINITION D.2.1.

Soit x un point fermé maigre et D.Q. de $\mathrm{Sing}(X(n))$. Soit (u,λ) une p-base de $O_{X(n),x}$ adaptée en x et telle qu'on a (IV $\star$) pour x et u_1. On suppose de plus que $\alpha(x) = 1+\nu(x) = 1+\nu$ et que $E(n) = \mathrm{div}(u_3)$. Posons

(1) $f = u_3^{A(3)} g + R(f,u,\lambda)$.

On pose

(2) $\delta(u,\lambda) = \sup\{d \in \mathbb{R}_+^{\star} \mid v_{L,d}(g) = \nu + d^{-1}\}$,

où $v_{L,d}$ est la valuation de $O_{X(n),x}$ définie par $v_{L,d}(u_1^a u_2^b u_3^c) = a + (b+c)d^{-1}$,

(3) $c(u,\lambda) = \sup\{e \in \mathbb{R}_+^{\star} \mid v_{M,e}(g) = \nu\}$.

où $v_{M,e}$ est la valuation de $O_{X(n),x}$ définie par $v_{M,e}(u_1^a u_2^b u_3^c) = a + ce^{-1}$.

Si $\{e \in \mathbb{R}_+^* \mid v_{M,e}(g) = \nu\} = \emptyset$, on pose $c(u,\lambda) = 0$.

D.2.1.1. On remarque que si $x_1 + (x_2+x_3)d^{-1} \geqslant \nu + d^{-1}$, on a $x_1 + (x_2+x_3)d^{-1} \geqslant \nu$ et donc si $d > d' > 0$, $x_1 + (x_2+x_3)d'^{-1} \geqslant \nu + d'^{-1}$.

Si on pose

$\Delta_d = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}_+^3 \; ; \; x_1+(x_2+x_3)d^{-1} \geqslant \nu + d^{-1}\}$, on a $\Delta_{d'} \supset \Delta_d$ et $\Delta_{\delta(u,\lambda)} = \bigcap_{d \leqslant \delta(u,\lambda)} \Delta_d$, d'où par C.1.4.3.,

(1) $\quad g \in I(\Delta_\delta)_u$.

De plus, si $c(u,\lambda) > 0$, on pose

$$\Delta = \{(x_1,x_2,x_3) \in \Delta_\delta \; ; \; x_1 + x_3 \, c(u,\lambda)^{-1} \geqslant \nu\} \quad ,$$

par C.1(7), on a

(2) $\quad g \in I(\Delta)_u$.

D.2.1.2. Par le théorème de Cohen, nous pouvons choisir un corps de représentants de $k(x(n))$ dans $\hat{O}_{X(n),x(n)}$, on a alors $\hat{O}_{X(n),x(n)} = k(x(n))[[u_1,u_2,u_3]]$. Alors, par C.1. (7), on a

(1) $$g = \sum_{0 \leqslant j \leqslant \nu,\ 0 \leqslant a,\ 0 \leqslant b} u_1^{\nu-j} \, \ell_{j,b,a} \, u_3^a \, u_2^b \ \text{mod.}\ (u_1^{\nu+1}) \ ,$$

avec $\ell_{j,b,a} \in k(x(n))$, $\ell_{0,1,0} \neq 0$ (A.1.(ii),(IV $*$)),

$c(u,\lambda) = \inf\{a.j^{-1} \; ; \; 1 \leqslant j < \nu \ , \ \ell_{j,b,a} \neq 0\}$,

$\delta(u,\lambda) = \inf\{(a+b-1).j^{-1} \; ; \; 1 \leqslant j \leqslant \nu \ , \ \ell_{j,b,a} \neq 0\}$.

On pose alors

(2) $\beta(u,\lambda) = \inf\{b.j^{-1} \; ; \; 1 \leqslant j \leqslant \nu \ , \ a=jc(u,\lambda) , \ \ell_{j,b,a} \neq 0\}$,

$\beta''(u,\lambda) = \inf\{(b-1).j^{-1} \; ; \; 1 \leqslant j \leqslant \nu \ , \ a=jc(u,\lambda) , \ \ell_{j,b,a} \neq 0\}$.

Par (1) et (2), on a

(3) $\quad \delta(u,\lambda) \leq c(u,\lambda) + \beta''(u,\lambda)$.

D.2.1.3. On remarque que

$$I'(u,\lambda) = (u_1^{\nu})\mathrm{mod.}(u_2,u_3) \quad \text{où} \quad \nu = \nu(x)$$

et $\quad I'(u,\lambda) = h(x)^{-1}(D_{[1]}^{u,\lambda} f,\ DM_{[1]}^{u,\lambda} f\ ;\ 1 \leq i \leq s)$. Alors avec les notations de C.11, on a

(1) $\quad \begin{cases} c(u,\lambda) = c'(u,\lambda) , \\ \beta''(u,\lambda) \leq \beta'(u,\lambda) \leq \beta(u,\lambda). \end{cases}$

De plus on vérifie que

(2) $\quad$ si $\beta(u,\lambda) \notin \mathbb{N}$, on a $\lfloor \beta(u,\lambda) \rfloor = \lfloor \beta'(u,\lambda) \rfloor$.

Enfin, par une démonstration en tout point semblable à celle de C.10 (iii), on a

(3) $\quad \begin{cases} \text{si } h(x)^{-1}\ DM_{[1]}^{u,\lambda} f \in (u_1^{\nu},\ u_1^{\nu-j}\ u_3^{\lfloor jc(u,\lambda) \rfloor +1} ,\ 1 \leq j \leq \nu) \\ \text{alors } \lfloor \beta(u,\lambda) \rfloor = \lfloor \beta'(u,\lambda) \rfloor . \end{cases}$

De plus, on a

(4) $\quad \delta(u,\lambda) - c(u,\lambda) < \beta(u,\lambda)$.

En effet si pour un j,b,a avec $\ell_{j,b,a} \neq 0$, on a $aj^{-1} = c(u,\lambda)$ et $bj^{-1} = \beta(u,\lambda)$, on a $(a+b-1)j^{-1} \geq \delta(u,\lambda)$, donc

$$\delta(u,\lambda) - aj^{-1} \leq (b-1)j^{-1} < \beta(u,\lambda).$$

PROPOSITION ET DEFINITION D.2.2.

Soit x un point fermé maigre à D.Q. de Sing $(X(n))$ avec

$\alpha(x) = 1 + \nu(x) = 1+\nu$. Soit (u,λ) une p-base de $O_{X(n),x}$ satisfaisant aux conditions de A.1. (ii) et telle qu'on a (IV $\ast$) pour $(x,(u,\lambda))$.

Alors on peut trouver $(z_1,z_2) \in \hat{O}^2_{X(n),x}$ tel qu'on a les conditions (1)(2)(3)(4) qui suivent

$$(1) \begin{cases} z_1 = u_1 + \sum_{c(u,\lambda)\leq a,\, o\leq b} \theta_{a,b}\, u_2^b\, u_3^a , \\ z_2 = u_2 + \theta u_3 , \ \theta_{a,b} \in k(x),\ \theta \in \hat{O}_{X(n),x} , \end{cases}$$

$$(2) \quad Z_1 \in \mathrm{VDir}(G_2) \quad \text{où} \quad G_2 = c\ell_x^{\nu}[h(x)^{-1}\, D_{[2]}^{z,\lambda}\, f] .$$

Si on pose $f = z_3^{A(3)} g + R(f,z,\lambda)$, où $z = (z_1,z_2,u_3)$, on a

$$(3) \quad c\ell_x^{1+\nu}(g) = \gamma Z_1^{\nu} Z_2 + \sum_{1\leq j\leq \nu} Z_1^{\nu-j}\, P_j(Z_2,Z_3) .$$

On effectue l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x. On pose $x' = \mathrm{Proj}\,(Z_1) \cap E'$. Alors le point x' a pour paramètres $z' = (z_1 z_2^{-1}, z_2, z_3, z_2^{-1})$ et on a

$$f = z_2'^{A(3)+1+\nu} z_3'^{A(3)}\, g' + R(f,z',\lambda)$$

$$h(x') = z_2'^{A(3)+1+\nu}\, z_3'^{A(3)} \quad , \ \mathrm{ord}_{x'}(g') \leq \nu .$$

Posons $T = O_{X',x'}/(z_2',z_3')$. Alors

$$(4) \quad \left| \begin{array}{l} \text{soit } \mathrm{ord}_{x'}(g'T) < \nu \\ \text{soit } \mathrm{ord}_{x'}(g'T) = \nu \ \text{ et } \ \Delta(g'\ ;\ z_3',z_2'\ ;\ z_1') \ \text{ est} \end{array} \right.$$

préparé et si L est donnée par $L(x_1,x_2,x_3) = x_1 + (x_2+x_3)\delta(z,\lambda)^{-1}$ on a

$$c\ell^{\nu}_{L,z}[h(x)^{-1}\, D_{[2]}^{z,\lambda}\, f] = \gamma Z_1^{\nu} \quad \text{ou}$$

$c\ell^{\nu}_{L,z}[h(x)^{-1}\, D_{[2]}^{z,\lambda}\, f]$ n'est pas colinéaire à une puissance ν-ième.

Si $(x,(z,\lambda))$ satisfont à (2)(3)(4), on dit qu'on a

(***) pour $(x,(z,\lambda))$.

REMARQUE D.2.2.1.

On remarque que D.2.2.(3) implique qu'on a (IV*) pour $(x,(z,\lambda))$. Si on pose $I = c\ell_L^{\nu+\delta-1}[I(X(n),f,(z,\lambda))]$ où $\delta = \delta(z,\lambda)$ et $L(x_1,x_2,x_3) = x_1 + (x_2+x_3)\delta(u,\lambda)^{-1}$, alors I n'est pas divisible par une puissance ν-ième d'un polynôme non constant.

Si $\delta = 1$ et si I est divisible par P^ν alors on a $\mathrm{VDir}(x) = \langle P \rangle$. Par D.2.2.(2), on a $P = Z_1$ ce qui contredit la définition de δ.

Si $\delta > 1$, alors on a $\mathrm{ord}(g' \bmod.(z_2)) = \nu$. De plus, on a

$$Z_2\, c\ell^{\nu}_{L,z}[h(x)^{-1}\, D^{z,\lambda}_{[2]}\, f] = c\ell^{\nu+\delta-1}_{L,z}\, [h(x)^{-1}\, DM^{z,\lambda}_{[2]}\, f]$$

et D.2.2.(4) entraîne que si I est divisible par P^ν alors $P = Z_1$, ce qui contredit la définition de δ.

D.2.2.2. Si on a (IV **) pour $(x,(u,\lambda))$, alors on a (IV **) pour $(x,(z,\lambda))$.

En effet, on a $J(X(n),f,E(n)) = (u_1^\nu) \bmod.(u_3)$ d'où $c(u,\lambda) > 0$ et $z_1 = u_1 \bmod.(u_3)$ et $J(X(n),f,E(n)) = (z_1^\nu) \bmod.(u_3)$.

On a le résultat par B.2.5.

Preuve de D.2.2.

D.2.2.2. D'après A.1.(ii)(b), il existe $\theta_{1,0} \in O_{X(n),x}$ tel que $U_1 + \bar\theta_{1,0}U_3 \in \mathrm{VDir}(G_2)$, où $\bar\theta_{1,0}$ est l'image de $\theta_{1,0}$ dans $k(x)$ et $G_2 = c\ell_x^\nu(D^{u,\lambda}_{[2]}\, g)$. Si $\bar\theta_{1,0} \neq 0$, alors $G_2 \notin k(x)[U_1]$ et donc $c'(u,\lambda) \leq 1$, par D.2.1.3.(1), $c(u,\lambda) \leq 1$. Si $\bar\theta_{1,0} \neq 0$, posons $v_1 = u_1+\theta_{1,0}\, u_3$, $v = (v_1,u_2,u_3)$, si $c(u,\lambda) > 0$, par C.12(e), on a $I(v,\lambda) \subset \{\mathcal{M}_{X(n),x}, L\}^\nu_u$ où $L(x_1,x_3) = x_1+x_3\; c(u,\lambda)^{-1}$ et donc $c'(v,\lambda) = c(v,\lambda) \geq c(u,\lambda) = c'(u,\lambda)$, si $c(u,\lambda) = 0$ on a bien sûr $c'(v,\lambda) = c(v,\lambda) \geq c(u,\lambda)$. D'autre part, on a $c\ell_x^\nu[h(x)^{-1}\, D^{u,\lambda}_{[2]}\, f] = c\ell_x^\nu[h(x)^{-1}\, D^{v,\lambda}_{[2]}\, f] = G_2$, donc nous supposons

(4) $\quad U_1 \in \mathrm{VDir}(G_2)$.

De plus, quitte à modifier u_2, si $f = u_3^{A(3)} g + R(f,u,\lambda)$, alors , on a

(4bis) $\quad c\ell_x^{r+\nu}(g) = \gamma U_1^{\nu} U_2 + \sum_{1 \leq j \leq \nu} U_1^{\nu-j} P_j(U_2,U_3)$.

D.2.2.3. Effectuons l'éclatement π centré en x et regardons le point y de paramètres $u' = (u_1 u_2^{-1}, u_2, u_3 u_2^{-1})$. Ce point y est un point de croisement pour (u,λ) (I.F.4.1.) et donc

(5) $\quad I(X',f,(u',\lambda)) = I(X(n),f,(u,\lambda))\, u_2^{-1-\nu}$.

On a donc $h(x)^{-1} u_2^{-\nu-1} DM_{[2]}^{u,\lambda} f \in I(X',f,(u',\lambda))$, ce qui implique

(6) $\quad u_2^{-\nu} D_{[2]}^{u,\lambda} g \in I(X',f,(u',\lambda))$.

Ce qui donne

(7) $\quad G_2(u_1',1,u_3') \in I(X',f,(u',\lambda)) \bmod.(u_2')$.

On en déduit que si $G_2 \notin k(x)[U_1,U_3]$, alors $\nu(y) < \nu(x) = \nu$. De plus, en posant $G' = u_2^{-1-\nu} g \bmod.(u_2')$, on a

(8) $\quad \deg_{u_1'}(G') = \nu$,

ce qui implique

(9) $\quad \alpha(y) \leq \nu$.

Remarquons que si $c(u,\lambda) > 0$ (ce qui est le cas si on a (**) pour $(x,(u,\lambda)))$, alors $g \in (u_3,u_1^{\nu})$ et $g\, u_2^{-1-\nu} \in (u_3',u_1'^{\nu})$ et donc

$\mathrm{ord}_y(g'\, O_{X',y}/(u'_2,u'_3)) = \nu$. De même, si $\delta(u,\lambda) > 1$, alors $gu_2^{-1-\nu} \in (u'_2, u_1'^{\nu})$ et $\mathrm{ord}_y\left[u_2^{-1-\nu}\, g\, O_{X',y}/(u'_2,u'_3)\right] = \nu$.

D.2.2.4. Ainsi, si $\mathrm{ord}_y\left[u_2^{-1-\nu}\, O_{X',y}/(u'_2,u'_3)\right] \neq \nu$, alors $c(u,\lambda) = 0$ et $\delta(u,\lambda) = 1$, on prend $w = u$ et on a clairement (1)(2)(3) pour $(x,(u,\lambda))$.

D.2.2.5. Regardons le cas où $\nu = \mathrm{ord}_y\left[u_2^{-1-\nu}\, g\, O_{X',y}/(u'_2,u'_3)\right]$. Par D.2.1.2., on a

$$(10) \qquad u_2^{-1-\nu}\, g = \sum u_1'^{\nu-j}\, \ell_{j,b,a}\, u_3'^{a}\, u_2'^{a+b-j-1} \ \mathrm{mod.}(u_1'^{1+\nu}) \ .$$

Posons, comme il est usuel depuis C.11

$$(11) \qquad \Delta(u_2^{-1-\nu}\, g\ ;\ u'_3,u'_2\ ;\ u'_1) = \Delta(u',\lambda).$$

Alors, (10) et D.2.1.2.(1) nous donnent

$$(12) \qquad c(u',\lambda) = c(u,\lambda).$$

Remarquons que l'on a

$u_2^{-\nu} h(x)^{-1}\, D^{u,\lambda}_{[2]}\, f = h(y)^{-1}\, D^{u,\lambda}_{[2]}\, f = \gamma\, u_1'^{\nu}$ mod. (u'_2,u'_3).

Donc $\Delta(h(y)^{-1}\, D^{u,\lambda}_{[2]}\, f\ ;\ u'_3,u'_2\ ;\ u'_1)$ est défini, notons le $\Delta_2(u',\lambda)$.

De plus, on a $h(y)^{-1}\, D^{u,\lambda}_{[2]}\, f \in I(X',f,(u',\lambda))$. Donc

$$(13) \qquad \Delta_2(u',\lambda) \subset \Delta(u',\lambda).$$

Pour tout sommet v' de $\Delta(u,\lambda)$ qui n'est pas sommet de $\Delta_2(u',\lambda)$, on a

$$in_{v'}(h(y)^{-1} D^{u,\lambda}_{[2]} f) = \gamma U_1'^{\nu} \quad \text{et} \quad in_{v'}[I(X',f,(u',\lambda))] \neq (U_1'^{\nu}).$$

Donc v' n'est pas soluble.

Si pour un sommet v' commun à $\Delta(u',\lambda)$ et $\Delta_2(u',\lambda)$, on ne peut trouver $\mu \in k^*(x)$ tel que

$$in_{v'}[h(y)^{-1} D^{u,\lambda}_{[2]} f] = \gamma(U_1' + \mu U_3'^a U_2'^b)^{\nu} ,$$

alors ce sommet v' n'est pas soluble. De plus, $v = (a,b+1-a)$ est sommet de $\Delta(h(x)^{-1} D^{u,\lambda}_{[2]} f ; u_3,u_2 ; u_1)$ (cf. [12] T.1) et si $b = \delta - 1$, alors $c\ell^{\nu}_{L,u}(h(x)^{-1} D^{u,\lambda}_{[2]} f)$ n'est pas colinéaire à une puissance ν-ième.

Donc, si on n'a pas (***) pour $(x(u,\lambda))$, pour un sommet v' commun à $\Delta(u',\lambda)$ et à $\Delta_2(u',\lambda)$, on peut trouver $\mu \in k^*(x)$ tel que

$$(14) \qquad in_{v'}[h(y)^{-1} D^{u,\lambda}_{[2]} f] = \gamma(U_1' + \mu U_3'^a U_2'^b)^{\nu} .$$

Soit alors $v' = (a,b)$ le somme d'ordonnée minimale commun à $\Delta_2(u',\lambda)$ et à $\Delta(u',\lambda)$ et tel qu'on a (14). Par [12] (T.1), $v = (a,b+1-a)$ est sommet de $\Delta_2(u,\lambda) = \Delta(h(x)^{-1} D^{u,\lambda}_{[2]} f ; u_3,u_2 ; u_1)$ et donc

$$(15) \qquad a \leq b+1 \quad \text{et} \quad in_v[h(x)^{-1} D^{u,\lambda}_{[2]} f] = \gamma(U_1^{\nu} + \mu U_3^a U_2^{b+1-a})^{\nu} .$$

De plus, soit $\Lambda'(x_2,x_3) = a_2x_2+a_3x_3$ une forme linéaire telle que $\Delta(u',\lambda) \cap \{(a,b) \mid \Lambda'(a,b) = 1\} = v'$, par [12] (T.1), on a

$$in_v(h(x)^{-1} D^{u,\lambda}_{[2]} f) = c\ell^{\nu}_{\Lambda,u}(h(x)^{-1} D^{u,\lambda}_{[2]} f) \quad \text{où}$$

$$\Lambda(x_2,x_3) = (a_2 x_2 + (a_2+a_3)x_3)(1+a_2)^{-1} .$$

On en déduit que

$$v_{\Lambda}(g) = \nu + a_2(1+a_2)^{-1} \quad \text{et}$$

$$(16) \qquad in_{\Lambda,u}(g) = \gamma U_2(U_1 + \mu U_2^{b-a+1} U_3^b)^{\nu} + P(U_1,U_2^p,U_3) .$$

Par [12] (T.1), on a $P = \sum_{1\leq j\leq \nu} c_j\, U_1^{\nu-j}\, U_2^{j(b-a+1)+1}\, U_3^{ja}$, $c_j \in k(x)$.
Posons

$$(17)\quad \begin{cases} w_1 = u_1 + \theta\, u_2^{b-c+1}\, u_3^{b} \text{ où } \theta \in O_{X(n),x} \text{ relève } \mu , \\ w = (w_1,u_2,u_3) \ , \ w' = (w_1 u_2^{-1}, u_2, u_3\, u_2^{-1}) \ . \end{cases}$$

Alors w' est un s.r.p. de $O_{X',y}$ et $\Delta(w',\lambda) \subset \Delta(u',\lambda)$ et par (16),

$$(18)\quad \mathrm{in}_{\Lambda,w}(g) = \gamma U_2 W_1^{\nu} + P(W_1 - \mu U_2^{b-a+1}\, U_3^{a},\, U_2^{p}, U_3) \ .$$

je dis que soit v' n'est sommet ni de $\Delta(w',\lambda)$ ni de $\Delta_2(w',\lambda)$, soit on n'a pas (14) en pour $(v',(w',\lambda))$. Si $P = 0$, par (18), on a que v' n'est sommet ni de $\Delta(w',\lambda)$ ni de $\Delta_2(w',\lambda)$.

Si $P \neq 0$, posons $P = \sum_{1\leq j\leq\nu} c_j\, U_1^{\nu-j}\, U_2^{j(b-a+1)+1}\, U_3^{b}$ $= \sum c_j'\, W_1^{\nu-j}\, W_2^{j(b-a+1)+1}\, W_3^{b}$, soit $j_o = \inf\{j \mid c_j \neq 0\}$, on a $j_o \neq 0(p)$ puisque $j_o(b-a+1)+1 = 0(p)$ et comme $\nu = 0(p)$, $c_{j_o} = c'_{j_o}$, $\mathrm{in}_{v'}(h(y)^{-1} D^{w',\lambda}_{[2]} f)$ n'est pas une puissance ν-ième et donc on n'a pas (14) en v'.

