

THÈSES D'ORSAY

DANIEL PERRIN

Courbes passant par m points généraux de $\mathbb{P}^3$

Thèses d'Orsay, 1986

[<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1986__0193__P0_0>](http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1986__0193__P0_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses d'Orsay » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



NUMDAM

*Thèse numérisée par la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016
et diffusée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

UNIVERSITE PARIS-SUD

Centre D'Orsay

THESE

De Doctorat D'Etat Es Sciences Mathematiques

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES

par Daniel PERRIN

Sujet de la Thèse : Courbes passant par m points généraux de $\mathbb{P}^3$

Soutenue le 14 mai 1986 devant le Jury composé de :

MM. Jean-Pierre SERRE Président
Robin HARTSHORNE
Michel RAYNAUD
Arnaud BEAUVILLE
Laurent GRUSON
André HIRSCHOWITZ

ABSTRACT :

Given m general points of $\mathbb{P}^3$, we try to find a curve of low degree containing these points. The problem involves the normal bundle of the curves in $\mathbb{P}^3$, namely a condition which we call h^0 -stability by analogy with ordinary stability. We give a criterion of h^0 -stability and apply it by use of liaison techniques. Most of the results are collected in several tables.

Remerciements

Jean-Pierre SERRE m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse et je l'en remercie vivement. Il représente en effet, pour les mathématiciens de ma génération, un maître et un modèle, à la fois comme chercheur et comme enseignant, par sa rigueur et sa clarté. Je le remercie également de m'avoir proposé un sujet de seconde thèse aussi passionnant.

Robin HARTSHORNE est venu de Californie pour participer à ce jury. C'est pour moi un grand honneur et un grand plaisir. On reconnaîtra facilement, tout au long de ma thèse comme partout en géométrie algébrique l'influence essentielle de ses propres travaux.

Michel RAYNAUD, après avoir guidé, jadis, mes premiers pas dans la recherche, a bien voulu être une fois encore mon patron et m'a aidé à aplanir les difficultés administratives. Je l'en remercie bien sincèrement.

Arnaud BEAUVILLE, qui a sans doute plus de goût pour les surfaces que pour les courbes, est venu surtout, je crois, en ami. Je l'en remercie et j'espère me montrer digne de son amitié.

Laurent GRUSON est (avec Christian PESKINE que je salue ici) l'un des mathématiciens français qui, dans la tradition d'Halphen, a su redonner éclat et vigueur à la théorie des courbes gauches. Pour le plaisir que j'ai éprouvé à explorer la jungle fascinante des courbes, je le remercie.

Ce travail n'aurait pas été entrepris, ni poursuivi, ni terminé sans l'aide d'André HIRSCHOWITZ. Il a d'abord su me convaincre que la recherche était nécessaire à ma vie de mathématicien, puis il m'a persuadé que j'étais capable d'y parvenir (ce n'était pas le plus facile, mais ceux qui le connaissent savent de quelle force de conviction il est capable).

Tout au long de ce travail, ses idées, ses suggestions, ses conseils ont stimulé mon imagination, infléchi mes propres réflexions, m'ont redonné élan quand je piétinais. Il m'a encouragé sans relâche et critiqué sans faiblesse, le tout, à distance, de Nice à Paris (avec le concours des PTT que je remercie au passage).

Pour tout cela, et pour son amitié, je le remercie chaleureusement.

Madame BONNARDEL a tapé ce texte avec sa gentillesse et sa compétence habituelle. C'était, comme toujours, parfait.

Madame ZIELINSKI s'est chargée de la reproduction de cette thèse et je l'en remercie.

Table des matières

pages
1

Introduction

Plan du travail

§0. Notations. 13

§1. Schémas de Hilbert et schémas de drapeaux. 14

- a) Définitions et rappels.
- b) Etude différentielle de f et π .
- c) Etude de la flèche f : lissité, platitude, image.

§2. Schémas de Hilbert et schémas de drapeaux, le cas des courbes et des points. 20

- a) Notations.
- b) Majoration de $m(d,g)$.
- c) Minoration de $m(d,g)$.

§3. Fibrés de rang 2 : calcul de $m(N)$, h^0 -stabilité. 25

- a) Quelques remarques générales.
- b) Le cas où N est décomposé.
- c) Le cas où N est écrit comme extension de faisceaux inversibles.
- d) h^0 -stabilité.
- e) critères de stabilité et de h^0 -stabilité.

§4. Quelques outils pour l'étude du fibré normal des courbes de $\mathbb{P}^3$. 36

- a) Quelques généralités sur N_C .
- b) Quand N_C est-il décomposé ?
 - b₁) Les intersections complètes.
 - b₂) Les courbes rationnelles.
 - b₃) Le cas général.
- c) N_C écrit comme extension de faisceaux inversibles.
 - c₁) Courbes tracées sur une surface.
 - c₂) Surfaces réglées, théorème de Nagata.
 - c₃) Une réciproque.
- d) Quelques lemmes de contrôle des singularités des surfaces contenant une courbe.
- e) Les méthodes de liaison.
- f) Revue de quelques méthodes de calcul.
- g) Une remarque sur la lissité des schémas de Hilbert.

- a) Le cas N_C décomposé.
 - a₁) Les intersections complètes.
 - a₂) Les courbes rationnelles.
- b) La condition $H^0 N_C(-2) = 0$; généralités.
- c) Une variante : $2d$ points sur une surface.
- d) Quelques calculs de $D_p(g)$.
- e) N_C écrit comme extension de faisceaux inversibles : applications.
 - e₁) Courbes tracées sur une surface.
 - e₂) Avec la théorie des surfaces réglées.
- f) h^0 -stabilité et majorations de $m(N_C)$.
- g) h^0 -stabilité ; calcul de $m(N_C)$; les résultats positifs.
 - I) Utilisation de résultats antérieurs.
 - II) Les critères de stabilité et de h^0 -stabilité.
 - III) Le cas de la liaison par deux surfaces de même degré.
 - IV) La liaison inégale.
 - V) Une amélioration du critère de stabilité.

§6. Résultats et questions ouvertes.

- a) Résultats concernant la condition $h^0 N_C(-2) = 0$; calcul de $D_p(g)$.
 - 1) La minoration de $D_p(g)$.
 - 2) Des majorations de $D_p(g)$.
- b) Résultats concernant la stabilité et la h^0 -stabilité.
 - 1) Minoration de $D_{SS}^0(g)$, estimation asymptotique.
 - 2) Minoration de $D_{SS}(g)$.
 - 3) Estimation asymptotique de D_{SS} et D_S .
 - 4) Relations entre stabilité et h^0 -stabilité.
 - 5) Tableau des résultats pour $g \leq 43$.
 - 6) Questions ouvertes.
- c) Résultats concernant $m(N_C)$ et $m(d,g)$.
 - 1) Pour $m(N_C)$.
 - 2) Majorations de $m(d,g)$.
 - 3) Minorations de $m(d,g)$.
- d) Résultats concernant $m(d)$.
 - 1) Le fil conducteur.
 - 2) Les majorations;
 - 3) La minoration par $2d$; calcul de $m(d)$ pour $d \leq 17$.
 - 4) Minorations de $m(d)$ pour d grand ; comparaison de $m(d)$ et $[M(d)]$.

5) Tableau comparatif de $m(d)$ et $M(d)$ pour $18 \leq d \leq 50$.

Index.

129

Bibliographie.

130

Introduction

Le problème qui est à l'origine de ce travail est le suivant :

Etant donnés m points $x_1, \dots, x_m$ de $\mathbb{P}^3$, en position générale, trouver une courbe C , lisse et connexe, contenant $x_1, \dots, x_m$, de degré le plus petit possible.

L'expression "en position générale" est à prendre au sens suivant :

Il existe un ouvert de Zariski U , non vide, donc dense, de $(\mathbb{P}^3)^m$ tel que, si $(x_1, \dots, x_m) \in U$, une courbe convenable passe par $x_1, \dots, x_m$.

Par exemple, par deux points généraux (i.e. distincts) de $\mathbb{P}^3$ passe une droite (et une seule), mais pas par trois points généraux (les triplets de points alignés forment un fermé de $(\mathbb{P}^3)^3$).

De même, par trois points généraux passe une conique propre (non unique), mais pas par quatre (quatre points généraux de $\mathbb{P}^3$ ne sont pas coplanaires).

Le problème analogue est facile à résoudre pour les courbes planes. On sait, en effet, que par $d(d+3)/2$ points généraux de $\mathbb{P}^2$ passe une courbe lisse de degré d . Il suffit, dans ce cas, de résoudre les équations linéaires imposées par les points aux coefficients du polynôme homogène $F(X, Y, T)$ qui définit C (cf. [9]). Avec des conditions de position générale plus fines le problème peut cependant être plus difficile (cf. [34]).

De même, dans $\mathbb{P}^3$, on sait résoudre la question analogue pour les surfaces : par $\binom{s+3}{3} - 1$ points généraux passe une surface de degré s .

Pour les courbes, en revanche, le problème, bien que tout aussi naturel, est plus délicat (sauf pour les intersections complètes, où on se ramène au cas des surfaces) et peu de résultats semblent connus à ce jour (cf. cependant [3], [18] p. 37 ou [36] p. 203). Par exemple, si C est une courbe de degré s^2-1 , liée à une droite par deux surfaces de degré s , il n'est pas évident de savoir combien on peut lui imposer de points. Cet exemple est d'ailleurs un bon fil conducteur pour parcourir ce travail.

Signalons que le problème analogue pour les courbes non connexes est résolu facilement à partir du précédent. Par exemple, par 4 points généraux passe une courbe C union disjointe de deux droites... Le problème est plus complexe avec des courbes non lisses, ou en imposant des points et des tangentes. Nous n'aborderons pas ces questions ici.

On pose, pour traduire le problème ci-dessus :

$$d(m) = \inf \{d \in \mathbb{N}^* \mid \text{par } m \text{ points généraux de } \mathbb{P}^3 \text{ passe une courbe lisse et connexe de degré } d\}$$

mais, on préfère calculer :

$$m(d) = \text{nombre maximum de points généraux de } \mathbb{P}^3 \text{ par lesquels on peut faire passer une courbe de degré } d; \text{ cf. 2.a, déf. 2.0.}$$

On a évidemment : $d(m) = \inf \{d \mid m(d) \geq m\}$ et $m(d) = \sup \{m \mid d(m) \leq d\}$ de sorte qu'il nous suffit de considérer $m(d)$.

Dans la plupart des applications connues (cf. [26] ou [27]) il convient d'imposer non seulement le degré, mais le genre des courbes. On introduit donc aussi :

$$m(d,g) = \text{nombre maximum de points généraux de } \mathbb{P}^3 \text{ par lesquels on peut faire passer une courbe de degré } d \text{ et genre } g; \text{ cf. 2.a.}$$

$$\text{Bien entendu, on a } m(d) = \sup_{g \geq 0} m(d,g).$$

Le nombre $m(d,g)$ a une traduction immédiate en termes de schémas de Hilbert :

Désignons par H_m le schéma de Hilbert qui paramètre les sous-schémas finis de longueur m , $M = \{x_1, \dots, x_m\}$, de $\mathbb{P}^3$; par $H_{d,g}$ le schéma de Hilbert des courbes lisses et connexes, de degré d et genre g , de $\mathbb{P}^3$; par $D_{m,d,g}$ enfin le schéma des drapeaux (ou schéma d'incidence, ou schéma de Hilbert relatif) qui paramètre les couples (M,C) avec $M \in H_m$, $C \in H_{d,g}$ et $M \subset C$.

Alors, si $f_m: D_{m,d,g} \longrightarrow H_m$ est la projection naturelle (qui à (M,C) associe M), $m(d,g)$ est le plus grand entier m tel que l'image de f_m contienne un ouvert dense de H_m .

Nous pouvons maintenant énoncer les résultats les plus significatifs que nous obtenons, concernant $m(d)$ et $m(d,g)$.

1) Résultats sur $m(d,g)$:

a) Majorations :

L'interprétation en termes de schémas de Hilbert conduit aussitôt à la majoration fondamentale suivante :

$$(2.1) \quad m(d,g) \leq \lfloor 1/2 \dim. H_{d,g} \rfloor \quad (\text{partie entière}).$$

En général, il n'y a pas égalité. Par exemple, si $g = (d-1)(d-2)/2$, les courbes de $H_{d,g}$ sont planes, et donc on a : $m(d,g) \leq 3 < 1/2 \dim. H_{d,g}$, dès que $d \geq 2$.

Plus généralement, on a la majoration suivante :

(2.2) Si toute courbe de $H_{d,g}$ est tracée sur une surface de degré s , on a :

$$m(d,g) \leq \binom{s+3}{3} - 1.$$

Ainsi, pour $d = 5, g = 2$, on a $m(d,g) \leq 9$, alors que $1/2 \dim. H_{d,g} = 10$.

L'une des idées directrices de ce travail est d'essayer de montrer que l'inégalité (2.2) est l'obstruction essentielle qui empêche $m(d,g)$ d'être égal à $[1/2 \dim. H_{d,g}]$.

On obtient d'autres majorations de $m(d,g)$ en étudiant de plus près $\dim. H_{d,g}$ (rappelons déjà que l'on a $\dim. H_{d,g} \geq 4d$) :

(5.28) Si $g \leq 2d$, on a $m(d,g) \leq 2d$.

(5.29) Si $g > 2d$, on a $m(d,g) \leq g$ ou encore, $m(d,g) \leq \sup(d + \frac{g}{2} + \frac{1}{2}; \frac{3d}{2} + \frac{3g}{8} + \frac{1}{4})$.

Les majorations 5.29 sont assez grossières. On connaît en effet fort peu de choses en général concernant la dimension de $H_{d,g}$. Par exemple, quel est le plus grand g ($\geq 2d$) tel que $\dim. H_{d,g} = 4d$? Ou encore, pour d fixé, $\dim. H_{d,g}$ est-elle une fonction croissante de g ?

Si tel était le cas, on aurait la majoration suivante de $m(d,g)$:

Si d est un entier compris entre $(s-1)^2+1$ et s^2 , pour $g \geq 0$ on aurait :

$$(6.25) \quad m(d,g) \leq [1/2 \dim. H_{d,G(d,s)}] \text{ où } G(d,s)$$

est le genre maximum des courbes de degré d non contenues dans une surface de degré $< s$ (cf. [17]).

b) Minorsations de $m(d,g)$:

Dès que d est assez grand par rapport à g , on a $m(d,g) \geq 2d$:

(6.23) Il existe une fonction $D_{hSS}^0(g)$ telle que si $d \geq D_{hSS}^0(g)$, on a $m(d,g) \geq 2d$.

On a ainsi

$$m(d,0) \geq 2d \text{ pour } d \geq 3 ; \quad m(d,1) \geq 2d \text{ pour } d \geq 4 ;$$

$$m(d,2) \geq 2d \text{ pour } d \geq 6 ; \quad m(d,g) \geq 2d \text{ pour } d \geq g+3 \text{ et } g \neq 2.$$

Ce dernier résultat n'est pas optimal puisque, pour $g \rightarrow +\infty$, on a

$$D_{hSS}^0(g) \sim \left(\frac{9}{8}\right)^{1/3} g^{2/3}.$$

Lorsque le genre est grand, on peut espérer de bien meilleures minoration. Par exemple, si l'on a $(s-1)^2 + 1 \leq d \leq s^2$, on espère que :

$$m(d, G(d,s)) = [1/2 \dim. H_{d,G(d,s)}] .$$

Dans ce travail nous prouvons ce résultat seulement pour $d = s^2, s^2 - 1, s^2 - 2$.

2) Résultats concernant $m(d)$:

a) Calcul de $m(d)$ pour $d \leq 17$:

(6.32) On a $m(d) = 2d$ pour $d \leq 17$, sauf pour $d = 2$ et $d = 16$. On a $m(2) = 3$, $m(16) = 33$.

b) Le fil conducteur :

On définit, pour $(s-1)^2 + 1 \leq d \leq s^2$, la fonction (cf. 6.26)
 $M(d) = 1/2 \dim. H_{d,G(d,s)}$. Notre objectif essentiel est de comparer $m(d)$ et $[M(d)]$, que l'on espère égaux. Ceci indiquerait, entre autres, que $m(d)$ n'est pas une fonction croissante de d .

c) Les majorations de $m(d)$:

Elles résultent de celles de $m(d,g)$ et, sauf pour $d \leq 17$, ne sont pas entièrement satisfaisantes.

On a par exemple, pour $(s-1)^2 + 1 \leq d \leq s^2$ et $s \geq 7$:

$$(6.29) \quad m(d) \leq d + \frac{1}{2} G(d,s) + \frac{1}{2} .$$

Mais cette majoration est asymptotiquement en $1/2 d^{3/2}$ alors qu'on espère $m(d) = [M(d)] \sim 1/6 d^{3/2}$.

d) Minoration de $m(d)$:

(6.31) Pour $d \neq 2$, on a $m(d) \geq 2d$.

(par $2d$ points généraux de $\mathbb{P}^3$ passe une courbe lisse et connexe de degré d).

Lorsque d est grand, on peut améliorer nettement cette minoration : on suppose $(s-1)^2 + 1 \leq d \leq s^2$.

$$(6.33) \quad \text{Si } d = s^2, \text{ on a } m(d) \geq M(d) = (s^3 + 6s^2 + 11s - 6)/6.$$

$$\text{Si } d = s^2 - 1, \quad m(d) \geq M(d) = (s^3 + 6s^2 + 5s)/6.$$

$$\text{Si } d = s^2 - 2, \quad m(d) \geq M(d) = (s^3 + 6s^2 - s + 12)/6.$$

$$\text{Si } d = s^2 - r, \text{ avec } 3 \leq r \leq s-1, \text{ on a les deux minoration suivantes :}$$

$$m(d) \geq (s^3 + 6s^2 + 11s)/6 - rs + G_p(r) + 2r - 2$$

$$\text{et} \quad m(d) \geq (s^3 + 6s^2 + 8s)/6 - rs + r^2 - r + 2$$

(la première est meilleure pour r petit, l'autre pour r grand; la fonction $G_p(r)$, définie en 5.8 est équivalente à $\frac{2\sqrt{2}}{3} g^{2/3}$ quand $g \rightarrow +\infty$).

On se reportera à 6.33 pour les autres cas.

Les minoration ci-dessus ne sont sans doute optimales que pour $d = s^2, s^2 - 1, s^2 - 2$. Cependant, elles donnent, asymptotiquement :

$$(6.34) \quad m(d) \geq \frac{1}{6} d^{3/2} \sim M(d)$$

Pour comprendre l'origine de ces résultats et en motiver d'autres, examinons brièvement les méthodes utilisées.

On a vu que le problème est de savoir, pour m donné, si l'image de $f_m : D_{m;d,g} \rightarrow H_m$ contient un ouvert dense de H_m . Il suffit pour cela que f_m soit lisse, donc plate. On aborde cette question par une technique de calcul différentiel en déterminant les espaces tangents à $H_m; H_{d,g}$ et $D_{m;d,g}$. On sait que l'espace tangent à H_m en M (resp. $H_{d,g}$ en C) n'est autre que $H^0(M, N_M)$ (resp. $H^0(C, N_C)$) où N_M (resp. N_C) est le fibré normal à M (resp. C) dans $\mathbb{P}^3$. L'étude de l'espace tangent à $D_{m;d,g}$ en (M, C) conduit au théorème suivant :

$$(2.4) \quad \text{Si } H_{d,g} \text{ est lisse, on a :}$$

$$m(d, g) = \sup_{C \in H_{d,g}} m(N_C)$$

où $m(N_C)$ est un invariant du fibré normal :

$m(N_C) = \sup \{m \in \mathbb{N} \mid \text{Il existe un diviseur positif } M \text{ sur } C, \text{ de degré } m, \text{ tel que la flèche naturelle de restriction :}$
 $r : H^0(C, N_C) \rightarrow H^0(M, N_C|_M) \text{ soit surjective}\}.$

On notera que l'hypothèse de lissité de $H_{d,g}$ n'est pas toujours réalisée (il y a des "pathologies", cf. [38] ou [32]). Dans ce cas, on ne sait pas calculer $m(d,g)$.

Cependant, on connaît suffisamment de critères de lissité de $H_{d,g}$ ($h^1 N_C = 0$, courbes projectivement normales, certains $h^1 I_C(n) = 0$, cf. 2.5) pour traiter un grand nombre de cas.

Le problème initial est donc, pour l'essentiel, ramené à un problème portant sur le fibré normal N_C des courbes de $\mathbb{P}^3$, à savoir le calcul de $m(N_C)$. On note déjà que $m(N_C) \leq 1/2 h^0 N_C$ (lorsque $H_{d,g}$ est lisse en C , on a $h^0 N_C = \dim. H_{d,g}$, on comparera à 2.1) et l'objectif est donc d'atteindre, si possible, cette borne.

Deux cas particuliers sont assez faciles.

1) Lorsque N_C est décomposé (i.e. $N_C = D \oplus E$, avec D, E inversibles), on a $m(N_C) = \inf (h^0 D, h^0 E)$. C'est le cas si C est intersection complète, ou rationnelle, mais on sait (cf. [11]) que c'est loin d'être le cas général.

C'est ainsi que l'on obtient $m(s^2) \geq \binom{s+3}{3} - 2$ et $m(d,0) \geq 2d$ pour $d \neq 2$.

2) Lorsque N_C vérifie la condition $h^0 N_C(-2) = 0$.

En effet, le diviseur $M = 2H$ (double de la section plane de C) convient dans la définition de $m(N_C)$. On a donc $m(N_C) = 2d = 1/2 h^0 N_C$. On applique alors les résultats d'Ellingsrud et Hirschowitz ([7]) :

(5.11) Soit $D_p(g)$ le plus petit entier d tel qu'il existe $C \in H_{d,g}$ vérifiant $h^0 N_C(-2) = 0$. Si $d \geq D_p(g)$, on a : $m(d,g) \geq 2d$.

L'avantage de ce cas est qu'on a une variante de (2.4) qui permet d'imposer aux $2d$ points d'être sur une surface fixée :

(5.12) Soit Q une surface intègre de $\mathbb{P}^3$, de degré $s \geq 2$. Si $d \geq D_p(g)$ et si $x_1, \dots, x_{2d}$ sont $2d$ points généraux de Q , il existe une courbe C lisse et connexe, de degré d et genre g , coupant transversalement Q et passant par $x_1, \dots, x_{2d}$.

Ce type de résultat semble être très utile pour aborder les problèmes de "rang maximum", cf. Ballico-Ellia [2]. Un de nos objectifs est donc désormais le calcul

de $D_p(g)$. Par rapport aux résultats de [7], nous obtenons à ce sujet les points suivants :

- 1) Une minoration de $D_p(g)$ (5.17), qui conduit à l'estimation asymptotique : $D_p(g) \sim (\frac{9}{8})^{1/3} g^{2/3}$.
- 2) Des résultats pour g assez petit, par exemple : $D_p(4) = 7$, $D_p(13) = 11$, $D_p(15) = 12$, $D_p(35) = 18$... voir tableau en 6.a.
- 3) Une méthode pour construire de nouvelles courbes vérifiant $h^0 N_C(-2) = 0$ par liaison (cf. 5.23).

Les résultats ne permettent pas encore de prouver que pour $g \geq 3$ on a $D_p(g) \leq g+3$ (cf. [2]); il manque les cas $g = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20$, voir cependant la question 6.2.

Lorsque l'on n'est pas dans l'un des cas favorables ci-dessus (N_C décomposé ou $h^0 N_C(-2) = 0$), on utilise une écriture de N_C comme extension de faisceaux inversibles :

$$0 \longrightarrow D \longrightarrow N_C \longrightarrow E \longrightarrow 0 ,$$

le plus souvent en plongeant C dans une surface lisse Q de degré s , auquel cas on a : $D = N_{C/Q} \simeq \omega_C(4-s)$ et $E = N_Q|_C \simeq \mathcal{O}_C(s)$. On a le résultat suivant, dans cette situation :

$$(3.7) \quad \inf (h^0 D; h^0 N_C - h^0 D) \leq m(N_C) \leq 1/2 h^0 N_C .$$

Cette inégalité donne $m(N_C) = h^0 N_C - h^0 D$ lorsque $h^0 D \geq 1/2 h^0 N_C$; on obtient ainsi les "mauvais" cas i.e. ceux où $m(N_C) < 1/2 h^0 N_C$. Par exemple, si C est une courbe liée à une courbe plane de degré r par des surfaces de degrés s, t avec $r < s < t$, on obtient :

$$(5.25. A_1) \quad \text{Si } r=1, \quad m(N_C) = \binom{s+3}{3} - s + 2 .$$

$$(5.25. A_2) \quad \text{Si } 1 < r < s-1, \quad m(N_C) = \binom{s+3}{3} - rs + r^2 + 2 ;$$

ce résultat conduit à certaines des minorations 6.33. On obtient aussi quelques résultats positifs lorsque $h^0 D = \frac{1}{2} h^0 N_C$, ainsi, si C est une courbe de degré 11 et genre 12 tracée sur une surface cubique lisse, on a $m(N_C) = 22$... (voir 5.25 B).

Mais, en général, si $h^0 D < 1/2 h^0 N_C$, (3.7) donne seulement un encadrement de $m(N_C)$. Par exemple, si C est une courbe de degré s^2-1 , liée à une droite par deux surfaces de degré s , on a :

$$(5.25. C_1) \quad 1/2 h^0 N_C - 2 \leq m(N_C) \leq 1/2 h^0 N_C = (s^3 + 6s^2 + 5s)/6.$$

Cependant, le résultat précédent conduit à une condition nécessaire et suffisante pour que $m(N_C)$ ait la valeur maximale $[1/2 h^0 N_C]$. On introduit pour cela la notion de h^0 -stabilité (3.11) du fibré normal (ou plus généralement d'un fibré de rang 2) :

N_C est h^0 -semi-stable si et seulement si, pour tout sous-faisceau inversible L de N_C on a $2h^0 L \leq h^0 N_C$. C'est une condition analogue à la semi-stabilité ordinaire, mais où les sections globales remplacent les degrés. D'ailleurs, pour g assez petit ($g \leq 2d$), les deux notions coïncident, mais ce n'est pas le cas en général. On a alors le théorème suivant (lorsque $h^0 N_C$ est pair) :

$$(3.14) \quad m(N_C) = 1/2 h^0 N_C \iff N_C \text{ } h^0\text{-semi-stable}.$$

Lorsque $g \leq 2d$, on en déduit aussitôt la valeur de $m(N_C)$ lorsque N_C est semi-stable. On peut utiliser pour cela certains travaux récents : [4], [1], [47], [7]... On obtient, par exemple, $m(N_C) = 1/2 h^0 N_C$ lorsque C est une courbe (assez générale) de degré 6 et genre 2 ou de degré 7 et genre 5, ou encore de degré 9 et genre 9 etc...