Si on n'a pas (3) pour (w,λ) alors on applique à $((w,\lambda),f,\Delta(w',\lambda))$ la transformation précédente. On construit ainsi une série $z_1 = u_1 + \sum \theta_{i,d'-c'+1}\, u_3^{c'}\, u_2^{d'-c'+1}$, $(c'd') \in \Delta(u',\lambda)$. Si cette somme est finie, cela signifie que l'on fait un nombre fini de dissolutions et donc qu'on a (1)(2)(3) pour (z,λ) et que $x' = y$. Si cette somme est infinie, comme les (c',d') sont tous distincts (cf (18)) et que $d'-c'+1 \geqslant 0$, les exposants c' tendent vers l'infini et donc z_1 converge formellement, de plus, $\Delta(z',\lambda)$ est préparé et on n'a pas (14) en tout sommet commun à $\Delta(z',\lambda)$ et à $\Delta_2(z',\lambda)$ où $z = (z_1 z_2^{-1}, z_2, z_3 z_2^{-1})$ car comme $c' \longrightarrow +\infty$, tous les sommets où on a (14) ont été dissouts. Donc si la somme est infinie on a (1)(2)(3) pour (z,λ) et $x' = y$.

D.2.2.6. On remarque que D.2.2.(2) implique que $Z_1 \in \mathrm{VDir}(x)$.

REMARQUE D.2.3.

Supposons qu'en plus des hypothèses de D.2.1., on a

(1) $\alpha[V(u_1,u_2)] = 1 + \nu(x) = 1 + \nu$.

Alors dans D.2.2., en plus des conditions (1), (2) et (3), on a

(2) $z_1 \in (u_1,u_2)$, $V(z_1,z_2) = V(u_1,u_2)$.

En effet, si on doit modifier u_1, comme par D.2.2.5 (15), $v' = (c',d')$ est sommet de $\Delta_2(u',\lambda)$, le point $v = (c',d'-c'+1)$ est sommet de $\Delta_2(u,\lambda)$.

Or, puisque $\alpha[V(u_1,u_2)] = 1+\nu$ et que $\nu(x) = \nu$, on a $\nu[V(u_1,u_2)] = \nu$ et donc

(3) $h(x)^{-1}\ D^{u,\lambda}_{[2]}\ f \in (u_1,u_2)^{\nu}$.

Ainsi, tous les sommets de $\Delta_2(u,\lambda)$ sont d'ordonnée ≥ 1 et $d'-c'+1 \geq 1$. Par D.2.2.5.(17), on a $w_1 \in (u_1,u_2)$, ce qui donne $z_1 \in (u_1,u_2)$, d'où le résultat.

REMARQUE D.2.4.

Si on a (***) pour $(x,(u,\lambda))$, on a (***) pour $(x,(v,\lambda))$ où $v_2 = \gamma u_2$ avec γ inversible.

En effet, posons $u' = (u_1u_2^{-1},u_2,u_3u_2^{-1})$ et $v' = (v_1v_2^{-1},v_2,v_3v_2^{-1})$, $T = O_{X',x'}/(u_2',u_3') = O_{X',x'}/(v_2',v_3')$. On a $f = u_2'^{A(3)+1+}\ v_3'^{A(3)}\ g_2 = R(f,v',\lambda)$, $f = v_2'^{A(3)+1+}\ v_3'^{A(3)}\ g_2 = R(f,v',\lambda)$. On a $\mathrm{ord}_{x'}(g_1T) = \mathrm{ord}_{x'}(g_2T)$ et par D.1.1.4, si $\Delta(g_1 \,; u'_3, u'_2 \,;\, u'_1)$ est préparé alors $\Delta(g_2 \,; v'_3, v'_2 \,;\, v'_1)$ est préparé et $\Delta(g_1 \,, u'_3, u'_2 \,;\, u'_1) = \Delta(g_2 \,;\, v'_3, v'_2 \,;\, v'_1)$. De plus, on vérifie que

$$c\ell^{\nu}_{L,u}(h(x)^{-1}\, D^{u,\lambda}_{[2]}\, f) = \mu\, c\ell^{\nu}_{L,v}(h(x)^{-1}\, D^{v,\lambda}_{[2]}\, f)$$

où $\mu \in k(x)^*$ et $L(x_1,x_2,x_3) = x_1 + (x_2+x_3)\,\delta^{-1}$.

On a donc D.2.2. (2)(3) pour $(x,(v,\lambda))$ et donc (***) pour $(x,(v,\lambda))$.

REMARQUE D.2.5.

Sous les hypothèses de D.2.4., on a

$$c\ell^{\nu+1}_{L,u}\,[h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[i]}\, f] = \mu(i)\, c\ell^{\nu+1}_{L,v}\,[h(x)^{-1}\, DM^{v,\lambda}_{[i]}\, f] \;,$$

$$\mu(i) \in k(x)^* \quad , \; 1 \leq i \leq s .$$

NOTATION, RAPPEL, PROPOSITION D.2.6.

Soit x un point fermé maigre à D.Q. de $\mathrm{Sing}(X(n))$ tel que $\lambda(x) = 1+\nu'(x)$ et soit (u,λ) une p-base de $O_{X(n),x}$ telle qu'on a (***) pour $(x,(u,\lambda))$. On pose

$$\begin{cases} f = u_3^{A(3)} g + R(f,u,\lambda) \in \hat{O}_{X(n),x} = k(x)\,[[u_1,u_2,u_3]] . \\ g = u_1^{\nu}(\gamma u_2 + \varepsilon u_3) + \displaystyle\sum_{1\leq j\leq \nu,\, 0\leq a,\, 0\leq b} \ell_{j,b,a}\, u_1^{\nu-j}\, u_2^{b}\, u_3^{a} \bmod.(u_1^{1+\nu}) \;, \end{cases}$$

$$c(u,\lambda) = \inf\{aj^{-1} \;;\; \ell_{j,b,a} \neq 0\},$$

$$\beta(u,\lambda) = \inf\{bj^{-1} \;;\; \ell_{j,b,a} \neq 0 \text{ et } a = jc(u,\lambda)\},$$

$$\beta''(u,\lambda) = \inf\{(b-1)j^{-1} \;;\; \ell_{j,b,a} \neq 0 \text{ et } a = jc(u,\lambda)\},$$

$$\beta'(u,\lambda) = \inf\{\beta(u,\lambda), \{\inf\, (b-1)j^{-1} \;;\; \ell_{j,b,a} \neq 0,\ a = jc(u,\lambda) \neq 0(p)\}\}.$$

On a

(i) $\lfloor \beta''(u,\lambda)\rfloor \leq \beta''(u,\lambda) \leq \beta'(u,\lambda) \leq \beta(u,\lambda) \leq 1 + \lfloor \beta''(u,\lambda)\rfloor$,

(ii) $(c(u,\lambda),\, \beta'(u,\lambda))$ est le sommet d'abscisse minimale de $\Delta'(u,\lambda)$ (C.10).

DEFINITION D.2.7.

Soit x un point fermé maigre à D.Q. de $\mathrm{Sing}(X(n))$ avec $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$ et tel qu'on a (***) pour $(x,(u,\lambda))$ où (u,λ) est une p-base de $O_{X(n),x}$. On pose

$$\beta''(x) = \inf\{\beta''(u,\lambda) \ ; \text{ on a } (***) \text{ pour } (x,(u,\lambda))\} ,$$

(1) $\varepsilon(x) = 0{,}75 + \lfloor\beta''(x)\rfloor$ si $\beta''(x) < \lfloor\beta''(x)\rfloor + 1/2$ ou $[\beta''(u) = \lfloor\beta''(x)\rfloor + 1/2$ et pour une p-base (u,λ) telle qu'on a (***) pour $(x(u,\lambda))$ on a $\beta''(u,\lambda) = (b-1)j^{-1} = \beta''(x)$ avec $\varepsilon_{j,b,a} \neq 0$, $a = jc(u,\lambda)$, $b \neq 0(p)$ ou $j \neq 0(p)$ et $\nu \neq 2]$,

(2) $\varepsilon(x) = 1{,}5 + \lfloor\beta''(x)\rfloor$ si $\beta''(x) \geqslant 1 + \lfloor\beta''(x)\rfloor - \nu^{-1}$,

(3) $\varepsilon(x) = 1 + \lfloor\beta''(x)\rfloor$ sinon.

EXEMPLE D.2.7.1.

Voyons le cas où on a

$$(1)\quad \begin{cases} J(X(n),f,E(n),\{x\}) \neq \mathfrak{M}_{X(n),x}\, u_1^{\nu} \bmod.\mathfrak{M}_{X(n),x}^{2+\nu} , \\ \mathrm{VDir}(x) = \langle U_1\rangle \text{ et } (**) \text{ pour } (x,(u_1,u_3)). \end{cases}$$

C'est le cas étudié en B.4.6. (ii) et nous avons vu que si on effectue l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ et si au-dessus de x il existe un point x' avec $\kappa(x') = 2$, on a pour toute p-base (u,λ) telle qu'on a (***) pour $(x,(u,\lambda))$, avec les notations de D.2.6.

$$(2)\quad \begin{cases} G = c\ell_x^{1+\nu}(g) = \gamma U_2 U_1^{\nu} + U_3 \displaystyle\sum_{0\leqslant q\leqslant \nu p^{-1}} \gamma_q U_1^{\nu-qp} (U_2+\varepsilon U_3)^{qp} , \\ \gamma_\nu \neq 0 . \end{cases}$$

Par (**), on a $J(X(n),f,E(n)) = (u_1^{\nu}) \bmod.(u_3)$. On a clairement $c(u,\lambda) = \nu^{-1}$, $\beta''(u,\lambda) = 1 - \nu^{-1}$ et donc $\varepsilon(x) = 1{,}5$.

REMARQUE D.2.7.2.

Dans le cas où $\varepsilon(x) = 0{,}75 + \lfloor\beta''(x)\rfloor$ et $\beta''(x) = \lfloor\beta''(x)\rfloor + 1/2$, on a mis l'hypothèse $\nu \neq 2$ pour que les cas (1) et (2) soient exclusifs.

REMARQUE D.2.7.3.

Si on a (***) pour $(x,(z,\lambda))$ et si, avec les notations de D.2.2., on a $\mathrm{ord}_{x'}(g'T) = \nu$, alors le sommet d'abscisse minimale de $\Delta(g' \,;\, z_3',z_2' \,;\, z_1')$ est $(\beta''(z,\lambda) + c(z,\lambda)-1,\ \delta(z,\lambda)-1)$.

Il suffit de le lire sur le développement de g' (cf. D.2.2.5. (10)).

REMARQUE D.2.7.4.

Si on a (***) pour $(x,(z,\lambda))$, on a (***) pour $(x,(\theta,\lambda))$ où $\theta = (z_1, Az_2, z_3)$ avec A inversible. Si $\delta(z,\lambda) > 1$, on a $\beta''(\theta,\lambda) = \beta''(z,\lambda)$, $c(\theta,\lambda) = c(z,\lambda)$.

Preuve.

C'est un corollaire de D.2.4., D.2.5. et D.2.7.3.

PROPOSITION D.2.7.5.

Soit x un point fermé maigre de $\mathrm{Sing}(X(n))$, x à D.Q. et soit (u,λ) une p-base de $\mathcal{O}_{X(n),x}$ telle qu'on a (IV **) et (***) pour $(x,(u,\lambda))$. Soit L' la forme linéaire définie par $L(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_3 c(u,\lambda)^{-1}$. On suppose que $m(x) = 1$ et

(1) $\quad \mathrm{cl}^{\nu}_{L',u}\left[h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[1]}\, f\right] = 0.$

(i) On a

(2) $\quad \beta(u,\lambda) < 1 + \lfloor\beta'(u,\lambda)\rfloor$

$$(3)\quad \begin{cases} \varepsilon(x) \leq 0{,}5 + \lfloor \beta'(u,\lambda) \rfloor & \text{si} \quad \alpha(x) = \nu(x), \\ \varepsilon(x) \leq 1 + \lfloor \beta'(u,\lambda) \rfloor & \text{si} \quad \alpha(x) = 1 + \nu(x) . \end{cases}$$

(ii) Si $\beta'(u,\lambda) \leq \lfloor \beta'(u,\lambda) \rfloor + 0{,}5$, on a

(4) $\quad \varepsilon(x) \leq \lfloor \beta'(u,\lambda) \rfloor + 0{,}75.$

Preuve.

Remarquons que nous pouvons avoir $\alpha(x) = \nu(x)$ ou $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$. La relation (1) implique que pour tout $\ell_{j,b,a} \neq 0$ avec $1 \leq j \leq \nu$ et $a = jc(u,\lambda)$, on a $j = 0(p)$ (cf. D.2.1.2. et D.1.1.5).

Prouvons (i) . Soit $\beta(u,\lambda) = \beta'(u,\lambda)$ et (2) est clair, soit pour un (j,b,a), on a $\beta'(u,\lambda) = (b-1)j^{-1}$, $\ell_{j,b,a} \neq 0$, $b \neq 0(p)$ et $a = jc(u,\lambda)$ (D.1.1.5 et D.2.6). Alors $b-1 \leq j(1+\lfloor \beta' \rfloor)-1$ et $b \leq j(1+\lfloor \beta' \rfloor)$ et $b \neq 0(p)$, par (1), $j = 0(p)$, d'où $b \leq j(1+\lfloor \beta' \rfloor)-1$ et $\beta(u,\lambda) \leq bj^{-1} \leq 1+\lfloor \beta' \rfloor - j^{-1} < 1+\lfloor \beta' \rfloor$. On a prouvé (2) qui entraîne (3) et (4) si $\alpha(x) = \nu(x)$.

Désormais, nous n'avons plus qu'à regarder le cas où $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$. On a $\beta''(u,\lambda) \leq (b-1)j^{-1} \leq 1 + \lfloor \beta' \rfloor - j^{-1}$. Donc $\beta''(u,\lambda) < 1 + \lfloor \beta' \rfloor - \nu^{-1}$, par D.2.7., on a $\varepsilon(x) \leq 1 + \lfloor \beta' \rfloor$ prouvé (3).

Prouvons (ii). On a $\beta''(u,\lambda) \leq \beta'(u,\lambda)$. Si $\beta''(u,\lambda) < \lfloor \beta' \rfloor + 0{,}5$, (4) est clair. Sinon, on a $\beta''(u,\lambda) = \beta'(u,\lambda) = \lfloor \beta' \rfloor + 0{,}5 = (b-1)j^{-1}$, si $\nu \neq 2$, on a D.2.7. (1) pour $(x,(u,\lambda))$ et $\varepsilon(x) \leq 0{,}75 + \lfloor \beta' \rfloor$. Si $\nu = 2$, on a $\beta''(u,\lambda) \leq 1 + \lfloor \beta' \rfloor - 2j^{-1}$ avec $1 \leq j \leq 2$. Donc $\beta''(u,\lambda) \leq \lfloor \beta' \rfloor$ et (4) est clair.

PROPOSITION D.2.8.

Soit x un point fermé maigre à D.Q. de $\mathrm{Sing}(X(n))$ et soit une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ tels qu'on a (***) pour $(x,(u,\lambda))$ et

(1) $\quad c(u,\lambda) \geq 1.$

Alors

(i) $V(u_1,u_3)$ est permis en x,

(ii) si $E(n) = \mathrm{div}(u_3)$ et $c(u,\lambda) > 1$, alors l'algorithme du point bon impose d'effectuer l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en $V(u_1,u_3)$,

(iii) si on effectue π, il y a au plus un point $x' \in X'$ qui est ν-proche de x, c'est le point de paramètres $u' = (u_1u_3^{-1},u_2,u_3)$ et si $\nu(x') = \nu(x)$ et $(\alpha(x) = \nu(x)$ ou $c(u,\lambda) > 1)$, on a $\tau(x') \leq 2$ et si $\tau(x') = 2$, on a (***) pour $(x',(u',\lambda))$ et $\beta(u',\lambda) = \beta(u,\lambda)$ et $c(u',\lambda) = c(u,\lambda) - 1$, $\varepsilon(x') \leq \varepsilon(x)$; si $\alpha(x) = 1+\nu(x)$ et $c(u,\lambda) > 1$ et $\tau(x') = 2$, on a $\alpha(x') = 1+\nu(x')$ et $\beta''(u,\lambda) = \beta''(u',\lambda)$,

(iv) si $\tau(x) = 2$ et $[c(u,\lambda)] + \beta(u,\lambda) < 1$, alors x est bon,

(v) si $\tau(x) = 2$ et $m(x) = 1$ et $c(u,\lambda) \in \mathbb{N}$ et $[(\alpha(x) = \nu(x)$ et $\beta(u,\lambda) \leq 1)$ ou $(\alpha(x) = 1+\nu(x)$ et $\beta''(u,\lambda) < 1-\nu^{-1})]$, alors x est bon.

Preuve.

D.2.8.1. On remarque qu'on ne fait pas d'hypothèse sur la valeur de $\alpha(x)$.

D.2.8.2. Puisque $c(u,\lambda) \geq 1$, on a $\alpha[V(u_1,u_3)] = \nu \geq 2$, et donc $V(u_1,u_3)$ est permis en x. Ce qui prouve (i). De plus, on a

(2) $\qquad V(u_1,u_3) = \mathrm{Sing}(X(n)) \cap \mathrm{div}(u_3)$.

Si $c(u,\lambda) > 1$, alors, puisque $\nu = O(p)$, on a $J(X(n),f,E(n)) \subset (u_1,u_3)^{\nu}$ et donc on a alors $V(u_1,u_3) = \mathrm{Sing}_{\nu}(X(n)) \cap \mathrm{div}(u_3)$, si $E(n) = \mathrm{div}(u_3)$, l'éclatement π est imposé par l'algorithme du point bon. Ce qui prouve (ii).

D.2.8.3. Effectuons π. Bien sûr, puisque par (***), on a $U_1 \in \mathrm{VDir}(x)$, le point x' est le seul point de X' qui peut être ν-proche de x.

Si $\alpha(x) = \nu(x)$, on a $I(X',f,(u',\lambda)) = u_3^{-\nu} I(X(n),f,(u,\lambda))$, par [12] (T.3), $I(X',f,(u',\lambda))$ est préparé, x' est clairement à D.Q., (iii) est clair.

Si $\alpha(x) = 1+\nu(x)$, on a $I(X',f,(u',\lambda)) = u_3^{-\nu} I(X(n),f,(u,\lambda))$. Si $c(u,\lambda) > 1$, alors on a $I(X',f,(u',\lambda)) = u_2' u_1'^{\nu} \bmod.(u_3')$ et donc

$$(3)\quad f = h(x')(u_3' g + \gamma u_2' u_1'^{\nu}) + R(f,u',\lambda),\ \gamma \in O^*_{X',x'}\ ,\quad E' = \operatorname{div}(u_3')\ ,$$

par III 2.1), si $\tau(x') \geqslant 2$, alors $\alpha(x') = 1+\nu(x')$.

Si $\alpha(x') = \nu(x') + 1$, et alors effectuons l'éclatement $\pi' : X'' \longrightarrow X'$ centré en x' et soit $y' \in X''$ le point de paramètres $v' = (u_1' u_2'^{-1}, u_2', u_3' u_2'^{-1})$. Soit $\pi'' : X''' \longrightarrow X$ centré en x et soit y le point de paramètres $w = (u_1 u_2^{-1}, u_2, u_3, u_2^{-1})$.

Par (3), on a $I(X'',f,(v',\lambda)) = (v_1'^{\nu}) \bmod.(v_3')$ et $I(X'',f,(w,\lambda)) = (w_1^{\nu}) \bmod.(w_3)$. De plus, $\Delta(w,\lambda)$ est égal à $T[\Delta(v',\lambda)]$ où T est la translation de vecteur $(1,1)$. De même, $\Delta_2(w,\lambda) = T[\Delta_2(v',\lambda)]$. Pour tout sommet s commun à $\Delta_2(w,\lambda)$ et $\Delta(w,\lambda)$, on pose

$$in_s[h(y')^{-1} D^{u',\lambda}_{[2]} f] = \sum_{1 \leq j \leq \nu} \gamma_j\, v_1'^{\nu-j}\, v_2'^{s(2)}\, v_3'^{s(3)}\ ,\quad \gamma_j \in k(x),$$

on a

$$in_{T(s)}[h(y)^{-1} D^{u,\lambda}_{[2]} f] = \sum_{1 \leq j \leq \nu} \gamma_j\, w_1^{\nu-j}\, v_2'^{s(2)+j}\, v_3'^{s(3)+j}\ ,$$

et de même, si

$$in_s[I(X'',f,(u,\lambda))] = (\sum \gamma_{i,j}\, v_1'^{\nu-j}\, v_2'^{s(2)}\, v_3'^{s(3)})\ ,$$

on a

$$in_{T(s)}[I(X''',f,(u',\lambda))] = (\sum \gamma_{i,j}\, w_1^{\nu-j}\, w_2^{s(2)+j}\, w_3^{s(3)+j})\ .$$

On en déduit qu'on a D.2.2.(3) pour $(x',(u',\lambda))$. Donc, on a $G_2' = c\ell^{\nu}_{x'}(h(x')^{-1} D^{u',\lambda}_{[2]}) = \gamma U_1'^{\nu}$ ou bien $c\ell^{\nu}_{x}(h(x')^{-1} D^{u',\lambda}_{[2]} f) = \gamma U_1'^{\nu} + U_3\, P(U_1,U_2,U_3)$ avec P convenable et G_2'

n'est pas colinéaire à une puissance p-ème. Par I.E.1.5.1.6., $U_1' \in \mathrm{VDir}(G_2')$, donc on a D.2.2.(2) et (***) pour $(x',(u',\lambda))$. La fin de la preuve de (iii) est claire.

D.2.8.4. Si on a $c(u,\lambda) = 1$ et $\beta(u,\lambda) < 1$, on a $\alpha(x') < \nu$ et donc $\mathrm{Sing}_\nu(X(n)) \subset V(u_1,u_3)$ et par (2), π est imposé par l'algorithme du point bon et donc $\kappa(x) \leq 1$. Par récurrence sur $\lfloor c(u,\lambda) \rfloor$, on déduit (iv) de (iii).

D.2.8.5. Prouvons (v). Par (iv), nous n'avons qu'à regarder le cas où $\beta(u,\lambda) = 1$. Une récurrence nous ramène au cas où $c(u,\lambda) = 1$. Appliquons l'algorithme du point bon, par (ii), nous effectuons donc l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en $V(u_1,u_3)$.

Si $\alpha(x) = \nu$, on a $\alpha(x') = \nu$ et $\beta(u',\lambda) = 1$, $c(u',\lambda) = 0$. On a donc $\delta(u',\lambda) = 1$ et comme $\Delta(u',\lambda)$ est préparé, on a $v(x') \geq 2$ et si $v(x') = 2$ alors $\mathrm{VDir}(x')$ est transverse à E' et donc par B.4.2, on a $\kappa(x') \leq 1$ et x est bon. Voyons le cas où $\alpha(x) = \nu+1$, on a $\beta''(u,\lambda) < 1-\nu^{-1}$ par hypothèse (D.2.7), donc pour un i, $1 \leq i \leq s$, on a

$$\begin{cases} c^{\nu}_{L,u}(h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[i]}\, f) = \displaystyle\sum_{1 \leq j \leq \nu-1} U_1^{\nu-j}\, \ell_{j,b,c(j)}\, u_2^j\, U_3^j \\ \ell_{j,b,c(j)} \text{ inversible ou nul, } c(j)-1 < j-j\nu^{-1}. \end{cases}$$

où L est donnée par $L(x_1,x_2,x_3) = x_1+x_3c(u,\lambda)^{-1} = x_1+x_3$. On en déduit qu'on a pour $1 \leq i \leq s$

$$\begin{cases} h(x')^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[i]}\, f = \displaystyle\sum_{1 \leq j \leq \nu-1} u_1'^{\,\nu-j}\, \ell_{j,b,c(j)}\, u_2'^{\,c(j)} \\ \mathrm{mod.}(u_1'^{\,\nu-j}\, u_2'^{\,c(j)+1}\, ,\, u_3'), \end{cases}$$

et donc $\alpha(x') \leq \nu(x')$ et si $\nu(x') = \nu$, on a pour un $j < \nu$, $c(j) = j$, $\ell_{j,b,c(j)} \neq 0$, d'où $\langle U_1',U_2' \rangle = \mathrm{VDir}(x')\ \mathrm{mod.}(U_3')$ et donc par B.4.2., on a $\kappa(x') \leq 1$. Donc x est bon.

PROPOSITION D.2.9.

Soit x un point fermé maigre de $\mathrm{Sing}(X(n))$ tel que $\alpha(x) = 1+\nu(x)$. Soit (u,λ) une p-base de $\hat{O}_{X(n),x}$ pour laquelle, en posant $\nu = \nu(x)$, on a :

(1) $\alpha[V(u_1,u_2)] = 1+\nu(x) = 1+\nu$,

(2) $$\begin{cases} f = u_3^{A(3)} g + R(f,u,\lambda) \in \hat{O}_{X(n),x} = k[[u_1,u_2,u_3]] , \\ h = u_3^{A(3)} , \ \mathrm{div}(u_3) = E(n), \\ g = u_2 u_1^{\nu} + \sum_{1\leq j\leq \nu, 0\leq a, 0\leq b} \ell_{j,b,a} u_1^{\nu-j} u_2^b u_3^a , \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} \text{il existe } (\delta,d) \in \mathbb{R}_+^2 \text{ tel que} \\ \ell_{j,b,a} = 0 \text{ si } b-1 < jd \text{ ou } a < j\delta , \end{cases}$$

(4) pour un j, $1 \leq j \leq \nu$, $\ell_{j,j\delta,jd+1} \neq 0$,

(5) $$\begin{cases} u_3^{A(3)} \left[u_2 u_1^{\nu} + \sum_{1\leq j\leq \nu} \ell_{j,j\delta,jd+1} u_1^{\nu-j} u_2^{jd+1} u_3^{j\delta}\right] \\ \text{n'est pas colinéaire à une puissance } \nu\text{-ème, module } \hat{O}^p_{X(n),x} . \end{cases}$$

Alors

(i) si $\delta \in \mathbb{N}$, on a $\kappa(x) = 1$,

(ii) si $\kappa(x) = 2$, x est bon .

Preuve.

On remarque qu'on ne suppose pas que x est à D.Q.

L'hypothèse $\alpha[V(u_1,u_2)] = 1+\nu$ implique que

(6) $V(u_1,u_2) \subset \mathrm{Sing}_{\nu}(X(n))$ et $V(u_1,u_2)$ est permise en x.

Effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en $V(u_1,u_2)$.

Par (5), il y a au plus un point ν-proche de x, c'est le point $x' \in X'$ de paramètres $u' = (u_1 u_2^{-1}, u_2, u_3)$.

Si $\nu(x') < \nu$ alors on a $\kappa(x) = 1$.

Si $\nu(x') \geq \nu$, on vérifie que

$$(7) \quad \begin{cases} \alpha(x') = \nu(x'),\ I(X',f,(u',\lambda)) = (u_1'^{\nu}) \bmod .(u_2',u_3') , \\ \Delta[I(X',f,(u',\lambda))\ ;\ u_3',u_2';u_1'] = (\gamma,d-1)+\mathbb{R}_+^2 . \end{cases}$$

De plus, par (5), on a

$$(8) \qquad \Delta[I(X',f,(u',\lambda))\ ;\ u_3',u_2'\ ;\ u_1'] \quad \text{est préparé.}$$

Par IV.C.5., si $\lfloor \gamma \rfloor + \lfloor d \rfloor < 1$, alors $\kappa(x') \leq 1$, en particulier si $\gamma = 0$, on a $\kappa(x') \leq 1$. Par IV.C.5, si $\kappa(x') = 2$ alors x' est bon. Donc, si π est imposé par l'algorithme du point bon, on a prouvé la proposition. Si π n'est pas imposé, c'est que

$$V(u_1,u_2) \subsetneq \mathrm{Sing}_\nu(X(n)).$$

Par IV.C.5. appliqué à $(x',(u',\lambda))$, on a

$$\mathrm{Sing}_\nu(X') \subset V(u_1',u_2') \cup V(u_1',u_3') .$$

Donc on a

$$(9) \qquad \mathrm{Sing}_\nu(X(n)) = V(u_1,u_2) \cup V(u_1,u_3) .$$

Donc on a $\gamma \geq 1$ et l'algorithme du point bon impose d'effectuer l'éclatement $\pi' : X'' \longrightarrow X(n)$ centré en $V(u_1,u_3)$. Par (5), et puisque $V(u_1,u_2) \subset \mathrm{Sing}\ (X(n))$, il y a un seul point ν-proche de x, c'est le point x'' de paramètres $u'' = (u_1 u_3^{-1}, u_2, u_3)$. On vérifie que $(x'',(u'',\lambda))$ et $(\gamma-1,d)$ satisfont à nos hypothèses. On a (i) par récurrence sur γ. Si $\kappa(x) = 2$ Alors $\gamma \notin \mathbb{N}$ et donc $\gamma-1 > 0$ et donc $I(X'',f,(u'',\lambda)) = (u_1''^{\nu} u_2'') \bmod .(u_3'')$. On a donc $\kappa(x'') \leq 2$ et on a (ii) par récurrence sur γ .

THEOREME D.3.

Soit x un point fermé maigre à D.Q. de $\mathrm{Sing}(X(n))$. On suppose que $\tau(x) = 2$ et qu'il existe une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x}$ telle qu'on a (**) et (***) pour $(x,(u,\lambda))$.

Effectuons l'éclatement $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ centré en x. On suppose qu'il existe un point fermé $x' \in X'$ qui est (ν,τ)-proche de x. Effectuons l'éclatement $\pi : X'' \longrightarrow X'$ l'éclatement centré en x', on suppose qu'il existe un point fermé $x'' \in X''$ qui est (ν,τ)-proche de x'.

(i) On a au moins une des assertions suivantes

(1) x est bon,

(2) $\varepsilon(x) < 1$,

(3) x'' est bon,

(4) $\varepsilon(x') < 1$,

(5) x' est bon,

(6) $\varepsilon(x'') < 1$,

(7) $\varepsilon(x') \leq \varepsilon(x)$,

(8) $\varepsilon(x'') < \varepsilon(x)$.

(ii) Si $m(x') = 1$, on a (1) ou (2) ou (3) ou (4) ou (7).

(iii) Si $d = [k(x') : k(x)] \geq 2$, on a (1) ou (2) ou (3) ou (4) ou

(9) $\varepsilon(x') < \varepsilon(x)$.

(iv) Si $m(x) = 1$ et $m(x') = 2$, on a (1) ou (2) ou (4) ou (8) ou (9).

(v) Si $m(x) = m(x') = 2$, on a (7).

D.3.1. Nous montrerons plus tard que si on a $\tau(x) = 2$ et $m(x) = 1$ et $[\varepsilon(x) < 0{,}75$ ou $(\varepsilon(x) = 0{,}75$ et $\alpha(x) = 1+\nu(x))]$, alors x est bon.

D.3.2. La démonstration de D.3. étant fort longue, nous l'avons découpée en plusieurs lemmes où on supposera seulement que x est à D.Q.

D.3.3. Remarquons que **dans le cas** où $m(x) = 0$, D.3 est clair car on a $\mathcal{E}(x) = +\infty > \mathcal{E}(x')$. On suppose désormais que $m(x) \geq 1$.

NOTATION D.4.1.

Soit x un point fermé à D.Q. de $X(n)$ et soit (u,λ) une p-base de $\hat{O}_{X(n),x}$ telle qu'on a (**) et (***) pour $(x,(u,\lambda))$. On pose

$$(1) \quad \begin{cases} f = h(x)g + R(f,u,\lambda) , \\ f_i = h(x)^{-1} \, DM^{u,\lambda}_{[i]} f \; , \; 1 \leq i \leq s. \end{cases}$$

Si $\alpha(x) = \nu(x) = \nu$, on pose

$$(2) \quad \begin{cases} F = cl^{\nu}_{L,u}(g) = \gamma U_1^{\nu} + \sum\limits_{1 \leq j \leq \nu} U_1^{\nu-j} \, U_2^{d(j)} \, U_3^{c(j)} \, \phi_j(U_2,U_3) , \\ F_i = cl^{\nu}_{L,u}(f_i) = \gamma_i \, U_1^{\nu} + \sum\limits_{1 \leq j \leq \nu} U_1^{\nu-j} \, U_2^{d(i,j)} \, U_3^{c(i,j)} \, \Phi_{i,j}(U_2,U_3), \end{cases}$$

où L est donnée par $L(x_1,x_2,x_3) = x_1 + (x_2+x_3)\,\delta(u,\lambda)^{-1}$, les $\Phi_{i,j}$ et les ϕ_j sont des polynômes homogènes de $k(x)[U_2,U_3]$ nuls ou divisibles ni par U_2 , ni par U_3 et de degrés

$$(3) \quad \begin{cases} j\delta(u,\lambda)-d(i,j)-c(i,j) = \deg \Phi_{i,j} \; , \; 1 \leq j \leq \nu \; , \; 1 \leq i \leq s \; , \\ j\delta(u,\lambda)-d(j)-c(j) = \deg \phi_j \; , \; 1 \leq j \leq \nu \; . \end{cases}$$

Bien sûr, on a pour $1 \leq j \leq \nu$ et $1 \leq i \leq s$

$$(4) \quad d(j) \leq d(i,j), \; c(j) \leq c(i,j).$$

Si $\alpha(x) = 1+\nu(x) = 1+\nu$, on pose

$$(5) \quad \begin{cases} F = cl^{\nu+\varepsilon^{-1}}_{L,u}(g) = U_1^{\nu}(\gamma U_2+\varepsilon U_3) + \sum\limits_{1 \leq j \leq \nu} U_1^{\nu-j} U_2^{d(j)} U_3^{c(j)} \, \phi_j(U_2,U_3) , \\ F_i = cl^{\nu+\varepsilon^{-1}}_{L,u}(f_i) = U_1^{\nu}(\gamma_i U_2+\varepsilon_i U_3) + \sum\limits_{1 \leq j \leq \nu} U_1^{\nu-j} U_2^{d(i,j)} U_3^{c(i,j)} \, \phi_{i,j}(U_2,U_3) , \end{cases}$$

où L est donnée par $L(x_1,x_2,x_3) = x_1+(x_2+x_3)\delta(u,\lambda)^{-1}$, $\delta = \delta(u,\lambda)$, les $\phi_{i,j}$ et les ϕ_j sont des polynômes homogènes de $k(x)[U_2,U_3]$, nuls ou divisibles ni par U_2 ni par U_3 et de degrés

$$(6)\quad \begin{cases} j\delta(u,\lambda)+1-d(i,j)-c(i,j) = \deg \phi_{i,j} \ , \ 1\leq j\leq \nu, \ 1\leq i\leq s \ , \\ j\delta(u,\lambda)+1-d(j)-c(j) = \deg \phi_j \ , \ 1\leq j\leq \nu \ . \end{cases}$$

Bien sûr, on a pour $1\leq j\leq \nu$ et $1\leq i\leq s$

$$(7)\qquad d(j)\leq d(i,j) \ , \ c(j)\leq c(i,j) \ .$$

D.4.2. Remarquons que si $\alpha(x) = 1+\nu(x)$, pour tout j , $1\leq j\leq \nu$ tel que $\phi_j \neq 0$, on a

$$(1)\qquad \deg \phi_j + d(j)-1 \leq j\,\beta''(u,\lambda).$$

En effet, avec les notations de D.2.1.2., il existe j',b',a' avec $\ell_{j',b',a'} \neq 0$ et $a'j'^{-1} = c(u,\lambda)$ et $b'j'^{-1}-j'^{-1} = \beta''(u,\lambda)$.
On a $c(j) \geq jc(u,\lambda)$. On a $\beta''(u,\lambda)+c(u,\lambda) \geq \delta(u,\lambda)$ d'où $\delta(u,\lambda)-c(j)j^{-1} \leq \delta(u,\lambda)-c(u,\lambda) \leq \beta''(u,\lambda)$, ce qui avec D.4.1(6) donne (1).

D.4.3. Dans le cas où $\alpha(x) = 1+\nu(x)$, remarquonsque nous avons l'équivalence $\beta''(u,\lambda) < 1+[\beta''(u,\lambda)]-\nu^{-1} \iff [\beta(u,\lambda) < 1+[\beta''(u,\lambda)]$ ou $\beta(u,\lambda) = 1+[\beta''(u,\lambda)]$ et il existe (j,b,a) avec $\ell_{j,b,a} \neq 0$, $aj^{-1} = c(u,\lambda)$, $bj^{-1} = \beta(u,\lambda)$, $(b-1)j^{-1} = \beta''(u,\lambda)$ et $j<\nu]$.

D.4.4. Prenons les notations et hypothèses suivantes. Le point x est un point fermé maigre à D.Q. de $\mathrm{Sing}(X(n))$. On a (**) en x. De plus (u,λ) est une p-base de $\hat{O}_{X(n),x}$ et on a (***) pour $(x,(u,\lambda))$, cf. C.8 et D.2.2. Enfin, $\pi: X' \longrightarrow X(n)$ est l'éclatement de $X(n)$

centré en x. Le point x' est un point fermé de X' qui est ν-proche de x avec $m(x') = 1$. On pose

(1) $\quad d = [k(x') : k(x)]$.

Si $m(x) = 1$ et si on a (IV $**$) en x (cf. B.2.4.), on notera

(2) $\quad C = \mathrm{Sing}(X(n)) \cap E(n)$,

avec nos notations, ($***$) implique que

(3) $\quad C = V(u_1, u_3)$.

Nous allons montrer quatre lemmes dont les preuves constitueront le paragraphe D.5.

LEMME D.4.5.

Sous les hypothèses et notations de D.4.4, si $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$, $\kappa(x') = 2$ et si de plus $\mathrm{c}\ell^{1+\nu(x)}[J(X(n),f,E(n),\{x\})] \neq (U_1,U_2,U_3)U_1^{\nu}$, on a $d = 1$ et $\varepsilon(x') < \varepsilon(x)$.

LEMME D.4.6.

Sous les hypothèses et notations de D.4.4., on suppose de plus que $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$ et $\mathrm{c}\ell_x^{1+\nu}[J(X(n),f,E(n),\{x\})] = (U_1,U_2,U_3)U_1^{\nu}$. Alors

(i) On a (IV $**$) en x .

(ii) Si $\alpha(C) < \nu$ et $\varepsilon(x) \leq 1$, il n'existe pas de point $x' \in X'$ avec $m(x') = 1$ et $\nu(x') = \nu(x)$.

(iii) On a $\varepsilon(x') \leq \varepsilon(x)$ ou $\kappa(x') \leq 1$.

(iv) Si $d \geq 2$ et $\varepsilon(x) \geq 1$ alors on a $\varepsilon(x') < \varepsilon(x)$ ou $\kappa(x') \leq 1$.

LEMME D.4.7.

Sous les hypothèses et notations de D.4.4, on suppose de plus que $\alpha(x) = \nu(x)$ et $m(x) = 1$.

(i) Si $A(3) \neq O(p)$ ou si $d=1$ ou si l'extension $k(x)/k(x')$ est séparable, alors on a $\alpha(x') = \nu(x')$.

(ii) Si $\beta(u,\lambda) < 1$ (resp. $\beta(u,\lambda) = 1$) et $c(u,\lambda) < 1$, alors on a $\tau(x') = 0$ ou on a (***) pour $(x',(z,\mu))$ avec (z,μ) p-base de $\hat{O}_{X',x'}$ satisfaisant à

(1) $c(z,\mu) < c(u,\lambda)$ (resp. $c(z,\mu) \leq c(u,\lambda)$),

(2) $\beta(z,\mu) < 1$ (resp. $\beta(z,\mu) \leq 1$) si $\alpha(x') = \nu(x')$,
$\varepsilon(x') < 1$ et $\alpha[\mathrm{Sin}(X') \cap E'] < \nu$ si $\alpha(x') = 1 + \nu(x')$.

(iii) Si $\tau(x) = 2$, on a $\varepsilon(x') \leq \varepsilon(x)$ ou $\varepsilon(x') \leq 0{,}75$.

(iv) Si $\tau(x) = 2$ et $d \geq 2$ et $\varepsilon(x) \geq 0{,}75$, on a $\varepsilon(x') < \varepsilon(x)$ ou $(\varepsilon(x') < 1$ et $\alpha(x') = 1 + \nu(x'))$ ou x' est bon ou x est bon.

D.4.7.1. On remarque que si on a $(\alpha(x) = \nu(x)$ et $m(x) = 1$ et $\beta(u,\lambda) < 1$ et $c(u,\lambda) < 1)$, alors puisque $\beta(u,\lambda) + c(u,\lambda) \geq \gamma(u,\lambda) \geq 1$, on a $c(u,\lambda) > 0$ et donc on a (IV **) en x. Puisque $c(u,\lambda) < 1$, on a $\alpha(C) < \nu$ (cf. D.4.4(2)) . Puisque $\beta(u,\lambda) < 1$, on a $\varepsilon(x) < 1$. Le cas D.4.7. (ii) est à rapprocher de D.4.6. (ii).

LEMME D.4.8.

Sous les hypothèses et notations de D.4.4., on suppose de plus que $m(x) = 2$.

(i) Si $\tau(x') = 2$, il existe une p-base (v,μ) de $\hat{O}_{X',x'}$ telle qu'on a (***) pour $(x',(v,\mu))$ et

(1) $\begin{cases} \beta'(v,\mu) < 1 + \lfloor e(u,\lambda)d^{-1} \rfloor , \\ \beta'(v,\mu) \leq e(u,\lambda)d^{-1} + p^{-1} . \end{cases}$

Si de plus $(F_1,\ldots,F_s)$ n'est pas monogène ou si $\delta(u,\lambda) \notin \mathbb{N}$, on a

(2) $\beta'(v,\mu) \leq \sup\{d^{-1}\, j^{-1} \deg \phi_j \mid \phi_j \neq 0 \;,\; 1 \leq i \leq \nu\}$

Si de plus $e(u,\lambda) = 1$, alors

(3) $\varepsilon(x') < 2$.

(ii) Si on a $e(u,\lambda) \leq 0{,}5$ et $\tau(x') = 2$, alors on a $\beta(v,\mu) < 1$ et

(4) $\varepsilon(x') < 1$ ou x' est bon .

(iii) Si on a $c(u,\lambda) < 1$ et $\beta(u,\lambda) < 1$ et $e(u,\lambda) \leq 0{,}5$, alors $\tau(x') = 0$ ou il existe une p-base (v,μ) de $O_{X',x'}$ telle qu'on a (***) pour $(x',(v,\mu))$ et

(5) $c(v,\mu) < c(u,\lambda)$,

(6) $\begin{cases} \beta(v,\mu) < 1 \text{ si } \alpha(x') = \nu(x') , \\ \varepsilon(x') < 1 \text{ et } \alpha\lfloor \mathrm{Sing}(X') \setminus E' \rfloor < \nu \text{ si } \alpha(x') = 1 + \nu(x'). \end{cases}$

(iv) Si $\tau(x') = 2$, on a $\varepsilon(x') \leq \varepsilon(x)$.

(v) Si $\tau(x') = 2$ et si on a $d \geq 2$ alors on a $\varepsilon(x') < \varepsilon(x)$ ou $\varepsilon(x') < 1$ ou x' est bon.

D.5. En utilisant le fait que dans D.3 on a $\tau(x') = 2$, il est facile de montrer que D.4.5., D.4.6., D.4.7. et D.4.8. entraînent D.3.

dans le cas où $m(x') = 1$.

La démonstration de ces quatres lemmes constituera tout le paragraphe D.5.

D.5.1. Dans ce paragraphe D.5., nous regardons le cas où $m(x') = 1$. Donc x' n'est pas sur le transformé strict de $\mathrm{div}(u_3)$. Puisqu'on a (***), on a $U_1 \in \mathrm{VDir}(x)$. Puisqu'on a (**), on a soit $v(x) = 1$, soit (IV **) en x qui assure par B.2.5. (i) que si $v(x) \geq 2$ on a $U_3 \in \mathrm{VDir}(x)$, ce qui est exclu. On a donc toujours

(1) $\langle U_1 \rangle = \mathrm{VDir}(x)$.