L'apparition dans notre problème de la notion de h^0 -stabilité va nous conduire à nous intéresser de plus près à cette notion et à celle, voisine, de stabilité du fibré normal. Cette tentative s'inscrit dans un courant de recherches très actuel ([1], [4], [7], [5], [40], [47]...) et elle est, de ce fait, largement indépendante, pour ce qui concerne la stabilité du moins, du problème initial.

Résultats concernant la stabilité et la h^0 -stabilité :

Suivant [7], on introduit les fonctions suivantes :

$D_{SS}(g)$ = le plus petit entier d tel qu'il existe une courbe lisse et connexe C , de degré d et genre g , avec N_C semi-stable;

$D_{SS}^0(g)$, défini de la même manière, mais en imposant, de plus, $h^1 N_C = 0$.

On définit aussi des fonctions analogues avec la stabilité, ou la h^0 -semi-stabilité ... cf. 6.b.

Par rapport à [7], nous obtenons les résultats suivants :

1) Une minoration de $D_{SS}^0(g)$ qui conduit à l'estimation asymptotique :

$$(6.6) \quad D_{SS}^0(g) \sim \left(\frac{9}{8}\right)^{1/3} g^{2/3}, \text{ comme pour } D_P.$$

2) Une minoration de $D_{SS}(g)$, liée à la fonction $G(d,s)$ de Gruson-Peskin :

$$(6.8) \quad D_{SS}(g) \geq \psi(g)$$

et une estimation asymptotique :

$$(6.10) \quad D_{SS}(g) \sim \psi(g) \sim g^{2/3}.$$

On doit pour cela construire de nombreuses courbes à fibré normal semi-stable.

3) De nombreux résultats pour g petit, voir tableau en 6.b. Pour $g \leq 43$, on montre ainsi le résultat optimal : $D_{SS}(g) = \psi(g)$, sauf dans les cas $g = 14, 17, 21, 38, 39, 43$.

4) Plus généralement, on obtient la semi-stabilité et la h^0 -semi-stabilité du fibré normal pour une grande classe de courbes grâce aux théorèmes 5.35 et 5.47. C'est par exemple le cas pour les courbes de degré s^2-1 (resp. s^2-2) liées à une droite (resp. une conique) par deux surfaces de degré s . Ceci conduit dans le premier cas à l'égalité :

$$m(N_C) = 1/2 h^0 N_C = (s^3 + 6s^2 + 5s)/6.$$

Cette méthode est à la base de certaines des minoration de $m(d)$ (6.33).

Il reste beaucoup de questions ouvertes à propos de stabilité et h^0 -stabilité.

Par exemple, on voit facilement que N_C semi-stable n'entraîne pas N_C h^0 -semi-stable, mais la réciproque est-elle vraie ? (cf. 6.12).

Une autre idée, assez naturelle, qui peut servir de guide dans ces questions est la suivante :

On sait que si le fibré normal N_C est instable, il existe une surface Q contenant C telle que $\deg. N_{C/Q} > 1/2 \deg. N_C$ (4.3. bis). Peut-on supposer que cette surface est du degré minimum $s = \inf \{n \in \mathbb{N} \mid h^0 I_C(n) \neq 0\}$? Le fibré N_C est-il semi-stable dès que $h^0 I_C(s) \geq 2$? Des exemples (6.b.6) montrent qu'il convient d'être plus prudent, mais on peut toutefois espérer des résultats génériques (cf. 6.17, 6.18).

Nous donnons maintenant un aperçu des méthodes employées pour obtenir les résultats concernant $D_p(g)$ et la stabilité. Deux ingrédients essentiels seront utilisés.

1) Un critère de stabilité et de h^0 -stabilité (3.19, 3.21).

2) Les techniques de liaison (4.e).

Pour 1), prenons le cas où C est tracée sur une surface Q , lisse, de degré s . Alors, $N_{C/Q} \cong \omega_C(4-s)$ est un sous-fibré inversible de N_C . Une condition nécessaire de semi-stabilité (resp. de h^0 -semi-stabilité) est donc :

$$\deg. \omega_C(4-s) \leq 1/2 \deg. N_C \text{ (resp. } h^0 \omega_C(4-s) \leq 1/2 h^0 N_C).$$

On obtient une condition suffisante en adjoignant une hypothèse supplémentaire mettant en jeu, à nouveau, la quantité $h^0 N_C(-2)$. Par exemple, pour la semi-stabilité on impose :

$$(b) \quad h^0 N_C(-2) \leq 2 h^1 \mathcal{O}_C(s-2) \quad \text{cf. 5.31.}$$

C'est ainsi que l'on prouve, par exemple, la semi-stabilité et la h^0 -semi-stabilité de N_C dans le cas des courbes de degré s^2-1 liées aux droites.

Lorsque C est sur plusieurs surfaces de degré s , on peut améliorer le critère 5.31, à condition de contrôler d'assez près les singularités des surfaces en question (cf. 5.44). On obtient ainsi la stabilité de N_C dans le cas des courbes de degré s^2-1 et la semi-stabilité de N_C pour les courbes de degré s^2-2 liées aux coniques. Le critère 5.31, et la variante 5.44, sont les ressorts essentiels des démonstrations de stabilité données dans ce travail. La condition (b) de 5.31 apparaît plutôt comme une astuce technique, mais nous ne savons pas, pour l'heure, nous en affranchir.

On applique alors systématiquement ces critères grâce aux techniques de liaison. Le principe est le suivant : on part d'une courbe lisse Γ (a priori non connexe), que l'on lie par des surfaces lisses de degrés s et t à une courbe lisse C (cf. [44] ou 4.e). L'idée est d'obtenir des résultats sur C à partir de ceux sur Γ . En effet, on sait assez bien calculer, en général, les dimensions des groupes de cohomologie sur C , à partir de celles sur Γ . L'hypothèse fondamentale à faire sur Γ est : $h^0 N_\Gamma(-2) = 0$. On doit souvent y ajouter des hypothèses additionnelles (nullité de certains $h^1 I_\Gamma(n)$...). Les conclusions sur C sont, soit $h^0 N_C(-2) = 0$, soit la semi-stabilité et la h^0 -semi-stabilité. Ainsi, on a :

$$(5.20) \quad \text{Si } h^0 N_\Gamma(-2) = 0 \text{ et si } h^0 I_\Gamma(s-2) = h^1 I_\Gamma(s-2) = 0,$$

alors pour une liaison assez générale de Γ à une courbe C par deux surfaces de degré s , on a

$$h^0 N_C(-2) = 0.$$

(5.35) Si $h^0 N_{\Gamma}(-2) = 0$ et si $h^1 I_{\Gamma}(s-2) = 0$,

alors, pour C liée comme ci-dessus à Γ par des surfaces de degré s , on a N_C semi-stable et h^0 -semi-stable. Si s est assez grand, on a la même conclusion avec l'hypothèse $h^0 N_{\Gamma}(-2) \leq 1$. (5.47).

Comme la condition $h^0 N_{\Gamma}(-2) = 0$ est réalisée dès que d est assez grand, le champ d'application de 5.20 et 5.35 est très vaste, cf. 5.22 et 5.40.

On obtient aussi des résultats avec des liaisons par des surfaces de degrés inégaux ($s < t$), voir 5.g.IV. Dans ce cas, les critères 5.31 peuvent parfois être efficaces même si $h^0 N_{\Gamma}(-2) \neq 0$, et même si N_{Γ} est instable. Nous étudions, de manière plus approfondie, le cas où Γ est une intersection complète (cf. 5.41).

Il serait étonnant, et pour tout dire immoral, qu'un problème aussi naturel que celui que nous abordons ici n'ait pas d'applications.

A l'heure actuelle, nos résultats sont utilisés dans les problèmes de rang maximum par Hartshorne et Hirschowitz [26] et devraient pouvoir l'être aussi par Ballico et Ellia cf. [2].

Il interviennent aussi, pour des problèmes de position générale, dans l'article en préparation [27] de Hartshorne et Hirschowitz.

L'organisation du travail est la suivante : au § 1 on étudie les projections d'un schéma de drapeaux général, comme dans la thèse [32] de J.O. Kleppe, mais avec des moyens plus rudimentaires. Le § 2 est l'application au cas des courbes et des points des résultats du § 1. Au § 3 on étudie l'invariant $m(N)$ pour un fibré de rang 2 quelconque sur une courbe, on introduit la notion de h^0 -stabilité et on donne des critères de stabilité et de h^0 -stabilité.

Le § 4 regroupe les généralités concernant le fibré normal des courbes de $\mathbb{P}^3$, avec, entre autres, la suite exacte associée au plongement de C dans une surface, des lemmes de contrôle des singularités des surfaces contenant C et les énoncés concernant les méthodes de liaison.

Le § 5 contient l'essentiel des applications des § 2, 3 et 4. On y étudie d'abord le cas où N_C est décomposé, puis le cas $h^0 N_C(-2) = 0$ avec les calculs concernant D_P . Viennent ensuite les applications du § 3 (extension, h^0 -stabilité) avec les critères de stabilité et leurs applications via liaison. On termine par la variante utilisant des pinces de surfaces.

Enfin, le § 6 est celui des résultats et des questions ouvertes, il est divisé en quatre rubriques :

$D_P(g)$; stabilité ; $m(d,g)$ et $m(d)$.

Une partie des résultats de cette thèse est parue dans trois notes [41],[42], [43]. Signalons que certaines notations ont été modifiées : $k_{\max}(C)$ est devenu $m(N_C)$; $k(d,g)$ est devenu $m(d,g)$; $k(N)$ est devenu $m(N)$.

Signalons enfin que la notion de h^0 -stabilité s'est dégagée au cours d'échanges épistolaires entre A. Hirschowitz et R. Hartshorne (resp. A. Hirschowitz et l'auteur).

§0. Notations.

Le cardinal d'un ensemble A est noté $|A|$.

Si a est un nombre réel, on désigne par $[a]$ sa partie entière.

Le groupe symétrique à m lettres est noté S_m .

Si X est un schéma et F un faisceau sur X , on note $H^i F = H^i(X, F)$ lorsqu'il n'y a pas risque de confusion. Lorsque $H^i F$ est un espace vectoriel de dimension finie, sa dimension est notée $h^i F$.

La caractéristique d'Euler-Poincaré de F est notée $\chi(F)$. Si X est un schéma projectif, le polynôme de Hilbert-Samuel de F est alors $\chi(F(n))$, $n \in \mathbb{Z}$.

Si Y est un sous-schéma de X , on note $F|_Y$ la restriction de F à Y .

Lorsque D est un diviseur de Cartier sur X , on pose :

$$F(-D) = F \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-D).$$

L'espace tangent à X en x est noté $T_x(x)$.

Enfin, on désigne par X_{red} le schéma réduit associé à X ; si $f: X \rightarrow Y$ est un morphisme, il induit $f_{\text{red}}: X_{\text{red}} \rightarrow Y_{\text{red}}$.

Dans toute la suite, nous travaillerons sur un corps k algébriquement clos, de caractéristique zéro.

Si X, S sont des k -schémas, on pose $X_S = X \times_{\text{Spec } k} S$. L'espace projectif $\mathbb{P}^3(k)$ sera noté simplement $\mathbb{P}^3$. Si X est un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^3$, on désigne par $\mathcal{O}_X$ son faisceau structural, $\mathcal{I}_X$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ qui définit X , $N_{X/\mathbb{P}^3}$, voire N_X , le faisceau normal à X dans $\mathbb{P}^3$, T_X le faisceau tangent, ω_X le faisceau canonique.

Pour les notations introduites dans le texte, on se reportera à l'index.

§1. Schémas de Hilbert et schémas de drapeaux.

Les résultats de ce § sont, pour l'essentiel, dans la thèse de Kleppe [32]. Cependant, nous en donnons des démonstrations directes, valables dans le cas qui nous intéresse (cf. Ex. 1.1 ou §2), et qui requièrent des techniques moins sophistiquées que celles de [32]. On notera, en contrepartie, que les résultats de [32] sont meilleurs dans le cas général (cf. Th. 1.5).

a) Définitions et rappels.

Soit $\mathbb{P} \subset \mathbb{P}_k^n$ un k -schéma projectif et soit p un polynôme à coefficients rationnels. On note $H(p)$ le schéma de Hilbert $\text{Hilb}_{\mathbb{P}}^p$. Rappelons qu'un point de $H(p)$ à valeurs dans un k -schéma S est un sous-schéma fermé X_S de $\mathbb{P}_S$, plat sur S , et dont les fibres X_s , pour $s \in S$, ont comme polynôme de Hilbert-Samuel le polynôme donné p .

Pour l'existence et les propriétés des schémas de Hilbert, voir [12] ou [37] lect. 15.

Si p et q sont deux polynômes à coefficients rationnels, on désigne par $D(p,q)$ le schéma des drapeaux de $\mathbb{P}$, de polynômes p et q . Un point de $D(p,q)$ à valeurs dans S est un couple (X_S, Y_S) , avec $X_S \subset Y_S \subset \mathbb{P}_S$, où Y_S (resp. X_S) est un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_S$ (resp. de Y_S), X_S et Y_S , plats sur S , ayant en $s \in S$ des fibres X_s, Y_s de polynômes de Hilbert-Samuel respectifs p et q . Pour l'existence de $D(p,q)$, voir [32] 1.1 ou [12]. On notera que $D(p,q)$ n'est autre que le schéma de Hilbert relatif $\text{Hilb}_{Y(q)/H(q)}^p$, au sens de [12], où $Y(q)$ est le schéma universel au-dessus de $H(q)$.

Exemple 1.1.

Si $\mathbb{P} = \mathbb{P}_k^3$, si m, d, g sont des entiers avec $m, d > 0$; $g \geq 0$, et si on prend pour polynômes de Hilbert $p(z) = m$, $q(z) = dz + 1 - g$, $D(p,q)$ paramètre les couples (M, C) où C est une courbe de degré d et genre g et M un m -uplet de points de C (cf. §2). Pour d'autres exemples, cf. [32].

Le schéma $D(p,q)$ est muni de deux projections naturelles :

$$\begin{array}{ccc} D(p,q) & \xrightarrow{\pi} & H(q) \\ f \downarrow & & \\ & & H(p) \end{array}$$

définies par $f(X,Y) = X$ et $\pi(X,Y) = Y$. Dans ce qui suit, on étudie la flèche f et on cherche, en particulier, si son image contient un ouvert non vide, i.e. si pour X assez général dans $H(p)$, il existe Y dans $H(q)$, contenant X . Dans le cas de l'exemple 1.1, on retrouve le problème posé dans l'introduction.

b) Etude différentielle de f et π .

Soit X un point rationnel de $H(p)$, donc, en particulier, un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}$. Soit $k[\epsilon]$ l'algèbre des nombres duaux sur k (c'est-à-dire, tels que $\epsilon^2 = 0$). Rappelons (cf. [12]) qu'un point de l'espace tangent de Zariski $T_{H(p)}(X)$ est une déformation infinitésimale de X , c'est-à-dire, un sous-schéma fermé X_ϵ de $\mathbb{P}_\epsilon = \mathbb{P} \otimes_k k[\epsilon]$, plat sur $k[\epsilon]$, qui se réduit à X modulo ϵ .

Si I_X est l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ qui définit X , X_ϵ est défini par un idéal I_{X_ϵ} de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_\epsilon}$ qui se réduit à I_X modulo ϵ .

On associe alors à I_{X_ϵ} , de manière bijective, un homomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -modules $\varphi: I_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ de la manière suivante :

Soit $U \subset \mathbb{P}$ un ouvert affine, $U_\epsilon = U \otimes_k k[\epsilon]$, et soit $x \in H^0(U, I_X)$. Il existe $y \in H^0(U, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})$ tel que $x + y\epsilon \in H^0(U_\epsilon, I_{X_\epsilon})$. On pose alors $\varphi(x) = y|_X \in H^0(U, \mathcal{O}_X)$ et on

vérifie que ceci définit bien φ , indépendamment du choix de y . Réciproquement, si φ est donné et U assez petit, on relève arbitrairement

$\varphi(U): H^0(U, I_X) \rightarrow H^0(U, \mathcal{O}_X)$ en $\lambda(U): H^0(U, I_X) \rightarrow H^0(U, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})$ et on pose :

$$H^0(U_\epsilon, I_{X_\epsilon}) = \{x + \lambda(U)(x)\epsilon + y\epsilon, \text{ avec } x, y \in H^0(U, I_X)\}.$$

Ceci définit I_{X_ϵ} , donc X_ϵ et on obtient ainsi un isomorphisme :

$$\theta_X: T_{H(p)}(X) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(I_X, \mathcal{O}_X).$$

Considérons maintenant le faisceau normal à X dans $\mathbb{P}$, qui sera noté $N_{X/\mathbb{P}}$ ou N_X . C'est le faisceau N_X défini par :

$$N_X = \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{P}}(I_X, 0_X) = \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{P}}(I_X/I_X^2, 0_X)$$

et l'isomorphisme ci-dessus est donc, en fait, un isomorphisme :

$$\theta_X : T_{H(p)}(X) \xrightarrow{\sim} H^0(X, N_X) .$$

Passons maintenant au schéma des drapeaux. Si X, Y sont deux sous-schémas fermés de $\mathbb{P}$, avec $X \subset Y$ on a les morphismes d'inclusion :

$$i : I_Y \hookrightarrow I_X$$

et de restriction :

$$\rho : 0_Y \rightarrow 0_X .$$

L'inclusion i induit sur les faisceaux normaux un morphisme u de $N_X = \underline{\text{Hom}}(I_X, 0_X)$ dans $N_Y|_X = \underline{\text{Hom}}(I_Y, 0_X)$ et on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow N_{X/Y} \rightarrow N_X \xrightarrow{u} N_Y|_X$$

(cf. [13] IV 16.2.7 ou [21] III §4). Rappelons que si l'immersion i est régulière (par exemple, si X et Y sont lisses sur k), u est surjectif.

On définit alors sur les sections de N_X et N_Y les morphismes suivants :

1) Le morphisme de restriction r :

$$\begin{array}{ccc} r : H^0(Y, N_Y) & \rightarrow & H^0(X, N_Y|_X) \\ \parallel & & \parallel \\ \text{Hom}_{\mathbb{P}}(I_Y, 0_Y) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{P}}(I_Y, 0_X) \end{array}$$

est donné par $r(\psi) = \rho \circ \psi$.

2) Le morphisme s est obtenu à partir de u par passage aux sections globales :

$$\begin{array}{ccc} s : H^0(X, N_X) & \rightarrow & H^0(X, N_Y|_X) \\ \parallel & & \parallel \\ \text{Hom}_{\mathbb{P}}(I_X, 0_X) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{P}}(I_Y, 0_X) . \end{array}$$

Il est donné par $s(\varphi) = \varphi \circ i$.

On peut alors déterminer l'espace tangent en un point du schéma de drapeaux $D(p, q)$:

Proposition 1.2.

Soit (X, Y) un point rationnel de $D(p, q)$. On a donc $X \subset Y$. Soit T l'espace tangent à $D(p, q)$ en (X, Y) . On a un isomorphisme :

$$\theta : T \xrightarrow{\sim} \{(\varphi, \psi) \in H^0(X, N_X) \times H^0(Y, N_Y) \text{ tels que } s(\varphi) = r(\psi)\}.$$

De plus, les applications tangentes induites par f et π :

$$df : T \rightarrow T_{H(p)}(X)$$

$$d\pi : T \rightarrow T_{H(q)}(Y)$$

sont alors données, modulo les identifications θ , $\theta_X : T_{H(p)}(X) \rightarrow H^0(X, N_X)$ et $\theta_Y : T_{H(q)}(Y) \rightarrow H^0(Y, N_Y)$ par les formules : $df(\varphi, \psi) = \varphi$; $d\pi(\varphi, \psi) = \psi$.

On peut résumer cette proposition en disant qu'on a un diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{d\pi} & H^0(Y, N_Y) \\ df \downarrow & & \downarrow r \\ H^0(X, N_X) & \xrightarrow{s} & H^0(X, N_Y|_X) \end{array}$$

i.e. T est le produit fibré de $H^0(X, N_X)$ et $H^0(Y, N_Y)$ au-dessus de $H^0(X, N_Y|_X)$.

Démonstration :

Un point de T est un couple (X_ϵ, Y_ϵ) , où X_ϵ (resp. Y_ϵ) est une déformation infinitésimale de X (resp. Y) et où, de plus, on a $X_\epsilon \subset Y_\epsilon$. Via l'isomorphisme θ_X (resp. θ_Y), X_ϵ (resp. Y_ϵ) correspond à un homomorphisme $\varphi : I_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ (resp. $\psi : I_Y \rightarrow \mathcal{O}_Y$) et on a les équivalences :

$$X_\epsilon \subset Y_\epsilon \iff I_{Y_\epsilon} \subset I_{X_\epsilon} \iff \varphi \circ i = \rho \circ \psi \iff r(\psi) = s(\varphi).$$

En effet, si $I_{Y_\epsilon} \subset I_{X_\epsilon}$, soit U un ouvert affine de Y et soit $x \in H^0(U, I_Y)$. Si $y = \psi(x)$, on a $x + y\epsilon \in H^0(U_\epsilon, I_{Y_\epsilon}) \subset H^0(U_\epsilon, I_{X_\epsilon})$ et donc, $\varphi(x) = y|_X = \rho(y)$.

Réciproquement, si $\varphi \circ i = \rho \circ \psi$, soit $x + y\epsilon$ dans $H^0(U_\epsilon, I_{Y_\epsilon})$, on a $\psi(x) = y|_Y$, donc $\rho\psi(x) = y|_X = \varphi(x)$ ce qui, vu la définition de φ , prouve que l'on a : $x + y\epsilon \in H^0(U_\epsilon, I_{X_\epsilon})$.

Il résulte de ce qui précède que les points de T correspondent bijectivement aux couples (φ, ψ) avec $r(\psi) = s(\varphi)$ comme annoncé.

De plus, on a par définition $df(X_\epsilon, Y_\epsilon) = X_\epsilon$ et $d\pi(X_\epsilon, Y_\epsilon) = Y_\epsilon$, d'où, via les identifications 0 , 0_X et 0_Y , $df(\varphi, \psi) = \varphi$ et $d\pi(\varphi, \psi) = \psi$.

Corollaire 1.3.

Avec les notations précédentes :

1) Si r est surjective, df est surjective.

2) Réciproquement, si df est surjective et si s est surjective, r est surjective.

Remarque 1.4.

La condition s surjective est réalisée en particulier si X et Y sont lisses et si $H^1(X, N_{X/Y}) = 0$. En effet on a alors la suite exacte :

$$0 \rightarrow N_{X/Y} \rightarrow N_X \rightarrow N_Y|_X \rightarrow 0.$$

c) Etude de la flèche f : lissité, platitude, image.

On a le théorème suivant :

Théorème 1.5 (Kleppe).

Soit (X, Y) un point rationnel de $D(p, q)$. On suppose $H(q)$ lisse en Y . Alors :

1) Si $r: H^0(Y, N_Y) \rightarrow H^0(X, N_Y|_X)$ est surjective, f est lisse au point (X, Y) .

2) Réciproquement, si f est lisse en (X, Y) et si $s: H^0(X, N_X) \rightarrow H^0(X, N_Y|_X)$ est surjective, r est surjective.

Démonstration :

L'assertion 2) résulte du corollaire 1.3 puisque f lisse implique df surjective.

Pour 1), voir [32] 1.3.4 pour la démonstration dans le cas général. Nous nous limiterons ici au cas où l'on a, de plus : $H^1(X, N_{X/Y}) = 0$, et où X est localement intersection complète dans Y (par exemple si X et Y sont lisses, ou si X est un diviseur sur Y intègre cf. [21] III §4). Ces hypothèses seront réalisées dans le cas qui nous intéresse, cf. §2. Alors, on sait, cf. [12], que π est lisse en (X, Y) , donc que $D(p, q)$ est lisse sur k en ce point. Il suffit d'appliquer [13] IV 17.11.1 pour obtenir la conclusion.

Corollaire 1.6.

Avec les notations de 1.5 (et toujours l'hypothèse de lissité de $H(q)$ en Y), supposons r surjective. Alors l'image de f contient un voisinage ouvert de X .

(En effet, f est lisse, donc plate, donc ouverte en (X,Y)).

Remarque 1.7.

On a ainsi une condition permettant d'affirmer que pour X dans $H(p)$ assez général, il existe Y dans $H(q)$ contenant X .

§2. Schémas de Hilbert et schémas de drapeaux,
le cas des courbes et des points.

a) Notations.

On reprend les notations de l'exemple 1.1. On a donc $\mathbb{P} = \mathbb{P}_k^3$ et m, d, g sont des entiers tels que $m, d > 0$ et $g \geq 0$. On considère les polynômes $p(z) = m$ et $q(z) = dz + 1 - g$ et les schémas $H(p)$, $H(q)$, $D(p, q)$ comme en §1, a.

Soit H_m l'ouvert de $H(p)$ formé des sous- k -schémas de $\mathbb{P}^3$, finis de longueur m et lisses, c'est-à-dire, formés de m points distincts de $\mathbb{P}^3$; H_m est un ouvert dense de $H(p)$. Si U_m est l'ouvert de $(\mathbb{P}^3)^m$ dont les points rationnels sont les m -uplets de points distincts de $\mathbb{P}^3$, le groupe symétrique S_m opère sur U_m et H_m n'est autre que le quotient U_m/S_m . Il en résulte que H_m est lisse, connexe, de dimension $3m$.

Soit, d'autre part, $H_{d,g}$ l'ouvert de $H(q)$ dont les points rationnels sont les courbes de $\mathbb{P}^3$ lisses et connexes, de degré d et genre g .

On considère alors, dans le schéma de drapeaux $D(p, q)$ l'ouvert $D_{m;d,g} = f^{-1}(H_m) \cap \pi^{-1}(H_{d,g})$, dont les points rationnels sont les couples (M, C) où C est une courbe lisse et connexe de degré d et genre g et M un ensemble de m points distincts de C . On restreint f et π à $D_{m;d,g}$ et on note f_m et π_m les restrictions :

$$f_m : D_{m;d,g} \rightarrow H_m$$

$$\pi_m : D_{m;d,g} \rightarrow H_{d,g}.$$

Résoudre le problème posé dans l'introduction, c'est montrer que, pour m convenable, l'image de f_m contient un ouvert non vide de H_m .

Précisément, on pose :

Définition 2.0.

$$m(d, g) = \sup \{ m \in \mathbb{N}^* \mid \text{Im } f_m \text{ contient un ouvert non vide de } H_m \} ;$$

$m(d, g)$ est le nombre maximum de points généraux de $\mathbb{P}^3$ par lesquels on peut faire passer une courbe de $H_{d, g}$. On pose ensuite :

$$m(d) = \sup_{g \geq 0} m(d, g) ;$$

$m(d)$ est le nombre maximum de points généraux de $\mathbb{P}^3$ par lesquels on peut faire passer une courbe lisse et connexe de degré d .

b) Majoration de $m(d, g)$.

Proposition 2.1.

On a : $m(d, g) \leq 1/2 \dim H_{d, g}$.

Démonstration :

Posons $D = D_{m; d, g}$. Supposons que $\text{Im } f_m$ contient l'ouvert non vide (donc dense) W de H_m et soit $V = f_m^{-1}(W)$. C'est un ouvert non vide de D et $f_m(V) = W$. On en déduit les inégalités :

$$3m = \dim W \leq \dim V \leq \dim D .$$

Par ailleurs, la projection $\pi_m : D \rightarrow H_{d, g}$ est surjective et la fibre de π_m en C est l'ouvert de Hilb_C^m dont les éléments sont les diviseurs M formés de m points distincts de C .

L'espace tangent en M à la fibre est alors $H^0(M, N_{M/C})$ où $N_{M/C}$ est le fibré normal à M dans C . Comme $N_{M/C}$ est localement libre de rang 1, et M de degré m , on a $\dim H^0(M, N_{M/C}) = m$. Comme $H^1(M, N_{M/C}) = 0$ (puisque $\dim M = 0$), la fibre est lisse de dimension m (cf. [12]). On en déduit : $\dim D \leq m + \dim H_{d, g}$, d'où $2m \leq \dim H_{d, g}$.

Remarque 2.2.

En général, $m(d, g)$ n'est pas égal à $1/2 \dim H_{d, g}$ (ni à $\lfloor 1/2 \dim H_{d, g} \rfloor$ si $\dim H_{d, g}$ est impaire). Supposons que pour un entier s , toute courbe de $H_{d, g}$ soit tracée sur une surface de degré s (c'est le cas si on a pour toute C de $H_{d, g}$: $h^0_C(s) < \binom{s+3}{3}$). Alors, $m(d, g) \leq \binom{s+3}{3} - 1$. En effet, si par m points généraux de $\mathbb{P}^3$ passe une courbe de $H_{d, g}$, il y passe aussi une surface de degré s , donc on a : $m \leq \binom{s+3}{3} - 1$.

Par exemple, si $g = (d-1)(d-2)/2$, $H_{d,g}$ est formé de courbes planes et donc $m(d,g) \leq 3$, alors que $\dim H_{d,g} = \frac{d(d+3)}{2} + 3$ est strictement plus grand que 6 dès que $d \geq 2$. De même, si $d=5$, $g=2$, toute courbe de $H_{5,2}$ est sur une quadrique, donc $m(5,2) \leq 9$, alors que $\dim H_{5,2} = 20$.

Cependant, les exemples que nous connaissons nous incitent à penser que ce phénomène (i.e. le genre g est grand, donc les courbes de $H_{d,g}$ sont sur une surface de bas degré) est l'obstruction essentielle (et peut-être la seule) à la validité de l'égalité : $m(d,g) = \lfloor 1/2 \dim H_{d,g} \rfloor$. Un de nos objectifs, désormais, est d'analyser à quelles conditions cette formule est vraie.

c) Minoration de $m(d,g)$.

Cette minoration va résulter directement du théorème 1.5. Nous aurons besoin de la définition suivante :

Définition 2.3.

Soit C une courbe lisse et connexe, N un faisceau localement libre de rang 2 sur C . On pose :

$$m(N) = \sup \{ m \in \mathbb{N}^* \mid \text{Il existe un diviseur positif } M \text{ de degré } m \text{ sur } C \\ \text{tel que } r : H^0(C, N) \rightarrow H^0(C, N|_M) \text{ soit surjective} \}.$$

Comme la propriété est ouverte sur Hilb_C^m , on peut supposer que M est formé de m points distincts. On notera que si $N = N_C = N_{C/\mathbb{P}^3}$, la flèche r est celle que l'on a rencontrée en §1,b. Le théorème suivant relie $m(d,g)$ et les $m(N_C)$.

Théorème 2.4.

$$1) \text{ On a : } m(d,g) \leq \sup_{C \in H_{d,g}} m(N_C).$$

2) Si $H_{d,g}$ est lisse en C , on a :

$$m(N_C) \leq m(d,g).$$

3) Si $H_{d,g}$ est lisse, on a :

$$m(d,g) = \sup_{C \in H_{d,g}} m(N_C).$$

Démonstration :

Le point 3) est conséquence immédiate de 1) et 2). Notons déjà que si (M, C) est un point rationnel de $D = D_{m;d,g}$, on a $H^1(M, N_{M/C}) = 0$ puisque $\dim M = 0$, et donc (cf. Rem. 1.4) l'application $s : H^0(M, N_M) \rightarrow H^0(M, N_C|_M)$ est surjective.

1) Posons $m = m(d, g)$. Quitte à remplacer H_m et D par des ouverts, on peut supposer f_m surjective, donc aussi $f_{m, \text{réd.}} : D_{\text{réd.}} \rightarrow H_m$. Quitte à remplacer $D_{\text{réd.}}$ par une composante irréductible qui domine H_m , on peut supposer $D_{\text{réd.}}$ intègre. Alors, en vertu du théorème de lissité générique (la caractéristique est zéro), $f_{m, \text{réd.}}$ est lisse sur un ouvert non vide donc $df_{m, \text{réd.}}$ surjective en un point (M, C) de cet ouvert.

Comme on a le diagramme ci-dessous sur les espaces tangents :

$$\begin{array}{ccc} T_{D_{\text{réd.}}}(M, C) & \longrightarrow & T_D(M, C) \\ & \searrow df_{m, \text{réd.}} & \downarrow df_m \\ & & T_{H_m}(M) \end{array}$$

df_m est, a fortiori, surjective.

Comme s est surjective, il résulte de 1.3 que $r : H^0(C, N_C) \rightarrow H^0(M, N_C|_M)$ est surjective, et donc $m \leq m(N_C) \leq \sup m(N_C)$.

2) Soit (M, C) un point de D tel que r soit surjective et $m = \deg M = m(N_C)$. D'après 1.6 l'image de f_m contient un ouvert non vide, donc $m \leq m(d, g)$.

Remarques 2.5.

1) On notera que, comme $H^1(M, N_{M/C}) = 0$ et comme C est lisse et M un diviseur sur X , la démonstration que nous avons donnée du théorème 1.5 est valable ici.

2) La condition de lissité de $H_{d,g}$ en C est réalisée dans deux cas particuliers importants :

a) Lorsque $H^1(C, N_C) = 0$ (cf. [12]).

b) Lorsque C est projectivement (ou arithmétiquement) normale i.e. vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad h^1 I_C(n) = 0 \quad (\text{cf. [6]}) .$$

Nous verrons d'autres conditions au §4,g portant sur la nullité de certains $h^1 I_C(n)$. Voir aussi [32] Rem. 2.3.7. On conjecture (Sernesi) que si C est de rang

maximum, $H_{d,g}$ est lisse en C . Pour des exemples de non lissité, cf. [32], [38] ou [48].

3) Dans l'étude précédente, on peut remplacer partout le schéma $H_{d,g}$ par une de ses composantes irréductibles $H_{d,g,i}$.

Si on note $m(d,g,i)$ le nombre maximum de points de $\mathbb{P}^3$ par lesquels passe une courbe de la composante $H_{d,g,i}$, on obtient de la même façon les résultats suivants :

a) $m(d,g,i) \leq 1/2 \dim H_{d,g,i}$.

b) Si toutes les courbes de $H_{d,g,i}$ sont sur une surface de degré s :

$$m(d,g,i) \leq \binom{s+3}{3} - 1.$$

c) Si $H_{d,g,i}$ est lisse :

$$m(d,g,i) = \sup_{C \in H_{d,g,i}} m(N_C).$$

4) Dans [41] nous avons imprudemment affirmé que l'égalité :

$$m(d,g) = \sup_{C \in H_{d,g}} m(N_C) \text{ était vraie sous l'hypothèse, plus faible, que } H_{d,g} \text{ est}$$

réduit. A l'heure actuelle, nous ne savons pas si cette affirmation est erronée ou non. En tous cas, l'assertion c) de la remarque 3 ci-dessus ne subsiste pas sous l'hypothèse $H_{d,g,i}$ réduit. Il existe en effet une composante réduite de $H_{18,39}$ telle que $m(18,39,i) = 33$, mais où pour une courbe $C_0 \in H_{18,39,i}$, on a $m(N_{C_0}) = 34$ (cf. [48] et §5gIV).

§5. Fibrés de rang deux : calcul de $m(N)$, h^0 -stabilité

Le théorème 2.4 ramène essentiellement le calcul de $m(d,g)$ à celui de l'invariant $m(N_C)$ du fibré normal. Nous abordons ici le calcul de $m(N)$ dans le cadre d'un fibré de rang 2 quelconque sur une courbe.

a) Quelques remarques générales.

On désigne par C une courbe lisse et connexe de $\mathbb{P}^3$, de degré d et genre g et par N un faisceau localement libre de rang 2 sur C (on dira aussi un fibré de rang 2). L'invariant $m(N)$ a été défini en 2.3, la flèche de restriction r en 1.b.

Proposition 3.1.

Soit M un diviseur positif de degré m sur C . La flèche $r: H^0(C, N) \rightarrow H^0(M, N|_M)$ est surjective si et seulement si on a :

$$h^0 N(-M) = h^0 N - 2m .$$

Démonstration :

On a la suite exacte associée au diviseur M :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(-M) \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_M \rightarrow 0$$

qui donne en tensorisant par N :

$$0 \rightarrow N(-M) \rightarrow N \rightarrow N|_M \rightarrow 0 .$$

En passant aux sections globales, on voit que r est surjective si et seulement si :

$$h^0 N = h^0 N(-M) + h^0 N|_M = h^0 N(-M) + 2m$$

puisque N est localement libre de rang 2 et $\deg.M = m$.

Corollaire 3.2.

On a $m(N) \leq \frac{1}{2} h^0 N$.

Remarque 3.3.

Si C est un point lisse de $H_{d,g}$ et si $N = N_C$, on a $h^0 N_C = \dim.H_{d,g}$. On comparera 3.2 et 2.1, à la lumière du théorème 2.4. Là encore, en général, $m(N)$

peut être strictement plus petit que $[1/2 h^0 N]$ (cf. 3.7), mais l'une des questions centrales de ce paragraphe est de préciser à quelles conditions on a :

$$m(N) = [1/2 h^0 N] \quad (\text{cf. d.}).$$

b) Le cas où N est décomposé.

Proposition 3.4.

Si N est décomposé (i.e. $N = D \oplus E$, avec D, E des faisceaux inversibles sur C), on a :

$$m(N) = \inf(h^0 D, h^0 E) .$$

Démonstration :

Soit M un diviseur positif sur C . On a $h^0 N = h^0 D + h^0 E$ et $h^0 N(-M) = h^0 D(-M) + h^0 E(-M)$. Compte tenu de 3.1 la proposition résulte des deux lemmes suivants :

Lemme 3.5.

Soit D un faisceau inversible sur C et M un diviseur positif de degré m . On a $h^0 D(-M) \geq h^0 D - m$. De plus, si $h^0 D(-M) = h^0 D - m$, on a $m \leq h^0 D$.

Lemme 3.6.

Soient $D_1, \dots, D_r$ des faisceaux inversibles sur C et m un entier ≥ 0 , avec $m \leq \inf h^0 D_i$. Il existe un diviseur positif M (que l'on peut supposer formé de points distincts) tel que l'on ait, pour tout i :

$$h^0(D_i(-M)) = h^0 D_i - m .$$

Le lemme 3.5 est classique (cf. [9] Ch. 8 Prop. 3) et 3.6 se démontre aisément par récurrence sur m .

c) Le cas où N est écrit comme extension de faisceaux inversibles.

On sait qu'en général un fibré de rang 2 n'est pas décomposé. Pour le fibré normal, on pourra consulter [51], [11], [19]. Voir aussi ci-dessous 5.25 A_1 . En revanche on peut toujours écrire N comme une extension de faisceaux inversibles : $0 \rightarrow D \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow 0$ (voir [20] Ch. V §2 ou, pour le fibré normal, ci-dessous §4). Cette écriture va nous permettre d'encadrer $m(N)$ et, dans certains cas, de le calculer.

Proposition 3.7.

Supposons N écrit comme extension de faisceaux inversibles :

$$0 \rightarrow D \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow 0 . \text{ On a alors : }$$

$\inf(h^0 D ; h^0 N - h^0 D) \leq m(N) \leq h^0 N - h^0 D \leq h^0 E$. En particulier, si $h^0 D \geq h^0 N - h^0 D$ (c'est-à-dire, si $h^0 D \geq 1/2 h^0 N$), on a $m(N) = h^0 N - h^0 D$. Si $h^0 D < 1/2 h^0 N$, on a seulement l'encadrement :

$$h^0 D \leq m(N) \leq 1/2 h^0 N .$$

Démonstration :

Soit M un diviseur positif de degré m sur C . La suite exacte :

$$0 \rightarrow N(-M) \rightarrow N \rightarrow N|_M \rightarrow 0$$

montre que $r: H^0(C, N) \rightarrow H^0(M, N|_M)$ est surjective si et seulement si $\beta': H^1(C, N(-M)) \rightarrow H^1(C, N)$ est injective.

On considère alors le diagramme suivant, commutatif, à lignes et colonnes exactes (on a posé $H^i F = H^i(C, F)$).

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & & & & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & & & \\ 0 & \rightarrow & H^0 D(-M) & \xrightarrow{i'} & H^0 N(-M) & \xrightarrow{p'} & H^0 E(-M) & \xrightarrow{g'} & H^1 D(-M) & \xrightarrow{h'} & H^1 N(-M) & \xrightarrow{q'} & H^1 E(-M) & \rightarrow & 0 \\ & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \alpha' \downarrow & & \beta' \downarrow & & \gamma' \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & H^0 D & \xrightarrow{i} & H^0 N & \xrightarrow{p} & H^0 E & \xrightarrow{g} & H^1 D & \xrightarrow{h} & H^1 N & \xrightarrow{q} & H^1 E & \rightarrow & 0 \\ & & & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & & & & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

On a alors le lemme suivant :

Lemme 3.8.

On a l'équivalence :

$$\beta' \text{ injective} \iff \begin{cases} (1) & \gamma' \text{ injective} \\ (2) & H^0 E = \text{Im } p + \text{Im } \gamma \\ (3) & \text{Ker } \alpha' \subset \text{Ker } h' (= \text{Im } g') . \end{cases}$$

Démonstration :

C'est une chasse au diagramme sans difficulté que nous laissons au lecteur.

Analysons maintenant les trois conditions fournies par le lemme 3.8.

1) On a : α' injective $\iff \gamma'$ bijective $\iff h^1 E = h^1 E(-M) \iff h^0 E(-M) = h^0 E - m$.
En particulier, la condition (1) impose $m \leq h^0 E$.

2) Notons que si $p: H^0 N \rightarrow H^0 E$ est surjective, la condition (2) est réalisée.
Mais nous verrons que ce n'est pas toujours le cas.

Comme $\dim \operatorname{Im} p = h^0 N - h^0 D \leq h^0 E$, (2) implique :

$$h^0 E(-M) + h^0 N - h^0 D \geq h^0 E.$$

Si on a (1) et (2), on a donc :

$$m \leq h^0 N - h^0 D \leq h^0 E ; \text{ c'est l'une des assertions}$$

de 3.7.

3) La condition (3) est plus délicate et ne fournit pas une condition nécessaire commode sur m . On se contente donc d'étudier (3'), plus forte que (3) :

(3') α' injective.

On voit, comme ci-dessus, que (3') équivaut à $h^0 D(-M) = h^0 D - m$ et que (3') impose, en particulier, $m \leq h^0 D$.

4) Pour obtenir une minoration de m' , nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 3.9.

Soient $D_1, \dots, D_r$ inversibles sur C ; $V_1, \dots, V_r$ des sous-espaces vectoriels de $H^0(C, D_1), \dots, H^0(C, D_r)$. Soit m un entier. On suppose :

$$\forall i = 1, \dots, r \quad m \leq \dim V_i.$$

Alors, il existe un diviseur positif M sur C , de degré m , tel que :

$$1) h^0 D_i(-M) = h^0 D_i - m.$$

$$2) H^0(C, D_i(-M)) + V_i = H^0(C, D_i).$$

Réciproquement, si M vérifie 1) et 2), on a, pour tout i , $m \leq \dim V_i$.

Comme pour 3.6, la démonstration est facile par récurrence sur m .

On applique alors 3.9 avec $r=2$, $D_1 = D$, $V_1 = H^0 D$, $D_2 = E$, $V_2 = \operatorname{Im} p$ et $m = \inf(h^0 D, h^0 N - h^0 D)$. Il existe donc un diviseur positif M , de degré m , tel que :

- * $h^0_D(-M) = h^0_D - m$, d'où (3') et a fortiori (3).
- * $h^0_E(-M) = h^0_E - m$, d'où (1).
- * $H^0_E(-M) + \text{Im } p = H^0_E$, d'où, puisque $H^0_E(-M) = \text{Im } \gamma$, la condition (2).

D'après le lemme 3.8, β' est injective, donc r est surjective, donc $m = \inf(h^0_D, h^0_N - h^0_D) \leq m(N)$, ce qui achève de prouver 3.7.

Remarque 3.10.

La proposition 3.7 ne conduit au calcul de $m(N)$ que dans les "mauvais" cas : lorsque $h^0_D > 1/2 h^0_N$ donc, $m(N) < 1/2 h^0_N$ (à l'exception du cas, plus rare, où h^0_D est exactement la moitié de h^0_N). Cependant, elle met en lumière l'importance des sous-fibrés inversibles de N et de la dimension de leurs sections globales qui vont jouer un rôle crucial dans le numéro suivant.

d) h^0 -stabilité.

Nous donnons maintenant une condition nécessaire et suffisante pour que $m(N) = [1/2 h^0_N]$ (c'est la valeur maximale, cf. 3.2). Cette condition est analogue à la semi-stabilité au sens de [35] ou [50], mais porte sur les sections globales et non plus sur les degrés.

Définition 3.11.

Soit N un faisceau localement libre de rang 2 sur C . On dit que N est h^0 -semi-stable (resp. h^0 -stable) si, pour tout sous-faisceau inversible L de N , on a : $2h^0_L \leq h^0_N$ (resp. $<$).

Lorsque h^0_N est impair, $h^0_N = 2n+1$, N est dit sous- h^0 -stable si pour tout sous-faisceau inversible L de N on a : $h^0_L \leq n+1$.

Remarques 3.12.

0) Evidemment, h^0 -semi-stable implique sous- h^0 -stable.

1) Si N est décomposé, $N = D \oplus E$, avec $h^0_D = n$ et $h^0_E = n+1$, N est sous- h^0 -stable, mais pas h^0 -semi-stable. En effet, si L est un sous-faisceau inversible de N , la flèche naturelle de L dans E est injective ou nulle. Dans le premier cas, on a $h^0_L \leq h^0_E = n+1$, dans le second cas, on a $L \subset D$, donc $h^0_L \leq h^0_D = n$.

2) Dans le cas général, il n'y a pas d'implication entre stabilité et h^0 -stabilité. Ainsi :

a) Si $N = D \oplus E$ avec $\text{dy}.D \neq \text{dy}.E$ et $h^0_D = h^0_E$ (par exemple $h^0_D = 0$), N est h^0 -semi-stable mais instable.

En vérité, la notion de h^0 -stabilité n'est intéressante que si N a suffisamment de sections, mais, pour certains raisonnements par récurrence, il est préférable de donner la définition 3.11 dans le cas général. Dans le cas du fibré normal, nous ne connaissons pas de tels exemples où N_C est h^0 -semi-stable et instable, cf. question 6.12.

b) Si $N = D \oplus E$, avec D, E associés à des diviseurs de même degré, mais tels que $h^0 D \neq h^0 E$ (par exemple : $D = \omega_C$, E de degré $2g-2$ non spécial), N est semi-stable, mais pas h^0 -semi-stable. Pour des exemples avec le fibré normal, cf. 5.27.3 et 5.43.

c) Cependant, si le genre g de C est petit par rapport à $\deg N$, stabilité et h^0 -stabilité se confondent. Précisément :

Proposition 3.13.

On suppose $2g \leq [1+1/2 \deg N]$. Alors, on a :
 N semi-stable $\iff N$ h^0 -semi-stable.

Démonstration :

L'inégalité ci-dessus s'écrit, selon le cas :

- 1) Si $\deg N = 4a + \epsilon$, avec $\epsilon = 0, 1$; $g \leq a$.
- 2) Si $\deg N = 4a + \epsilon$, avec $\epsilon = 2, 3$; $g \leq a + 1$.

Supposons cette inégalité vérifiée et supposons N semi-stable. On note déjà que l'on a :

$$h^0 N \geq \chi(N) = 4a + \epsilon + 2 - 2g, \text{ donc,}$$

$1/2 h^0 N \geq 2a + \epsilon/2 + 1 - g > 0$. Si L est un sous-faisceau inversible de N , on a : $\deg L \leq 1/2 \deg N = 2a + \epsilon/2$. Si L est non spécial, $h^0 L = \deg L + 1 - g \leq 2a + \epsilon/2 + 1 - g \leq 1/2 h^0 N$. Si L est spécial et $h^0 L > 0$, on applique le théorème de Clifford : $h^0 L \leq 1/2 \deg L + 1 \leq a + \epsilon/4 + 1$, donc $h^0 L \leq a + 1$. On distingue alors deux cas :

- 1) Si $\epsilon = 0, 1$, on a : $g \leq a$, donc $1/2 h^0 N \geq a + 1 + \epsilon/2$ et $h^0 L \leq 1/2 h^0 N$.
- 2) Si $\epsilon = 2, 3$, on a : $g \leq a + 1$, donc $1/2 h^0 N \geq a + \epsilon/2 \geq a + 1$ et donc $h^0 L \leq 1/2 h^0 N$.

On a donc, dans tous les cas, $h^0 L \leq 1/2 h^0 N$.

Réciproquement, supposons N h^0 -semi-stable, toujours avec les inégalités ci-dessus.

Soit L un sous-faisceau de N et supposons que : $\deg L = 1/2 \deg N + \alpha$, avec $\alpha > 0$. Quitte à remplacer L par L inversible, contenant L , on peut supposer que $E = N/L$ est inversible (cf. 3.15). Si E est non spécial, on a $h^0 L > h^0 E$ (puisque

$\deg.L > \deg.E$) et comme $h^0 N \leq h^0 L + h^0 E$, ceci contredit la h^0 -semi-stabilité de N . Si E est spécial et $h^0 E > 0$, on a, par Clifford, $h^0 E \leq 1/2 \deg.E + 1 = a + c/4 - \alpha/2 + 1$ et on vérifie aussitôt, en distinguant suivant les congruences de $\deg.N$ modulo 4 que $h^0 E < h^0 L$ ce qui contredit aussi la h^0 -semi-stabilité de N . Si $h^0 E = 0$, $h^0 L = h^0 N > 0$, et on a la même conclusion.

Nous en arrivons maintenant au théorème essentiel du §3 :

Théorème 3.14.

1) Si $h^0 N$ est pair, on a :

$$m(N) = 1/2 h^0 N \iff N \text{ est } h^0\text{-semi-stable.}$$

2) Si $h^0 N$ est impair, $h^0 N = 2n+1$, on a :

$$m(N) = [1/2 h^0 N] = n \iff N \text{ est sous-}h^0\text{-stable.}$$

Démonstration :

Lemme 3.15.

Si N est localement libre de rang 2 et si L est un sous-faisceau inversible de N , il existe L' , inversible, tel que $L \subset L' \subset N$ et tel que N/L' soit inversible.

Démonstration de 3.15 :

Si $T \subset N/L$ est le sous-faisceau de torsion et si $p: N \rightarrow N/L$ est la projection canonique, $L' = p^{-1}(T)$ convient.

Prouvons alors les implications $\implies$ de 3.14.

Supposons N non h^0 -semi-stable (resp. non sous- h^0 -stable). On a donc $L \hookrightarrow N$, avec $h^0 L > 1/2 h^0 N$ (resp. $h^0 L > n+1$) et, par 3.15, on peut supposer N/L inversible. Mais alors, 3.7 montre que $m(N) = h^0 N - h^0 L < 1/2 h^0 N$ (resp. $< n$).

Réciproquement, supposons N h^0 -semi-stable (resp. sous- h^0 -stable).

La démonstration se fait par récurrence sur $h^0 N$.

a) Si $h^0 N = 0$, on a $m(N) = 0$ (on prend $M = \emptyset$).

b) Si $h^0 N = 1$, on a encore $m(N) = 0$.

Pour la suite, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.16.

Si N est h^0 -semi-stable ou sous- h^0 -stable, et si $h^0 N \geq 2$, il existe $x \in C$ tel que : $h^0 N(-x) = h^0 N - 2$.

Démonstration de 3.16 :

Soit $f \in H^0 N$, $f \neq 0$ et soit $u: 0_C \rightarrow N$ associé à la section f ; u est injective, donc 0_C est un sous-faisceau inversible de N . Par 3.15, il existe L' , inversible, avec $0_C \subset L' \subset N$ et N/L' inversible. Mais alors, $h^0 L' \geq h^0 0_C = 1$ et, d'après 3.7, on a $m(N) \geq 1$, c'est-à-dire, il existe $x \in C$, avec $h^0 N(-x) = h^0 N - 2$.