D.5.2. Prouvons D.4.5.. C'est-à-dire que nous étudions le cas où $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$ et $J(X(n),f,E(n),\{x\}) \neq \mathfrak{m}_{X(n),x}\, u_1^{\nu} \bmod. \mathfrak{m}^{2+\nu}_{X(n),x}$, donc on a $\delta(u,\lambda) = 1$. Par D.5.1. (1), on a les hypothèses de B.4.6. (iii) pour $(x,(u,\lambda))$, on a donc $d = 1$. Pour calculer $\varepsilon(x)$, nous appliquons D.2.7.1. au point x, ce qui donne $\varepsilon(x) = 1{,}5$. Pour calculer $\varepsilon(x')$, nous appliquons D.1.2.3. au point x' qui nous donne $\varepsilon(x') \leq 1{,}5 \leq \varepsilon(x)$. Ce qui prouve D.4.5.

D.5.3. Prouvons D.4.7. (i). Posons $u' = (u_2u_3^{-1}, u_2u_3^{-1}, u_3)$. Si $A(3) + \nu \neq 0(p)$, alors on a par D.5.1. (1)

$cl_x^{\nu}[h(x)^{-1}(DM^{u,\lambda}_{[1]} + DM^{u,\lambda}_{[2]} + DM^{u,\lambda}_{[3]})(f) = (A(3)+\nu)\gamma\, U_1^{\nu} \neq 0$.

Par I.F.3., on a

$$h(x')^{-1}\, DM^{u',\lambda}_{[3]}\, f = (A(3)+\nu)\gamma\, u_1'^{\nu} \bmod.(u_3')$$

or $DM^{u',\lambda}_{[3]} \in \mathcal{D}(X',E',\{x'\})$, on a donc $\alpha(x') \leq \nu$ et par D.5.1.(1), on a $J(X',f,E',\{x'\}) = (u_1'^{\nu}) \bmod.(u_3')$. Si $A(3) + \nu = 0(p)$, alors on a par D.5.1. (1) $cl^{\nu}[h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[i]}\, f] = 0$ si $1 \leq i \leq 3$. Donc il existe j, $4 \leq j \leq s$ tel que $cl^{\nu}[h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[j]}\, f] = \gamma(i)\, U_1^{\nu} \neq 0$. On a donc $h(x')^{-1}\, DM^{u',\lambda}_{[j]}\, f = \gamma(i)\, u_1'^{\nu} \bmod.(u_3')$. Si $d = 1$ ou si x' est séparable sur x, $DM_{[j]}^{u',\lambda} \in \mathcal{D}(X',E',\{x'\})$, d'où $\alpha(x') \leq \nu$ et par D.5.1.(1), on a $J(X',f,E',\{x'\}) = (u_1'^{\nu}) \mathrm{mod.} (u_3')$.

C.Q.F.D.

D.5.4. Désormais, nous supposons

(2) $\delta(u,\lambda) > 1$.

En effet, si $\alpha(x) = \nu(x)$, par D.5.1.(1), on a $\delta(u,\lambda) > 1$ et si $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$ et $\delta(u,\lambda) = 1$, on a les hypothèses de D.4.5. qui vient d'être traité en D.5.2.

D.5.5. Par I.F.3., on a

(3) $I(X',f,(u',\lambda)) = u_3^{-\alpha(x)} I(X(n),f,(u,\lambda))$

et si $m(x) = 1$,

(4) $h(x')^{-1} D_{[2]}^{u',\lambda} f = u_3^{-\alpha(x)+1} h(x)^{-1} D_{[2]}^{u,\lambda} f$.

Voyons le cas où $\alpha(x) = \nu(x)$ et où x' a pour paramètres u'. Alors, par C.6., on a

(5) $\begin{cases} e(u',\lambda) \leq e(u,\lambda), \ \beta(u',\lambda) = \beta(u,\lambda), c(u',\lambda) = \delta(u,\lambda)-1 \\ \text{et } \Delta(u',\lambda) \text{ est préparé.} \end{cases}$

De plus, si $m(x) = 1$, par (4), on a

(6) $\beta'(u',\lambda) \leq \beta(u,\lambda)$.

De (5) on déduit D.4.7. au cas où x' est point de croisement pour (u,λ).

D.5.6. Montrons D.4.6.(i)(ii). Par définition de (**) (cf. B.4.), (i) est clair. Prouvons D.4.6.(ii). Soit (u,λ) une p-base de $\hat{O}_{X(n),x}$ telle qu'on a (***) et D.2.7.(1) pour $(x,(u,\lambda))$. Alors, posons pour $1 \leq i \leq s$

$$h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[i]}\, f = \sum_{1\leq j\leq \nu, 0\leq a, 0\leq b} \ell_{i,j,b,a}\, u_1^{\nu-j}\, u_2^{b}\, u_3^{a} \bmod.(u_1^{\nu}) \;,$$

$\ell_{i,j,b,a} \in k(x)$. Pour tout i, $1 \leq i \leq s$, on a

$$u_3^{-1-\nu} h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[i]}\, f = \sum_{1\leq j\leq \nu, j(\zeta-1)\leq d} u_1'^{\nu-j} u_3'^{d}\, P_{i,j,d}(u_2') \bmod.(u_1'^{\nu}) \,,$$

$$P_{i,j,d}(u_2') = \sum_{a+b-j-1=d} \ell_{i,j,b,a}\, u_2'^{b} \,.$$

Pour un (i,j,b,a), on a

$\ell_{i,j,b,a} \neq 0$ et $b = j\beta''(u,\lambda)+1$, $a = jc(u,\lambda)$.

On a clairement

$$\nu(x') \leq \nu-j+a+2b-j-1 .$$

Si $\beta''(u,\lambda) < 1/2$, on a $2b \leq j+1$ et comme $c(u,\lambda) < 1$, on a $a < j$ d'où $\nu(x') \leq \nu+a-j \leq \nu-1 < \nu$. Si $\beta''(u,\lambda) = 1/2$, par D.2.7(1), on a $b \neq 0(p)$ ou $j \neq 0(p)$, bien sûr, on a $a < j$ et $i = 1$ ou 2, donc on a $\mathrm{ord}_{x'}[u_3^{-1-\nu}\, h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[i]}\, f] \geq 1+\nu(x')$, d'où $\nu(x')+1 \leq \nu-j+a+2b-j-1 \leq \nu+1+a-j \leq \nu$ d'où $\nu(x')+1 \leq \nu$ et $\nu(x') < \nu$.

Ce qui prouve D.4.6.(ii).

D.5.7. Revenons à la preuve de D.4.6., D.4.7. et D.4.8.

Par I.F.4., il existe une p-base (v,μ) de $\hat{O}_{X',x'}$ adaptée pour x' avec $v_1 = u_1'$ et $v_3 = u_3'$ mais bien sûr, en général $v_2 \neq u_2'$. De plus, comme $\langle U_1\rangle$ = VDir(x), par I.F.4.2.(8), I.F.4.3.1.(4) et I.F.4.3.2. (4) appliqués avec $(\delta,\varepsilon) = (0,0)$ et en permutant les indices 2 et 3, on a

$$I(X',f,(u',\lambda))_{(u_1',u_3')} = I(X',f,(v,\mu))_{(v_1,v_3)} \,.$$

Alors C.4.1. nous donne

$$(7) \qquad c(u',\lambda)+\mathbb{R}_+ = \Delta\left[I(u',\lambda)\ ;\ u_3'\ ;\ u_1'\right] = c(v,\mu) + \mathbb{R}_+$$

où $I(u',\lambda) = I(X',f,(u',\lambda))$.

En D.5.5., on a vu que, pour $\alpha(x) = \nu(x)$, on a $c(u',\lambda) = \delta(u,\lambda)-1$. Si $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$, D.2.1.2(1) et un calcul simple montrent que

$$c(u',\lambda) = \inf\{(a+b-j-1)j^{-1}\ ;\ \ell_{j,b,a} \neq 0\} = \delta(u,\lambda)-1.$$

Bien sûr, puisque $\delta(u,\lambda) > 1$ si on a $\pi(x') = 2$ ou si $J(X',f,E',\{x'\}) = (u_1''^{}) \bmod.(u_3')$, on a (IV $**$) pour $(x',(v_1,v_3))$, mais nous n'avons pas forcément ($***$) pour $(x',(v,\mu))$. Cependant, par C.8 si $\alpha(x) = \nu(x)$, et par D.2.2. si $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$, on a ($***$) pour $(x',(z,\mu))$ avec $z_3 = v_3$ et

$$(8) \qquad \begin{cases} z_1 = v_1 + u_3^a A\ ,\ A \in \hat{O}_{X',x'}\ ,\ a \geqslant c(v,\mu) \\ z_2 = v_2 + \theta u_3\ ,\ \theta \in \hat{O}_{X',x'}\ , \end{cases}$$

où $\theta = 0$ si $\alpha(x') = \nu(x')$.

Mais comme v_2 est défini mod.(v_3) (cf. I.F.4.2. et I.F.4.3.), un choix judicieux de v_2 nous donne

$$(8\text{bis}) \qquad z_2 = v_2\ .$$

Alors, par C.8., on a

$$(9) \qquad c(z,\mu) \geqslant c(v,\mu) = \delta(u,\lambda)-1.$$

Désignons par L' la forme linéaire définie par $L'(x_1,x_2,x_3) = x_1+x_3(\delta(u,\lambda)-1)^{-1}$.

Par I.F.4.2.(8), I.F.4.3.1.(4) et I.F.4.3.2.(4) appliqués en permutant les indices 2 et 3 et avec $\delta = \varepsilon = 0$, et par C.12(c)(d), on a

$$h(x')^{-1} D^{v,\mu}_{[1]} f = u_3^{-\nu} h(x)^{-1} D^{u,\lambda}_{[1]} f \text{ mod.} I(X',f,(u',\lambda))\, u_3$$

$$= u_3^{-\nu} h(x)^{-1} D^{u,\lambda}_{[1]} f \text{ mod.} \{\mathcal{M}_{X',x'}, L'\}_v^{\nu-1+}$$

$$= \sum_{1\le j\le \nu-1} v_1^{\nu-j-1} v_3^{j(\delta-1)} \Phi_{1,j}(u_2',1)u_2'^{d(1,j)} \text{ mod. } \{\mathcal{M}_{X',x'},L'\}_v^{\nu-1+}$$

$$= \sum_{1\le j\le \nu-1} z_1^{\nu-j-1} z_3^{j(\delta-1)} A_j \text{ mod. } \{\mathcal{M}_{X',x'},L'\}_z^{\nu-1+}$$

(les $\Phi_{1,j}$ sont définis en D.4.1.).

D.5.8. Si $F_1 \neq 0$, on pose $j_o = \inf\{j \mid \Phi_{1,j} \neq 0\}$. On a $A_{j_o} = \Phi_{1,j_o}(u_2',1)u_2'^{d(i,j)}$. Alors, on a

$$h(x')^{-1} DM^{v,\mu}_{[1]} f = \sum_{1\le j\le \nu-1} z_1^{\nu-j} z_3^{j(\delta-1)} A_j \text{ mod. } \{\mathcal{M}_{X',x'},L'\}_z^{\nu+}$$

$$= h(x')^{-1} DM^{z,\mu}_{[1]} f \text{ mod. } \{\mathcal{M}_{X',x'},L'\}_z^{\nu+},$$

et donc $c(z,\mu) \le \delta(u,\lambda)-1$. Ce qui avec (9) donne

(10) $\quad c(z,\mu) = c(v,\mu) = \delta(u,\lambda)-1.$

De plus, on a

$$(11)\left\{\begin{array}{l} \beta(z,u)\le j_o^{-1}\, \mathrm{ord}_{x'}[\Phi_{1,j_o}(1,u_2)\, u_2'^{d(1,j)}], \\ \text{si } \alpha(x')=1+\nu(x'), \beta''(z,\mu)\le j_o^{-1}[\mathrm{ord}_{x'}[\Phi_{1,j_o}(1,u_2)u_2'^{d(1,j)}]-1] \end{array}\right.$$

D.5.9. Montrons que D.5.8. entraîne D.4.6., D.4.7 et D.4.8. dans le cas où $F_1 \neq 0$.

D.5.9.1. Voyons le cas où $\alpha(x) = \alpha(x') = 1+\nu$. D'après (11) et D.4.2.(1), on a :

$$\beta''(z,\mu) \leq \beta''(u,\lambda) .$$

Remarquons de plus que si $N \leq \beta''(z,\mu) \leq N + 0,5$ avec $N \in \mathbb{N}$, et si $\nu \neq 2$, on a D.2.7.(1) pour $(x',(z,\mu))$ et donc $\mathcal{E}(x') \leq N + 0,75$.

En prenant (u,λ) telle qu'on a les conditions de D.2.7. pour $(x,(u,\lambda))$, on déduit de ces deux inégalités que $\mathcal{E}(x') \leq \mathcal{E}(x)$. Ce qui prouve D.4.6.(iii). Prouvons D.4.6.(iv) en ce cas. Si $d \geqslant 2$, on a par D.5.7.(11)

$$\beta''(z,\mu) \leq \deg(\phi_{1,j_o})\, j_o^{-1}\, d^{-1} - j_o^{-1} \leq (1+\lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor)d^{-1} - j_o^{-1} .$$

Comme $j_o \neq 0(p)$, on a $j_o < \nu$ et donc

$$\beta''(z,\mu) < (1+\lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor)d^{-1} - \nu^{-1} .$$

Si $\lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor \leq 1$, on a $\mathcal{E}(x') \leq 0,75$.

Si $\lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor > 1$, on a $\beta''(z,\mu) < \lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor$ et donc $\mathcal{E}(x') \leq \lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor + 0,5 < \lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor + 0,75 \leq \mathcal{E}(x)$. Ce qui prouve D.4.6.(iv) en ce cas et avec D.5.6. finit la preuve de D.4.6. quand $F_1 \neq 0$ et $\alpha(x') = 1 + \nu$.

D.5.9.2. Voyons le cas où $\alpha(x) = 1 + \nu = 1 + \alpha(x')$. On a $\beta(z,\mu) \leq d^{-1}\, j_o^{-1} \deg(\phi_{1,j_o}) \leq (1+\lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor)d^{-1}$. Si $\beta(z,\mu) < (1+\lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor)$, et si on a les conditions de D.2.7. pour $(x,(u,\lambda))$, alors, par définition de $\mathcal{E}$, on a

$$\mathcal{E}(x') \leq 0,5 + \lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor < 0,75 + \lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor \leq \mathcal{E}(x).$$

Si $\beta(z,\mu) = 1 + \lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor$ alors on a $d = 1$ et par D.1.2.(3), on a

$$\mathcal{E}(x') \leq 0,75 + \lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor \leq \mathcal{E}(x) .$$

Ce qui prouve D.4.6.(iii)(iv) et donc D.4.6. dans le cas où $F_1 \neq 0$.

D.5.9.3. Voyons le cas où $\alpha(x) = \nu(x) = \alpha(x')$. Alors D.5.7.(11) nous donne

$$\beta(z,\mu) \leq e(u,\lambda)\, d^{-1} \leq \beta(u,\lambda)d^{-1} .$$

Ce qui avec D.5.7.(10) entraîne D.4.8.(i)(iii)(iv) et D.4.7.(ii).

En prenant (u,λ) telle qu'on a les conditions de D.1.2. et en remarquant que si $\beta(z,\mu)\in \mathbb{N}^*$, on a $\mathcal{E}(x')\leq \beta(z,\mu) - 0,25$ (D.1.2.(3)), on en déduit que $\mathcal{E}(x')\leq \mathcal{E}(x)$ et si $d\geqslant 2$, on a $\mathcal{E}(x')< \mathcal{E}(x)$ ou $\mathcal{E}(x')< 0,75$. Ce qui finit de prouver D.4.7. et D.4.8. en ce cas.

D.5.9.4. Si $\alpha(x) = \nu(x) = \alpha(x') - 1$, on a

$$\beta''(z,\mu) \leq e(u,\lambda)d^{-1} - j_o^{-1} < \beta(u,\lambda)d^{-1} - \nu^{-1} .$$

Ce qui, avec l'aide de D.5.7.(10) entraîne D.4.8.(i)(iii)(iv) et D.4.7.(ii).

Si $d\geqslant 2$, on en déduit que $\mathcal{E}(x') < \mathcal{E}(x)$.

Si $d = 1$, alors par D.4.7.(i), on a $m(x) = 2$ et donc, pour un choix de (u,λ), on a $\mathcal{E}(x) = 1 + \lfloor e(u,\lambda)\rfloor$ et $\beta''(z,\mu) < e(u,\lambda) - \nu^{-1}$ et donc $\mathcal{E}(x') \leq 0,75 + \lfloor e(u,\lambda)\rfloor < \mathcal{E}(x)$. De plus, si $e(u,\lambda)\leq 0,5$, on a $\beta''(z,\mu) < 0,5$. Tout ceci finit de prouver D.4.6., D.4.7. et D.4.8. dans le cas où $F_1 \neq 0$.

D.5.10. Désormais considérons le cas où $F_1 = 0$. Alors, par C.12(d), on a $c\ell^{\nu}_{L',z}(h(x')^{-1}\ DM^{z,\mu}_{[1]}\ f) = 0$ et

$I(z,\mu) = I(v,\mu)$ mod. $\{\mathfrak{M}_{X',x'}\ ,\ L'\}^{\nu+}_{v}$ si $\alpha(x) = \nu(x)$,

$I'(z,\mu) = I'(v,\mu)$ mod. $\{\mathfrak{M}_{X',x'}\ ,\ L'\}^{\nu+}_{v}$ si $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$,

où $L'(x_1,x_2,x_3) = x_1+x_3(\mathcal{E}(u,\lambda)-1)^{-1}$.

D'autre part, on a

$$I'(v,\mu) = I'(u',\lambda)$$

donc on a

(11bis) $c(v,\mu) = c(u'',\lambda) = c(z,\mu) = \mathcal{E}(u,\lambda)-1$.

D.5.11. Finissons d'établir D.4.6. Donc nous regardons le cas où $F_1 = 0$ et $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$. Il reste à montrer D.4.6(iii)(iv).

D.5.11.1. Regardons d'abord le cas où $F_2 \neq \delta U_1^{\nu} U_2$, alors par

D.2.2.(3), F_2 n'est pas colinéaire à une puissance ν-ème et on a :

$$\beta'(z,\mu) \le \beta(u_3^{-\nu}\ h(x)^{-1}\ D_{[2]}^{u,\lambda}\ f\ ;\ z_3,\ z_2\ ;\ z_1).$$

Appliquons C.4.2.2. à $J = (u_3^{-\nu}\ h(x)^{-1}\ D_{[2]}^{u,\lambda}\ f)$. Alors, par C.4.2.2.(2), on a

$$\beta[u_3^{-\nu} h(x)^{-1}\ D_{[2]}^{u,\lambda}\ f\ ;\ z_3,z_2\ ;\ z_1] \le \varphi(J\ ;\ u_3',u_2'\ ;\ u_1')$$

où $\varphi(J\ ;\ u_3',u_2'\ ;\ u_1') = \sup\{j^{-1}(\deg \phi_{2,j} + d(2,j)-1)\} \le \beta''(u,\lambda)$. On déduit de D.4.2.(1) en notant φ au lieu de $\varphi(J\ ;\ u_3',u_2'\ ;\ u_1')$:

(12) $\beta'(z,\mu) \le \varphi \le \beta''(u,\lambda)$.

D.5.11.1.1. Regardons le cas où $\alpha(x') = 1 + \nu(x')$. Alors on a par (12)

$$\beta''(z,\mu) = \beta'(z,\mu) \le \beta''(u,\lambda).$$

En se reportant à D.2.7.5. et en choisissant judicieusement (u,λ), on a $\varepsilon(x') \le \varepsilon(x)$, ce qui donne D.4.6(iii) en ce cas.

Reste à prouver D.4.6.(iv) en ce cas où $F_1 = 0$ et $F_2 \ne \gamma U_1^{\nu}\ U_2$ et $\alpha(x') = 1 + \nu(x')$. Si $d \ge 2$, par C.4.2.2., on a les deux inégalités

(13) $$\begin{cases} \beta[u_3^{-\nu}\ h(x)^{-1}\ D_{[2]}^{u,\lambda}\ f\ ;\ z_3,z_2\ ;\ z_1] \le \varphi d^{-1} + 1/p \\ \qquad < \lfloor \varphi d^{-1} \rfloor + 1. \end{cases}$$

De toute façon, on a

(14) $\beta'(z,\mu) = \beta[u_3^{-\nu}\ h(x)\ D_{[2]}^{u,\lambda}\ f\ ;\ z_3,z_2\ ;\ z_1]$.

Si $\varphi \in \mathbb{N}^*$, par (13), $\beta'(z,\mu) < \varphi$, on a

$$\lfloor \beta''(z,\mu) \rfloor \le \lfloor \beta'(z,\mu) \rfloor < \varphi \le \lfloor \beta''(u,\lambda) \rfloor$$

et on en déduit que

$$\varepsilon(x') \le \lfloor \beta''(z,\mu) \rfloor + 1,5 < \lfloor \beta''(u,\lambda) \rfloor + 0,75 \le \varepsilon(x).$$

Si $\varphi > 1$ et $\varphi \notin \mathbb{N}$ alors on a par (13)

$$\lfloor \beta''(z,\mu)\rfloor \leq \lfloor \beta'(z,\mu)\rfloor \leq \lfloor \varphi d^{-1}\rfloor \leq \lfloor \varphi\rfloor - 1 \leq \lfloor \beta''(u,\lambda)\rfloor - 1,$$

ce qui donne encore une fois

$$\varepsilon(x') \leq \lfloor \beta''(z,\mu)\rfloor + 1{,}5 < \lfloor \beta''(u,\lambda)\rfloor + 0{,}75 \leq \varepsilon(x).$$

Il reste à regarder le cas où $\varphi < 1$. Alors, si $\delta(u,\lambda) \notin \mathbb{N}$, par C.4.2.2., on a

$$\beta[u_3^{-\nu} h(x)^{-1} D^{u,\lambda}_{[2]} f \; ; \; z_3, z_2 \; ; \; z_1] \leq \varphi d^{-1} < 1/2$$

et donc $\beta''(z,\mu) < 1/2$ et $\varepsilon(x') = 0{,}75 < 1$. Si $\delta(u,\lambda) \in \mathbb{N}$, si $\varphi < 1$ et si $\varphi \neq 0$, on a $\varphi \leq 1 - \nu^{-1}$ et $\beta'(z,\mu) < 1$ d'où par D.2.7.5.(2), $\beta(u,\lambda) < 1$ et donc $\beta''(u,\lambda) < 1 - \nu^{-1}$, de plus $c(z,\mu) = \delta(u,\lambda) - 1 \in \mathbb{N}$; par D.2.8(v), x' est bon. Si $\delta(u,\lambda) \in \mathbb{N}$, et si $\varphi = 0$, alors on a $\beta''(z,\mu) \leq 1/p$, alors par D.2.7.5.(i), on a $\varepsilon(x') = 0{,}75 < 1$. Ce qui termine l'étude du cas où $\alpha(x') = \alpha(x) = 1 + \nu$, $F_2 \neq \gamma U_1^{\nu} U_2$ et $F_1 = 0$.