On peut alors terminer la démonstration du théorème 3.14 par récurrence sur $h^0 N$:

Si N contient un sous-faisceau inversible L avec $h^0 L = 1/2 h^0 N$ (resp. $h^0 L = n$), N/L est inversible par 3.15, et on conclut par 3.7. Sinon, c'est que N est h^0 -stable. Soit $x \in C$ tel que $h^0 N(-x) = h^0 N - 2$. Alors $N(-x)$ est h^0 -semi-stable (resp. sous- h^0 -stable). En effet, si $L \subset N(-x)$, on a $L(x) \subset N$ et donc, $h^0 L \leq h^0 L(x) < 1/2 h^0 N$, donc $h^0 L \leq 1/2 h^0 N(-x)$ (resp. on a $h^0 L \leq h^0 L(x) \leq n$, donc, comme $h^0 N(-x) = 2n-1$, $N(-x)$ sous- h^0 -stable). Mais alors, vu l'hypothèse de récurrence, on a un diviseur positif M , de degré $m = 1/2 h^0 N(-x)$ (resp. $n-1$) tel que $h^0 N(-x)(-M) = h^0 N(-x) - 2m = h^0 N - 2(m+1)$ et donc, si $M' = M+x$, on a $h^0 N(-M') = h^0 N - 2 \deg M'$, ce qui signifie que $m(N) = \deg M' = [1/2 h^0 N]$.

Remarque 3.17.

Lorsque g est assez petit ($2g \leq [1+1/2 \deg N]$, cf. 3.13), on peut retrouver l'implication $\Leftarrow$ de 3.14 à l'aide des résultats de [46] Prop. 1.6.2.

En effet, posons, comme en 3.13, $\deg N = 4a + \epsilon$, avec $0 \leq \epsilon \leq 3$ et soit M_0 un diviseur de degré $2a+1-g$ si $\epsilon = 0,1$ (resp. $2a+2-g$ si $\epsilon = 2,3$). Si N est h^0 -semi-stable (i.e. semi-stable par 3.13) $N(-M_0)$ est aussi semi-stable et donc, par [46], quitte à modifier M_0 par un diviseur de degré 0 on a :

$$h^0 N(-M_0) = \sup(0; \chi(N(-M_0))) .$$

$$\text{Or, } \chi(N(-M_0)) = \begin{cases} \epsilon & \text{si } \epsilon = 0,1 \\ \epsilon-2 & \text{si } \epsilon = 2,3 \end{cases} , \text{ donc,}$$

$$h^0 N(-M_0) = \chi(N(-M_0)) .$$

Par ailleurs, par Riemann-Roch, $h^0 0_C(M_0) \geq \deg M_0 + 1 - g$ donc, vu l'hypothèse sur g , $h^0 0_C(M_0) > 0$. Donc M_0 est équivalent à un diviseur positif M . Mais alors, on sait que $h^0 N \leq h^0 N(-M) + 2 \deg M$ i.e. $h^0 N \leq 4a+2-2g+\epsilon = \chi(N)$. Ceci prouve déjà

que sous les hypothèses précédentes on a $h^1 N = 0$, ensuite que $h^0 N(-M) = \chi(N(-M)) = \chi(N) - 2m = h^0 N - 2m$, avec $m = \deg.M = [1/2 \chi(N)] = [1/2 h^0 N]$, donc $m(N) = [1/2 h^0 N]$; on a bien retrouvé 3.14. Au passage, on a prouvé :

Proposition 3.18.

Soit N un faisceau localement libre de rang 2, semi-stable, vérifiant : $2g \leq [1 + 1/2 \deg.N]$. On a $h^1 N = 0$.

e) Critères de stabilité et de h^0 -stabilité.

Nous donnons ici deux critères permettant de conclure à la semi-stabilité ou à la h^0 -semi-stabilité d'un fibré de rang 2.

Proposition 3.19.

Soit N un faisceau localement libre de rang 2, écrit comme extension de faisceaux inversibles :

$$0 \rightarrow D \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow 0.$$

On suppose :

$$0 \leq 1/2 \deg.N - \deg D \leq h^0 D + h^0 E - h^0 N \quad (= h^1 D + h^1 E - h^1 N).$$

Alors, N est semi-stable.

Si les inégalités sont strictes, N est stable.

Démonstration :

Soit $i: L \hookrightarrow N$ un sous-faisceau inversible, et soit $p: N \rightarrow E$ la projection. On considère $p \circ i$. Si $p \circ i = 0$, on a $L \subset D$ et on conclut grâce à l'inégalité de gauche : $\deg.D \leq 1/2 \deg.N$. Sinon, $p \circ i$ est injectif et on a donc $L \hookrightarrow E$. Il en résulte aussitôt que l'on a : $h^1 L \geq h^1 E$. Comme $p \circ i$ est injectif, $L \cap D = 0$ et on peut considérer le sous-fibré de rang 2 $N' = L \oplus D$ de N . On a alors $h^0 N' \leq h^0 N$. Ecrivons cette inégalité après avoir posé $\deg.L = 1/2 \deg.N + \epsilon$. On trouve :

$$h^0 N' = h^0 L + h^0 D = 1/2 \deg.N + \epsilon + 1 - g + h^1 L + \deg.D + 1 - g + h^1 D$$

$$\leq h^0 N = \deg.N + 2 - 2g + h^1 N ; \text{ d'où l'on tire : }$$

$$\epsilon \leq 1/2 \deg.N - \deg.D + h^1 N - h^1 E - h^1 D \leq 0 ,$$

c'est-à-dire la semi-stabilité.

Le cas des inégalités strictes se traite de la même façon.

Remarques 3.20.

1) L'inégalité de gauche : $\deg.D \leq 1/2 \deg.N$ est évidemment une condition nécessaire de semi-stabilité. En revanche l'inégalité de droite n'est pas vérifiée en général pour un fibré stable : il suffit de tensoriser par $\mathcal{O}_C(-n)$ avec n grand pour annuler $h^0E(-n)$, $h^0D(-n)$, $h^0N(-n)$, mais pas $1/2 \deg.N(-n) - \deg.D(-n)$.

2) Notons que si $\deg.N = 2g-2$ l'inégalité de droite s'écrit simplement :

$$h^1N = h^0N \leq h^1E + h^0D .$$

(En effet : $1/2 \deg.N - \deg.D = \deg.E - 1/2 \deg.N = \deg E + 1 - g = h^0E - h^1E$ d'où le résultat).

Proposition 3.21.

Soit N localement libre de rang 2, extension de faisceaux inversibles :

$$0 \rightarrow D \rightarrow N \xrightarrow{P} E \rightarrow 0 .$$

Soit K un diviseur positif, sans points bases. On suppose :

1) $h^0D \leq 1/2 h^0N$ (donc, a fortiori, $1/2 h^0N \leq h^0E$).

2) $h^0E - 1/2 h^0N \leq h^0D(-K) + h^0E(-K) - h^0N(-K)$
 $(= h^1D(-K) + h^1E(-K) - h^1N(-K)) .$

Alors, N est h^0 -semi-stable.

Si les inégalités 1) 2) sont strictes, N est h^0 -stable.

Démonstration :Lemme 3.22.

Soient L, M inversibles, avec $L \subset M$ et K un diviseur sans points bases.

On a :

$$h^0L - h^0L(-K) \leq h^0M - h^0M(-K) .$$

Démonstration de 3.22 :

Soit $T = M/L$; c'est un faisceau de torsion. Comme K est sans points bases, on peut supposer les supports de K et T disjoints. On a alors un isomorphisme canonique : $(M/L)(-K) \xrightarrow{\sim} M/L$.

On a un diagramme commutatif sur les sections globales :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^0 L(-K) & \longrightarrow & H^0 M(-K) & \xrightarrow{\pi_K} & H^0(M/L)(-K) \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & H^0 L & \longrightarrow & H^0 M & \xrightarrow{\pi} & H^0 M/L .
\end{array}$$

Il en résulte que : $\text{Im } \pi_K \subset \text{Im } \pi$, d'où le résultat.

Revenons à 3.21. Soit $i: L \subset N$ un sous-faisceau inversible. Comme pour 3.19, si p est la projection de N sur E , on se ramène au cas $p \circ i$ injectif : $L \subset E$.

Posons $h^0 L = 1/2 h^0 N + \epsilon$. On a, via 3.22 : $h^0 L(-K) \geq h^0 L - h^0 E + h^0 E(-K)$, ou encore : $h^0 L(-K) \geq 1/2 h^0 N + \epsilon - h^0 E + h^0 E(-K)$. Considérons alors $N' = D \oplus L \subset N$ (là encore, $D \cap L = 0$) ; on a $h^0 N'(-K) \leq h^0 N(-K)$ ce qui s'écrit :

$$1/2 h^0 N + \epsilon - h^0 E + h^0 E(-K) + h^0 D(-K) \leq h^0 N(-K)$$

donc, vu la condition 2), on trouve $\epsilon \leq 0$ i.e. N h^0 -semi-stable. Avec des inégalités strictes, on aurait $\epsilon < 0$ i.e. N h^0 -stable.

Remarque 3.23.

Nous appliquerons au §5 ce résultat en prenant pour K le diviseur double hyperplan, d'où notre intérêt pour la quantité $h^0 N_C(-2)$.

§4. Quelques outils pour l'étude du fibré normal
des courbes de $\mathbb{P}^3$.

Nous avons vu en 2.4 comment le calcul de $m(d,g)$ était lié à celui de $m(N_C)$, N_C désignant le fibré normal de C dans $\mathbb{P}^3$ pour une courbe C lisse et connexe de degré d et genre g . Nous allons maintenant chercher à appliquer à N_C les méthodes du §3. En particulier, vu 3.7, 3.19, 3.20, nous aurons besoin de suites exactes englobant N_C ; mais aussi de techniques de calcul de divers invariants cohomologiques : $h^0 N_C$, $h^0 N_C(-2)$, $h^0 O_C(s)$...

a) Quelques généralités sur N_C .

On désigne par C une courbe lisse et connexe de degré d et genre g de $\mathbb{P}^3$. Rappelons qu'alors, le faisceau normal $N_C = N_{C/\mathbb{P}^3}$ est localement libre de rang 2 et de degré $4d+2g-2$ (on peut le voir, par exemple, avec les suites exactes :

$$0 \rightarrow T_C \rightarrow T_{\mathbb{P}^3}|_C \rightarrow N_C \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow O_C \rightarrow O_C(1)^4 \rightarrow T_{\mathbb{P}^3}|_C \rightarrow 0 \quad).$$

Il en résulte que l'on a :

$$\chi(N_C) = 4d, \text{ donc } h^0 N_C = 4d + h^1 N_C.$$

De même, on a aussi :

$$\chi(N_C(-2)) = 0, \text{ donc } h^0 N_C(-2) = h^1 N_C(-2).$$

Rappelons enfin que, comme $H^0 N_C$ est l'espace tangent à $H_{d,g}$ en C , on a, si C est un point lisse de $H_{d,g}$:

$$h^0 N_C = \dim_C H_{d,g}.$$

b) Quand N_C est-il décomposé ?

b₁) Les intersections complètes.

Si C est intersection complète de deux surfaces de degrés s, t , avec $s \leq t$, on a la résolution suivante de l'idéal I_C :

$$0 \rightarrow O_{\mathbb{P}^3}(-s-t) \rightarrow O_{\mathbb{P}^3}(-s) \oplus O_{\mathbb{P}^3}(-t) \rightarrow I_C \rightarrow 0$$

qui conduit aussitôt à la formule :

$$N_C = 0_C(s) \otimes 0_C(t) .$$

La résolution ci-dessus donne aussi les résultats suivants :

1) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $h^1 I_C(n) = 0$.

(C est projectivement normale).

2) $h^0 I_C(s) = 1$ si $s < t$

$h^0 I_C(s) = 2$ si $s = t$.

3) On en déduit :

$$h^0 0_C(s) = \binom{s+3}{3} - 1 \quad \text{si } s < t$$

$$h^0 0_C(s) = \binom{s+3}{3} - 2 \quad \text{si } s = t .$$

4) Le genre g de C est donné par :

$$g = h^1 0_C = h^2 I_C = 1 + st(s+t-4)/2 .$$

5) Le degré de C est, bien sûr, $d = st$.

b₂) Les courbes rationnelles.

Si C est rationnelle (i.e. de genre 0), on a un isomorphisme $\varphi: \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} C$ et on sait alors que N_C , comme tout faisceau localement libre sur $\mathbb{P}^1$, est décomposé (cf. [20] V 2.14) :

$$N_C \simeq 0_{\mathbb{P}^1}(e_1) \otimes 0_{\mathbb{P}^1}(e_2) ,$$

avec $e_1 + e_2 = \deg. N_C = 4d - 2$.

Si C est une droite, on a $e_1 = e_2 = 1$.

Si C est une conique, c'est aussi une intersection complète, donc

$N_C = 0_C(1) \otimes 0_C(2)$, et, comme φ est de degré 2, on a $e_1 = 2$, $e_2 = 4$.

Si C est une cubique gauche, on a $e_1 = e_2 = 5$. Cela résulte par exemple de [8] ou [29].

Plus généralement si $d \geq 4$, il existe des courbes rationnelles dont le fibré normal est équilibré (i.e. vérifie $e_1 = e_2 = 2d-1$). C'est même le cas général (cf. [10] ou [8]). C'est aussi le cas si C est tracée sur une quadrique ([29]). En fait, il existe des courbes dont le fibré normal vérifie :

$$N_C \simeq 0_{\mathbb{P}^1}(2d-1+\epsilon) \otimes 0_{\mathbb{P}^1}(2d-1-\epsilon) \quad \text{avec } 0 \leq \epsilon \leq d-4 , \text{ cf. [8] ou [10].}$$

On notera que pour une courbe rationnelle on a $h^1 N_C = 0$, donc $h^0 N_C = 4d$.

b₃) Le cas général.

En général, N_C n'est pas décomposé, voir [51], [11], [19] ou encore 5.25 A₁ ci-dessous.

c) N_C écrit comme extension de faisceaux inversibles.

c₁) Courbes tracées sur une surface.

Si C est tracée sur une surface Q de degré s on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow N_{C/Q} \rightarrow N_C \rightarrow N_Q|_C \rightarrow T_Q^1|_C \rightarrow 0$$

où $N_Q = N_{Q/\mathbb{P}^3}$ est le faisceau normal à Q et T_Q^1 le faisceau cotangent, au sens du complexe cotangent de Lichtenbaum-Schlessinger [33]. C'est un faisceau de torsion concentré sur le lieu singulier de Q . En particulier, si Q est lisse, on a :

$$0 \rightarrow N_{C/Q} \rightarrow N_C \rightarrow N_Q|_C \rightarrow 0$$

(cf. [21] III §4 ou [13] IV 16.9.13).

Dans tous les cas, on sait que l'on a : $N_Q \simeq \mathcal{O}_Q(s)$ (avec $s = \deg.Q$), donc aussi : $N_Q|_C \simeq \mathcal{O}_C(s)$; (cf. [20] II 8.20). Lorsque Q est lisse, on a, de plus $N_{C/Q} \simeq \omega_C(4-s)$ ([20] loc.cit.) et on a donc la suite exacte :

$$0 \rightarrow \omega_C(4-s) \rightarrow N_C \rightarrow \mathcal{O}_C(s) \rightarrow 0.$$

Lorsque Q n'est pas lisse, on a le résultat suivant ; bien connu des experts :

Lemme 4.1.

Soit C une courbe lisse de $\mathbb{P}^3$, Q une surface de degré s contenant C . On suppose que, sur C , Q n'a qu'un nombre fini de points singuliers $e_1, \dots, e_n$, tous points doubles ordinaires (on ne suppose rien en dehors de C). Alors, on a : $N_{C/Q} \simeq \omega_C(4-s)(e_1 + \dots + e_n)$.

Démonstration :

Comme C est lisse on a : $0 \rightarrow T_C \rightarrow T_Q|_C \rightarrow N_{C/Q} \rightarrow 0$. Cela résulte par exemple de [33]. On a aussi (toujours par [33]) :

$$0 \rightarrow T_Q|_C \rightarrow T_{\mathbb{P}^3}|_C \rightarrow N_Q|_C \rightarrow T_Q^1|_C \rightarrow 0 \quad (*)$$

On introduit alors le faisceau E défini par les suites exactes :

$$0 \rightarrow T_Q|_C \rightarrow T_{\mathbb{P}^3}|_C \rightarrow E \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow E \rightarrow N_Q|_C \rightarrow T_Q^1|_C \rightarrow 0.$$

Comme Q n'a, sur C , que les points doubles ordinaires $e_1, \dots, e_n$, on a : $T_Q^1|_C \cong \mathcal{O}_{e_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{e_n}$, faisceau grappe-ciel de fibre k en chacun des e_i (c'est un calcul facile à partir de la suite exacte (*) ci-dessus).

Comme $N_Q|_C \cong \mathcal{O}_C(s)$, on a $\det.E = \mathcal{O}_C(s)(-e_1 - \dots - e_n)$. D'autre part, $\det.T_{\mathbb{P}^3} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)$, donc $\det.T_{\mathbb{P}^3}|_C = \mathcal{O}_C(4)$, donc $\det.T_Q|_C = \mathcal{O}_C(4-s)(e_1 + \dots + e_n)$ et donc, $\det.N_{C/Q} = N_{C/Q} = \omega_C(4-s)(e_1 + \dots + e_n)$ puisque $T_C = \omega_C^*$.

On peut résumer les résultats précédents en une proposition :

Proposition 4.2.

Soit C une courbe lisse tracée sur une surface Q de degré s .

1) Si Q n'a pas de points singuliers sur C , on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \omega_C(4-s) \rightarrow N_C \rightarrow \mathcal{O}_C(s) \rightarrow 0.$$

2) Si Q a n points singuliers sur C , $e_1, \dots, e_n$, tous doubles ordinaires, on a :

$$0 \rightarrow \omega_C(4-s)(e_1 + \dots + e_n) \rightarrow N_C \rightarrow \mathcal{O}_C(s)(-e_1 - \dots - e_n) \rightarrow 0.$$

c₂) Surfaces réglées, théorème de Segre-Nagata.

On sait (cf. [20] V 2.7 et 2.12) que tout fibré N de rang 2 sur C est extension de faisceaux inversibles :

$$0 \rightarrow D \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow 0, \text{ avec } \deg.E - \deg.D = e,$$

où e est un invariant de la surface réglée $\mathbb{P}(N)$. Si N est indécomposable, on a $-g \leq e \leq 2g-2$ (cf. [39]). Si de plus N est semi-stable, $e \leq 0$. Dans le cas de N_C , on a donc :

Proposition 4.3 (Nagata).

Si N_C est indécomposable, il s'écrit comme extension :

$$0 \rightarrow D \rightarrow N_C \rightarrow E \rightarrow 0$$

avec $\deg.D = 2d+g-1-\epsilon$, $\deg.E = 2d+g-1+\epsilon$ et $1-g \leq \epsilon \leq g/2$.

c₃) Une réciproque.

La proposition suivante montre que le cas des courbes tracées sur une surface fournit essentiellement tous les sous-fibrés de N_C :

Proposition 4.3.bis.

Soient C une courbe lisse et connexe, L un sous-faisceau inversible de N_C ; on suppose que $E = N_C/L$ est inversible. Alors, il existe une surface Q irréductible, contenant C , telle que $L = N_{C/Q}$.

Démonstration :

On dualise la suite exacte $0 \rightarrow L \rightarrow N_C \rightarrow E \rightarrow 0$, on obtient $0 \rightarrow E^\vee \rightarrow N_C^\vee \rightarrow L^\vee \rightarrow 0$. Soit s un entier tel que $H^0 E^\vee(s) \neq 0$ et $H^1 I_C^2(s) = 0$ (il suffit de prendre s assez grand). On choisit alors une section globale non nulle f de $E^\vee(s)$, donc de $N_C^\vee(s)$. Comme $H^1 I_C^2(s) = 0$, et comme $N_C^\vee = I_C/I_C^2$, cette section se relève en $\bar{f} \in H^0 I_C(s)$. Soit Q la surface associée. Le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E^\vee(s) & \rightarrow & N_C^\vee(s) \\ f \uparrow & \nearrow & \\ 0_C & & \end{array}$$

induit par dualité :

$$\begin{array}{ccc} N_C(-s) & \xrightarrow{p} & E(-s) \\ \pi \searrow & & \downarrow j \\ & & 0_C \end{array}$$

et on a $\text{Ker } p = L(-s)$, $\text{Ker } \pi = N_{C/Q}(-s)$. Il suffit alors de prouver que j est injective, ce qui est clair car $\text{Ker } j = (\text{Coker } f)^\vee$ et $\text{Coker } f$ est de torsion. On a donc : $L = N_{C/Q}$. Si Q n'est pas irréductible, on remplace Q par la composante contenant C , ce qui n'altère pas $N_{C/Q}$.

Remarques 4.3.ter.

- 1) En général, la surface Q peut être singulière.
- 2) Si C est une courbe lisse et connexe contenue dans deux surfaces irréductibles distinctes Q_1, Q_2 et si X est l'intersection complète $Q_1 \cap Q_2$, on a :

$$N_{C/Q_1} \cap N_{C/Q_2} = N_{C/X}.$$

De plus, si Γ est la courbe algébriquement liée à C dans X (cf. [44]), on vérifie aisément que $N_{C/X} = 0$ si et seulement si la liaison est géométrique (i.e. si Γ et C sont sans composantes communes). Dans le cas contraire, Q_1 et

Q_2 sont tangentes le long de C et on a $N_{C/X} = N_{C/Q_1} = N_{C/Q_2}$.

d) Quelques lemmes de contrôle des singularités des surfaces contenant une courbe.

Pour utiliser les suites exactes de 4.2, il faut savoir plonger une courbe dans une surface lisse, ou, à tout le moins, n'ayant que des points doubles ordinaires. Les résultats suivants, "à la Bertini", vont nous permettre d'y parvenir.

Proposition 4.4.

Soit Γ une courbe lisse de $\mathbb{P}^3$, s un entier. On suppose que $I_\Gamma(s)$ est engendré par ses sections globales ; on a donc $h^0 I_\Gamma(s) \geq 2$. Alors, si Q est une surface de degré s contenant Γ , assez générale, Q est lisse.

Remarque 4.5.

Ce résultat requiert de manière essentielle le fait que k soit de caractéristique zéro. Si on a $\text{carac.} k > 0$, il faut faire l'hypothèse plus forte : $I_\Gamma(s-1)$ est engendré par ses sections, cf. [23].

Démonstration :

On a d'abord le lemme suivant (cf. [23] 1.4).

Lemme 4.6.

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, X un k -schéma de type fini, lisse, E un faisceau localement libre de rang r sur X . Soit V un sous-espace vectoriel de $H^0(X, E)$.

On suppose que les sections globales de E contenues dans V engendrent E .

Alors, si $v \in V$ est assez générale, le schéma des zéros de v , noté $v^{-1}(0)$, est lisse de codimension r dans X . En particulier, si $r > \dim X$, $v^{-1}(0)$ est vide.

Démonstration de 4.6.

On se reportera à [23] pour la définition de $v^{-1}(0)$. Soit $\underline{V}$ le faisceau trivial de fibre V sur X et $p: \underline{V} \rightarrow E$ le morphisme canonique $v \mapsto v(x)$. L'hypothèse dit que p est surjectif et son noyau F est donc localement libre. Soit Z le fibré (géométrique) sur X , associé à F . C'est le sous-schéma de $V \times X$ (V vu cette fois comme un espace affine) correspondant à l'incidence : $Z = \{(v, x) \in V \times X \mid v(x) = 0\}$. Comme Z est un fibré sur X , Z est lisse, donc la projection naturelle $q: Z \rightarrow V$ est lisse sur un ouvert non vide de V (théorème de lissité générique, cf. [20] III 10.7). Si v est dans cet ouvert, la fibre de q en v , qui est isomorphe à $v^{-1}(0)$, est donc lisse.

Revenons maintenant à 4.4.

On pose $V = H^0 I_\Gamma(s)$. On applique d'abord le lemme 4.6 au faisceau $I_\Gamma(s)$ restreint à $\mathbb{P}^3 - \Gamma$. Sur cet ouvert, on a : $I_\Gamma(s) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(s)$. Si v est un élément assez général de V , la surface Q de $\mathbb{P}^3$ définie par v est donc lisse en dehors de Γ .

Le même lemme, appliqué cette fois à Γ et à la restriction de $I_\Gamma(s)$ à Γ (i.e. $N_\Gamma^V(s) = I_\Gamma/I_\Gamma^2(s)$) montre que pour v général dans V , $v|_\Gamma$, vu comme section de $N_\Gamma^V(s)$, ne s'annule pas sur Γ . Mais ceci signifie que, si $a \in \Gamma$, v est non nulle dans le premier voisinage infinitésimal de a , donc que Q est non singulière aussi en les points de Γ .

Corollaire 4.7.

Soient Γ une courbe lisse et s un entier tel que $I_\Gamma(s)$ soit engendré par ses sections. Soit P un pinceau de surfaces de degré s , contenant Γ . Alors, si P est assez général, les surfaces de P , sauf un nombre fini d'entre elles, sont lisses.

Le résultat suivant va permettre, à partir d'hypothèses plus fortes, de préciser le corollaire 4.7.

Proposition 4.8.

Soient Γ une courbe lisse de $\mathbb{P}^3$ et s un entier. On suppose :

$$(1) \quad h^1 I_\Gamma(s-3) = h^2 I_\Gamma(s-4) = 0.$$

Soit $S_\Gamma = \mathbb{P}(H^0 I_\Gamma(s))$ l'espace projectif des surfaces de degré s contenant Γ , et soit S_Γ^I (resp. S_Γ^{II}) le sous-schéma fermé de S_Γ formé des surfaces singulières (resp. admettant au moins deux points singuliers, ou un point singulier autre qu'un point double ordinaire). Alors, S_Γ^I (resp. S_Γ^{II}) est de codimension 1 (resp. ≥ 2) dans S_Γ .

Remarques 4.9.

1) On vérifie facilement que la condition (1) de 4.8 impose $s \geq 3$ si Γ est une droite et $s \geq 4$ sinon (et ceci, même si Γ n'est pas connexe).

On a donc aussi $h^3 I_\Gamma(s-5) = 0$, autrement dit, I_Γ est $s-2$ -régulier au sens de [37] lect. 14. En particulier, $I_\Gamma(s-2)$ et a fortiori $I_\Gamma(s)$ est engendré par ses sections.

Rappelons qu'une droite D , non contenue dans Γ , est une n -sécante de Γ si $\Gamma \cap D$ est un schéma fini de longueur n . Comme $I_\Gamma(s-2)$ est engendré par ses sections, il est clair que si D est une n -sécante de Γ , on a : $n \leq s-2$.

On notera que I_Γ est aussi n -régulier pour $n \geq s-2$; ainsi, on a : $h^1 I_\Gamma(s-2) = 0$ etc...

2) La proposition 4.8 vaut en toutes caractéristiques. Si k est de caractéristique zéro, on peut, peut-être, affaiblir l'hypothèse (1), par exemple en supposant seulement que $I_\Gamma(s-1)$ est engendré par ses sections.

3) La proposition 4.8 et le corollaire 4.10 s'appliquent en particulier dans les cas suivants :

a) $s=3$ et Γ est une droite.

b) $s=4$ et Γ est une conique, ou une cubique rationnelle, ou la réunion disjointe de deux droites.

Corollaire 4.10.

Sous les hypothèses de 4.8, si P est un pinceau de surfaces de degré s contenant Γ , assez général, on a les propriétés suivantes :

1) Les surfaces de P sont lisses, sauf un nombre fini d'entre elles.

2) Si une surface de P est singulière, elle a un unique point double ordinaire.

(C'est clair, dans un espace projectif, une droite générale ne rencontre pas une sous-variété de codimension ≥ 2).

Démonstration de 4.8.

a) Notations.

Soit a un point de $\mathbb{P}^3$. On note de la même manière l'ensemble $\{a\}$ et le schéma réduit porté par $\{a\}$. On note V_a^n le $n^{\text{ième}}$ voisinage infinitésimal de a dans $\mathbb{P}^3$. Si m_a est l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ définissant $\{a\}$, V_a^n est le sous-schéma fermé défini par m_a^{n+1} ; V_a^n est fini, porté par $\{a\}$ et de longueur $\binom{n+3}{3}$. Pour $n=0$, on a $V_a^0 = \{a\}$, pour $n=1$, V_a^1 est de longueur 4, pour $n=2$, V_a^2 est de longueur 10.

Si F est un faisceau sur $\mathbb{P}^3$, $F|_{V_a^n}$ s'identifie à la fibre en a du faisceau $P^n F$ des parties principales d'ordre n de F (cf. [13] IV 16.7).

L'application naturelle de restriction $j_{a,F}^n : F \rightarrow F|_{V_a^n}$, s'identifie alors au jet d'ordre n de F en a .

Si a et b sont deux points de $\mathbb{P}^3$, le schéma somme $V_a^p \cup V_b^q$ est défini par l'idéal $m_a^{p+1} \cap m_b^{q+1}$.

Si D est une droite de $\mathbb{P}^3$, on note D^n son $n^{\text{ième}}$ voisinage infinitésimal, défini par $(I_D)^{n+1}$.

Si $a \in D$, on a $I_D \subset m_a$, donc aussi $I_D^{n+1} \subset m_a^{n+1}$, donc V_a^n est un sous-schéma fermé de D^n . De même, si $a, b \in D$ et si $p \leq q$, $V_a^p \cup V_b^q$ est un sous-schéma fermé de D^q .

b) Quelques lemmes.

Nous commençons par calculer, entre autres, l'idéal de V_a^n dans D^n .

Lemme 4.11.

1) Avec les notations ci-dessus et $a \in D$, si $I_{V_a^n/D^n}$ est l'idéal de V_a^n dans D^n , on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow 0_D(-n-1)^{n+1} \rightarrow I_{V_a^n/D^n} \rightarrow I_{V_a^{n-1}/D^{n-1}}(-1) \rightarrow 0.$$

Pour $n=0$, on a $I_{\{a\}/D} \simeq 0_D(-1)$.

2) De même, si $a, b \in D$, on a les suites exactes suivantes :

$$a) I_{\{a\} \cup \{b\}/D} \simeq 0_D(-2).$$

$$b) 0 \rightarrow 0_D(-2)^2 \rightarrow I_{\{a\} \cup V_b^1/D^1} \rightarrow 0_D(-3) \rightarrow 0.$$

$$c) 0 \rightarrow 0_D(-3)^2 \rightarrow I_{V_a^1 \cup V_b^1/D^1} \rightarrow 0_D(-4) \rightarrow 0.$$

Démonstration de 4.11.

1) On a $I_{V_a^n/D^n} \simeq m_a^{n+1}/I_D^{n+1}$. On choisit un plan passant par a , transverse à D , d'équation $Z=0$. La multiplication par Z , de $m_a^n(-1)$ dans m_a^{n+1} induit une surjection de $m_a^n(-1)$ dans $I_{V_a^n/D^n}$ (car $m_a^{n+1} = I_D^{n+1} + Zm_a^n$). Vu la transversalité, le noyau est $I_D^{n+1}(-1)$, d'où : $I_{V_a^n/D^n} \simeq m_a^n/I_D^{n+1}(-1)$. On a alors la suite exacte :

$$0 \rightarrow I_D^n/I_D^{n+1} \rightarrow m_a^n/I_D^{n+1} \rightarrow m_a^n/I_D^n \rightarrow 0$$

et $m_a^n/I_D^n \simeq I_{V_a^{n-1}/D^{n-1}}$ et $I_D^n/I_D^{n+1} \simeq 0_D(-n)^{n+1}$ (par exemple, parce que $I_D^n/I_D^{n+1} \simeq S_0^n(I_D/I_D^2)$ et que $I_D/I_D^2 \simeq N_D^\vee \simeq 0_D(-1)^2$).

La suite exacte voulue en résulte en tensorisant par $0_{\mathbb{P}}(-1)$.

2) a) est clair ; pour b) on choisit un plan passant par b d'équation $T=0$, transverse à D , la multiplication par T , de $m_b(-1)$ dans m_b^2 induit un isomorphisme :

$$I_{\{a\} \cup V_b^1/D^1} = m_a \cap m_b^2/I_D^2 \simeq m_a \cap m_b(-1)/I_D^2(-1)$$

(car $m_a \cap m_b^2 = I_D^2 + T(m_a \cap m_b)$).

On conclut en utilisant la suite exacte :

$$0 \rightarrow I_D/I_D^2 \rightarrow m_a \cap m_b/I_D^2 \rightarrow m_a \cap m_b/I_D \rightarrow 0$$

et les isomorphismes : $I_D/I_D^2 \simeq 0_D(-1)^2$, $m_a \cap m_b/I_D \simeq 0_D(-2)$.

c) On choisit un plan passant par a (resp. b), transverse à D , d'équation $(Z=0)$ (resp. $T=0$) et on considère la multiplication par ZT , de $m_a \cap m_b(-2)$ dans $m_a^2 \cap m_b^2$. Il s'ensuit un isomorphisme :

$$I_{V_a^1 \cup V_b^1/D^1} \simeq m_a^2 \cap m_b^2/I_D^2 \simeq (m_a \cap m_b/I_D^2)(-2)$$

et on termine grâce à la suite exacte ci-dessus.

Lemme 4.12.

Soient F un faisceau sur $\mathbb{P}^3$, n un entier ≥ 0 , D une droite de $\mathbb{P}^3$, a un point de D .

On suppose que F est $-n$ -régulier (i.e. $h^1 F(-n-1) = h^2 F(-n-2) = h^3 F(-n-3) = 0$). Alors :

1) On a $h^1 F \otimes I_{D^n} = 0$.

2) On a $h^1 F \otimes 0_D(-n-1) = 0$.

3) L'application naturelle de restriction :

$$H^0 F \rightarrow H^0(F|_{D^n}) \text{ est surjective.}$$

4) L'application naturelle de restriction :

$$H^0 F \rightarrow H^0(F|_{V_a^n}) \text{ est surjective.}$$

(Dans la suite, nous appliquerons ce lemme à $F \equiv I_\Gamma(s)$, avec $n = 0, 1$ ou 2).

Démonstration de 4.12.

1) On a une résolution de $I_{D^n} = (I_D)^{n+1}$:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-n-2)^{n+1} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-n-1)^{n+2} \rightarrow I_{D^n} \rightarrow 0, \text{ que l'on tensorise par } F.$$

Comme $\text{Tor}_1^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(F, I_{D^n})$ est à support dans D , son H^3 est nul et le fait que $h^1 F \otimes I_{D^n} = 0$ résulte des hypothèses $h^1 F(-n-1) = h^2 F(-n-2) = 0$.

2) La résolution ci-dessus, appliquée à $n=0$, et les hypothèses impliquent aussitôt $h^2 F \otimes I_D(-n-1) = 0$. On utilise alors la suite exacte :

$$0 \rightarrow I_D \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0, \text{ que l'on tensorise par}$$

$F(-n-1)$ et la conclusion résulte de ce que $\text{Tor}_1^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(F(-n-1), \mathcal{O}_D)$ n'a pas de H^3 .

3) On utilise la suite exacte :

$$0 \rightarrow I_{D^n} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathcal{O}_{D^n} \rightarrow 0, \text{ que l'on tensorise par}$$

F . La conclusion résulte de 1), vu la nullité de $H^2 \text{Tor}_1^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(F, \mathcal{O}_{D^n})$.

4) Vu 3), il suffit d'établir que $H^0 F|_{D^n} \rightarrow H^0 F|_{V_a^n}$ est surjective, ou encore que $H^1 F \otimes I_{V_a^n/D^n} = 0$ (car $\text{Tor}_1^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(F, \mathcal{O}_{V_a^n})$ n'a pas de H^2). On montre ce point par récurrence sur n . Pour $n=0$, $I_{V_a^n/D^n} = \mathcal{O}_D(-1)$ et on conclut par 2). Pour n général,

on utilise la suite exacte 1) de 4.11 en tenant compte de $H^1 F \otimes \mathcal{O}_D(-n-1) = 0$

(4.12.2), du fait que $F(-1)$ est $-(n-1)$ -régulier, ce qui, vu l'hypothèse de

récurrence, assure que $H^1 F \otimes I_{V_a^{n-1}/D^{n-1}}(-1) = 0$, et du fait que les Tor apparaissant n'ont pas de H^2 ni de H^3 .

Dans le cas de deux points, on a :

Lemme 4.12.bis.

Les hypothèses et notations sont celles de 4.8 et de a) ci-dessus : D est une droite de $\mathbb{P}^3$ et a, b deux points de D .

1) Si $a, b \in \Gamma$, la flèche naturelle de restriction :

$$H^0 I_\Gamma(s) \rightarrow H^0 I_\Gamma(s)|_{\{a\} \cup \{b\}} \text{ est surjective.}$$

2) Si $a \in \Gamma$, $b \notin \Gamma$, la flèche naturelle de restriction :

$$H^0 I_\Gamma(s) \rightarrow H^0 I_\Gamma(s)|_{\{a\} \cup V_b^1} \text{ est surjective.}$$

3) Si $a, b \notin \Gamma$, la flèche naturelle de restriction :

$$H^0 I_\Gamma(s) \rightarrow H^0 I_\Gamma(s)|_{V_a^1 \cup V_b^1} \text{ est surjective,}$$

sauf si D est une s -2-sécante de Γ , auquel cas le conoyau est de dimension 1.

Démonstration de 4.12.bis.

1) Comme la flèche : $H^0 I_\Gamma(s) \rightarrow H^0 I_\Gamma(s)|_D$ est surjective (4.12.3 pour $n=0$), il suffit de voir que $H^0 I_\Gamma(s)|_D \rightarrow H^0 I_\Gamma(s)|_{\{a\} \cup \{b\}}$ est surjective, ce qui résulte de $H^1 I_{\{a\} \cup \{b\}/D} \otimes I_\Gamma(s) = H^1 I_\Gamma(s) \otimes 0_D(-2) = 0$ (4.12.2) (le lecteur vérifiera que les Tor n'interviennent pas).

2) De même, on se ramène à $H^1 I_\Gamma(s) \otimes I_{\{a\} \cup V_b^1/D^1} = 0$ ce qui, vu 4.11.2b, résulte de $H^1 I_\Gamma(s) \otimes 0_D(-3) = 0$ (4.12.3 avec $F = I_\Gamma(s)$ et $n=2$).

3) Ici encore, on vérifie que le conoyau de la restriction est isomorphe à $H^1 I_\Gamma(s) \otimes I_{V_a^1 \cup V_b^1/D^1}$ ou encore, vu 4.11.2c, à $H^1 I_\Gamma(s) \otimes 0_D(-4)$. Dans ce cas, la nullité de cet espace ne résulte pas automatiquement des conditions cohomologiques de 4.8.

On considère la suite exacte :

$$0 \rightarrow I_\Gamma \rightarrow \mathcal{O}_P \rightarrow \mathcal{O}_\Gamma \rightarrow 0$$

et on tensorise par $\mathcal{O}_D$, on obtient :

$$0 \rightarrow \text{Tor}_1^{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_\Gamma, \mathcal{O}_D) \rightarrow I_\Gamma \otimes \mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{O}_\Gamma \otimes \mathcal{O}_D \rightarrow 0.$$

Si on suppose que D est une n -sécante, $\mathcal{O}_\Gamma \otimes \mathcal{O}_D$ est de longueur n et la suite se décompose :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_D(-n) \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{O}_\Gamma \otimes \mathcal{O}_D \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \text{Tor}_1^{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_\Gamma, \mathcal{O}_D) \rightarrow I_\Gamma \otimes \mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{O}_D(-n) \rightarrow 0.$$

Comme $\text{Tor}_1^{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_\Gamma, \mathcal{O}_D)$ n'a pas de H^1 , puisque son support est $\Gamma \cap D$ qui est fini, ni a fortiori de H^2 , on en déduit : $H^1 I_\Gamma \otimes \mathcal{O}_D(s-4) \simeq H^1 \mathcal{O}_D(s-n-4)$. Mais, on sait (Rem. 4.9.1) que l'on a : $n \leq s-2$, donc $H^1 \mathcal{O}_D(s-n-4) = 0$, sauf si $n = s-2$, auquel cas, $h^1 \mathcal{O}_D(s-n-4) = h^1 \mathcal{O}_D(-2) = 1$.

Fin de la démonstration de 4.8.

Soient $a \in \mathbb{P}^3$ et $j_{a, \mathbb{Q}_p}^1$ la restriction : $H^0 \mathbb{Q}_p(s) \rightarrow H^0 \mathbb{Q}_p(s)|_{V_a^1}$. Soit $f \in H^0 \mathbb{Q}_p(s)$, $f \neq 0$; la surface Q_f associée à f est singulière en a si et seulement si on a : $j_{a, \mathbb{Q}_p}^1(f) = 0$. Si Q_f est singulière en a , l'élément $j_{a, \mathbb{Q}_p}^2(f)$ de $H^0 \mathbb{Q}_p(s)|_{V_a^2}$ est dans m_a^2/m_a^3 . Cet espace s'identifie canoniquement à l'espace des formes quadratiques sur $(m_a/m_a^2)^\vee$, espace tangent de Zariski à $\mathbb{P}^3$ en a . Alors, a est un point double ordinaire de Q_f si et seulement si $j_{a, \mathbb{Q}_p}^1(f) = 0$ et si la forme quadratique $j_{a, \mathbb{Q}_p}^2(f)$ est non dégénérée (i.e. si son discriminant est non nul).

On définit de même, si $a, b \in \mathbb{P}^3$, la restriction $j_{a, b, \mathbb{Q}_p}^1$. Considérons maintenant la restriction :

$$j_{a, I_\Gamma}^n : H^0 I_\Gamma(s) \rightarrow H^0 I_\Gamma(s)|_{V_a^n}.$$

Pour $n = 0, 1, 2$, on sait (4.12.4) que cette flèche est surjective.

Si $a \notin \Gamma$, l'inclusion : $I_\Gamma(s) \subset \mathbb{Q}_p(s)$ induit un isomorphisme :

$$I_\Gamma(s)|_{V_a^n} \simeq \mathbb{Q}_p(s)|_{V_a^n}. \text{ Pour } n = 0, 1, 2, \text{ il en résulte que}$$

$j_{a, \mathbb{Q}_p}^n(H^0 I_\Gamma(s)) = H^0 \mathbb{Q}_p(s)|_{V_a^n}$. Cette image est donc de dimension 4 (resp. 10) si $n = 1$ (resp. 2). Si $a \in \Gamma$, on a un diagramme commutatif, pour $n \geq 1$:

$$\begin{array}{ccc} I_\Gamma(s) & \hookrightarrow & \mathbb{Q}_p(s) \\ \downarrow & & \downarrow \\ I_\Gamma(s)|_{V_a^{n-1}} & \xrightarrow{u} & \mathbb{Q}_p(s)|_{V_a^n} \end{array}$$

(ceci résulte de l'inclusion $I_\Gamma m_a^n \subset m_a^{n+1}$).

On en déduit aussitôt la suite exacte :

$$0 \rightarrow I_\Gamma(s) \cap m_a^{n+1} / I_\Gamma(s) m_a^n \rightarrow I_\Gamma(s)|_{V_a^{n-1}} \xrightarrow{u} \mathbb{Q}_p(s)|_{V_a^n} \xrightarrow{v} I_\Gamma(s)|_{V_a^n} \rightarrow 0.$$

Comme j_{a, I_Γ}^{n-1} est surjective pour $n = 1, 2$, on en déduit que l'image de $H^0 I_\Gamma(s)$ par $j_{a, \mathbb{Q}_p}^n$ est égale à celle de $\bar{u} : H^0 I_\Gamma(s)|_{V_a^{n-1}} \rightarrow H^0 \mathbb{Q}_p(s)|_{V_a^n}$ ou encore, au noyau de $\bar{v} : H^0 \mathbb{Q}_p(s)|_{V_a^n} \rightarrow H^0 I_\Gamma(s)|_{V_a^n}$. Cette image est donc de dimen-

sion 2 (resp. 7) pour $n = 1$ (resp. 2).

De la même manière, vu 4.12 bis, on voit que si $a, b \in \Gamma$ (resp. $a \in \Gamma$, $b \notin \Gamma$; resp. $a, b \notin \Gamma$) l'image de $H^0 I_\Gamma(s)$ par $j_{a,b,0_P}^1$ est de dimension 4 (resp. 6, resp. 8, resp. 7 si la droite $D = \langle a, b \rangle$ est une s -2-sécante). On peut alors étudier S_Γ^I et S_Γ^{II} .

1) Le cas de S_Γ^I :

Posons $S_{\Gamma,a}^I = \{Q \in S_\Gamma \mid a \text{ est point singulier de } Q\}$; $S_{\Gamma,a}^I$ est l'espace projectif associé à l'espace vectoriel $V_{\Gamma,a}^I = \{f \in H^0 I_\Gamma(s) \mid j_{a,0_P}^1(f) = 0\}$. D'après les calculs ci-dessus, $S_{\Gamma,a}^I$ est de codimension 4 (resp. 2) dans S_Γ si $a \notin \Gamma$ (resp. si $a \in \Gamma$). Comme $\mathbb{P}^3 - \Gamma$ est de dimension 3 et Γ de dimension 1, il en résulte que $\text{codim. } S_\Gamma^I = 1$.

2) Le cas de S_Γ^{II} .

On décompose S_Γ^{II} en deux parties :

$$S_{\Gamma,1}^{II} = \{Q \in S_\Gamma \mid Q \text{ a un point singulier autre qu'un point double ordinaire}\}$$

$$S_{\Gamma,2}^{II} = \{Q \in S_\Gamma \mid Q \text{ a au moins deux points singuliers}\}$$

a) $S_{\Gamma,1}^{II}$.

Pour montrer que $S_{\Gamma,1}^{II}$ est de codimension ≥ 2 , il suffit de prouver que si $a \in \mathbb{P}^3$, la fonction $\Delta j_{a,0_P}^2(f)$ n'est pas identiquement nulle sur $V_{\Gamma,a}^I$ (on a noté Δ le discriminant).

Si $a \notin \Gamma$, c'est clair car l'image de $H^0 I_\Gamma(s)$ par $j_{a,0_P}^2$ est égale à $0_P/m_a^3$ tout entier.

Si $a \in \Gamma$, l'image de $H^0 I_\Gamma(s)$ par $j_{a,0_P}^2$ est de dimension 7, donc celle de $V_{\Gamma,a}^I$ de dimension ≥ 5 (car $V_{\Gamma,a}^I$ est de codimension 2). Cette image est donc un hyperplan de l'espace m_a^2/m_a^3 des formes quadratiques. Mais comme l'hypersurface de m_a^2/m_a^3 définie par le discriminant est irréductible de degré 3, elle ne contient pas cet hyperplan, donc $\Delta j_{a,0_P}^2$ n'est pas identiquement nul sur $V_{\Gamma,a}^I$.

b) $S_{\Gamma,2}^{II}$.

Posons $S_{\Gamma,2,a,b}^{II} = \{Q_f \in S_\Gamma \mid a \text{ et } b \text{ sont singuliers sur } Q_f \text{ i.e. } j_{a,b,0_P}^1(f) = 0\}$.

Les calculs faits ci-dessus indiquent que $S''_{\Gamma,2,a,b}$ est de codimension 4 (resp. 6 ; resp. 8 ; resp. 7) si $a,b \in \Gamma$ (resp. $a \in \Gamma$, $b \notin \Gamma$; resp. $a,b \notin \Gamma$ et $D = \langle a,b \rangle$ n'est pas une s -2-sécante ; resp. $a,b \notin \Gamma$ et D est une s -2-sécante). La conclusion de 4.8 résulte alors d'un calcul de dimensions immédiat puisque $\dim. \Gamma \times \Gamma = 2$, $\dim. \Gamma \times (\mathbb{P}^3 - \Gamma) = 4$, $\dim. (\mathbb{P}^3 - \Gamma) \times (\mathbb{P}^3 - \Gamma) = 6$. Pour le cas exceptionnel, on pose :

$$W = \{(a,b) \in (\mathbb{P}^3 - \Gamma)^2 \mid D = \langle a,b \rangle \text{ est une } s\text{-2-sécante}\},$$

et on a $\dim. W \leq 5$ (une droite générale de $\mathbb{P}^3$ ne rencontre pas Γ). Les surfaces de S_{Γ} ayant deux points singuliers a,b avec $(a,b) \in W$ sont donc encore de codimension ≥ 2 .

En fait, en général, on a $\dim W < 5$. Par exemple, pour $s \geq 6$ et Γ générale, Γ n'a qu'un nombre fini de quadrisécantes, donc $\dim. W \leq 2$. Cependant, si Γ est une droite et $s = 3$, on a $\dim. W = 5$. Ceci achève la démonstration de 4.8.

e) Les méthodes de liaison.

Nous rappelons d'abord quelques résultats classiques concernant la liaison, que l'on trouvera par exemple dans [44], [32] ou [45].

Proposition 4.13 (Peskine-Szpiro).

Soit Γ une courbe de $\mathbb{P}^3$, lisse (mais pas nécessairement connexe). Soit s un entier tel que $I_{\Gamma}(s)$ soit engendré par ses sections globales et soit t un entier, $t \geq s$.

Soit Q (resp. Q') une surface de degré s (resp. t) contenant Γ . Si Q et Q' sont assez générales, on a les propriétés suivantes :

L_1) Q et Q' sont lisses.

L_2) L'intersection de Q et Q' est une courbe X qui est réunion de Γ et d'une courbe lisse C . De plus C et Γ se coupent transversalement en un nombre fini de points.

Démonstration :

(On rappelle que k est de caractéristique zéro). La condition L_1 n'est autre que 4.4 ; L_2 résulte de [44] 4.1. Nous en indiquons brièvement une démonstration, en tenant compte des simplifications apportées par trois des hypothèses de 4.13 : $\text{carac. } k = 0$; Γ lisse ; l'espace projectif est de dimension 3.

En vertu de 4.4, si $f \in H^0 I_\Gamma(s)$ est assez général, la surface Q définie par f est lisse et contient Γ . On a $I_{\Gamma/Q} = I_\Gamma/(f)$ et ce faisceau est engendré par l'image de $H^0 I_\Gamma(s)$ dans $H^0 I_{\Gamma/Q}(s)$. Il en est de même de $I_{\Gamma/Q}(s)|_\Gamma = N_{\Gamma/Q}^\vee(s)$ et tout ceci reste vrai pour $t \geq s$. Soit alors $g \in H^0 I_\Gamma(t)$, non multiple de f et assez général, et soit Q' la surface définie par g . D'après 4.4, Q' est lisse et donc Q et Q' se coupent proprement. Soit C la courbe liée à Γ (a priori algébriquement) par Q et Q' . On applique Bertini, sous la forme 4.6, d'abord à $I_{\Gamma/Q}(t)$ sur Q . Le schéma des zéros de la section $g|_Q$ n'est autre que C qui est donc lisse. On applique ensuite 4.6 au fibré $N_{\Gamma/Q}^\vee(t)$ sur Γ . Si $\bar{g}$ est la restriction de g à Γ , le schéma des zéros de $\bar{g}$ sur Γ est $C \cap \Gamma$. Comme $N_{\Gamma/Q}^\vee(t)$ est de rang 1, il en résulte que $C \cap \Gamma$ est fini et lisse, donc que la liaison de C et Γ est géométrique et que C et Γ sont transverses.

Remarques 4.14.

- 1) Avec les conditions de 4.8, on peut affirmer, lorsque $s = t$, que les surfaces du pinceau engendré par Q et Q' ont au plus un point double ordinaire.
- 2) La condition L_2 entraîne, en particulier, que Γ et C sont géométriquement liées au sens de [44]. On a alors la proposition suivante (cf. [32] 2.3.3) :

Proposition 4.15.