D.5.11.1.2. Voyons le cas où $\alpha(x') = \nu(x')$ et $F_2 \neq \gamma U_1^{\nu} U_2$. Par C.4.2.2.,on a

$$\beta'(z,\mu) \leq \varphi \leq \beta''(u,\lambda) < 1 + \lfloor \beta''(u,\lambda)\rfloor$$

Par C.12(d), on a $c\ell^{\nu}_{L',z}(h(x')^{-1} DM^{z,\mu}_{[1]} f) = 0$, on peut donc appliquer D.2.7.5.(ii) à $(x',(z,\mu))$. On a pour un choix judicieux de (u,λ) :

$$\varepsilon(x') \leq 0{,}5 + \lfloor \beta''(u,\lambda)\rfloor < 0{,}75 + \lfloor \beta''(u,\lambda)\rfloor \leq \varepsilon(x) .$$

Ce qui termine la preuve de D.4.6. dans le cas où $F_2 \neq \gamma U_1^{\nu} U_2$.

D.5.11.2. Pour terminer la preuve de D.4.6., nous regardons désormais le cas où $F_2 = \gamma U_2 U_1^{\nu}$, $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$ et $F_1 = 0$. Par D.2.4., D.2.5. et D.2.7.4., quitte à remplacer u_2 par $\hat{\gamma} u_2$, on peut supposer $\gamma = 1$. De plus, il existe $G \in (F_2,\dots,F_s)$ tel que

$$G = \sum_{1 \leq j \leq \nu} U_1^{\nu-j} U_2^{d(j)} U_3^{c(j)} \Upsilon_j(U_2,U_3) \neq 0$$

où $d(j)$ et $c(j)$ sont définis en D.4.1.(5).

Posons $j_1 = \inf\{ j \mid \Upsilon_j \neq 0\}$. On a clairement

(15) $\beta'(z,\mu) \leq (d(j_1) + \deg \varphi_{j_1}) j_1^{-1} d^{-1}$

Par D.4.2(1), on a

(15bis) $d(j_i) + \deg \varphi_{j_1} - 1 \leq j_1 \beta''(u,\lambda)$,

d'où $d(j_1) + \deg \varphi_{j_1} \leq j_1(1+\lfloor \beta''(u,\lambda)\rfloor)$,

$$(16) \quad \begin{cases} \beta'(z,\mu) \leq (\beta''(u,\lambda) + j_1^{-1})d^{-1}, \\ \beta'(z,\mu) \leq (1 + \lfloor \beta''(u,\lambda)\rfloor)d^{-1} . \end{cases}$$

Si on a une égalité dans (16) alors on a des égalités dans (15) et (15bis) on a alors

$$d(j_1) + \deg \varphi_{j_1} - 1 = j_1 \beta''(u,\lambda) \quad .$$

Par définition de $\varepsilon(u,\lambda)$ on a

$$c(j_1) + d(j_1) + \deg \varphi_{j_1} - 1 = j_1 \varepsilon(u,\lambda)$$

et par définition de $c(u,\lambda)$ on a

$$c(j_1) \geq j_1 c(u,\lambda) \quad .$$

En outre

$$\varepsilon(u,\lambda) \leq c(u,\lambda) + \beta''(u,\lambda)$$

d'où

$$c(j_1) = j_1 c(u,\lambda) \text{ et } \beta''(u,\lambda) + c(u,\lambda) = \varepsilon(u,\lambda).$$

Dans le développement de g donné en D.2.1.2., soit (j,b,a) tel que

$$\lambda_{j,b,a} \neq 0, \ b-1 = j\beta''(u,\lambda), \ a = jc(u,\lambda) \ ,$$

alors

$$b+a-1 = j\varepsilon(u,\lambda) \ ,$$

donc

$$v_L(\lambda_{j,b,a} v_1^{\nu-j} v_2^b v_3^a) = \nu + \delta^{-1} \ ,$$

donc puisque $F_1 = 0$ et $F_2 = \gamma U_2 U_1^{\nu}$ on a $b = j = 0$ mod.(p) .

Revenant à la définition de $\varepsilon(x)$ donnée dans D.2.7., on voit que l'on n'est pas dans le second cas de D.2.7.(1) car ce qui précède s'applique pour toute p-base (u,λ) satisfaisant à (***). Par suite si $\varepsilon(x) = 0{,}75 + \lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor$ alors $\beta''(u,\lambda) < 0{,}5 + \beta''(u,\lambda)$ ce qui contredit l'hypothèse qu'on a des égalités dans (16).

En conclusion, si on a une égalité dans (16) ou des égalités dans (15) et (15bis) et en plus $F_1 = 0$ et $F_2 = \gamma U_2 U_1^{\nu}$ alors

(16bis) $\varepsilon(x) \geqslant 1 + \lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor$.

D.5.11.2.1. Voyons le cas où $d \geqslant 2$.

Si $\lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor = 0$, par D.2.7.5.(i), on a

$$\varepsilon(x') \leq 0{,}75 \leq \varepsilon(x).$$

Si $\lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor \geqslant 1$ et ($d \geqslant 3$ ou $\beta'' + j_1^{-1} \neq 2$), on a par (16) $\beta'(z,\mu) < \lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor$. Par D.2.7.5.(ii), on a

$$\varepsilon(x') \leq \lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor + 0{,}5 < \lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor + 0{,}75 \leq \varepsilon(x).$$

Si $d = 2$ et $\beta''(u,\lambda) + j_1^{-1} = 2$ et $\alpha(x') = \nu(x')$, on a $\beta'(z,\mu) \leq 1$, d'où par D.2.7.5.(ii) , $\varepsilon(x') \leq 1{,}5$ et, on vérifie que $\varepsilon(x) \geqslant 1{,}75$.

Si $d = 2$ et $\beta''(u,\lambda) + j_1^{-1} = 2$ et $\alpha(x') = \alpha(x) = 1 + \nu(x)$, soit $\beta'(z,\mu) < 1$ et par D.2.7.5.(ii), on a $\varepsilon(x') \leq 1{,}5$ et on vérifie que $\varepsilon(x) \geqslant 1{,}75$, soit $\beta'(z,\mu) = 1$ alors dans (16), on a des égalités et donc on a (16bis), c'est-à-dire $\varepsilon(x) \geqslant 1 + \lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor = 2$. Comme $\beta'(z,\mu) = 1$, on a $\varepsilon(x') \leq 1{,}75$, d'où $\varepsilon(x') \leq 1{,}75 < \varepsilon(x)$.

D.5.11.2.2. Regardons le cas où $d = 1$ et où il existe i, $4 \leq i \leq s$ avec $F_i \neq 0$. Rappelons que $F_2 = U_1^{\nu} U_2$, d'où $\deg_{U_1}(F_i) < \nu$ et donc on peut appliquer (15bis) à $G = F_i$. Puisque x' est rationnel sur x, on a

$$u_3^{-1-\nu} F_i(u_1', u_2', u_3) = h(x')^{-1} DM_{[i]}^{z,\lambda} f_i \bmod. \{\mathfrak{m}_{X',x'}, L'\}_z^{\nu+},$$

ce qui donne $\beta(z,\lambda) \leq (d(j_1) + \deg \varphi_{j_1})\, j_1^{-1} d^{-1}$, d'où

$$\beta(z,\lambda) \leq \beta''(u,\lambda) + j_1^{-1} ,$$

$$\beta(z,\lambda) \leq 1 + \lfloor \beta''(u,\lambda) \rfloor .$$

Si $\alpha(x') = 1 + \nu(x')$, on a

$$\beta''(z,\lambda) \leq \beta(z,\lambda) - j_1^{-1} \leq \beta''(u,\lambda) .$$

Si $\beta''(z,\lambda) < \beta''(u,\lambda)$, on a clairement $\mathcal{E}(x') \leq \mathcal{E}(x)$. Supposons désormais que $\beta''(z,\lambda) = \beta''(u,\lambda)$.

Si $\beta''(z,\lambda) \neq \lfloor \beta''(z,\lambda) \rfloor + 0,5$ par définition de $\mathcal{E}$, on a clairement $\mathcal{E}(x') \leq \mathcal{E}(x)$. Si $\beta''(z,\lambda) = \beta''(u,\lambda) = \lfloor \beta''(z,\lambda) \rfloor + 0,5$, on remarque que l'égalité $\beta''(z,\lambda) = \beta''(u,\lambda)$ implique qu'on a égalité dans (15) et (15bis) et donc par (16bis) $\mathcal{E}(x) \geqslant 1 + \lfloor \beta''(u,\lambda) \rfloor$, donc en x, on n'est pas dans le cas D.2.7(1) et l'égalité $\beta''(z,\lambda) = \beta''(u,\lambda)$ entraîne $\mathcal{E}(x') \leq \mathcal{E}(x)$.

Si $\alpha(x') = \nu(x')$, on a

$$\begin{cases} \beta(z,\lambda) \leq \beta''(u,\lambda) + j_1^{-1} , \\ \beta(z,\lambda) \leq 1 + \lfloor \beta''(u,\lambda) \rfloor . \end{cases}$$

Si $\beta(z,\lambda) < 1 + \lfloor \beta''(u,\lambda) \rfloor$, par définition de $\mathcal{E}$, on a $\mathcal{E}(x') \leq 0,5 + \lfloor \beta''(u,\lambda) \rfloor < \mathcal{E}(x)$.

Si $\beta(z,\lambda) = 1 + \lfloor \beta''(u,\lambda) \rfloor$, alors on a $\mathcal{E}(x') \leq 1 + \lfloor \beta''(u,\lambda) \rfloor$, d'autre part on remarque qu'on a des égalités dans (15) et (15bis) et donc que $\mathcal{E}(x) \geqslant 1 + \lfloor \beta''(u,\lambda) \rfloor$, d'où $\mathcal{E}(x') \leq \mathcal{E}(x)$.

D.5.11.2.3. Pour terminer la preuve de D.4.6., il reste à regarder le cas où

$$F_1 = F_4 = \ldots = F_s = 0 , \; F_2 = U_1^{\nu} U_2 \quad \text{et} \quad d = 1.$$

Alors $(F_1, F_2, \ldots, F_s) = (F_2, F_1+F_2+F_3)$. Par D.2.2.1., cet idéal n'est pas divisible par une puissance ν-ème. Donc $F_1+F_2+F_3 \neq 0$.

Si $A(3) + 1 + \nu = 0(p)$, alors dans (16), on peut prendre $G = F_1+F_2+F_3$. De plus, on a

$$u_3^{-1-\nu} G(u_1,u_2,u_3) = c\mathcal{E}^{\nu}_{L',z} \left[h(x')^{-1} \, DM^{z,\lambda}_{[3]} \, f \right] \bmod. \; \{\mathfrak{M}_{X',x',L'}\}_z^{\nu+} .$$

On en déduit que $\beta(z,\lambda) \leq \beta''(u,\lambda) + j_1^{-1}$. Pour les mêmes raisons qu'en D.5.11.2.2., on a $\varepsilon(x') \leq \varepsilon(x)$.

Si $A(3) + 1 + \nu \neq 0(p)$ et $(u_2u_3^{-1})(x') \neq 0$, alors on a

(17) $$c\ell_x^\nu[h(x)^{-1}(DM_{[1]}^{u,\lambda} + DM_{[2]}^{u,\lambda} + DM_{[3]}^{u,\lambda})(f)] = (A(3)+\nu+1)U_1^\nu\ U_2 \neq 0.$$

D'où $\mathrm{ord}_{x'}[h(x')^{-1}\ DM_{[3]}^{u',\lambda}\ f] = \nu$ et donc

(18) $$\alpha(x') = \nu(x').$$

On prend alors $G = F_1+F_2+F_3 - (A(3) + \nu + 1)F_2$, et par (16), on a

$$\begin{cases} \beta'(z,\lambda) \leq (\beta''(u,\lambda)+j_1^{-1})d^{-1}, \\ \beta'(z,\lambda) \leq (1+\lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor)d^{-1}. \end{cases}$$

Si $\beta'(z,\lambda) < 1 + \lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor$, alors, puisque $F_1 = 0$, on applique D.2.7.5.(ii) à x' et on a

$$\varepsilon(x') \leq 0{,}5 + \lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor < 0{,}75 + \lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor \leq \varepsilon(x).$$

Si $\beta'(z,\lambda) = 1+\lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor$, alors on a une égalité dans (16) et donc on a (16bis)

$$\varepsilon(x) \geq 1 + \lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor.$$

On a $z = u_1'+u_3'^a v_2^b\ \theta$ avec θ inversible. On vérifie que si $a > \varepsilon(u,\lambda)-1$ ou si $b > \beta''(u,\lambda)$, alors en posant

(20) $$c\ell_{L',z}^\nu[h(x')^{-1}\ DM_{[3]}^{z,\lambda}\ f] = \sum_{0\leq j<\nu} \mu_j\ Z_1^{\nu-j}\ U_3'^{j\delta-j}\ v_2^{\theta(j)},$$

on a

$$\mu_{j_1}\ v_2^{\theta(j_1)} = u_2'^{d(j_1)}\ \varphi_{j_1}(u_2',1) \mod.(v_2^{\theta(j_1)+1}).$$

D'où $\beta(z,\lambda) \leq 1 + \lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor$ et

$$\varepsilon(x') \leq 1 + \lfloor\beta''(u,\lambda)\rfloor \leq \varepsilon(x).$$

Si on a $a = \delta(u,\lambda)-1$ et $b < \beta''(u,\lambda) = 1 + \lfloor \beta''(u,\lambda)\rfloor$, alors on a

$$c\ell^{\nu}_{L',z}[h(x')^{-1} D^{z,\lambda}_{[2]} f] = (Z_1 - \theta U'^{a}_3 V^{b}_2)^{\nu} .$$

D'où $\beta'(z,\lambda) < 1 + \lfloor \beta''(u,\lambda)\rfloor$, cas déjà traité après (18).

Si on a $a = \delta(u,\lambda) - 1$ et $b = \beta''(u,\lambda) = 1 + \lfloor \beta''(u,\lambda)\rfloor$ alors soit dans (20), il existe j avec $\mu_j \neq 0$ et $\theta(j) < j(1+\lfloor \beta''(u,\lambda)\rfloor)$ auquel cas on a

$\beta(z,\lambda) \leq 1 + \lfloor \beta''(u,\lambda)\rfloor$ et $\mathcal{E}(x') \leq 1 + \lfloor \beta''(u,\lambda)\rfloor \leq \mathcal{E}(x)$.

Sinon, par (20) on a :

$$c\ell^{\nu}_{L',z}[h(x')^{-1} DM^{z,\lambda}_{[3]} f] = \sum_{0 \leq j \leq \nu} \mu'_j U'^{\nu-j}_1 U'^{j\delta-j}_3 V_2^{\theta'(j)}$$

avec $\theta'(j) \geq j(1+\lfloor \beta''(u,\lambda)\rfloor)$.

D'où, en posant $c\ell_x(u_3 v_2) = U_2 + \varepsilon U_3$, on a

$$F_1+F_2+F_3 = U_2((A(1)+\nu+1)U_1^{\nu} + \sum \mu'_j U_1^{\nu-j} U_3^{c(j)} (U_2+\varepsilon U_3)^{\theta'(j)}) .$$

D'où $U_2^{d(j_1)} \varphi_{j_1} = \mu'_{j_1} U_3^{c(j_1)} U_2(U_2 + \varepsilon U_3)^{\theta'(j_1)}$ et

$d(j_1) + \deg \varphi_{j_1} = 1 + \theta'(j_1) > j_1(1 + \lfloor \beta''(u,\lambda)\rfloor)$, ce qui contredit (16).

Pour terminer la preuve de D.4.6., il n'y a plus qu'à regarder le cas où $\alpha(x') = 1 + \nu$, $\kappa(x') = 2$, $A(3) + 1 + \nu \neq 0(p)$, $F_1 = F_i = 0$, $4 \leq i \leq s$ et $F_2 = U_2 U_1'^{\nu}$ et x' est le point de paramètres $u' = (u_1 u_3^{-1}, u_2 u_3^{-1}, u_3)$. Alors on a

$$f = u_3'^{A(3)+1+\nu} (u_1'^{\nu} u_2 + u'_3 A) + R(f,u',\lambda).$$

Par III.2 appliqué en permutant les indices 2 et 3, l'hypothèse $\kappa(x') = 2$ implique que $\alpha(x') = 1+\nu$. Alors on a (***) pour $(x',(z,\lambda))$ avec $z_1 = u'_1 + u_3'^{a} u_2^{b}\theta$ avec $\theta \in k(x')[[u'_2,u'_3]]$, θ inversible, $z_3 = u'_3$, $z_2 = u'_2 \bmod.(u'_3)$.

$$c\ell^{\nu}_{L',z}[h(x')^{-1} DM^{z,\lambda}_{[3]} f] = (A(3)+\nu+1)Z_1^{\nu} Z_2 + \sum_{1 \leq j \leq \nu} Z_1^{\nu-j} Z_3^{j\delta-j} Z_2^{\theta(j)} \mu_j .$$

Bien sûr, si $a > \delta(u,\lambda)-1 = \delta - 1$ ou si $b > \beta''(u,\lambda)$, on a $\mu_{j_1} z_2^{\theta(j_1)} = z_2^{d(j_1)} \varphi_{j_1}(z_2,1) \bmod.(z_2^{\deg \varphi_{j_1} + d(j_1)+1})$ d'où $\beta''(z,\lambda) \leq \beta''(u,\lambda)$, on en déduit que $\mathcal{E}(x') \leq \mathcal{E}(x)$.

Si $a = \delta(u,\lambda)-1$ et $b \leq 1 + \lfloor \beta''(u,\lambda) \rfloor$ alors on a $c\ell^{\nu}_{L',z}[h(x')^{-1}\, DM^{z,\lambda}_{[2]} f] = Z_2(Z_1 + \theta Z_3^{\delta-1}\, Z_2^b)^{\nu}$ et on en déduit que $\beta''(z,\lambda) \leq \beta''(u,\lambda)$ d'où $\mathcal{E}(x') \leq \mathcal{E}(x)$. On a prouvé D.4.6.

D.5.12. Finissons de prouver D.4.7. Par D.5.5., D.5.8, nous n'avons plus qu'à regarder le cas où $u'_2(x') \neq 0$ et $F_1 = 0$. Puisqu'on a $\delta(u,\lambda) > 1$, on a avec les notations de D.5.6. :

$$f = u'^{A(3)+\nu}_3(\gamma u'^{\nu}_1 v_2 + u'_3 g) + R(f,v,\mu), \gamma \in O^{*}_{X',x'}$$

ou

$$f = u'^{A(3)+\nu}_3(\gamma u'^{\nu}_1 + u'_3 g) + R(f,v,\mu), \quad \gamma \in O^{*}_{X',x'} \ .$$

Dans le 2ème cas, on a (IV $**$) pour $(x',(v,\mu))$.

Dans le 1er cas, si on n'a pas (IV $**$) pour $(x',(v,\mu))$, alors on a $\alpha(x') = \nu(x')$ et par III.2, on a $\kappa(x') \leq 1$ et même, si $\alpha[v(u'_1,u'_3)] < \nu$, c'est-à-dire si $\delta(u,\lambda) < 2$ (c'est le cas dans D.4.6. (ii)), on a $\kappa(x') = 0$.

Donc nous supposons qu'on a (IV $**$) pour $(x',(v,\mu))$, on peut appliquer D.5.10 et on a

$$(22) \quad \begin{cases} I'(z,\mu) = u_3^{-\nu}\; I(X(n),f,(u,\lambda)) \text{ mod. } \{\mathcal{M}_{X',x'},L'\}^{\nu+}_{v} \ , \\ \qquad\quad\;\; = u_3^{-\nu}\; I(X(n),f,(u,\lambda)) \text{ mod. } \{\mathcal{M}_{X',x'},L'\}^{\nu+}_{z} \ . \end{cases}$$

On va donc appliquer C.4.2.2. à $I(X(n),f,(u,\lambda))$ pour majorer $\beta'(z,\mu)$.

D.5.12.1. Voyons le cas où $F_2 \neq 0$. Soit alors $j_1 = \inf\{j \mid \Phi_{2,j} \neq 0\}$. On a $1 \leq j_1 \leq \nu$ et $d(2,j_1) \neq 0$ et $\deg_{U_1}(F_2) < \nu$. Par C.4.2.2., on a

$$(23) \quad \beta'(z,\mu) \leq \deg(\Phi_{2,j_1})\, j_1^{-1}\, d^{-1} \leq \lfloor \beta(u,\lambda) - j_1^{-1} \rfloor\, d^{-1}.$$

Comme $F_1 = 0$, par C.12(d), on a $c\ell^{\nu}_{L',z}[h(x')^{-1}\, DM^{z,\mu}_{[1]}\, f] = 0$.

On peut alors appliquer D.2.7.5. à $(x',(z,\mu))$. On en déduit facilement D.4.7. en ce cas.

D.5.12.2. Voyons le cas où $F_2 = 0$. Rappelons que $F_1 = 0$, on a $(F_1,F_2,\dots,F_s) = (F_1+F_2+F_3,\ F_4,\dots,F_s)$.

D.5.12.3. Si x' est rationnel ou algébrique séparable sur x, alors par D.4.7.(i), on a $\alpha(x') = \nu(x')$. De plus, par (22), on a

$$u_3^{-\nu}\ I(X(n),f,(u,\lambda)) = u_3^{-\nu}\ h(x)^{-1}(DM^{u,\lambda}_{[1]} + DM^{u,\lambda}_{[2]} + DM^{u,\lambda}_{[3]}\ ,\ DM^{u,\lambda}_{[i]})(f)$$
$$= I(X',f,(z,\mu)) \bmod. \{\mathfrak{m}_{X',x'},L'_z\}^{\nu+} .$$

D'où par C.4.2.2.

$$\beta(z,\mu) \leq \beta(u,\lambda),$$
$$\beta(z,\mu) \leq 1 + \lfloor \beta(u,\lambda)d^{-1} \rfloor .$$

On en déduit facilement D.4.7.