On suppose Γ et C liées géométriquement par deux surfaces de degrés s et t . Soit $X = \Gamma \cup C$. Soient d_Γ, d_C (resp. g_Γ, g_C) les degrés (resp. les genres) de Γ et C . On a les résultats suivants :

- 1) On a des suites exactes pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$0 \rightarrow I_X(n) \rightarrow I_\Gamma(n) \rightarrow \omega_C(n+4-s-t) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow I_X(n) \rightarrow I_C(n) \rightarrow \omega_\Gamma(n+4-s-t) \rightarrow 0.$$

- 2) On a les formules :

$$i) d_C = st - d_\Gamma.$$

$$ii) g_C - g_\Gamma = \left(\frac{s+t}{2} - 2\right)(d_C - d_\Gamma).$$

$$iii) \text{ Pour } n \in \mathbb{Z}, h^1 I_C(n) = h^1 I_\Gamma(s+t-n-4).$$

$$iv) h^0 \omega_C(n+4-s-t) = h^1 0_C(s+t-n-4) = h^0 I_\Gamma(n) - h^0 I_X(n) \text{ et la formule analogue en échangeant } C \text{ et } \Gamma.$$

Remarques 4.16.

1) On notera, par exemple, que C est connexe si et seulement si :

$$h^1 I_C = h^1 I_\Gamma(s+t-4) = 0.$$

2) Comme X est une intersection complète, les calculs cohomologiques sur X sont faciles avec la résolution vue en 4.b₁. Par exemple, on a :

$$h^0 I_X(t) = 1 + h^0 \mathcal{O}_P(t-s) = 1 + \binom{t-s+3}{3}.$$

3) Si on connaît une résolution de l'idéal I_Γ , on obtient une résolution de I_C par la méthode du "mapping cone" (cf. [44]). Cette méthode est particulièrement efficace lorsque Γ (donc aussi C) est projectivement normale. Si on a la résolution :

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathcal{O}_P(-n_i) \rightarrow \bigoplus_{j=1}^r \mathcal{O}_P(-d_j) \rightarrow I_\Gamma \rightarrow 0$$

on obtient une résolution de I_C :

$$0 \rightarrow \bigoplus_{j=1}^r \mathcal{O}_P(d_j-s-t) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathcal{O}_P(n_i-s-t) \oplus \mathcal{O}_P(-s) \oplus \mathcal{O}_P(-t) \rightarrow I_C \rightarrow 0.$$

Lorsque Γ et C vérifient la condition L_2 4.13, on connaît des relations entre leurs fibrés normaux (cf. [49] ou [25]). Comme $X = C \cup \Gamma$ est intersection complète, on a : $N_X = \mathcal{O}_X(s) \otimes \mathcal{O}_X(t)$ (cf. 4.b₁). D'autre part, comme Γ et C se coupent transversalement, X n'a que des points doubles ordinaires et donc, son faisceau cotangent T_X^1 (au sens de [33]) est un faisceau de torsion, porté par $C \cap \Gamma$, précisément, on a $h^0 T_X^1 = |C \cap \Gamma|$.

On a la suite exacte de [33] :

$$0 \rightarrow T_X \rightarrow T_P|_X \rightarrow N_X \xrightarrow{r_X} T_X^1 \rightarrow 0$$

et la flèche r_X se factorise comme l'indique le diagramme (1) :

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} N_X & \xrightarrow{\quad} & N_X|_\Gamma \\ \downarrow & \searrow r_X & \downarrow r_\Gamma \\ N_X|_C & \xrightarrow{r_C} & T_X^1 \end{array}$$

On notera que l'on a : $N_X|_C = \mathcal{O}_C(s) \otimes \mathcal{O}_C(t)$ et $N_X|_\Gamma = \mathcal{O}_\Gamma(s) \otimes \mathcal{O}_\Gamma(t)$.

On obtient alors, pour $n \in \mathbb{Z}$, des suites exactes (cf. [49] et [25]) :

$$(2) \quad 0 \rightarrow N_{\Gamma}(n) \rightarrow O_{\Gamma}(s+n) \oplus O_{\Gamma}(t+n) \xrightarrow{r_{\Gamma}(n)} T_X^1(n) \rightarrow 0$$

$$(3) \quad 0 \rightarrow N_C(n) \rightarrow O_C(s+n) \oplus O_C(t+n) \xrightarrow{r_C(n)} T_X^1(n) \rightarrow 0 .$$

(Bien sûr, $T_X^1(n)$ est isomorphe à T_X^1).

Par passage aux sections globales, on obtient les suites exactes de cohomologie ci-dessous :

$$(4) \quad 0 \rightarrow H^0 N_{\Gamma}(n) \xrightarrow{i_{\Gamma}(n)} H^0 O_{\Gamma}(s+n) \oplus H^0 O_{\Gamma}(t+n) \xrightarrow{q_{\Gamma}(n)} H^0 T_X^1(n) \rightarrow H^1 N_{\Gamma}(n) \\ \rightarrow H^1 O_{\Gamma}(s+n) \oplus H^1 O_{\Gamma}(t+n) \rightarrow 0$$

$$(5) \quad 0 \rightarrow H^0 N_C(n) \xrightarrow{i_C(n)} H^0 O_C(s+n) \oplus H^0 O_C(t+n) \xrightarrow{q_C(n)} H^0 T_X^1(n) \rightarrow H^1 N_C(n) \\ \rightarrow H^1 O_C(s+n) \oplus H^1 O_C(t+n) \rightarrow 0 .$$

Nous allons utiliser ces suites exactes pour calculer $h^0 N_C(n)$ en fonction de $h^0 N_{\Gamma}(n)$. Pour ceci, nous introduisons les flèches $\gamma_C(n)$ et $\gamma_{\Gamma}(n)$. On considère la flèche $i_C(n) : H^0 N_C(n) \rightarrow H^0 O_C(s+n) \oplus H^0 O_C(t+n)$ donnée par (5). Soit, d'autre part, $\rho_C(n)$ la flèche naturelle de restriction :

$$\rho_C(n) : H^0 O_{\mathbb{P}}(s+n) \oplus H^0 O_{\mathbb{P}}(t+n) \rightarrow H^0 O_C(s+n) \oplus H^0 O_C(t+n)$$

et $u_C(n)$ la flèche conoyau de $\rho_C(n)$:

$$u_C(n) : H^0 O_C(s+n) \oplus H^0 O_C(t+n) \rightarrow H^1 I_C(s+n) \oplus H^1 I_C(t+n) ,$$

provenant de la suite exacte :

$$0 \rightarrow I_C \rightarrow O_{\mathbb{P}} \rightarrow O_C \rightarrow 0 .$$

On pose alors $\gamma_C(n) = u_C(n) \circ i_C(n)$ et, de même, $\gamma_{\Gamma}(n) = u_{\Gamma}(n) \circ i_{\Gamma}(n)$.

La proposition suivante est le principal moyen de calcul des sections de N_C par liaison :

Proposition 4.17.

Soient Γ, C deux courbes lisses, géométriquement liées par des surfaces de degrés s et t . On suppose vérifiée la condition L_2 .

On a alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$h^0 N_C(n) + h^0 I_C(s+n) + h^0 I_C(t+n) + \dim. \operatorname{Im} \gamma_\Gamma(n) = h^0 N_\Gamma(n) + h^0 I_\Gamma(s+n) + h^0 I_\Gamma(t+n) + \dim. \operatorname{Im} \gamma_C(n).$$

Corollaire 4.18.

Sous les conditions précédentes, supposons de plus :

$$h^1 I_\Gamma(s+n) = h^1 I_\Gamma(t+n) = h^1 I_C(t+n) = h^1 I_C(s+n) = 0.$$

Alors, on a :

$$i) h^0 N_C(n) = h^0 N_\Gamma(n) + h^0 I_\Gamma(s+n) + h^0 I_\Gamma(t+n) - h^0 I_C(s+n) - h^0 I_C(t+n).$$

$$ii) h^0 N_C(n) = h^0 N_\Gamma(n) + h^0 O_C(s+n) + h^0 O_C(t+n) - h^0 O_\Gamma(s+n) - h^0 O_\Gamma(t+n).$$

$$iii) h^1 N_C(n) = h^1 N_\Gamma(n) + h^1 O_C(s+n) + h^1 O_C(t+n) - h^1 O_\Gamma(s+n) - h^1 O_\Gamma(t+n).$$

Remarques 4.19.

1) Le i) du corollaire est immédiat à partir de 4.17 puisqu'en effet, alors, $\gamma_C(n) = \gamma_\Gamma(n) = 0$.

2) La deuxième formule ii) résulte de l'égalité : $h^0 O_C(s+n) = h^0 O_P(s+n) - h^0 I_C(s+n)$ (car $h^1 I_C(s+n) = 0$) et des analogues pour t et Γ .

3) La formule iii) résulte de ii) par passage aux caractéristiques d'Euler-Poincaré.

4) On notera que les conditions : $h^1 I_C(s+n) = 0$ et $h^1 I_C(t+n) = 0$ s'écrivent aussi :

$$h^1 I_\Gamma(t-n-4) = 0 \quad \text{et} \quad h^1 I_\Gamma(s-n-4) = 0.$$

Démonstration de 4.17.

On la fait pour $n=0$ pour alléger les notations, le cas général est identique. On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & H^0 I_C(s) \oplus H^0 I_C(t) & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & H^0 O_P(s) \oplus H^0 O_P(t) & & \\
 & & & & \downarrow \rho_C & \searrow q_X & \\
 0 \rightarrow H^0 N_C & \xrightarrow{i_C} & H^0 O_C(s) \oplus H^0 O_C(t) & \xrightarrow{q_C} & H^0 I_X^1 & & \\
 & \searrow \gamma_C & \downarrow u_C & & & & \\
 & & H^1 I_C(s) \oplus H^1 I_C(t) & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

On pose : $A_C = u_C^{-1}(\text{Im } \gamma_C)$.

1) On a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Im } \rho_C \rightarrow A_C \xrightarrow{u_C|_{A_C}} \text{Im } \gamma_C \rightarrow 0.$$

C'est clair, car $\text{Im } \rho_C = \text{Ker } u_C$.

2) On a une suite exacte :

$$0 \rightarrow H^0 N_C \xrightarrow{i_C} A_C \xrightarrow{q_C|_{A_C}} \text{Im } q_X \rightarrow 0$$

où $\text{Im } q_X \subset H^0 T_X^1$ est l'image de la flèche naturelle :

$q_X : H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(s) \oplus H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(t) \rightarrow H^0 T_X^1$, composée de la restriction :

$H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(s) \oplus H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(t) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_X(s) \oplus H^0 \mathcal{O}_X(t) = H^0 N_X$ et de $H^0(r_X) : H^0 N_X \rightarrow H^0 T_X^1$. On a $q_X = q_C \circ \rho_C$. Vérifions l'assertion 2). D'abord, on a $i_C(H^0 N_C) \subset A_C$ par définition de A_C . Ensuite, on a $q_C(A_C) = \text{Im } q_X$:

Si $x \in A_C$, $y = u_C(x) \in \text{Im } \gamma_C$, donc, $y = \gamma_C(z) = u_C i_C(z)$, donc $u_C(x - i_C(z)) = 0$ et $x - i_C(z) = \rho_C(t)$.

Mais alors, $q_C(x) = q_C \rho_C(t) = q_X(t) \in \text{Im } q_X$.

Réciproquement, si $x \in \text{Im } q_X$, $x = q_X(z) = q_C \rho_C(z)$ et comme $u_C \rho_C(z) = 0$, $\rho_C(z) \in A_C$, $x \in q_C(A_C)$.

Enfin l'exactitude en A_C est claire.

3) On déduit de 2) qu'on a : $h^0 N_C = \dim A_C - \dim \text{Im } q_X$. Or, par 1),

$$\dim A_C = \dim \text{Im } \rho_C + \dim \text{Im } \gamma_C \text{ et } \dim \text{Im } \rho_C = h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(s) + h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(t) - h^0 I_C(s) - h^0 I_C(t).$$

On a donc :

$$h^0 N_C = h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(s) + h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(t) - h^0 I_C(s) - h^0 I_C(t) + \dim \text{Im } \gamma_C - \dim \text{Im } q_X.$$

Mais on a, de même, la formule analogue pour Γ d'où, par soustraction (noter que le terme en q_X disparaît) :

$$h^0 N_C - h^0 N_{\Gamma} = h^0 I_{\Gamma}(s) + h^0 I_{\Gamma}(t) - h^0 I_C(s) - h^0 I_C(t) + \dim \text{Im } \gamma_C - \dim \text{Im } \gamma_{\Gamma}.$$

ce qui est la formule annoncée.

f) Revue de quelques méthodes de calcul.

Nous aurons très souvent besoin (cf. 4.17), dans la suite, de calculer les dimensions de certains espaces de cohomologie, notamment : $h^i \mathcal{O}_C(n)$, $h^i \omega_C(n)$, $h^i I_C(n)$, $h^i N_C(n)$, pour $i=0,1$ et C une courbe lisse de degré d et genre g .

Rappelons brièvement les méthodes que nous utiliserons :

1) Le théorème de Riemann-Roch :

$$h^0 \mathcal{O}_C(n) - h^1 \mathcal{O}_C(n) = nd + 1 - g.$$

2) La dualité de Serre :

$$h^i \mathcal{O}_C(n) = h^{1-i} \omega_C(-n) \quad \text{pour } i = 0, 1 \text{ et } n \in \mathbb{Z}.$$

3) La suite exacte :

$$0 \rightarrow I_C \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0 \quad \text{et ses variantes tensorisées par } \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n) \text{ ainsi que les suites exactes longues qui en sont issues.}$$

4) Les formules de liaison 4.15 et 4.17.

5) Les résolutions de I_C , particulièrement lorsque C est projectivement normale. On a alors une résolution :

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-n_i) \rightarrow \bigoplus_{j=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d_j) \rightarrow I_C \rightarrow 0.$$

On a vu en 4.16 comment obtenir une telle résolution par liaison.

On sait alors calculer $h^0 N_C (= \dim H_{d,g})$ en fonction des n_i et d_j par [6], ou encore, cf. [32] 2.2.6, en utilisant la formule :

$$h^0(N_C(n)) = \text{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}^1(I_C, I_C(n)).$$

Un exemple : les courbes de degré s^2-1 liées aux droites.

Soit C une courbe de degré s^2-1 liée à une droite D dans l'intersection de deux surfaces de degré s . Supposons $s \geq 3$ (si $s=2$, on obtient pour C une cubique gauche avec un calcul légèrement différent).

1) On a $g(C) = (s-2)(s^2-2) = s^3 - 2s^2 - 2s + 4$ (cf. 4.15).

2) On a la résolution de I_D :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-2) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)^2 \rightarrow I_D \rightarrow 0$$

d'où celle de I_C :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-2s+1)^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-2s+2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-s)^2 \rightarrow I_C \rightarrow 0.$$

3) On en déduit $h^0 I_C(s) = 2$ (que l'on peut aussi retrouver par 4.15

$$h^0 I_C(s) = h^0 \omega_D(4-s) + 2 = 2 \quad \text{car } \deg \omega_D = -2), \text{ et aussi } h^0 I_C(s-2) = 0.$$

4) Comme D est projectivement normale, C aussi (ça se voit sur la résolution) donc $h^1 I_C(n) = 0$ pour tout n .

5) On en déduit $h^0 \omega_C(n) = h^0 \omega_{\mathbb{P}}(n) - h^0 I_C(n)$, par exemple $h^0 \omega_C(s) = \binom{s+3}{3} - 2$, ou encore $h^0 \omega_C(s-2) = \binom{s+1}{3}$.

6) Pour calculer $h^0 \omega_C(4-s)$ (cf. 4.2), on peut utiliser Riemann-Roch :

$$h^0 \omega_C(4-s) = (4-s)(s^2-1) + 2g - 2 + 1 - g + h^1 \omega_C(4-s)$$

en tenant compte de $h^1 \omega_C(4-s) = h^1 \omega_C(s-4) = h^1 \omega_{\mathbb{P}}(s-4) = \binom{s-1}{3}$. On trouve :

$h^0 \omega_C(4-s) = (s^3 + 6s^2 + 5s - 12)/6$. On peut aussi utiliser 4.15 :

$$h^0 \omega_C(4-s) = h^0 I_D(s) - 2 = 2 \binom{s+2}{3} - \binom{s+1}{3} - 2.$$

De même, on a

$$h^0 \omega_C(2-s) = h^1 \omega_C(s-2) = h^0 I_D(s-2) = \frac{s^3 - 7s + 6}{6}.$$

7) Enfin, on calcule $h^0 N_C$ grâce à 4.17 :

$$h^0 N_C = h^0 N_{\Gamma} + 2h^0 I_{\Gamma}(s) - 2h^0 I_C(s) = \frac{s^3 + 6s^2 + 5s}{3}$$

et, de même,

$$h^0 N_C(-2) = \frac{s^3 - 7s + 6}{3}. \text{ On note, avec intérêt, que l'on a :}$$

$$h^0 N_C(-2) = 2h^1 \omega_C(s-2).$$

Pour d'autres exemples, voir §5.

g) Une remarque sur la lissité du schéma de Hilbert $H_{d,g}$.

On a vu que C est un point lisse de $H_{d,g}$ si $h^1 N_C = 0$ ou si C est projectivement normale (2.5). Les méthodes de liaison donnent aussi des résultats en ce sens. Par exemple, si Γ est un point lisse de $H_{d_{\Gamma}, g_{\Gamma}}$, et si on a :

$h^1 I_{\Gamma}(s) = h^1 I_{\Gamma}(t) = h^1 I_{\Gamma}(s-4) = h^1 I_{\Gamma}(t-4) = 0$, alors C , liée à Γ par des surfaces de degrés s et t , est un point lisse de H_{d_C, g_C} . On peut d'ailleurs rem-

placer les hypothèses de nullité des $h^1 I_C(n)$ ci-dessus par les hypothèses :

$\gamma_C = 0$, $\gamma_{\Gamma} = 0$ (cf. [32] 2.3.6 et 2.3.7). À l'inverse, les méthodes de liaison, notamment le calcul 4.17, permettent de mieux comprendre les singularités des schémas de Hilbert (cf. [38] ou [48]).

§5. Application des §3,4 au calcul de $m(N_C)$ et
de $m(d,g)$: quelques exemples.

Nous allons maintenant utiliser les résultats des §3 et 4 pour aborder le problème du calcul de $m(N_C)$.

Le plan du §5 reprend les grandes lignes du §3 :

En a) on traite complètement le cas où N_C est décomposé, avec application aux intersections complètes et aux courbes rationnelles.

En b) c) d) on étudie la condition $h^0 N_C(-2) = 0$ (qui implique $m(N_C) = 2d$) et la fonction $D_p(g)$ associée à cette condition. Une application de cette étude permet de faire passer une courbe par $2d$ points situés sur une surface donnée (5.12). Les progrès accomplis dans le calcul de $D_p(g)$ le sont essentiellement par liaison (5.20).

En e) on étudie le cas où N_C est extension de faisceaux inversibles, puis en f) g) la h^0 -stabilité de N_C . Là encore les résultats principaux sont obtenus par liaison (5.31 ; 5.47). De nombreux exemples sont traités en g) III et IV.

Rappelons que l'on a, en tous cas : $m(N_C) \leq 1/2 h^0 N_C$.

a) Le cas N_C décomposé.

On a vu en 3.4 que, si $N = D \oplus E$, on a : $m(N) = \inf(h^0 D, h^0 E)$. On applique ceci aux deux cas examinés en 4.b.

a₁) Les intersections complètes.

Proposition 5.1.

Soit C une courbe lisse, intersection complète de deux surfaces de degrés s et t , avec $s \leq t$. On a :

1) Si $s < t$:

$$m(N_C) = h^0_{0_C}(s) = \binom{s+3}{3} - 1 < 1/2 h^0 N_C.$$

2) Si $s = t$:

$$m(N_C) = h^0_{0_C}(s) = \binom{s+3}{3} - 2 = 1/2 h^0 N_C.$$

Démonstration :

C'est 3.4 et 4.b₁ .

On déduit de 5.1 le calcul de $m(d,g)$ correspondant :

Proposition 5.2.

Soient s, t des entiers, avec $0 < s \leq t$. On pose $d = st$, $g = 1 + st(s+t-4)/2$.
Alors :

1) Si $s < t$, on a : $m(d,g) = \binom{s+3}{3} - 1$.

2) Si $s = t$, on a : $m(d,g) = \binom{s+3}{3} - 2$.

Démonstration :

Soit C une intersection complète lisse de deux surfaces de degrés s et t , on a vu en 4b₁ que C est un point de $H_{d,g}$. Comme C est projectivement normale, c'est un point lisse. On peut donc appliquer 2.4.2), de sorte que $m(d,g)$ est supérieur ou égal aux quantités annoncées.

Par ailleurs, si $C \in H_{d,g}$ et n'est pas intersection complète $s \times t$, C est sur une surface de degré $< s$ (cf. [15] Th. 3.1), donc, cf. 2.2, $m(d,g) \leq \binom{s+3}{3} - 1$. Ceci achève la démonstration dans le cas $s < t$. Si $s = t$, les intersections complètes $s \times s$ sont dans une même composante irréductible $H_{d,g,i}$ de $H_{d,g}$ dont elles forment un ouvert lisse ([15] 2.10). Si C est une intersection complète, on a donc : $\dim H_{d,g,i} = h^0 N_C = 2[\binom{s+3}{3} - 2]$. Il en résulte que $m(d,g,i) \leq \binom{s+3}{3} - 2$ (cf. 2.5 Rem. 3a). Si $H_{d,g,j}$ est une autre composante irréductible de $H_{d,g}$, il résulte de [15] 3.1, que les courbes de $H_{d,g,j}$ sont sur des surfaces de degré $< s$, donc $m(d,g,j) \leq \binom{s+2}{3} - 1 < \binom{s+3}{3} - 2$ (cf. 2.5 Rem. 3).

En définitive, $m(d,g) = \sup m(d,g,j) = \binom{s+3}{3} - 2$.

Remarques 5.3.

1) On peut retrouver les résultats précédents par voie géométrique. Par exemple, par $\binom{s+3}{3} - 2$ points généraux de $\mathbb{P}^3$, il passe un pinceau de surfaces de degré s , donc aussi la courbe intersection de deux surfaces du pinceau.

2) En général $H_{d,g}$ contient d'autres courbes que les intersections complètes. Par exemple, pour $d=9$, $g=10$, il y a deux composantes, l'une formée des intersections complètes 3×3 , l'autre de courbes tracées sur une quadrique (cf. [20] IV 6.4.3).

3) Si $H_{d,g,i}$ est la composante de $H_{d,g}$ qui contient les intersections complètes, on ignore, en général, si elle contient d'autres courbes.

a₂) Les courbes rationnelles.

Proposition 5.4.

Si C est une courbe rationnelle lisse de degré d , et si $N_C \simeq 0_{\mathbb{P}^1}(e_1) \oplus 0_{\mathbb{P}^1}(e_2)$ avec $e_1 + e_2 = 4d - 2$ (cf. 4b₂), on a :

$$m(N_C) = \inf(e_1 + 1, e_2 + 1) \leq 2d.$$

Pour $d = 1$, $m(N_C) = 2$; pour $d = 2$, $m(N_C) = 3$; pour $d = 3$, $m(N_C) = 6$; pour $d \geq 4$, il existe des courbes rationnelles C telles que $m(N_C) = 2d$.

Démonstration :

C'est 3.4 et 4.b₂.

Comme pour toute courbe rationnelle C on a : $h^1 N_C = 0$, $H_{d,0}$ est lisse de dimension $4d$ et, vu 2.4, on a le théorème suivant :

Théorème 5.5.

Pour $d \neq 2$, on a $m(d,0) = 2d$ (pour $d = 2$, $m(2,0) = 3$). Autrement dit, par $2d$ points généraux de $\mathbb{P}^3$ il passe une courbe rationnelle de degré d , lisse et connexe.

Corollaire 5.6.

On a, pour tout $d \neq 2$, $m(d) \geq 2d$.

b) La condition $H^0 N_C(-2) = 0$; généralités.

Nous étudions maintenant un cas très favorable, où le calcul de $m(N_C)$ est trivial.

Si H désigne une section plane de la courbe C , on a $N_C(-2H) = N_C(-2) = N_C \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C(-2)$.

Comme $\chi(N_C(-2)) = \chi(N_C) - 4d = 0$, on a : $h^0 N_C(-2) = 0 \iff h^1 N_C(-2) = 0$ et ceci implique $h^1 N_C = 0$, donc $h^0 N_C = 4d$.

Vu 3.1, 2.4 et 2.5, on a aussitôt les résultats suivants :

Proposition 5.6.

Si C est une courbe vérifiant $h^0 N_C(-2) = 0$, on a $m(N_C) = 2d$.

Corollaire 5.7.

S'il existe une courbe C lisse et connexe de degré d et genre g vérifiant $h^0 N_C(-2) = 0$, on a $m(d, g) \geq 2d$.

Applications.

1) Si C est une courbe rationnelle générale de degré d , son fibré normal est équilibré (cf. 4b₂) donc vérifie $h^0 N_C(-2) = 0$. On retrouve ainsi le Th. 5.5.

2) Pour $g \geq 1$, on utilise les notations et résultats de [7] :

Définition 5.8.

1) Pour $g \geq 0$, on pose :

$$D_p(g) = \inf \{d \in \mathbb{N}^* \mid \text{Il existe } C \in H_{d,g} \text{ avec } h^0 N_C(-2) = 0\}.$$

2) Pour $d \geq 1$, on pose :

$$G_p(d) = \sup \{g \in \mathbb{N} \mid \text{Il existe } C \in H_{d,g} \text{ avec } h^0 N_C(-2) = 0\}.$$

Remarque 5.9.

On a $G_p(D_p(g)) \geq g$ et $D_p(G_p(d)) \leq d$, mais les fonctions ne sont pas réciproques l'une de l'autre (par exemple on a $G_p(3) = 0$ et $D_p(0) = 1$).

Rappelons les résultats de [7] :

Proposition 5.10 (Ellingsrud-Hirschowitz).

i) $D_p(g)$ est fini.

ii) Pour $g \geq 1$ et $d \geq D_p(g)$ (ou pour $d \geq 3$ si $g = 0$), il existe $C \in H_{d,g}$ avec $h^0 N_C(-2) = 0$.

iii) $D_p(g+g') \leq D_p(g) + D_p(g')$.

iv) $\limsup g^{-2/3} D_p(g) \leq (\frac{9}{8})^{1/3}$.

v) $\liminf d^{-3/2} G_p(d) \geq (\frac{8}{9})^{1/3}$.

On déduit aussitôt du point ii) :

Corollaire 5.11.