D.5.12.4. Si l'extension $k(x)/k(x')$ est inséparable, par C.4.2.2., on a $\beta'(z,\mu) \leq \beta(u,\lambda)d^{-1} + p^{-1}$ et $\beta'(z,\mu) < 1 + \lfloor \beta(u,\lambda)d^{-1} \rfloor \leq 1 + \lfloor \beta(u,\lambda)p^{-1} \rfloor$

On obtient facilement D.4.7. à l'aide de ces inégalités et de D.2.7.5. dans les cas où

$$\alpha(x') = \nu(x') ,$$
$$\alpha(x') = 1 + \nu(x') \quad \text{et} \quad (\beta(u,\lambda) > 1 \quad \text{et} \quad \beta(u,\lambda) \neq 2) ,$$
$$\alpha(x') = 1 + \nu(x') \quad \text{et} \quad (d \geq 3 \quad \text{et} \quad \beta(u,\lambda) = 2).$$

Voyons les cas qui restent. On a donc $\alpha(x') = 1 + \nu(x')$, par D.4.7.(i), on a

$$(24) \qquad A(3) + \nu = O(p)$$

D.5.12.4.1. Si $(F_1+F_2+F_3,F_4,\dots,F_s)$ n'est pas monogène ou si $\varepsilon(u,\lambda) \notin \mathbb{N}$, alors par C.4.2.2., on a

(25) $\beta'(z,\mu) \leq \beta(u,\lambda)d^{-1} \leq \beta(u,\lambda)p^{-1}$.

Cette inégalité prouve D.4.7.(iii)(iv). Elle donne D.4.7.(ii) (2) si $\beta(u,\lambda) < 1$. Si $\beta(u,\lambda) = 1$, alors on a $\beta'(z,\mu) \leq 0,5$. Par D.2.7.5., on a $\varepsilon(x') < 1$ et $\beta(z,\mu) < 1$. Ce qui donne D.4.7.(ii) (2) si $\beta(u,\lambda) = 1$. Maintenant, on remarque que si $\beta(u,\lambda) \leq 1$ et $c(u,\lambda) < 1$ alors $\delta(u,\lambda) < 2$ et comme $\delta(u,\lambda) > 1$, D.5.4.(2), on a $\delta(u,\lambda) \notin \mathbb{N}$. Donc sous les hypothèses de D.4.7.(ii), on est en ce cas D.5.12.4.1, de plus $c(z,\mu) = \delta(u,\lambda)-1 \leq c(u,\lambda) + \beta(u,\lambda)-1$, on a D.4.7(ii).

D.5.12.4.2. Il n'y a plus qu'à prouver D.4.7.(iii)(iv) dans le cas où $\delta(u,\lambda) \in \mathbb{N}$ et où $(F_1,\ldots,F_s) = (F_1+F_2+F_3,F_4,\ldots,F_s)$ est monogène. Alors, puisque $A(3)+\nu = O(p)$, on a $F_1+F_2+F_3 = 0$, sinon on aurait $\deg_{U_1}(F_1,\ldots,F_s) < \nu$, ce qui est absurde.

Alors, pour un i, $4 \leq i \leq s$, F_i est non colinéaire à une puissance ν-ème. On a par C.4.2.2.

$\beta'(v,\mu) \leq \beta(u,\lambda)d^{-1}$ ou $\beta'(v,\mu) \leq (\deg \phi_{i,p^r})p^{-r}\, d^{-1} + p^{-1}$, $p^r \leq \nu$,

et aussi

$\beta''(v,\mu) \leq \beta'(v,\mu) \leq \beta(u,\lambda)d^{-1} + p^{-1}$.

Si $\beta'(v,\mu) < 1$, alors on a $\beta(v,\mu) < 1$ et $c(v,\mu) = \delta(u,\lambda)-1 \in \mathbb{N}$, par D.2.8.(iv), on a $\kappa(x') \leq 1$ ou x' est bon.

Si $\beta'(v,\mu) = 1$ et $\beta(u,\lambda) = 1$, alors par C.4.2.2., on a $\beta'(v,\mu) = \deg \phi_{i,p^r}$ et $p = d = 2$ et $\deg \phi_{i,p^r} = \beta(u,\lambda)p^r = p^r$. On en déduit que $\delta(u,\lambda) = c(u,\lambda) + \beta(u,\lambda)$ et donc $c(u,\lambda) \in \mathbb{N}$ et $\beta(u,\lambda) = 1$, par D.2.8.(v), x est bon.

Si $\beta(u,\lambda) = 2 = d = p$. Alors, puisque $F_1 = 0$, on a $\varepsilon(x) = 2$. On a $\beta'(u,\lambda) \leq 1,5$, par D.2.7.5., on a $\varepsilon(x') \leq 1,75$.

On a fini de prouver D.4.7.

D.5.13. Prouvons D.4.8. Il n'y a plus qu'à étudier le cas où $F_1 = 0$. Alors, par D.5.1. (1), on a $\delta(u,\lambda) > 1$. Alors, si $\kappa(x') = 2$, par B.4., on a (IV $**$) pour $(x,(u_1',u_3'))$ et on peut donc trouver (z,μ)

telle qu'on a (***) pour $(x'(z,\mu))$. Par D.5.10, on a

$$I'(z,\mu) = u_3^{-\nu} \ I(X(n),f,(u,\lambda)) \bmod. \{\mathfrak{M}_{X',w'},L'\}_z^{\nu+} .$$

Alors D.4.8.(i) (1)(2) résultent de C.4.2.2. On remarque que puisque $F_1 = 0$, on peut appliquer D.2.7.5. à $(x',(v,\mu))$ et qu'alors si $e(u,\lambda) = 1$, on a $\beta'(v,\mu) \leq d^{-1}+p^{-1} \leq 1,5$, donc D.4.8.(i)(3) est conséquence de D.4.8.(1). Ce qui prouve D.4.8.(i) et en réappliquant D.2.7.5., on obtient D.4.8.(ii)(iv)(v) . Prouvons D.4.8.(iii). En fait, la seule difficulté est de prouver l'existence de (v,μ). Cette existence est évidente si $J(X',f,E',\{x'\}) = (u_1'^{\nu}) \bmod.(u_3')$. Sinon, on a avec les notations de D.5.6.

$$f = u_3'^{A(2)+A(3)+\nu} \ (\gamma \ v_2 \ u_1'^{\nu} + u_3' g) + R(f,v,\mu)$$

et donc $Sing(X') \cap E' = V(u_1',u_3')$. De plus $c(v,\mu) < 1$ car $c(v,\mu) = \delta(u,\lambda) - 1 \leq c(u,\lambda) + \beta(u,\lambda) - 1 < 1$. Si $\alpha(x') = \nu(x')$, par III.2, on a $\kappa(x') = 0$. Si $\alpha(x') = 1 + \nu(x')$, on a (IV **) pour $(x',(u_1',v_2,u_3',\mu))$ et donc par D.2.2., on a l'existence de (v,μ). Maintenant on remarque que les hypothèses de D.4.8.(iii) impliquent $c(u,\lambda) + \beta(u,\lambda) < 2$, d'où $\delta(u,\lambda) < 2$.

Comme $\delta(u,\lambda) > 1$, on a $\delta(u,\lambda) \notin \mathbb{N}$, donc par D.4.8.(i)(2), on a $\beta'(z,\mu) \leq c(u,\lambda) < 0,5$, ce qui par D.2.7.5. entraîne que $\varepsilon(x') < 1$. De plus, comme $c(v,\mu) = c(z,\mu) < 1$, on a $\alpha[Sing(X') \cap E'] < \nu$. Ce qui termine la preuve de D.4.8.(iii).

D.6. Prouvons D.3. dans le cas où $m(x') = 2$. Il y a trois cas différents qui sont

(1) $\alpha(x) = \nu(x)$ et $m(x) = 2$,

(2) $\alpha(x) = \nu(x)$ et $m(x) = 1$,

(3) $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$.

Soit $\pi(n) : X' \longrightarrow X(n)$ l'éclatement centré en x. Soit $x' \in X'$ un point ν-proche de x avec $m(x') = 2$.

Dans les cas (2) et (3), avec les notations habituelles,

x' est le point de paramètres $u' = (u_1u_2^{-1}, u_2, u_3u_2^{-1})$.

Dans le cas (1), u_2 et u_3 jouent des rôles symétriques et x' est soit le point de paramètres u', soit celui de paramètres $u'' = (u_1\, u_3^{-1}, u_2\, u_3^{-1}, u_3)$.

Dans tous les cas, il est clair que x' est à D.Q. et que $\alpha(x') = \nu(x')$.

LEMME D.6.1.

Soit x un point maigre de D.Q. de $\mathrm{Sing}(X(n))$ et soit (u,λ) une p-base de $O_{X(n),x}$ telle qu'on a $(\ast\ast\ast)$ pour $(x,(u,\lambda))$. On suppose de plus que $m(x) = 2$. Soit $\pi : X' \longrightarrow X(n)$ l'éclatement centré en x et soit $x' \in X'$ un point fermé ν-proche de x avec $m(x') = 2$. Alors, avec les notations de D.6., on a $(\ast\ast\ast)$ pour $(x',(v,\lambda))$ où $(v,\lambda) = (u',\lambda)$ ou (u'',λ) est la p-base de $O_{X',x'}$ donnée en D.6. De plus, on a

(i) $\varepsilon(x') \leq \varepsilon(x)$, $e(v,\lambda) \leq e(u,\lambda)$,

(ii) Si $c(u,\lambda) < 1$ et $\beta(u,\lambda) < 1$ et $e(u,\lambda) \leq 0{,}5$, on a $c(v,\lambda) < c(u,\lambda)$, $\beta(v,\lambda) < 1$, $e(v,\lambda) \leq 0{,}5$.

Preuve.

Par [12] Remark (5) p.126, on a que $\Delta(v,\lambda)$ est préparé. On a donc $(\ast\ast\ast)$ pour $(x',(v,\lambda))$. Les assertions (i) et (ii) résultent alors de C.6.

D.6.2. Nous allons maintenant étudier les cas D.6.(2)(3), c'est-à-dire, les cas où $m(x) = 1$. Nous allons voir qu'on peut avoir $\varepsilon(x') > \varepsilon(x)$. Soit alors $\pi' : X'' \longrightarrow X'$ l'éclatement centré en x' et soit $x'' \in X''$ un point fermé ν-proche de x'.

LEMME D.6.3.

Soit x un point maigre à D.Q. de $\mathrm{Sing}(X(n))$ et soit (u,λ)

une p-base de $O_{X(n),x}$ telle qu'on a (***) pour $(x,(u,\lambda))$. On suppose de plus que $m(x) = 1$ et $\alpha(x) = \nu(x) = \nu$. Alors, avec les notations de D.6. et D.6.2., on a (***) pour $(x',(u',\lambda))$. De plus

(i) si $\varepsilon(x) > 2$, on a $\varepsilon(x') < \varepsilon(x)$,

(ii) $e(u',\lambda) \leq \sup(1, \beta(u,\lambda)-1)$,

(iii) si $\beta(u,\lambda) < 2$, on a $e(u',\lambda) < 1$,

(iv) si $\beta(u,\lambda) \leq 1$ on a $e(u',\lambda) \leq 1/2$ et si, avec les notations de D.6.2., il existe un point fermé $x' \in X'$ avec $(\nu,\kappa)(x'') = (\nu(x),2)$, on peut trouver une p-base (z,μ) de $O_{X'',x''}$ telle qu'on a (***) pour $(x'',(z,\mu))$ et

(1) $\beta(z,\mu) < 1$ si $\alpha(x'') = \nu(x'')$ et $m(x'') = 1$,

(2) $e(z,\mu) < 1/2$ si $m(x'') = 2$,

(3) $\varepsilon(x'') < 1$ si $\alpha(x'') = 1 + \nu(x'')$,

(v) si $\beta(u,\lambda) < 1$, on a $e(u',\lambda) < 1/2$,

(vi) si $c(u,\lambda) < 1$ et $\beta(u,\lambda) < 1$ alors on a

$c(u',\lambda) = c(u,\lambda)$, $\beta(u',\lambda) < \beta(u,\lambda) < 1$ et $e(u',\lambda) < 1/2$.

(vii) si $\varepsilon(x') > \varepsilon(x) \geq 0{,}75$ et s'il existe dans X'' un point fermé x'' ν-proche de x avec $\kappa(x'') = 2$, alors x'' est bon ou $\varepsilon(x'') < \varepsilon(x)$ ou $(\alpha(x'') = 1 + \nu(x'')$ et on a $\varepsilon(x'') = 0{,}75)$ ou $(m(x'') = 2$ et $\varepsilon(x'') = 0{,}75)$.

Preuve.

Par [12] Remark (5) p.126, on a que $\Delta(u',\lambda)$ est préparé. On a donc (***) pour $(x',(u',\lambda))$.

Alors (ii) découle de C.6.(iii). On remarque que (ii) entraîne (i).

Prouvons (iii) et (v). On a, par définition de $e(u',\lambda)$

$$\beta(u',\lambda) - d(u',\lambda) \geq e(u',\lambda) ,$$

$$\gamma(u',\lambda) - c(u',\lambda) \geq e(u',\lambda) .$$

Or par C.6. (iii), on a

$$(4)\quad \begin{cases} \beta(u',\lambda) - d(u',\lambda) = \beta(u,\lambda) + c(u,\lambda) - \varepsilon(u,\lambda)\ , \\ \gamma(u',\lambda) - c(u',\lambda) \leq \delta(u,\lambda) - c(u,\lambda)\ . \end{cases}$$

D'où

$$(5)\qquad \beta(u,\lambda) \geq e(u',\lambda) + \varepsilon(u,\lambda) - c(u,\lambda) \geq 2e(u',\lambda).$$

Ce qui entraîne (iii) et (v). D'autre part, par C.6.(iii), on a $\beta(u',\lambda) = \beta(u,\lambda) + c(u,\lambda) - 1$ et $c(u',\lambda) = c(u,\lambda)$. Alors ces égalités et (5) prouvent (vi).

Prouvons (iv). Par (5), on a $e(u',\lambda) \leq 0{,}5$. Alors, (1) et (3) découlent de D.4.8.(ii). Si $e(u',\lambda) < 0{,}5$, (2) est donné par D.6.1.(i). Si $e(u',\lambda) = 0{,}5$, par (5), on a $\varepsilon(u,\lambda) - c(u,\lambda) = 0{,}5$ et $\beta(u,\lambda) = 1$. D'où par (4), $\beta(u',\lambda) - d(u',\lambda) = \gamma(u',\lambda) - c(u',\lambda) = e(u',\lambda)$. Par C.6.(iii), on en déduit que $e(z,\mu) = 0$ ce qui donne (2). De plus $\Delta(z,\mu)$ n'a qu'un sommet et donc par C.5.(viii), x" est bon.

Prouvons (vii). Soit (u,λ) une p-base de $O_{X(n),x}$ telle qu'on a les conditions de D.1.2. pour $(x,(u,\lambda))$. Par (i), l'hypothèse $\varepsilon(x') \geq \varepsilon(x)$ entraîne $\varepsilon(x) \leq 2$.
Par (iii), $\varepsilon(x') \geq \varepsilon(x)$ entraîne $\beta(u,\lambda) = 2$ ou $\beta(u,\lambda) \leq 1$. De plus, (iv) entraîne (vii) dans le cas où $\beta(u,\lambda) \leq 1$. Il n'y a qu'à étudier le cas où

$$(6)\qquad \beta(u,\lambda) = 2.$$

Alors par (ii), on a $e(u',\lambda) \leq 1$ et puisque $\varepsilon(x') \geq \varepsilon(x)$, on a $e(u',\lambda) = 1$. Alors, par (4) et (5), on a :

$$(7)\qquad \beta(u',\lambda) - d(u',\lambda) = \gamma(u',\lambda) - c(u',\lambda) = e(u',\lambda) = 1.$$

Par C.6.(iii), si $m(x") = 2$, pour une p-base (z,λ) de $O_{X",x"}$

telle qu'on a (***) pour $(x'',(z,\lambda))$, on a $e(z,\lambda) = 0$ et donc $\mathcal{E}(x'') = 0,75$ et même, par C.5. (viii), x'' est bon.

Si $m(x'') = 1$ et $\alpha(x'') = \nu(x'')$, par D.4.8.(i)(1), pour une p-base (z,μ) telle qu'on a (***) pour $(x'',(z,\mu))$, on a $\beta'(z,\mu) < 2$. Par D.2.7.5.2., on a $\mathcal{E}(x'') \leq 1,5$ or $\beta(u,\lambda) = 2$ implique que $\mathcal{E}(x) \geq 1,75$, d'où $\mathcal{E}(x'') < \mathcal{E}(x)$.

Si $\alpha(x'') = 1 + \nu(x'')$ et $[k(x''):k(x')] \geq 2$, par D.4.8.(i)(1), on a $\beta'(z,\mu) \leq 1$ pour une p-base (z,μ) telle qu'on a (***) pour $(x'',(z,\mu))$. Par D.2.7.5.2., on a $\mathcal{E}(x'') \leq 1,5$ et donc $\mathcal{E}(x'') < \mathcal{E}(x)$.

Finalement, il reste à étudier le cas où $m(x'') = 1$ et $\alpha(x'') = 1 + \nu(x')$ et $k(x') = k(x'')$ et $e(u',\lambda) = 1$. Par D.4.8.(i), on a $\beta'(z,\mu) \leq 1+p^{-1} \leq 1,5$. Par D.2.7.5.2., on a $\mathcal{E}(x'') \leq 1,75$. D'où $\mathcal{E}(x'') \leq \mathcal{E}(x)$. Si $\mathcal{E}(x'') = \mathcal{E}(x)$ alors on a $\mathcal{E}(x) = 1,75$ et $\beta(u,\lambda) = 2$, on a donc D.1.2.(3) pour $(x,(u,\lambda))$. Or, on a

$h(x')^{-1}\, DM^{u',\lambda}_{[1]} f = u_2^{-\nu}\, h(x)^{-1}\, DM^{u,\lambda}_{[1]} f$, d'où

(8) $$in_v[h(x')^{-1}\, DM^{u',\lambda}_{[1]} f] \neq 0,$$

où v est le sommet $(c(u',\lambda),\beta(u',\lambda))$ de $\Delta(u',\lambda)$. Or on a

$$\mathcal{E}(u',\lambda) = e(u',\lambda) + c(u',\lambda) + d(u',\lambda),$$

par (7), on a

(9) $$c(u',\lambda) + \beta(u',\lambda) = \mathcal{E}(u',\lambda) .$$

Par (9), le point v est sur le côté de pente -1 de $\Delta(u',\lambda)$ et par (8), on a

$$c^{\partial^\nu}_{\mathcal{E}(u',\lambda)}[h(x')^{-1}\, DM^{u',\lambda}_{[1]} f] \neq 0 .$$

Par D.5.7.(11), on a $\beta(z,\mu) \leq e(u',\lambda) = 1$. D'où $\beta''(x'') \leq 1 - \nu^{-1}$ et $\mathcal{E}(x'') \leq 1,5 < 1,75 = \mathcal{E}(x)$. C.Q.F.D.

LEMME D.6.4.

Soit x un point maigre à D.Q. de $\mathrm{Sing}(X(n))$ et soit (u,λ) une p-base de $O_{X(n),x}$ telle qu'on a (**) et (***) pour $(x,(u,\lambda))$. On suppose de plus que $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$. Soit x' l'unique point proche de x dans X' tel que $m(x') = 2$. Alors, avec les notations de D.6. et D.6.2., on a (***) pour $(x',(u',\lambda))$. De plus

(i) si $\varepsilon(x) > 2$, on a $\varepsilon(x') < \varepsilon(x)$,

(ii) $\beta(u',\lambda) = \beta''(u,\lambda) + c(u,\lambda) - 1$,

$d(u',\lambda) = \delta(u,\lambda) - 1$,

$\gamma(u',\lambda) \leq \lfloor \delta(u,\lambda) \rfloor + 1$,

$c(u',\lambda) = c(u,\lambda)$,

(iii) $e(u',\lambda) < 2$ ou $e(u',\lambda) \leq \beta''(u,\lambda) - 1$,

(iv) si $\beta''(u,\lambda) \leq 0{,}5$ et $c(u,\lambda) < 1$, alors on a $e(u',\lambda) \leq \beta(u',\lambda) < 0{,}5$ et $c(u',\lambda) = c(u,\lambda)$,

(v) si $\varepsilon(x') \geq \varepsilon(x) \geq 1$ et si $\tau(x) = \tau(x') = 2$ et si dans X'' il existe un point x'' ν-proche de x' avec $\tau(x'') = 2$ alors $\varepsilon(x'') < \varepsilon(x)$ ou $\varepsilon(x'') < 1$ ou x' est bon ou x'' est bon ou x est bon.

Preuve.

D.6.4.1. Puisqu'on a (**) pour $(x,(u,\lambda))$, on a $J(X(n),f,E(n)) = (u_1^{\nu}) \bmod. (u_3)$. D'où $J(X(n),f,E(n),\{x\}) = \mathfrak{m}_{X(n),x}\, u_1^{\nu} \bmod. (u_3)$ d'où $J(X,f,E',\{x'\}) = u_1'^{\nu} \bmod. (u_3')$. Par D.2.2.(4), $\Delta(u',\lambda)$ est préparé et donc on a (***) pour $(x',(u',\lambda))$.

Prouvons (ii). Posons

$$(1) \begin{cases} f = h(x)g + R(f,u,\lambda), \\ g = \gamma u_1^{\nu} u_2 + \sum_{1\leq j\leq \nu} c_{j,b,a}\, u_1^{\nu-j} u_2^{b} u_3^{a} \bmod. (u_1^{1+\nu}). \end{cases}$$

On a $f = h(x')g' + R(f,u',\lambda)$ avec

$$(2)\ g' = \gamma u_1'^{\nu} + \sum_{1\leq j\leq \nu} c_{j,b,a}\, u_1'^{\nu-j} u_2'^{a+b-j-1} u_3'^{a} \bmod. (u_1'^{1+\nu}) .$$

On rappelle que

$$(3)\begin{cases} c(u,\lambda) = \inf\left\{aj^{-1} \mid \ell_{j,b,a} \neq 0\right\}, \\ \beta''(u,\lambda) = \inf\left\{(b-1)j^{-1} \mid \ell_{j,b,a} \neq 0 \text{ et } aj^{-1} = c(u,\lambda)\right\}, \\ \delta(u,\lambda) = \inf\left\{(a+b-1)j^{-1} \mid \ell_{j,b,a} \neq 0\right\}. \end{cases}$$

On lit alors sur g' les relations de (ii). Puisque $e(u',\lambda) = \delta(u',\lambda) - c(u',\lambda) - d(u',\lambda)$, on a :

$$(4)\begin{cases} e(u',\lambda) \leq \beta(u',\lambda) - d(u',\lambda) \leq \beta''(u,\lambda) + c(u,\lambda) - \delta(u,\lambda), \\ e(u',\lambda) \leq \gamma(u',\lambda) - c(u',\lambda) \leq \delta(u,\lambda) - c(u,\lambda) + 1. \end{cases}$$

Si $e(u',\lambda) \geq 2$ alors $\delta(u,\lambda) - c(u,\lambda) \geq 1$ et donc $e(u',\lambda) \leq \beta''(u,\lambda) - 1$. Ce qui prouve (iii).

Prouvons (i). Si $e(u',\lambda) \leq \beta''(u,\lambda) - 1$, on a $\mathcal{E}(x') \leq 1 + \lfloor e(u',\lambda)\rfloor \leq \lfloor \beta''(u,\lambda)\rfloor < \mathcal{E}(x)$.

Si $e(u',\lambda) < 2$, on a $\mathcal{E}(x') \leq 2$. Donc, si $\mathcal{E}(x) > 2$, on a $\mathcal{E}(x') < \mathcal{E}(x)$, ce qui prouve (i).

On remarque que (ii) entraîne (iv). Il n'y a plus qu'à prouver (v).

D.6.4.2. Prouvons (v) dans le cas où $m(x'') = 1$. Par (i), on a $\mathcal{E}(x) \leq 2$ et donc on suppose $1 \leq \mathcal{E}(x) \leq 2$. Posons

$$(5)\quad G = c\ell^{\nu}_{\delta(u',\lambda)}(g') = \gamma U_1'^{\nu} + \sum_{1\leq j\leq \nu} U_1'^{\nu-j} U_2'^{d(j)} U_3'^{c(j)} \phi_j(U_2',U_3'),$$

$$(6)\quad G_2 = c\ell^{\nu}_{\delta(u',\lambda)}(h(x)^{-1} U_2^{-\nu-1} DM^{u,\lambda}_{[2]} f) = \gamma U_1'^{\nu} + \sum U_1'^{\nu-j} U_2'^{b(j)} U_3'^{a(j)} \psi_j(U_2',U_3')$$

où ϕ_j et ψ_j sont nuls ou non divisibles par U_2' ni par U_3'.

Je dis que pour $1 \leq j \leq \nu$, on a

$$(7)\qquad \begin{cases} \phi_j = 0 \quad \text{ou} \quad \deg \phi_j \leq j\ , \\ \psi_j = 0 \quad \text{ou} \quad \deg \psi_j < j\ . \end{cases}$$

Si de plus on a $\varepsilon(x) \leq 1{,}75$, on a

$$(8)\qquad \begin{cases} \phi_j = 0 \ \text{ ou } \deg \phi_j < j, \text{ pour tout } \ j,\ 1 \leq j \leq \nu\ , \\ \text{ou} \\ \text{pour un } \ j \neq 0(p), \quad \phi_j \neq 0\ , \\ \text{ou} \\ \text{pour un } \ j, \quad \psi_j \neq 0\ . \end{cases}$$

Si $\beta''(u,\lambda) < 1$, on a

$$(9)\qquad \begin{cases} \phi_j = 0 \quad \text{ou } \deg \phi_j \leq j/2\ , \\ \psi_j = 0 \quad \text{ou } \deg \psi_j < j/2\ . \end{cases}$$

En effet, on a en posant $\delta = \delta(u',\lambda)$

$$\phi_j\ U_2'^{d(j)}\ U_3'^{c(j)} = \sum_{2a+b-j-1=j\delta} \ell_{j,b,a}\ U_2'^{a+b-j-1}\ U_3'^{a}\ ,$$

$$\psi_j\ U_2'^{b(j)}\ U_3'^{a(j)} = \sum_{2a+b-j-1=j\delta} b\,\ell_{j,b,a}\ U_2'^{a+b-j-1}\ U_3'^{a}\ .$$

Soient a, b, a', b' tels que $a = c(j)$ et $a+b-j-1 = d(j)$ (resp. $a' = a(j)$ et $a'+b'-j-1 = b(j)$). On a

$$2a+b-j-1 = 2a'+b'-j-1 = j\delta(u',\lambda)\ ,$$

d'où

$$(10)\qquad 2(a'-a) = b-b'\ .$$

De plus, on a

$$2a+b-j-1 = j\delta(u',\lambda) \leq j(\beta''(u,\lambda)+2c(u,\lambda)-1)$$

d'où $b-1 \leq j\beta''(u,\lambda) + 2(jc(u,\lambda)-a)$, or $a \geq jc(u,\lambda)$, d'où

$$(11)\qquad b-1 \leq j\,\beta''(u,\lambda)\ ,$$

et si on a égalité dans (11) alors on a

$$2a+b-1 = j(\beta''(u,\lambda) + 2c(u,\lambda))$$

et donc, puisque $a \geqslant jc(u,\lambda)$, on a en cas d'égalité dans (11)

(11bis) $b-1 = j\beta''(u,\lambda)$ et $a = jc(u,\lambda)$.

Donc si $b' \geqslant 1$ (ce qui est le cas quand on calcule $\deg \psi_j$ car le coefficient de $U_2'^{a'+b'-j-1}\, U_2'^{a'}$ est $b'\ell_{j',b',a'}$), on a

(12) $a'-a \leq j\, \beta''(u,\lambda)/2$.

Bien sûr, on a $\deg \phi_j = a'-a$ (resp. $\deg \psi_j = a'-a$), (12) entraîne (7)(8) et (9) pour ψ_j et pour ϕ_j si $b' \geqslant 1$. Calculons $\deg \phi_j$ dans le cas où $b' = 0$. Puisque $\varepsilon(x) \leq 2$, on a $\beta''(u,\lambda) < 2$ et donc par (11) $b \leq 2j$, ce qui avec (10) donne (7). Si $\beta''(u,\lambda) < 1$, on a par (11) $b \leq j$, alors (10) donne (9). Voyons le cas où $\varepsilon(x) \leq 1,75$, supposons que pour un j on a $\phi_j \neq 0$ et $\deg \phi_j = j$. Alors par (11), on a $b = 2j$. Si $j = 1$, on a (8), car $j = 1 \neq 0(p)$). Si $j \geqslant 2$, définition de ε, on a $\beta''(u,\lambda) \leq 3/2$, d'où par (11)

$$b-1 = 2j-1 \leq 3j/2 \quad , \quad 2 \leq 3/2+j^{-1} \quad .$$

Donc on a $j = 2$ et $\beta''(u,\lambda) = 3/2$. Par définition de ε, dans le cas où $\varepsilon(x) = 1,75$ et $\beta''(u,\lambda) = 3/2$, il existe (j',b',a') avec $\ell_{j',b',a'} \neq 0$ et $j' \neq 0(p)$ ou $b' \neq 0(p)$. On a égalité dans (11), d'où par (11bis) $j'\beta''(u,\lambda) = b'-1 = 3/2$, $j'c(u',\lambda) = a'$.

Soit $j' \neq 0(p)$ et alors $\phi_{j'} \neq 0$ et on a (8), soit $j' = 0(p)$ et alors $b' \neq 0(p)$ et on a $\psi_{j'} \neq 0$ et donc on a encore (8).

D.6.4.2.1. Si on a $c\ell^{\nu}_{\delta(u',\lambda)}\left[h(x')^{-1}\, DM^{u',\lambda}_{[1]} f\right] \neq 0$, alors par D.5.8.(11), pour une p-base (v,μ) de $\widehat{O}_{X'',x''}$ telle qu'on a (***) pour $(x'',(v,\mu))$, on a $\beta(v,\mu) \leq 1$, d'où $\varepsilon(x'') \leq 1$ si $\alpha(x'') = \nu(x'')$.

Si $\alpha(x'') = 1 + \nu(x'')$, on a $\beta''(v,\mu) \leq 1-j^{-1}$ pour un $j \neq 0(p)$, donc $\beta''(v,\mu) < 1-\nu^{-1}$ et $\mathcal{E}(x'') \leq 1$. De plus par (19), si $\mathcal{E}(x) = 1$, on a $\beta(v,\mu) \leq 1/2$ d'où par définition de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}(x'') \leq 0{,}75$.

On vérifie que ces inégalités impliquent $\mathcal{E}(x) > \mathcal{E}(x'')$ et donc (v).

D.6.4.2.2. Si on a $cl^{\nu}_{\delta(u',\lambda)}[h(x')^{-1}\ DM^{u',\lambda}_{[1]}\ f] = 0$ et $G_2 \neq \gamma U_1'^{\nu}$, alors par D.2.2.(4), G_2 n'est pas colinéaire à une puissance ν-ème et par C.4.2.2. appliqué à $u_3^{-\nu}\ h(x)^{-1}\ u_2^{-\nu-1}\ DM^{u,\lambda}_{[2]}\ f$, pour une p-base (v,μ) de $\widehat{O}_{X'',x''}$ telle qu'on a (***) pour $(x'',(v,\mu))$, on a

$$\beta'(v,\mu) < 1 \quad \text{et donc par D.2.7.5.}\ , \quad \mathcal{E}(x'') \leq 1\ ,$$

et si $\mathcal{E}(x) \leq 1$, on a $\beta''(v,\mu) < 1$ et par (9) on a

$$\beta'(v,\mu) \leq 1/2 \quad \text{d'où par D.2.7.5.,} \quad \mathcal{E}(x'') \leq 0{,}75.$$

On vérifie que ces inégalités impliquent $\mathcal{E}(x) > \mathcal{E}(x'')$ et donc (v) en ce cas.

D.6.4.2.3. Si on a

$$(13) \qquad \begin{cases} cl^{\nu}_{\delta(u',\lambda)}[h(x')^{-1}\ DM^{u',\lambda}_{[1]}\ f] = 0\ , \\ G_2 = \gamma U_1'^{\nu}\ , \end{cases}$$

alors l'idéal $cl^{\nu}_{\delta(u',\lambda)}[I(X',f,(u',\lambda))]$ n'est pas monogène. On applique alors C.4.2.2. à $u_3^{-\nu}\ I(X',f,(u',\lambda))$. Pour une p-base (v,μ) de $O_{X'',x''}$ telle qu'on a (***) pour $(x'',(v,\mu))$, on a

$$\beta'(v,\mu) \leq 1, \text{ d'où par D.2.7.5.,} \quad \mathcal{E}(x'') \leq 1{,}5.$$

Si on a $\mathcal{E}(x) \leq 1{,}75$ alors par (13), la première relation de (8) est vérifiée et par C.4.2.2., on a

$$\beta'(v,\mu) < 1, \text{ d'où par D.2.7.5.,} \quad \mathcal{E}(x'') \leq 1.$$

Si on a $\mathcal{E}(x) \leq 1$, alors on a $\beta''(u,\lambda) < 1$ et par (9), on a

$$\beta'(v,\mu) \leq 1/2, \text{ d'où par D.2.7.5.,} \quad \mathcal{E}(x'') \leq 0{,}75.$$

Ce qui termine la preuve de (v) dans le cas où $m(x'') = 1$.

D.6.4.3. Prouvons (v) dans le cas où $m(x'') = 2$. Bien sûr, par (i), nous supposons $1 \leq \mathcal{E}(x) \leq 2$. De plus, nous ne regardons que le cas où

(14) $\mathcal{E}(x') \geq \mathcal{E}(x)$.

Il existe donc un triplet (j,b,a) tel que

(15) $\ell_{j,b,a} \neq 0,\ (b-1)j^{-1} = \beta''(u,\lambda),\ aj^{-1} = c(u,\lambda) = c(u',\lambda)$.

De plus, il existe un triplet (j',b',a') tel que

(16) $\ell_{j',b',a'} \neq 0,\ (a'+b'-1)j'^{-1} = \delta(u,\lambda) = d(u',\lambda)+1,\ a'j'^{-1} = \gamma(u',\lambda)$.

Par (ii), on a

$$\begin{aligned} \beta(u',\lambda)-d(u',\lambda) &= (a+b-1)j^{-1} = (a'+b'-1)j'^{-1} \\ &= aj^{-1}-a'j'^{-1}+bj^{-1}-b'j'^{-1}-j^{-1}+j'^{-1}, \end{aligned}$$

(17) $$\beta(u',\lambda)-d(u',\lambda) = c(u',\lambda)-\gamma(u',\lambda)+bj^{-1}-b'j'^{-1}-j^{-1}+j'^{-1} .$$

On rappelle que

$$\begin{cases} e(u',\lambda) \leq \beta(u',\lambda)-d(u',\lambda), \\ e(u',\lambda) \leq \gamma(u',\lambda)-c(u',\lambda) , \end{cases}$$

d'où par (17)

$$2\ e(u',\lambda) \leq bj^{-1}-b'j'^{-1}-j^{-1}+j'^{-1},$$

(18) $$2\ e(u',\lambda) \leq \beta''(u,\lambda)-b'j'^{-1}+j'^{-1} .$$

Alors je dis que

(19) $b' = 0$.

En effet, si $\mathcal{E}(x) = 1$, on a $\beta''(u,\lambda) < 1$ et par (18), si $b' \neq 0$, on a $e(u',\lambda) < 1/2$ et donc $\mathcal{E}(x') = 0{,}75$, ce qui contredit (14) ; si $1 < \mathcal{E}(x) \leq 2$, on a $\beta''(u,\lambda) < 2$ et par (18), si $b' \neq 0$, on a $e(u',\lambda) < 1$ et $\mathcal{E}(x') \leq 1 < \mathcal{E}(x)$, ce qui contredit (14). De (19) et (16), on a

$$(20) \qquad \gamma(u',\lambda) = \delta(u,\lambda) + j'^{-1} = d(u',\lambda) + 1 + j'^{-1} .$$

Alors je dis que

(21) si $\delta(u,\lambda) < c(u,\lambda)$ alors x' est bon.

En effet, par (20), si $\delta(u,\lambda) < c(u,\lambda)$, on a

$e(u',\lambda) \leq \gamma(u',\lambda) - c(u',\lambda) = \delta(u,\lambda) + j'^{-1} - c(u,\lambda) < j'^{-1}$.

Si $j' \geq 2$, on a $e(u',\lambda) < 0{,}5$ et donc $\mathcal{E}(x') = 0{,}75$, ce qui contredit (24). Si $j' = 1$ alors on a

$\gamma(u',\lambda) - c(u',\lambda) < 1$ et $\gamma(u',\lambda) = a' \in \mathbb{N}$,

mais alors, x' est bon. En effet, on a $a' > 1$, sinon par (16) on a $\alpha(x') \leq \nu$. Alors $c(u,\lambda) > 1$ et donc $V(u_1',u_3')$ est permis. Appliquons l'algorithme du point bon à x alors par D.2.8, on doit effectuer l'éclatement $\pi : X_1' \longrightarrow X'$ centré en $V(u_1',u_3')$.

Par D.2.8.(iii), l'unique point ν-proche y a dessus de x' est le point de paramètres $z = (u_1'u_3'^{-1}, u_2', u_3')$. Puisque $c(u,\lambda) > 1$, on a $f = h(y)(\gamma z_1^{\nu} + z_3 g) + R(f,u,\lambda)$.

Si $a' = 2$, on a $\mathrm{ord}_y(z_3 g) = \nu$, de plus $\Delta(z,\lambda)$ est préparé, donc $\mathrm{VDir}(y) \supset \langle Z_1, Z_3\rangle$. Par III.4.2, on a $\kappa(y) \leq 1$, donc x' est bon.

Si $a' \geq 3$, une récurrence décroissante sur a' donne (21).

Par (31), pour prouver (v), nous pouvons désormais supposer

$$(22) \qquad \delta(u,\lambda) \geq c(u,\lambda) .$$

D.6.4.3.1. Voyons le cas où x'' a pour paramètres $v = (u'_1 u'^{-1}_2, u'_2, u'_3 u'^{-1}_2)$. Alors, par C.6.(iii), on a

(23) $$e(v,\lambda) \leq \beta(u',\lambda) + c(u',\lambda) - \varepsilon(u',\lambda) .$$

Par définition de δ, e, c et d, on a

$$\delta(u',\lambda) = e(u',\lambda) + c(u',\lambda) + d(u',\lambda).$$

De plus, par (ii), on a $\beta(u',\lambda) = \beta''(u,\lambda) + c(u,\lambda) - 1$, d'où par (23), (22) et (16).

$$e(v,\lambda) \leq \beta''(u,\lambda) - e(u',\lambda) + c(u,\lambda) - \delta(u,\lambda),$$

$$e(v,\lambda) \leq \beta''(u,\lambda) - e(u',\lambda).$$

Si $\varepsilon(x') \geq \varepsilon(x) = 1$, alors $e(u',\lambda) > 0,5$ et $\beta''(u,\lambda) < 1$, d'où $e(v,\lambda) < 0,5$ et $\varepsilon(x'') = 0,75 < \varepsilon(x)$.

Si $\varepsilon(x') \geq \varepsilon(x) > 1$ alors $e(u',\lambda) \geq 1$ et $\beta''(u,\lambda) < 2$, d'où $e(v,\lambda) < 1$ et $\varepsilon(x'') < 1 < \varepsilon(x)$. Ce qui donne (v) en ce cas.

D.6.4.3.2. Pour terminer, prouvons (v) dans le cas où x'' a pour paramètres $w = (u'_1 u'^{-1}_3, u'_2 u'^{-1}_3, u'_3)$. Par C.6.(iii), on a

$$e(w,\lambda) \leq \gamma(w,\lambda) - c(w,\lambda),$$

$$\begin{aligned} \gamma(w,\lambda) - c(w,\lambda) &\leq \gamma(u',\lambda) + d(u',\lambda) - \delta(u',\lambda) , \\ &\leq \gamma(u',\lambda) + d(u',\lambda) - e(u',\lambda) - c(u',\lambda) - d(u',\lambda), \\ &\leq \gamma(u',\lambda) - e(u',\lambda) - c(u,\lambda) , \\ &\leq \varepsilon(u,\lambda) + j'^{-1} - e(u',\lambda) - c(u,\lambda) . \quad \text{(cf. (30))}. \end{aligned}$$

Comme on a

$$e(u',\lambda) \leq \beta'(u,\lambda) - d(u',\lambda) = \beta''(u,\lambda) + c(u,\lambda) - \varepsilon(u,\lambda) ,$$

on a

(25) $$e(w,\lambda) \leq \beta''(u,\lambda) - 2e(u',\lambda) + j'^{-1}.$$

Si $1 < \varepsilon(x) \leq \varepsilon(x')$, on a $e(u',\lambda) \geq 1$ et $\beta''(u,\lambda) < 2$ car $\varepsilon(x) < 2$, d'où $e(w,\lambda) < j'^{-1} \leq 1$, d'où $\varepsilon(x'') \leq 1 < \varepsilon(x)$. Si $\varepsilon(x) = 1 \leq \varepsilon(x')$, on a

$e(u',\lambda) > 0,5$ et $\beta''(u,\lambda) < 1$, d'où $e(w,\lambda) \leq \gamma(w,\lambda) - c(w,\lambda) < j'^{-1}$.
Si $j' \geq 2$, on a $\mathcal{E}(x'') = 0,75 < 1 = \mathcal{E}(x)$. Si $j' = 1$, alors je dis que x'' est bon ; cela résulte du lemme suivant qui met fin à la preuve de (v) et à celle de D.6.4. Vérifions les hypothèses de ce lemme, par (16) et (19), si $j' = 1$, on a

$$\delta(u,\lambda) = a'-1, \; d(u',\lambda) = a'-2 \; , \; \gamma(u',\lambda) = a'.$$

Par C.6.(iii), on a $\gamma(w,\lambda) = \gamma(u',\lambda) + d(u',\lambda) - 1$ et $d(w,\lambda) = d(u',\lambda)$, donc $(\gamma(w,\lambda), d(w,\lambda)) \in \mathbb{N}^2$, de plus $\gamma(w,\lambda) - c(w,\lambda) < j'^{-1} = 1$.

LEMME D.6.4.3.3.

Soit x un point fermé maigre à D.Q. de $Sing(X(n))$ tel que $m(x) = 2$ et pour une p-base (u,λ) de $\widehat{O}_{X(n),x}$, on a (***) et $(\gamma(u,\lambda), d(u,\lambda)) \in \mathbb{N}^2$ et $\gamma(u,\lambda) - c(u,\lambda) < 1$.

Alors si $\tau(x) = 2$, x est bon.

Preuve.

A - Si $e(u,\lambda) = 0$, par C.5., on a $\tau(x) \leq 1$. C'est impossible.

B - Puisque $e(u,\lambda) \leq \gamma(u,\lambda) - c(u,\lambda)$, on a $0 < e(u,\lambda) < 1$. De plus,

(1) $\lfloor c(u,\lambda) \rfloor < c(u,\lambda) < \lceil c(u,\lambda) \rceil = \gamma(u,\lambda)$.

a- Si $\gamma(u,\lambda) \geq 2$, par (1) on a $c(u,\lambda) > 1$, donc
$I(X(n),f,(u,\lambda)) \subset (u_1^{\nu}) + (u_1,u_3)^{1+\nu}$ d'où $I(X(n),f,E(n)) \subset (u_1,u_3)^{\nu}$,

(2) $V(u_1,u_3) \subset Sing_{\nu}(X(n))$.

b- Si $d(u,\lambda) \geq 1$, on a $c(u,\lambda) > 0$ et $d(u,\lambda) > 0$, d'où

(3) $Sing(X(n)) \cap E(n) \subset V(u_1,u_2) \cup V(u_1,u_3)$.

D'autre part, puisque $d(u,\lambda) \geq 1$, on a $\alpha[V(u_1,u_2)] = \nu$, d'où

(4) $V(u_1,u_2)$ est permis en x.