Pour $g \geq 1$ et $d \geq D_p(g)$, on a $m(d, g) \geq 2d$. Autrement dit, par $2d$ points généraux de $\mathbb{P}^3$, on peut faire passer une courbe de degré d et genre g .

Ce corollaire, et la variante que nous en donnerons (cf. 5.c) en imposant aux $2d$ points d'être sur une surface donnée sont les principales motivations de notre intérêt pour les fonctions $D_p(g)$ et $G_p(d)$. Le calcul de ces fonctions sera abordé en 5.d. Notons déjà les résultats suivants (cf. [7]) :

On a : $D_p(1) = 5$, $D_p(2) \leq 10$, $D_p(3) = 6$.

Ce dernier cas est un cas particulier d'un résultat d'Ellia (cf. [4]) :

Proposition 5.11.bis.

1) Soient s un entier et C une courbe lisse admettant la résolution :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-s-1)^s \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-s)^{s+1} \rightarrow I_C \rightarrow 0$$

a) C est de degré $s(s+1)/2$ et de genre $(2s^3 - 3s^2 - 5s)/6 + 1$.

b) On a $h^0 N_C(-2) = 0$.

2) Si C est une courbe projectivement normale admettant une résolution :

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-n_i) \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{r+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-d_j) \rightarrow I_C \rightarrow 0$$

avec $\sup d_j < \inf n_i$, $h^0 N_C(-2)$ est nul si et seulement si C est du type précédent i.e. les d_j (resp. les n_i) sont tous égaux à s (resp. $s+1$) et il y en a $s+1$ (resp. s).

Démonstration :

1) a) est clair et b) est dans [4] . On peut aussi le retrouver aisément avec 5.20, voir plus loin.

2) Soit $s = \inf d_j$. Comme C est sur une surface de degré s , soit Q , on a une surjection $N_C \rightarrow E \rightarrow 0$, avec E , sous-faisceau inversible de $N_Q|_C = \mathcal{O}_C(s)$.

Il en résulte que $h^0 N_C(-2) = h^1 N_C(-2) \geq h^1 E(-2) \geq h^1 \mathcal{O}_C(s-2)$.

Si donc $h^0 N_C(-2)$ est nul, on a aussi :

$$h^1 \mathcal{O}_C(s-2) = h^2 I_C(s-2) = 0 = \sum_{i=1}^r h^3 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(s-n_i-2) - \sum_{j=1}^{r+1} h^3 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(s-d_j-2) .$$

Posons $\sup d_j = s+k$. On a donc, pour tout j , $s-d_j-2 \geq -k-2$ et, pour tout i , $s-n_i-2 \leq -k-3$, d'où : $h^1_{0_C}(s-2) \geq r h^3_{0_P}(-k-3) - r h^3_{0_P}(-k-2)$ puisque l'un des d_j vaut s .

On a alors $0 \geq r[(\binom{k+2}{3}) - (\binom{k+1}{3})]$.

Mais le second membre est > 0 dès que $k > 0$. Donc, $k = 0$, i.e. tous les d_j sont égaux à s . Alors, tous les termes $h^3_{0_P}(s-d_j-2)$ sont nuls, donc aussi les $h^3_{0_P}(s-n_i-2)$ i.e. $s-n_i-2 \geq -3$ donc les n_i sont tous égaux à $s+1$. Enfin comme $\sum_1^r n_i = \sum_1^{r+1} d_j$, on a nécessairement $r = s$.

Le résultat précédent donne aussitôt :

$$D_p(1+(2s^3-3s^2-5s)/6) \leq s(s+1)/2.$$

En fait, il y a égalité (cf. 5.19). C'est à l'aide de ce résultat que l'on obtient l'estimation asymptotique iv) de 5.10. Dans le même ordre d'idée on a :

Corollaire 5.11.ter.

Pour $g \geq 26$, on a $D_p(g) \leq g+3$.

Démonstration :

On remarque en consultant le tableau de [7] que pour $g \leq 25$, on a $D_p(g) \leq g+14$ ($D_p(8) \leq 22$). On fait la division de g par 26 :

$$g = 26n + r \quad \text{avec} \quad n \geq 1 \quad \text{et} \quad r < 26.$$

On a donc, d'après 5.10 iii) :

$$D_p(g) \leq n D_p(26) + D_p(r) \leq n D_p(26) + r + 14.$$

Mais d'après 5.11.bis appliqué avec $s = 5$, on a $D_p(26) \leq 15$ d'où :

$$D_p(g) - g \leq 14 - 11n \leq 3 \quad \text{puisque} \quad n \geq 1.$$

Nous utiliserons ce corollaire en 5.22. Il serait très intéressant de savoir prouver pour $g \geq 3$ que $D_p(g) \leq g+3$, cf. [2]. C'est aussi en vue de [2] qu'on énonce la variante suivante. Toutefois le cas $s = 2$ utilisé en [2] est nettement plus facile.

c) Une variante : $2d$ points sur une surface.Théorème 5.12.

Soit Q une surface intègre de $\mathbb{P}^3$, de degré $s \geq 2$.

Soient d, g des entiers. On suppose $d \geq D_p(g)$, ou $d \geq 3$ si $g = 0$.

Soient $x_1, \dots, x_{2d}$ $2d$ points généraux de Q . Il existe une courbe C lisse et connexe, de degré d et genre g , coupant transversalement Q , et passant par $x_1, \dots, x_{2d}$.

Démonstration :

1) Soit S le lieu singulier de Q . On a : $\dim S \leq 1$. Posons $Q' = Q - S$. Soit C une courbe lisse et connexe de degré d et genre g , telle que $h^0 N_C(-2) = 0$. Il en existe d'après 5.9 ii). De plus, quitte à remplacer C par $h(C)$ où h est une homographie de $\mathbb{P}^3$ (i.e. un élément de $PGL(4, k)$), on peut supposer que C vérifie la propriété suivante :

(*) Il existe un voisinage ouvert U de l'identité dans $PGL(4, k)$ (pour la topologie de Zariski), tel que l'on ait, pour $u \in U$:

i) $u(C) \cap S = \emptyset$

ii) $u(C)$ coupe transversalement Q' en sd points distincts.

Cela résulte aussitôt de [31] Cor. 4.

2) Soit maintenant H un plan coupant transversalement C en d points (il en existe par Bertini). En choisissant convenablement un repère de $\mathbb{P}^3$, on peut supposer que H a pour équation $Z = 0$ et que, si F est l'équation de Q , le terme en Z^s de F est non nul (changer, au besoin, X en $X + \lambda Z$ etc...).

3) On considère alors, pour $\lambda \in k$, la famille de polynômes :

$$F_\lambda(X, Y, Z, T) = F(\lambda X, \lambda Y, Z, \lambda T).$$

On a : $F_1 = F$, $F_0 = Z^s$. On obtient ainsi une famille Q_λ de diviseurs de degré s sur $\mathbb{P}^3$, paramétrée par k (considéré comme droite affine), avec $Q_1 = Q$, $Q_0 = sH$.

Pour $\lambda \neq 0$, on a un isomorphisme $\pi_\lambda : Q \rightarrow Q_\lambda$, donné par l'homographie

$\pi_\lambda(x, y, z, t) = (x, y, \lambda z, t)$. Vu la propriété (*), il existe un ouvert de Zariski Ω_0

de k , contenant 1, tel que, si $\lambda \in \Omega_0$, $\pi_\lambda^{-1}(C)$ et Q (donc aussi C et Q_λ) soient transverses. Posons $\Omega = \Omega_0 \cup \{0\}$. C'est encore un ouvert de k et on définit un morphisme :

$j: \Omega \rightarrow \text{Hilb}_C^{sd}$ en associant à λ le diviseur $C \cap Q_\lambda$. Pour $\lambda \neq 0$, $C \cap Q_\lambda$ est formé de sd points distincts, pour $\lambda = 0$ $C \cap Q_0 = C \cap sH$ est égal à s fois la section plane de C .

4) Soit I le sous-schéma des drapeaux dans $\text{Hilb}_C^{2d} \times \text{Hilb}_C^{sd}$:

$$I = \{(M, L) \mid M \subset L\} \quad (\text{cf. } \S 1).$$

Soit p la restriction à I de la deuxième projection. On a :

Lemme 5.13.

Le morphisme $p: I \rightarrow \text{Hilb}_C^{sd}$ est plat.

5) Admettons provisoirement ce lemme. On considère le diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} I_\Omega = I \times_{\text{Hilb}_C^{sd}} \Omega & \longrightarrow & I \\ \downarrow p' & & \downarrow p \\ \Omega & \xrightarrow{j} & \text{Hilb}_C^{sd} \end{array}$$

Un point de I_Ω est un couple (λ, M_λ) où $\lambda \in \Omega$ et où M_λ est un diviseur de degré $2d$ sur C , contenu dans $C \cap Q_\lambda$. De plus, p' est plat en vertu de 5.13.

Soit $M_0 = C \cap 2H \subset C \cap sH = C \cap Q_0$; on a donc $(0, M_0) \in I_\Omega$. De plus, $h^0 N_C(-M_0) = h^0 N_C(-2) = 0$. Soit M le diviseur universel au-dessus de Hilb_C^{2d} ; M est plat sur Hilb_C^{2d} , donc M_{I_Ω} est plat sur I_Ω . Comme N_C est localement libre, le faisceau

$N_C(-M_{I_\Omega})$ est plat sur I_Ω . Il en résulte que la fonction $(\lambda, M_\lambda) \mapsto h^0 N_C(-M_\lambda)$

est semi-continue supérieurement sur I_Ω (cf. [20] III 12.8), donc nulle au voisinage de $(0, M_0)$. Comme p' est plate, donc ouverte, il existe un ouvert $\Omega' \subset \Omega$ tel que, pour $\lambda \in \Omega'$, il existe M_λ , diviseur de degré $2d$ sur C , contenu dans $C \cap Q_\lambda$, et vérifiant $h^0 N_C(-M_\lambda) = 0$.

6) Fixons alors $\lambda \in \Omega'$, $\lambda \neq 0$. Soit $C' = \pi_\lambda^{-1}(C)$; C' et Q sont transverses et, si $M' = \pi_\lambda^{-1}(M_\lambda)$, on a $h^0 N_C(-M') = 0$, avec $\deg M' = 2d$ et $M' \subset Q \cap C'$.

En vertu de 2.4 et 3.1, il existe alors un ouvert W de $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^3}^{2d}$ contenant M' , tel que, si $M \in W$, il existe $C'' \in H_{d,g}$ contenant M . A fortiori, ceci vaut sur l'ouvert $W \cap \text{Hilb}_Q^{2d}$ de Hilb_Q^{2d} . Quitte à restreindre l'ouvert $\pi_{2d}^{-1}(f_{2d}^{-1}(W))$ (notations du §2), comme C' et Q sont transverses, on peut supposer que C'' et Q le sont aussi, ce qui achève de prouver 5.12.

7) Démonstration de 5.13.

Comme C est une courbe lisse, si L est un diviseur de degré s sur C , il est isomorphe comme k -schéma à $\text{spec } k[X]/\prod_{i=1}^s (X-a_i)$, avec des a_i dans k (éventuellement égaux). Pour prouver que p est plat, il suffit de voir que ses fibres sont finies et toutes de même longueur. Si $L \in \text{Hilb}_C^{sd}$, la fibre de p en L est Hilb_L^{2d} . On est donc ramené à prouver le lemme suivant :

Lemme 5.14.

Soit k un anneau ; n, s des entiers avec $1 \leq n \leq s$. Soient $a_1, \dots, a_s \in k$ et $A = k[X]/\prod_{i=1}^s (X-a_i)$. Alors, le schéma de Hilbert $\text{Hilb}_{\text{spec } A/k}^n$ est affine fini, d'anneau B_k où B_k est un k -module libre de rang $\binom{s}{n}$ (et ceci, que les a_i soient, ou non, distincts).

Démonstration :

1) L'assertion est évidente si les a_i sont distincts, puisqu'il s'agit alors de prendre n points parmi s . On peut prendre pour B_k le produit de $\binom{s}{n}$ copies de k , indexé par les parties à n éléments de $\{a_1, \dots, a_s\}$.

2) Pour le cas général, on commence par décrire $\text{Hilb}_{\text{spec } k[X]/k}^n$. Pour ceci, dans $k[X_1, \dots, X_n]$, on considère les polynômes symétriques $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$, définis par :

$$\prod_{i=1}^n (X-X_i) = X^n + \Sigma_1 X^{n-1} + \dots + \Sigma_n.$$

Alors, on a $\text{Hilb}_{\text{spec } k[X]/k}^n \simeq \text{Spec } k[\Sigma_1, \dots, \Sigma_n]$, avec comme schéma universel au-dessus :

$$\text{Spec } k[\Sigma_1, \dots, \Sigma_n][X]/(X^n + \Sigma_1 X^{n-1} + \dots + \Sigma_n).$$

En effet, se donner n points de la droite affine sur k revient à se donner le polynôme dont ils sont racines.

On obtient alors $\text{Hilb}_{\text{spec } A/k}^n$ en écrivant que ces n points sont parmi $a_1, \dots, a_s$, ou encore, que le polynôme dont ils sont racines divise $\prod_{i=1}^s X-a_i$.

Précisément, on écrit dans $k[\Sigma_1, \dots, \Sigma_n][X]$ la division euclidienne :

$$\prod_{i=1}^s (X-a_i) = (X^n + \Sigma_1 X^{n-1} + \dots + \Sigma_n)Q(X) + R(X),$$

avec $R(X) = P_1 X^{n-1} + \dots + P_n$, $P_i \in k[\Sigma_1, \dots, \Sigma_n]$ et $\text{Hilb}_{\text{spec } A/k}^n$ est le schéma affine d'anneau

$$k[\Sigma_1, \dots, \Sigma_n]/(P_1, \dots, P_n) = B_k.$$

On applique ceci à l'anneau $K = k[Y_1, \dots, Y_s]$, avec pour a_i les indéterminées Y_i , distinctes ; d'après le premier cas, B_K est libre de rang $\binom{s}{n}$ sur K . Mais, la division euclidienne ci-dessus sur k s'obtient à partir de celle sur K en donnant aux Y_i les valeurs a_i . Donc B_k , qui s'obtient à partir de B_K par spécialisation est lui aussi libre de rang $\binom{s}{n}$ sur k .

d) Quelques calculs de $D_p(g)$.

Nous commençons par une minoration de $D_p(g)$.

Proposition 5.15.

Soit C une courbe lisse et connexe de degré d et genre g .

On pose $s = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid h^0 I_C(n) \neq 0\}$. Alors :

$$1) h^0 N_C(-2) = h^1 N_C(-2) \geq h^1 O_C(s-2).$$

$$2) h^0 N_C(-2) \geq \frac{s^3-s}{6} - (s-2)d + g - 1.$$

Démonstration :

Si Q est une surface de degré s contenant C , on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow N_{C/Q} \rightarrow N_C \xrightarrow{\pi} N_Q|_C$$

et $N_Q|_C \simeq O_C(s)$. Soit $E = \text{Im } \pi$, E est un faisceau inversible sur C . Comme $\pi : N_C \rightarrow E$ est surjective, on a $h^1 N_C(-2) \geq h^1 E(-2)$.

Comme $O_C(s)/E$ est de torsion, on a $h^1 E(-2) \geq h^1 O_C(s-2)$ d'où le point 1).

Pour 2), on a, par Riemann-Roch,

$$h^1 O_C(s-2) = h^0 O_C(s-2) - (s-2)d + g - 1$$

et, comme $h^0 I_C(s-2) = 0$, on a $h^0 O_C(s-2) \geq h^0 O_P(s-2) = \binom{s+1}{3} = \frac{s^3-s}{6}$ d'où 2).

Corollaire 5.16.

Soit C une courbe comme ci-dessus. On suppose :

$$F(d,g) = 27[12d+6(g-1)]^2 - 4(6d+1)^3 > 0 .$$

Alors, on a : $h^0 N_C(-2) > 0$.

Démonstration :

Il suffit de se souvenir de ce que $s^3 - ps + q$ est positif pour $s \geq 0$ pourvu que $4p^3 - 27q^2 < 0$.

Introduisons, pour $d \geq 0$, la fonction :

$$f(d) = \frac{1}{9\sqrt{3}} (6d+1)^{3/2} - 2d + 1 \quad (5.16 *) .$$

Pour $d \geq 2$, cette fonction est croissante donc admet une inverse f^{-1} .

$f(d)$ est la racine > 0 de l'équation du second degré en g : $F(d,g) = 0$. On a donc, pour $d \geq 2$, $g \geq 1$:

$$F(d,g) = 0 \iff g = f(d) \iff d = f^{-1}(g)$$

$$F(d,g) \leq 0 \iff g \leq f(d) \iff d \geq f^{-1}(g) .$$

On en déduit aussitôt, vu 5.16 :

Corollaire 5.17.

On a, pour $g \geq 1$, $D_p(g) \geq f^{-1}(g)$.

Corollaire 5.18 (estimation asymptotique).

On a : $\limsup g^{-2/3} D_p(g) = (\frac{9}{8})^{1/3}$.

Démonstration :

D'après 5.10 iv), la $\limsup$ est, a priori, plus petite que $(\frac{9}{8})^{1/3}$.

Mais, pour d grand, on a : $f(d) \sim \frac{2\sqrt{2}}{3} d^{3/2}$, donc $f^{-1}(g) \sim (\frac{9}{8})^{1/3} g^{2/3}$ et on conclut par 5.17.

Corollaire 5.19 : (l'exemple d'Ellia).

Si s est un entier ≥ 3 , on a :

$$D_p(1 + \frac{2s^3 - 3s^2 - 5s}{6}) = s(s+1)/2 .$$

Démonstration :

On a vu en b) que $D_p \leq s(s+1)/2$.

Posons $g_s = 1 + (2s^3 - 3s^2 - 5s)/6$. On vérifie sans peine que $g_s > f(\frac{s(s+1)}{2} - 1)$, donc aussi $f^{-1}(g_s) > \frac{s(s+1)}{2} - 1$ et on conclut par 5.17.

Nous passons maintenant à un résultat plus positif concernant $h^0 N_C(-2) = 0$.

Le théorème suivant utilise la méthode de liaison pour construire, à partir d'une courbe Γ qui vérifie $h^0 N_\Gamma(-2) = 0$, une courbe C qui vérifie aussi cette condition.

Théorème 5.20.

Soient Γ et C deux courbes lisses, géométriquement liées par deux surfaces Q, Q' de même degré s . On suppose que la condition L_2 de 4.13 est vérifiée. On suppose de plus :

$$1) h^0 N_\Gamma(-2) = 0.$$

2) La flèche naturelle de restriction :

$$\rho_\Gamma(s-2) : H^0 \mathcal{O}_\Gamma(s-2) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_\Gamma(s-2)$$

est bijective (i.e. $h^0 I_\Gamma(s-2) = h^1 I_\Gamma(s-2) = 0$). Alors, on a $h^0 N_C(-2) = 0$ et la flèche $\rho_C(s-2)$ correspondante est bijective.

Démonstration :

On a $h^1 I_C(s-2) = h^1 I_\Gamma(s-2) = 0$ (4.15). On peut donc appliquer 4.17. On a alors : $h^0 N_C(-2) + 2 h^0 I_C(s-2) = 0$, donc, $h^0 I_C(s-2) = h^0 N_C(-2) = 0$.

Remarques 5.21.

1) Les flèches $\rho_\Gamma(k)$ et $\rho_C(k)$ sont celles qui interviennent dans la conjecture de Noether sur les courbes de rang maximum et l'application de 5.20 est très liée aux résultats connus sur le sujet (cf. [2]).

2) Le cas d'une liaison par des surfaces de degrés inégaux, $s < t$, n'apporte rien. En effet, pour appliquer la méthode, on doit avoir : $h^0 I_\Gamma(s-2) = h^0 I_\Gamma(t-2) = 0$. Or, puisque Γ est liée à C par des surfaces de degrés s et t , c'est que $h^0 I_\Gamma(s) \neq 0$. Le seul cas possible est donc $t = s+1$ (car $s-2 < t-2 < s$).

Mais alors, comme $\rho_\Gamma(s-2)$ et $\rho_\Gamma(t-2)$ doivent être bijectifs, on a :

$$h^0 \mathcal{O}_\Gamma(s-2) = (s-2)d_\Gamma + 1 - g_\Gamma = h^0 \mathcal{O}_\Gamma(s-2) = (s^3 - s)/6$$

(car $h^1 N_\Gamma(-2) = 0$ entraîne $h^1 O_\Gamma(s-2) = 0$, cf. 4.e). De même, $h^0 O_\Gamma(t-2) = h^0 O_\Gamma(s-1) = (s-1)d_\Gamma + 1 - g_\Gamma = (s^3 + 3s^2 + 2s)/6$ d'où, par différence : $d_\Gamma = s(s+1)/2$. Mais alors, comme $t = s+1$, on a $d_C = d_\Gamma$, $g_C = g_\Gamma$ et on revient à la case départ.

3) Le théorème 5.20 permet de retrouver 5.11.bis i.e. l'exemple d'Ellia. Il suffit de procéder par récurrence sur s . On part d'une droite que l'on lie par deux quadriques à une cubique rationnelle. Puis on lie cette dernière par deux surfaces cubiques à une courbe de degré 6 et genre 3 etc...

4) Le théorème reste vrai en remplaçant l'hypothèse $h^1 I_\Gamma(s-2) = 0 = h^1 I_C(s-2)$ par $\gamma_C(-2) = 0$. On peut se demander si pour C assez générale cette hypothèse n'est pas automatiquement satisfaite, cf. §6, question 6.2.

Applications 5.22.

Le principe d'application de 5.20 est le suivant : on part d'une courbe Γ lisse (mais pas nécessairement connexe) vérifiant $h^0 N_\Gamma(-2) = 0$ et d'un entier s tel que 1) $h^0 I_\Gamma(s-2) = h^1 I_\Gamma(s-2) = 0$; 2) $I_\Gamma(s)$ soit engendré par ses sections. Si Q et Q' sont deux surfaces de degré s contenant Γ , assez générales, et si C est liée à Γ par Q et Q' , on a alors : $h^0 N_C(-2) = 0$; C est connexe si $h^1 I_\Gamma(2s-4) = 0$. Pour vérifier que $I_\Gamma(s)$ est engendré par ses sections on utilisera, le plus souvent, le critère de Castelnuovo ([37] Lect. 14). Il suffit de vérifier : $h^1 I_\Gamma(s-1) = h^2 I_\Gamma(s-2) = h^3 I_\Gamma(s-3) = 0$. La condition $h^3 I_\Gamma(s-3) = 0$ est satisfaite dès que $s \geq 0$. On a $h^2 I_\Gamma(s-2) = h^1 O_\Gamma(s-2)$ et il suffit de vérifier que $O_\Gamma(s-2)$ est non spécial. Comme $h^0 N_\Gamma(-2) = 0$, c'est vrai dès que Γ est sur une surface de degré s , même singulière (on a une surjection $H^1 N_\Gamma(-2) \rightarrow H^1 O_\Gamma(s-2)$). Les conditions sur $h^0 I_\Gamma(s-2)$ et $h^1 I_\Gamma(s-2)$, $h^1 I_\Gamma(s-1)$ sont faciles à vérifier lorsque Γ est de rang maximum (i.e. pour tout n , $\rho_\Gamma(n)$ injective ou surjective). En effet, pour tout n , l'un des nombres $h^0 I_\Gamma(n)$ et $h^1 I_\Gamma(n)$ est nul et il suffit de comparer $h^0 O_\Gamma(n)$ et $h^0 O_P(n)$ pour savoir lequel.

Nous utiliserons les résultats suivants concernant le rang maximum :

1) Une réunion assez générale de droites disjointes est de rang maximum ([24]).

2) Une courbe rationnelle assez générale est de rang maximum ([28], [2]).

3) La réunion d'une courbe rationnelle et de n droites disjointes, assez générales, est de rang maximum ([26], [53]).

4) Si $0 \leq g \leq d-3$, il existe C lisse, connexe, de degré d et genre g , de rang maximum ([2]).

Nous étudions déjà quelques exemples :

Exemple A :

Si Γ est réunion de deux droites disjointes, on a : $d_\Gamma = 2$, $g_\Gamma = -1$ (genre arithmétique), $h^0 N_\Gamma(-2) = 0$, $h^1 I_\Gamma(n) = 0$ pour $n \neq 0$, $h^1 I_\Gamma = 1$. Il en résulte que $I_\Gamma(3)$ est engendré par ses sections. Comme Γ n'est pas plane, $h^0 I_\Gamma(1) = 0$ et la méthode s'applique. On obtient par une liaison assez générale dans deux surfaces cubiques une courbe lisse et connexe C de degré 7 et genre 4 ; on a donc $D_p(4) \leq 7$.

Exemple B :

Si Γ est une courbe elliptique de degré 5 et si $s = 4$, la méthode s'applique (Γ est dans la classe de liaison de la courbe réunion de deux droites disjointes et n'a donc qu'un $h^1 I_\Gamma(n) \neq 0$, c'est $h^1 I_\Gamma(1) = 1$. On a donc $h^1 I_\Gamma(2) = h^1 I_\Gamma(3) = 0$. Comme $h^0 O_\Gamma(2) = 10$, on a aussi $h^0 I_\Gamma(2) = 0$. On obtient pour C une courbe de degré 11 et genre 13, d'où $D_p(13) \leq 11$.

De même, si Γ est réunion disjointe d'une cubique rationnelle et d'une droite ($d_\Gamma = 4$, $g_\Gamma = -1$), on obtient C , de degré 12 et genre 15, d'où $D_p(15) \leq 12$.

On obtient aussitôt par addition (5.10.iii) les résultats suivants :

$$D_p(5) \leq 12 , D_p(7) \leq 13 , D_p(8) \leq 14 \text{ etc...}$$

qui améliorent [7].

Le théorème suivant fait un bilan plus systématique des résultats obtenus grâce à 5.20 :

Théorème 5.23.

Soient d et s des entiers, avec $s \geq 3$ et

$$s(s+1)/6 \leq d \leq (s^2+3s+8)/6 .$$

On pose $g = 1 + (s-2)d - (s^3-s)/6$. On a l'inégalité :

$$1-d \leq g \leq d-3 .$$

Alors, pour tous les triplets (d,g,s) comme ci-dessus à l'exception des suivants :

$$(4,1,3) ; (8,5,5) ; (10,6,6) ; (23,20,10) ;$$

il existe une courbe lisse Γ de degré d et genre g telle que $I_\Gamma(s)$ soit engendré par ses sections et que $h^0 I_\Gamma(s-2) = h^1 I_\Gamma(s-2) = 0$.