C - Je dis que, l'algorithme du point bon impose l'éclatement centré en la courbe $Y_i = V(u_1,u_2)$, i=2 ou 3 avec $(\nu,m,\alpha,\sigma)(Y_i)$ maximal et que $\mathrm{Sing}_\nu(X(n)) \subset V(u_1,u_2) \cup V(u_1,u_3)$ et si $\kappa(x) = 2$ et x est bon. On obtient ce résultat par récurrence décroissante sur $\gamma(u,\lambda) + d(u,\lambda)$.

Si $\gamma(u,\lambda) + d(u,\lambda) = 1$, par (1), on a $\gamma(u,\lambda) = 1$ et $d(u,\lambda) = 0$, alors par (***) et en permutant les indices 2 et 3, on a les hypothèses de III.4.2 et de plus $c(u,\lambda) < 1$ donc $\alpha[V(u_1,u_3)] < \nu$ et donc $\kappa(x) = 0$ et $\mathrm{Sing}_\nu(X(n)) = \{x\}$.

Si $\gamma(u,\lambda) + d(u,\lambda) \geqslant 2$, alors soit $\gamma(u,\lambda) \geqslant 2$, soit $d(u,\lambda) \geqslant 1$. Alors par (2) et (4), la courbe Y_i, i=2 ou 3 avec $(\nu,m,\alpha,\sigma)(Y_i)$ maximal est permise en x.

Si $d(u,\lambda) \geqslant 1$ alors par (3), π est imposé par l'algorithme du point bon. Si $\gamma(u,\lambda) \geqslant 2$ alors par (2), $Y_i \subset \mathrm{Sing}_\nu(X(n))$.

Effectuons π alors

il est clair qu'il y a dans X' au plus un point fermé ν-proche de x et que s'il existe, pour une p-base (v,λ) de $\widehat{O}_{X',x'}$, on a nos hypothèses pour $(x',(v,\lambda))$ avec $\gamma(v,\lambda) + d(v,\lambda) = \gamma(u,\lambda) + d(u,\lambda) - 1$, par récurrence on a que

$$\mathrm{Sing}_\nu(X(n)) \subset V(u_1,u_2) \cup V(u_1,u_3) ,$$

on en déduit que si $\gamma(u,\lambda) \geqslant 2$, π est imposé par l'algorithme du point bon et que si $\kappa(x) = 2$ alors x est bon.

LEMME D.6.5.

Soit x un point maigre à D.Q. de $\mathrm{Sing}(X(n))$ tel qu'il existe une p-base (u,λ) de $\widehat{O}_{X(n),x}$ vérifient

(1) on a (***) pour $(x,(u,\lambda))$,

(2) $c(u,\lambda) < 1$,

et une des conditions suivantes

(3-1) $m(x) = 1$, $\alpha(x) = \nu$ et $\beta(u,\lambda) < 1$,

(3-2) $m(x) = 1$, $\alpha(x) = 1 + \nu$ et $\varepsilon(x) \leq 0,75$,

(3-3) $m(x) = 2$, $\beta(u,\lambda) < 1$ et $e(u,\lambda) \leq 0,5$

Alors $\pi(x) = 0$.

Preuve.

Effectuons l'éclatement

$$\pi = X' \longrightarrow X(n)$$

centré en x. Si dans X' il n'y a pas de point ν-proche de x, le résultat est clair. Sinon, soit $x' \in X'$ un point fermé ν-proche de x. Par D.4.6.(ii) et D.4.7.1., D.4.7(ii), D.4.8.(iii), D.6.1.(ii), D.6.3.(iv) et D.6.4.(iv), x' est à D.Q., pour une p-base (v,μ) de $O_{X',x'}$ on a (***) pour $(x',(v,\mu))$, et $(x',(v,\mu))$ satisfaisant à D.6.5.(1)(2) (3-1) ou (3-2) ou (3-3) et on a pour l'ordre lexicographique

$$(c(v,\mu),\alpha(x'),\beta(v,\mu)) < (c(u,\lambda),\alpha(x),\beta(u,\lambda)).$$

Comme $(c(v,\mu),\alpha(x'),\beta(v,\mu)) \in (1/\nu!\ \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times 1/\nu!\ \mathbb{N})$ (C.2.1.), une récurrence décroissante donne le résultat.

LEMME D.6.6.

Soit x un point maigre de $\mathrm{Sing}(X(n))$ tel que $\pi(x) = 2$ et $m(x) = 1$ et tel qu'on a (**) et une des deux conditions :

(1) $\varepsilon(x) \leq 0,5$,

(2) $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$ et $\varepsilon(x) = 0,75$.

Alors x est bon.

Preuve.

Soit (u,λ) une p-base de $O_{X(n),x}$ et telle qu'on a (***) pour $(x,(u,\lambda))$ et les conditions de D.1.2. ou de D.2.6. Alors on a $c(u,\lambda) \geq 1$, sinon $(x,(u,\lambda))$ satisfait à D.6.5. et $\pi(x) = 0$. Comme $c(u,\lambda) \geq 1$ par D.2.8., $V(u_1,u_3)$ est permise en x et l'algorithme du point bon impose d'effectuer l'éclatement

$$\pi : X' \longrightarrow X(n)$$

centré en $V(u_1,u_3)$. Puisque $\kappa(x) = 2$, dans X' il y a un point ν-proche x' de x. Si $\alpha(x) = \nu(x)$, x' est à D.Q., si $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$, on a $\beta(u,\lambda) < 1$, et $\alpha(x') \geq \nu(x)$, on a $c(u,\lambda) > 1$ comme $\mathcal{E}(x) = 0,75$, on a $\beta''(u,\lambda) = \beta''(u',\lambda) < 1-\nu^{-1}$, d'où, si $\alpha(x') = \nu(x')$, $\langle U_1',U_3'\rangle \subset \mathrm{VDir}(x')$, par III.4.2., on a $\kappa(x') \leq 1$, si $\alpha(x') = 1 + \nu(x')$, clairement x' est à D.Q. Par D.2.8.(iii), si $\kappa(x') = 2$, on a (***) pour $(x',(u',\lambda))$ et $\beta(u',\lambda) = \beta(u,\lambda)$ et $c(u',\lambda) = c(u,\lambda)-1$, $\mathcal{E}(x') \leq \mathcal{E}(x)$ et si $\alpha(x) = 1+\nu(x)$, $\beta''(u,\lambda) = \beta''(u',\lambda)$. Une récurrence décroissante sur $c(u,\lambda)$ donne le résultat.

D.6.7. On laisse au lecteur le soin de vérifier que D.4.6., D.4.7, D.4.8. prouvent D.3. dans le cas où $m(x') = 1$ et que D.6.1., D.6.3., D.6.4. et D.6.6. prouvent D.3. dans le cas où $m(x') = 2$.

REMARQUE D.6.8.

Soit x un point fermé maigre de $\mathrm{Sing}(X(n))$ avec $\kappa(x) = m(x) = 2$ et $\mathcal{E}(x) = 0,75$. Effectuons l'éclatement $\pi: X' \longrightarrow X(n)$ centré en x. Alors tout point fermé $x' \in X'$ qui est (ν,κ)-proche de x et vérifie $m(x') = 1$ est bon.

Preuve.

Par D.4.8.(ii), x' est bon ou il existe une p-base (v,μ) de $O_{X',x'}$ telle qu'on a (***) pour $(x',(v,\mu))$ et $\beta(v,\mu) < 1$, par D.6.6., si $\alpha(x') = \nu(x')$, x' est bon. De plus, toujours par D.4.8.(ii), on a $\mathcal{E}(x') < 1$ et donc, par D.6.6., si $\alpha(x') = 1 + \nu(x')$, x' est bon.

D.7. Nous allons prouver que le théorème II.C.4.4. est vérifié pour $\kappa(x) = 2$. Comme d'habitude, nous étudions une suite infinie d'éclatements

$$\pi(n+i) : X(n+i+1) \longrightarrow X(n+i), \qquad i \in \mathbb{N}$$

centrés en $x(n+i)$ point fermé maigre de $Sing(X(n+i))$ avec $(\nu,\pi)(x(n+i)) = (\nu,\pi)(x(n)) = (\nu,2)$. Par B.4.(iii), nous supposons de plus que l'on a (**) pour $x(n)$. Nous allons prouver que pour un i, $x(n+i)$ est bon.

LEMME D.7.1.

Avec les hypothèses et notations de D.7., on suppose de plus que $\alpha(x(n)) = \nu(x(n))$ et qu'il existe une p-base $(u(0),\lambda)$ de $O_{X(n),x(n)}$ et telle qu'on a (***) pour $(x(n),(u(0),\lambda))$ et que pour tout $i \geq 1$ on a une p-base $(u(i),\lambda)$ de $O_{X(n+i),x(n+i)}$ adaptée en $x(n+i)$ et telle que

$$u(i) = (u_1(i-1)u_2(i-1)^{-1}, u_2(i-1), u_3(i-1)u_2(i-1)^{-1})$$

ou

$$u(i) = (u_1(i-1)u_3(i-1)^{-1}, u_2(i-1)u_3(i-1)^{-1}, u_3(i-1)).$$

Alors il existe un $r \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \geq r$, $x(n+i)$ est bon.

Preuve.

Rappelons que dans le cas présent, on a

$$\alpha(x(n+i)) = \nu(x(n+i)) \quad \text{pour} \quad i \geq 0.$$

Par C.7., il existe r tel que pour tout $i \geq 0$, on a

$$I(X(n+i),f,(u(i),\lambda)) = (u_1(i))^{\nu} \ \mathrm{mod.}(u_2(i),u_3(i)).$$

Par [12] (T.2), pour tout $i \geq 0$, $\Delta(u(i),\lambda)$ est préparé.

On a donc (***) pour $(x(n+i),(u(i),\lambda))$, $i \geq 0$. De plus, par C.7., il existe $r \geq 0$ tel que pour tout $i \geq r$, $\Delta(u(i),\lambda)$ n'a qu'un sommet. Par C.5.(vii), pour tout $i \geq r$, $x(n+i)$ est bon.

On déduit de D.7.1. la proposition suivante.

PROPOSITION D.7.2.

Avec les hypothèses et notations de D.7., si pour un $q \in \mathbb{N}$, on a pour tout $i \geq q$, $m(x(n+i)) = 2$ alors il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \geq r$, $x(n+i)$ est bon.

PROPOSITION D.7.3.

Avec les hypothèses et notations de D.7., s'il existe une courbe formelle C de $X(n+q)$, $q \geqslant 0$ telle que pour tout $i \geqslant q$, $x(n+i) \in C(n+i)$ où $C(n+i)$ est le transformé strict de $C = C(q)$. Alors il existe $r \geqslant q$ tel que pour tout $i \geqslant r$, $x(n+i)$ est bon.

Preuve.

D.7.3.1. Voyons d'abord le cas où $\alpha(C) = \nu = \nu(x(n))$. D'après II.B.9.1., nous supposons que C est régulière transverse à $E(n+q)$ et que $\alpha(x(n+i)) = \nu$ pour $i \geqslant q$. Nous supposons même que $q = 0$. Alors on peut trouver une p-base (u,λ) de $O_{X(n),x(n)}$ adaptée pour $x(n)$ et telle que

(1) $\qquad V(u_1,u_2) = C.$

De plus, on a

(2) $\qquad \mathrm{ord}_C(I(X(n),f,(u,\lambda))) = \nu$

et donc $I(X(n),f,(u,\lambda)) \subset (u_1,u_2)^{\nu}$. Puisqu'on a (**) en $x(n)$, on peut choisir (u,λ) telle que de plus

(3) $\quad U_1 \in \mathrm{VDir}(x(n))$, on a (IV *) pour $(x(n),(u,\lambda))$.

Par C.3.4., on peut trouver

$$v_1 = u_1 + \sum_{0\leq a,0<b} \lambda_{a,b}\, u_3^a\, u_2^b \in k(x(n))[[u_1,u_2,u_3]]$$

tel que $\Delta(v,\lambda)$ est préparé. De plus, $(a,b) \subset \Delta(u,\lambda)$, par (2), on a $\lambda_{a,b} = 0$ si $b = 0$ et donc $v_1 \in (u_1,u_2)$. Donc nous pouvons supposer qu'en plus de (1) on a (***) pour $(x(n),(u,\lambda))$.

Alors, en ce cas où $\alpha(C) = \nu$, on a la conclusion en appliquant D.7.1. à $(x(n),(u,\lambda))$.

Pour le cas où $\alpha(C) = 1 + \nu(x(n))$, nous devons d'abord prouver le lemme suivant .

LEMME D.7.3.2.

Soit x un point maigre à D.Q. de $\mathrm{Sing}(X(n))$ tel qu'on a $(**)$ et $\alpha(x) = 1 + \nu(x)$. On suppose de plus qu'il existe une courbe C régulière transverse à $E(n)$ telle que $\alpha(C) = \nu + 1$.

Alors on peut trouver une p-base (w,λ) de $O_{X(n),x}$ telle que, en choisissant un corps de représentants de $k(x)$ dans $\hat{O}_{X(n),x}$, on a

(1) $E(n) = \mathrm{div}(w_3)$,

(2) $C = V(w_1,w_2)$,

(3) $f = w_3^{A(3)}g + R(f,w,\lambda)$

avec $h(x) = w_3^{A(3)}$,

$$g = w_1^{\nu} w_2 + \sum_{1\leq j\leq \nu, 0\leq b, 0\leq a} \ell_{j,b,a}\, w_1^{\nu-j}\, w_2^b\, w_3^a \ \mathrm{mod.}(w_1^{1+\nu}) ,$$

$\nu = \nu(x)$, $\quad \ell_{j,b,a} \in k(x)$,

posons $d = \inf \{(b-1)j^{-1} \mid \ell_{j,b,a} \neq 0\}$,

$\gamma = \inf \{aj^{-1} \mid \ell_{j,b,a} \neq 0 \text{ et } b-1 = jd\}$,

alors posons

$$G = w_1^{\nu} w_2 + \sum_{1\leq j\leq \nu, a=j\gamma, b-1=jd} \ell_{j,b,a}\, w_1^{\nu-j}\, w_2^b\, w_3^a ,$$

on a en plus que, pour tout polynôme quasi-homogène P , $w_3^{A(3)}G + P(w_1,w_2,w_3)^p$ n'est pas colinéaire à une puissance ν-ème multipliée par $w_3^{A(3)}$.

Preuve.

On peut choisir une p-base (u,λ) de $O_{X(x),x}$ telle qu'on ait $(**)$ pour $(x,(u,\lambda))$ et les conditions (1) et (2) et $U_1 \in \mathrm{VDir}(G_2)$ mod.(U_3) où $G_2 = c\ell_x^{\nu}[h(x)^{-1} D_{[2]}^{u,\lambda} f]$.

Posons alors

$$f = u_3^{A(3)} g' + R(f,u,\lambda)$$

$$g' = \gamma u_1^{\nu} u_2 + \Sigma\, \ell'_{j,b,a} u_1^{\nu - j} u_2^b u_3^a \bmod. (u_1^{1+\nu}) ,$$

$$d' = \inf \{ (b-1) j^{-1} \mid \ell'_{j,b,a} \neq 0 \} .$$

Quitte à remplacer u_2 par γu_2, on prend $\gamma = 1$. Comme $\alpha(C) = \alpha[\nu(u_1,u_2)] = 1+\nu$, on a $d' \geqslant 1$. Si on a (3) pour $(x,(u,\lambda))$, on ne fait rien. Sinon, on pose

$$L(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 d'^{-1} .$$

Si on a

$$(4) \qquad U_3^{A(3)} c\ell_L^{\nu}(g) = U_3^{A(3)} U_2 Q^{\nu} + P^p ,$$

$$Q = U_1 + U_2^d U_3^c A,\ A \in \quad ,\ P \in \hat{O}_{X(n),x} .$$

On modifie alors u_1 en $v_1 = u_1 + u_2^d u_3^c A$ et on fait augmenter d' strictement. Par passage à la limite, on se ramène au cas où on n'a pas (4). Alors soit

$$\gamma(u,\lambda) = \inf \{ a j^{-1} \mid \ell_{j,b,a} \neq 0 \text{ et } b-1 = jd' \}$$

On pose $G' = U_1^{\nu} U_2 + \sum_{1 \leq j < \nu,\, a = j\gamma',\, b-1 = jd'} \ell'_{j,b,a} U_1^{\nu-j} U_2^b U_3^a$.

Si $U_3^{A(3)} G' = U_3^{A(3)} U_2 Q^{\nu} + P^p$ où

$$Q = U_1 + \ell U_2^b U_3^{\gamma(u,\lambda)},\ P \in k(x)[U_1,U_2,U_3] ,$$

on modifie alors u_1 en $v_1 + \lambda u_2^b u_3^{\gamma(u,\lambda)}$ où λ est un relèvement de ℓ. Posons $v = (u_1,u_2,u_3)$. On a $v_{L,u} = v_{L,v}$, $v_{L,u}(g') = v_{L,u}(g'')$ où $f = v_3^{A(3)} g'' + R(f,v,\lambda)$, $\gamma(v,\lambda) > \gamma(u,\lambda)$.

Par passage à la limite, on se ramène au cas où on n'a ni (4), ni (5). C'est-à-dire au cas où on a (3) pour $(x,(w,\lambda))$.

D.7.3.3. Finissons la preuve de D.7.3. Voyons donc le cas où $\alpha(C) = 1 + \nu(x(n))$. Bien sûr, quitte à remplacer n par $n+i$ avec i assez grand, on peut supposer que C est régulière et transverse à $E(n)$. Prenons donc une p-base (u,λ) telle qu'on a D.7.3.2. (1)(2)(3) pour $(x(n),(u,\lambda))$. Alors si on pose

$$u(i) = (u_1 u_3^{-i}, u_2 u_3^{-i}, u_3) ,$$

$(u(i),\lambda)$ est une p-base de $O_{X(n+i),x(n+i)}$ adaptée pour $x(n+i)$.

On vérifie facilement qu'on a D.7.3.2.(1)(2)(3) pour $(x(n+i),(u(i),\lambda))$. De plus :

$$f = u_3(i)^{A(3)+i(\nu+1)} g(i) + R(f,u(i),\lambda)$$

$$g(i) = u_1(i)^{\nu} u_2(i) + \sum \ell_{j,b,a}\, u_1(i)^{\nu-j}\, u_2(i)^b\, u_3(i)^{a+i(b-j-1)}$$

On vérifie que pour un $r \in \mathbb{N}$, on a pour tout $i \geqslant r$ et avec des notations évidentes

$$\ell_{j,b,a} \neq 0 \Longrightarrow a + i(b-j-1) \geqslant j\gamma(i) = j(\gamma+i(d-1))$$

Alors, par D.2.5., $x(n+i)$ est bon.

PROPOSITION D.7.4.

Avec les hypothèses et notations de D.7., si pour un $q \in \mathbb{N}$, on a pour tout $i \geqslant q$

$$m(x(n+i)) = 1 \quad \text{et} \quad k(x(n+i)) = k(x(n+q)) ,$$

alors il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $i \geqslant r$, $x(n+i)$ est bon.

Preuve.

Par B.4.2., il existe une courbe formelle régulière C transverse à $E(n+q)$ et telle que pour tout $i \geqslant q$, les $x(n+i)$ sont sur les transformés stricts $c(i) \subset X(n+i)$ de C.

Alors D.7.3. donne le résultat.

D.7.5. Prouvons que le théorème II.C.4.4. est vérifié pour $n = 2$. Prenons les notations de D.7. Par D.7.2. et D.7.4., nous n'avons plus qu'à regarder le cas où

(1) $\forall q \in \mathbb{N}$, $\exists i \geqslant q$, $m(x(n+i)) = 1$,

(2) $\forall q \in \mathbb{N}$, $\exists j \geqslant q+1$, $(m(x(n+j)) = 2$ et $m(x(n+j-1)) = 1)$

ou $[k(x(n+j)) : k(x(n+j-1))] \geqslant 2$.

Alors, par le théorème D.7., soit il existe i tel que $x(n+i)$ est bon, soit il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon(x(n+q)) < 1$.

Voyons ce dernier cas.

A - Si $\alpha(x(n+q)) = 1 + \nu(x(n+q))$ alors par D.6.6., $x(n+q)$ est bon.

B - Si $\alpha(x(n+q)) = \nu(x(n+q))$ et $m(x(n+q)) = 1$ et $\varepsilon(x(n+q)) \leq 0{,}5$ alors par D.6.6., $x(n+q)$ est bon.

C - Si $\alpha(x(n+q)) = \nu(x(n+q))$ et $m(x(n+q)) = 2$, alors par D.6.8., pour le plus petit $i \geqslant q$ tel que $m(x(n+i)) = 1$, $x(n+i)$ est bon.

D - Si $\alpha(x(n+q)) = \nu(x(n+q))$ et $m(x(n+q)) = 1$ et $\varepsilon(x(n+q)) = 0{,}75$, alors soit i le plus petit entier $\geqslant q+1$ tel que $([k(x(n+i)) : k(x(n+i-1))] \geqslant 2$ ou $m(x(n+i) = 2)$.

D-1. Si $[k(x(n+i) : k(x(n+i-1)] = 2$, par D.4.7.(iv), $x(n+i)$ est bon ou $\varepsilon(x(n+i)) \leq 0{,}5$ (et donc $x(n+i)$ est bon) ou $(\varepsilon(x(n+i) = 0{,}75$ et $\alpha(x(n+i)) = 1 + \nu(x(n+i)))$ (et donc $x(n+i)$ est bon).

D-2. Si $m(x(n+i)) = 2$, alors par D.6.3.(vii) on a une des conditions

(1) $\varepsilon(x(n+i)) = 0{,}75$ et $m(x(n+i)) = 2$,

(2) $\varepsilon(x(n+i+1)) = 0{,}75$ et $m(x(n+i+1)) = 2$,

(3) $\varepsilon(x(n+i+1)) = 0{,}75$ et $\alpha(x(n+i+1)) = 1+\nu(x(n+i+1))$,

(4) $\varepsilon(x(n+i+1)) \leq 0{,}5$ et $\alpha(x(n+i+1)) = \nu(x(n+i+1))$,

(5) $x(n+i+1)$ est bon.

Dans les cas (3)(4)(5), $x(n+i+1)$ est bon.

Dans les cas (1) et (2), on est ramené au cas C.