Si on lie Γ par deux surfaces de degré s assez générales, on obtient une courbe C lisse et connexe, vérifiant $h^0 N_C(-2) = 0$, de degré $d' = s^2 - d$, de genre $g' = 1 + (s-2)(s^2 - d) - (s^3 - s)/6$.

Asymptotiquement, $d' \sim \frac{5}{6} \sqrt[3]{\frac{9}{4}} g^{2/3}$.

Démonstration :

Si Γ est de degré d et genre g , comme ci-dessus, $0_\Gamma(s-2)$ est non spécial (car $(s-2)d > 2g-2$) et on a $h^0 0_\Gamma(s-2) = (s-2)d+1-g = \frac{s^3-s}{6} = h^0 0_{\mathbb{P}}(s-2)$. On a aussi : $h^0 0_\Gamma(s-1) < h^0 0_{\mathbb{P}}(s-1)$.

Si Γ est de rang maximal et vérifie $h^0 N_\Gamma(-2) = 0$, on aura donc toutes les conditions requises.

Si g est négatif ou nul, $g = -n$, on prend pour Γ une réunion disjointe assez générale d'une courbe rationnelle de degré $d-n$ (≥ 1 par hypothèse) et de n droites ; Γ est bien de degré d et genre $-n$. Si Γ est assez générale, elle est de rang maximum (cf. Rappel 3 ci-dessus). On vérifie d'autre part que $g \neq 2-d$, donc la courbe rationnelle n'est pas une conique et on a bien $h^0 N_\Gamma(-2) = 0$.

Si $g = -(d-1)$, Γ est réunion de $d-1$ droites ; on a $d = s(s+1)/6$ et il faut $s \equiv 0, -1 \pmod{3}$. Si $g = 0$, Γ est rationnelle de degré $(s^2+2s+3)/6$; il faut $s \equiv 0, 1 \pmod{3}$.

Lorsque g est positif, on sait qu'il existe Γ lisse et connexe de degré d et genre g , de rang maximum (cf. rappel 4 ci-dessus). Précisément, comme cette propriété est ouverte et $H_{d,g}$ irréductible (car $d \geq g+3$, cf. [52]) l'ensemble des courbes de rang maximum est un ouvert dense. La condition $h^0 N_\Gamma(-2) = 0$ étant elle aussi ouverte, il suffit de montrer qu'il existe dans $H_{d,g}$ une courbe Γ vérifiant $h^0 N_\Gamma(-2) = 0$, i.e. de montrer $d \geq D_p(g)$.

Pour $s \geq 14$, on a $d \geq 35$. On en déduit : $d \geq D_p(g)$. En effet, si $g \geq 26$, comme $d \geq g+3$, cela résulte de 5.11.ter, si $g < 26$, cela se lit dans les tables de [7] (ou mieux celles du §6).

Pour $s \leq 13$, on a un nombre fini de cas à examiner qui résultent alors de [7], ou des résultats des exemples A, B ci-dessus (voir tableau ci-après). Les triplets (d, g, s) non évidents sont les suivants :

$(4, 1, 3)$; $(7, 2, 5)$; $(8, 5, 5)$; $(9, 2, 6)$; $(10, 6, 6)$; $(13, 10, 7)$ et $(23, 20, 10)$.

Une courbe elliptique de degré 4 est intersection complète de deux quadriques, donc $N_{\Gamma} = 0_{\Gamma}(2) \oplus 0_{\Gamma}(2)$ et $h^0 N_{\Gamma}(-2) = 2$. Ce cas est à rejeter.

Pour $(7,2,5)$, on prend pour Γ la réunion disjointe d'une courbe γ de degré 6 et genre 3 (cf. [4]) et d'une droite ; Γ admet alors la résolution suivante :

$$0 \rightarrow 0_{\mathbb{P}}(-6)^3 \rightarrow 0_{\mathbb{P}}(-5)^{10} \rightarrow 0_{\mathbb{P}}(-4)^8 \rightarrow I_{\Gamma} \rightarrow 0$$

et il en résulte aussitôt : $h^0 I_{\Gamma}(3) = h^1 I_{\Gamma}(3) = h^1 I_{\Gamma}(4) = 0$. Comme $h^0 N_{\Gamma}(-2) = 0$, Γ convient (Γ est bien de degré 7 et genre arithmétique 2).

De même pour $(9,2,6)$, on prend Γ réunion disjointe d'une courbe de degré 6 et genre 3 comme ci-dessus et d'une cubique rationnelle et pour $(13,10,7)$, on prend pour Γ la réunion disjointe d'une courbe de degré 10 et genre 11 (cf. toujours [4]) et d'une cubique rationnelle.

Il est possible que la même méthode soit valable pour $(23,20,10)$ avec une courbe réunion de γ $(15,26)$, d'une courbe rationnelle et de 5 droites, mais nous ne savons pas le prouver.

De même, nous ignorons si $D_{\mathbb{P}}(5) \leq 8$, $D_{\mathbb{P}}(6) \leq 10$ d'où la liste des cas d'exceptions éventuels.

Le calcul du degré et du genre de la courbe C liée à Γ est alors évident. On notera que l'estimation asymptotique est un peu moins bonne que celle vue en 5.18.

Nous donnons ci-dessous le tableau des résultats obtenus pour $3 \leq s \leq 9$.

Pour un tableau des résultats concernant $D_{\mathbb{P}}$, voir §6 a.

Remarquons enfin que la courbe C obtenue n'est pas en général de rang maximum : dès que $s > 5$, on a $h^0 0_{\Gamma}(s-4) > h^0 0_{\mathbb{P}}(s-4)$, donc $h^1 I_{\Gamma}(s-4) = h^1 I_C(s) \neq 0$, mais aussi $h^0 I_C(s) \geq 2$.

En revanche, C est connexe puisque $h^1 I_C = h^1 I_{\Gamma}(2s-4) = 0$ puisque Γ est s -régulière au sens de Castelnuovo, donc aussi m -régulière pour $m \geq s$.

Nouvelles courbes de degré d_C et genre g_C vérifiant $h^0 N_C(-2) = 0$,
obtenues par liaison dans deux surfaces de degré s , à partir de courbes Γ ,
 (d_Γ, g_Γ) .

s	3	3	4	4	4	5	5	5
$\Gamma : (d_\Gamma, g_\Gamma)$	(2,-1)	(3,0)	(4,-1)	(5,1)	(6,3)	(5,-4)	(6,-1)	(7,2)
$C : (d_C, g_C)$	(7,4)	(6,3)	(12,15)	(11,13)	(10,11)	(20,41)	(19,38)	(18,35)

s	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8
d_Γ, g_Γ	7,-6	8,-2	9,2	10,-5	11,0	12,5	13,10	12,-11	13,-5	14,1
d_C, g_C	29,82	28,78	27,74	39,140	38,135	37,130	36,125	52,229	51,223	50,217

s	8	8	9	9	9	9	9
d_Γ, g_Γ	15,7	16,13	15,-14	16,-7	17,0	18,7	19,14
d_C, g_C	49,211	48,205	66,343	65,336	64,329	63,322	62,315

e) N_C écrit comme extension de faisceaux inversibles : applications.

On utilise les résultats de 3.c et 4.c pour calculer (ou minorer, ou majorer)
 $m(N_C)$.

e₁) Courbes tracées sur une surface.

Proposition 5.24.

Soit C une courbe lisse et connexe tracée sur une surface Q de degré s .

1) On a $m(N_C) \leq h^0 O_C(s)$.

2) Si $N_{C/Q}$ est le faisceau normal à C dans Q , on a les résultats
suivants :

a) Si $h^0 N_{C/Q} \geq 1/2 h^0 N_C$, on a :

$$m(N_C) = h^0 N_C - h^0 N_{C/Q}.$$

b) Si $h^0 N_{C/Q} < 1/2 h^0 N_C$, on a :

$$h^0 N_{C/Q} \leq m(N_C) \leq 1/2 h^0 N_C .$$

On rappelle que si Q est lisse, $N_{C/Q} \simeq \omega_C(4-s)$ et que si Q n'a, sur C , que les points doubles ordinaires $e_1, \dots, e_n$, $N_{C/Q} \simeq \omega_C(4-s)(e_1 + \dots + e_n)$.

Démonstration :

On a la suite exacte :

$$0 \rightarrow N_{C/Q} \rightarrow N_C \xrightarrow{\pi} N_Q|_C .$$

On sait que $N_Q|_C \simeq \mathcal{O}_C(s)$. Soit $E = \text{Im } \pi$, c'est un faisceau inversible, ainsi que $N_{C/Q}$, et on applique 3.7 à la suite :

$$0 \rightarrow N_{C/Q} \rightarrow N_C \rightarrow E \rightarrow 0 .$$

Les rappels viennent de 4.2.

Applications 5.25.

A) Les courbes liées aux courbes planes par des surfaces de degrés inégaux.

Soit Γ une courbe plane de degré r , lisse, et C , liée à Γ par des surfaces de degrés s, t , avec $0 < r < s < t$.

Comme $I_\Gamma(s)$ est engendré par ses sections, on peut supposer que les conditions L_1, L_2 de 4.13 sont réalisées. En particulier C est lisse, ainsi que la surface Q de degré s .

Les calculs se font ainsi qu'on l'a expliqué en : 4.f ; on a une résolution de I_Γ :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_P(-r-1) \rightarrow \mathcal{O}_P(-r) \oplus \mathcal{O}_P(-1) \rightarrow I_\Gamma \rightarrow 0$$

d'où, par "mapping cone", une résolution de I_C :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_P(-s-t+1) \oplus \mathcal{O}_P(-s-t+r) \rightarrow \mathcal{O}_P(-s-t+r+1) \oplus \mathcal{O}_P(-s) \oplus \mathcal{O}_P(-t) \rightarrow I_C \rightarrow 0 .$$

On a $\deg.C = st-r$ et

$$g(C) = 1 + \frac{d}{2} \left[s + \frac{d}{s} - 4 \right] - r(s-r)(s-1)/2s$$

(voir aussi [15]).

On doit maintenant distinguer suivant que $r=1$ ou $r>1$.

A₁) Courbe liée à une droite.

On suppose $s \geq 3$ (si $s = 2$ le calcul est un peu différent, on a $h^0 N_C = t^2 + t + 8$ et $m(N_C) = 9$). On calcule $h^0 N_C$ par l'une des méthodes de 4.f. On a : $h^0 N_C = 2\binom{t+2}{3} + 2\binom{s+2}{3} - \binom{t-s+3}{3} - \binom{t+1}{3} - \binom{s+1}{3} + 2$ et on vérifie que $h^0 \omega_C(4-s) > 1/2 h^0 N_C$, on a donc $m(N_C) = h^0 N_C - h^0 \omega_C(4-s) = \binom{s+3}{3} - s + 2$.

Au passage, notons que $h^0 I_C(s) = 1$, donc $h^0 O_C(s) = \binom{s+3}{3} - 1$. Il en résulte que la flèche $p : H^0 N_C \rightarrow H^0 O_C(s)$ n'est pas surjective, pour $s \geq 4$.

Ceci est un phénomène général pour les courbes tracées sur des surfaces de degré ≥ 4 (sauf pour les intersections complètes), cf. [11]. Dans le cas présent, le fibré normal N_C est instable (on vérifie facilement $\deg \omega_C(4-s) > 1/2 \deg N_C$), mais indécomposable (sinon, pour une raison de degrés, on aurait $N_C \simeq \omega_C(4-s) \oplus O_C(s)$ et p serait surjective).

Remarquons que dans la situation ci-dessus, on peut retrouver géométriquement les résultats obtenus, de la manière suivante :

L'espace des surfaces de degré s est un espace $\mathbb{P}^N$, avec $N = \binom{s+3}{3} - 1$. Soient $x_1, \dots, x_m$, m points en position générale de $\mathbb{P}^3$. Les surfaces de degré s contenant les x_i forment un sous-espace projectif $\mathbb{P}^{N-m}$. Si on prend $m = \binom{s+3}{3} - s + 2$ (cf. $m(N_C)$), on a $N-m = s-3 \geq 0$. Soit S_1 cet espace. On vérifie que si les points x_i sont assez généraux, toutes les surfaces de S_1 sont irréductibles. Par ailleurs, si D est une droite de $\mathbb{P}^3$, les surfaces de degré s contenant D forment un $\mathbb{P}^{N-s-1}$: c'est $\mathbb{P}(H^0 I_D(s))$ et $h^0 O_D(s) = s+1$. Lorsque D varie dans la grassmannienne $G_{3,1}$ des droites de $\mathbb{P}^3$, qui est de dimension 4, la réunion des sous-espaces précédents forme un sous-schéma fermé S_2 de $\mathbb{P}^N$, de dimension $N-s+3$ (on peut vérifier cela en considérant le schéma des drapeaux $D \subset Q$ et en évaluant la dimension de sa projection sur $\mathbb{P}^N$).

Comme $N-s+3+s-3 = 0$, $S_1 \cap S_2$ est non vide.

Il existe donc Q_1 , de degré s , irréductible, contenant $x_1, \dots, x_m$ et une droite D .

Comme $x_1, \dots, x_m$ sont en position générale, deux au plus des x_i sont sur D .

Supposons d'abord qu'aucun x_i ne soit sur D . Il existe alors une surface Q_2 , de degré t , contenant les x_i , D , mais pas Q_1 . Il suffit en effet d'imposer à Q_2 , outre les x_i , de contenir $t+1$ points de D . La dimension des

surfaces convenables est alors $\binom{t+3}{3} - 1 - m - t - 1$, strictement plus grande que la dimension de l'espace des surfaces de degré t contenant Q_1 ($\binom{t-s+3}{3} - 1$).

Alors, $Q_1 \cap Q_2$ est une courbe contenant D , $Q_1 \cap Q_2 = C \cup D$ et les x_i sont sur C . Si $x_1 \in D$ (resp. $x_1, x_2 \in D$), on impose à Q_2 de contenir t points de D (resp. $t-1$) et une direction tangente à Q_1 en x_1 (resp. en x_1, x_2). Alors, il existe une telle surface Q_2 , contenant D , les x_i et pas Q_1 . Si $Q_1 \cap Q_2 = C \cup D$, il est clair que pour $i \geq 3$, $x_i \in C$, mais aussi x_1, x_2 pour une raison de multiplicité. Dans tous les cas, on a bien trouvé C , de degré $st-1$, liée à une droite et contenant les m points. Comme les courbes lisses sont denses dans le schéma de Hilbert des courbes liées aux droites, C sera lisse pour $x_1, \dots, x_m$ assez généraux.

A₂) Le cas $r > 1$.

On suppose $1 < r < s-1$ (pour $r = s-1$, le calcul est différent). Les calculs sont analogues, mais plus compliqués. On a encore :

$$h^0 \omega_C(4-s) > 1/2 h^0 N_C, \text{ d'où}$$

$m(N_C) = h^0 N_C - h^0 \omega_C(4-s) = \binom{s+3}{3} - rs + r^2 + 2$. Ce nombre s'interprète encore comme la dimension de l'espace des surfaces de degré s contenant une courbe plane de degré r :

Si Γ est plane de degré r , $g_\Gamma = (r-1)(r-2)/2$, d'où $h^0 \mathcal{O}_\Gamma(s) = rs + 1 - g$ et $h^0 I_\Gamma(s) = \binom{s+3}{3} - rs - 1 + (r-1)(r-2)/2$. Les surfaces contenant Γ forment un espace projectif $\mathbb{P}(H^0 I_\Gamma(s))$ et on doit rajouter la dimension de l'espace des courbes planes de degré r (si on fait varier Γ), c'est $\frac{r(r+3)}{2} + 3$ (le 3 provient de la variation du plan de Γ).

Pour $r = s-1$, on a $m(N_C) = (s^3 + 6s^2 + 5s + 18)/6$.

B) Courbes sur des surfaces cubiques ou quartiques.

Dans certains cas, la proposition 5.24 donne $m(N_C) = 1/2 h^0 N_C$, il faut pour cela que l'on ait exactement : $h^0 N_C = 2 h^0 \omega_C(4-s)$.

Voici quelques exemples :

Si C est de degré 11 et genre 12, tracée sur une surface cubique lisse, on a :

$$0 \rightarrow \omega_C(1) \rightarrow N_C \rightarrow \mathcal{O}_C(3) \rightarrow 0$$

et $h^0 \omega_C(1) = 22$, $h^0 \mathcal{O}_C(3) = 22$, $h^0 N_C = 44$, d'où $m(N_C) = 22 = 1/2 h^0 N_C$.

La même méthode vaut pour les courbes de degré d et genre $d+1$ tracées sur une surface cubique lisse (car $h^0 \omega_C(1) = 2d = h^0 \mathcal{O}_C(3) = 1/2 h^0 N_C$; on notera que $\omega_C(1)$ est non spécial). On a $m(N_C) = 2d$. De telles courbes existent pour $9 \leq d \leq 29$, $d = 32, 33, \dots$ voir [16].

De la même manière, on obtient des résultats analogues pour des courbes de degré d et genre $2d$ sur une quartique lisse; on a :

$$0 \rightarrow \omega_C \rightarrow N_C \rightarrow \mathcal{O}_C(4) \rightarrow 0.$$

On a $h^0 \omega_C = 2d = [1/2 h^0 N_C]$ (a priori, $h^0 N_C$ vaut $4d$ ou $4d+1$). On a donc, là encore, $m(N_C) = 2d$. C'est le cas par exemple si C est de degré 17 et genre 34, liée à Γ de degré 3 et genre -1 (union disjointe d'une droite et d'une conique), par deux surfaces de degrés 4 et 5. De même, pour C (18,36), liée à Γ (6,0) par des surfaces de degrés 4 et 6, ou pour C (19,38) liée à Γ (5,-4) (5 droites disjointes), toujours par des surfaces de degrés 4 et 6 ...

C) Courbes liées à une courbe plane par des surfaces de même degré s .

Dans ce cas, la proposition 5.24 ne donne qu'un encadrement de $m(N_C)$. Ces courbes, de genre maximal parmi les courbes non situées sur une surface de degré $< s$, jouent sans doute un rôle crucial dans la théorie et nous y reviendrons par la suite.

C₁) Courbes de degré s^2-1 liées à une droite.

Nous les avons étudiées en 4.f.

On constate que l'on a ici :

$$h^0 \omega_C(4-s) = \frac{s^3 + 6s^2 + 5s}{6} - 2 = 1/2 h^0 N_C - 2.$$

On a donc, vu 5.24 :

$$h^0 \omega_C(4-s) \leq m(N_C) \leq h^0 \omega_C(4-s) + 2 = 1/2 h^0 N_C.$$

Nous montrerons, au numéro suivant, qu'en fait, on a $m(N_C) = 1/2 h^0 N_C$.

C₂) Courbes de degré s^2-r , $r > 1$.

Les calculs sont analogues, on trouve, pour $r < s-1$:

$$\frac{1}{2} h^0 N_C = h^0 \omega_C(4-s) + (r^2 + 3r + 6)/4.$$

Là encore, 5.24 ne donne qu'un encadrement de $m(N_C)$.

Lorsque $r=2$, nous verrons que $m(N_C) = 1/2 h^0 N_C$. Dans le cas général, on peut penser qu'on a encore cette égalité, mais on n'en a pas, à l'heure actuelle, de démonstration.

D) Un exemple avec un cône.

La méthode ci-dessus, appliquée à une cubique rationnelle C tracée sur une quadrique lisse donne la suite exacte :

$$0 \rightarrow \omega_C(2) \rightarrow N_C \rightarrow \mathcal{O}_C(2) \rightarrow 0.$$

Mais, comme $h^0 \omega_C(2) = 5$ et $h^0 N_C = 12$, on a seulement $5 \leq m(N_C) \leq 6$.

En revanche, si C est sur un cône Q de sommet e , avec $e \in C$, on a :

$$0 \rightarrow \omega_C(2)(e) \rightarrow N_C \rightarrow \mathcal{O}_C(2)(-e) \rightarrow 0$$

et $h^0 \omega_C(2)(e) = 6 = 1/2 h^0 N_C = m(N_C)$.

On retrouve ainsi le résultat de 5.5 dans ce cas particulier.

On notera que la deuxième suite exacte est scindée (cf. [29]).

e₂) Avec la théorie des surfaces réglées.

Lorsque g est petit, on peut utiliser 4.3 et 3.7. Par exemple, si $g=1$ et $d \geq 4$, on sait que N_C est indécomposable (cf. [30]). Il est donc extension :

$$0 \rightarrow D \rightarrow N_C \rightarrow E \rightarrow 0, \text{ avec } \deg N_C = 4d,$$

$\deg D = \deg E = 2d$, d'où $m(N_C) = 2d$.

On retrouve, dans ce cas particulier, le résultat de 5.11.

Pour $g > 1$, cette méthode donne seulement un encadrement de $m(N_C)$.

Nous retrouverons ces techniques en 5.f, pour majorer $m(N_C)$.

f) h^0 -stabilité de N_C et majorations de $m(N_C)$.

Le théorème 3.14 donne une condition nécessaire et suffisante pour que $m(N_C)$ ait la valeur idéale $[1/2 h^0 N_C]$, c'est la h^0 -semi-stabilité de N_C . Nous allons étudier cette condition. On a déjà la proposition suivante qui compare h^0 -semi-stabilité et stabilité et majore $m(N_C)$:

Proposition 5.26.

Soit C est une courbe lisse et connexe de degré d et genre g .

On suppose $g \leq 2d$. Alors :

1) N_C semi-stable $\iff N_C$ h^0 -semi-stable. De même, N_C stable $\iff N_C$ h^0 -stable.

2) De plus, si N_C est semi-stable, on a : $h^1 N_C = 0$, donc $h^0 N_C = 4d$, donc $m(N_C) = 2d$.

3) Si N_C n'est pas semi-stable, on a : $m(N_C) \leq 2d$.

Démonstration :

1) découle de 3.13, 2) résulte de 1), de 3.14 et de 3.18. Pour 3), on a une suite exacte : $0 \rightarrow D \rightarrow N_C \rightarrow E \rightarrow 0$, avec D, E inversibles et $\deg.E = 2d+g-1-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Si E est non spécial, $h^0 E = 2d-\varepsilon < 2d$.

Si E est spécial, on a, par Clifford :

$$h^0 E \leq 1/2 \deg.E + 1 \leq 2d.$$

Comme $m(N_C) \leq h^0 E$ par 3.7, on a le résultat.

Remarques 5.27.

1) On notera que même si $g \leq 2d$, il se peut que $h^1 N_C > 0$, c'est, par exemple, le cas pour les quartiques planes : $d=4$, $g=3$, $h^1 N_C = 1$.

2) On notera que si N_C est h^0 -semi-stable et si $h^1 N_C = 0$, N_C est semi-stable. En effet, si $L \subset N_C$, avec $\deg.L > 2d+g-1$, on a $h^0 L > 2d$, ce qui contredit la h^0 -semi-stabilité.

On peut se demander, dans le cas du fibré normal, si la h^0 -semi-stabilité n'implique pas la semi-stabilité. En tous cas, nous n'avons pas rencontré de contre-exemples.

3) En revanche, lorsque $g > 2d$, il se peut que N_C soit semi-stable et non h^0 -semi-stable. Soit C une courbe de degré 17 et genre 35, liée à une cubique rationnelle Γ par des surfaces de degrés 4 et 5. On peut supposer C lisse, ainsi que les surfaces par 4.13. On a alors la suite exacte :

$$0 \rightarrow \omega_C \rightarrow N_C \rightarrow \mathcal{O}_C(4) \rightarrow 0.$$

On a $\deg.\omega_C = 68 = 1/2 \deg.N_C$, donc N_C est semi-stable (si $L \hookrightarrow N_C$, L s'injecte dans ω_C ou dans $\mathcal{O}_C(4)$).

Cependant, $h^0 \omega_C = 35$ et $h^0 N_C = 68$ (cf. 4.17 on a : $h^0 N_{\Gamma} = 12$, $h^0 I_{\Gamma}(4) = 22$, $h^0 I_{\Gamma}(5) = 40$, $h^0 I_C(4) = 1$, $h^0 I_C(5) = 5$).

Pour d'autres exemples, voir 5.43.

Corollaire 5.28.

Si $g \leq 2d$, on a $m(d,g) \leq 2d$.

Cela résulte de 5.27 et de 2.4.1).

Nous allons maintenant majorer $m(N_C)$ et $m(d,g)$ lorsque $g > 2d$. Dans ce cas, les majorations obtenues ne sont certainement pas les meilleures, voir §6c pour une discussion à ce sujet.

Proposition 5.29.

Soit C lisse, connexe, de degré d et genre g .

On suppose $g > 2d$. Alors, on a :

$$1) m(N_C) \leq g .$$

$$2) m(N_C) \leq \sup(d + \frac{g+1}{2} ; \frac{3d}{2} + \frac{3g+1}{4}) .$$

Corollaire 5.30.

Si $g > 2d$, on a :

$$1) m(d,g) \leq g .$$

$$2) m(d,g) \leq \sup(d + \frac{g+1}{2} ; \frac{3d}{2} + \frac{3g+1}{4}) .$$

Démonstration de 5.29 :

1) Si N_C n'est pas semi-stable, on a $0 \rightarrow D \rightarrow N_C \rightarrow E \rightarrow 0$, avec $\deg.E = 2d+g-1-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Si E est non spécial, $h^0 E = 2d-\varepsilon < 2d < g$. Si E est spécial, $h^0 E \leq d + \frac{g+1}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \leq g$. Comme $m(N_C) \leq h^0 E$, on a la conclusion. Si N_C est semi-stable, soit M_0 un diviseur de degré g . D'après [46] 1.6.2, quitte à modifier M_0 par un diviseur de degré 0 , on a :

$$h^0 N_C(-M_0) = \sup(0, \chi(N_C(-M_0))) = \sup(0, 4d-2g) = 0 .$$

Mais, $h^0 O_C(M_0) \geq g+1-g = 1$, donc M_0 est équivalent à un diviseur positif. On a alors $h^0 N_C \leq h^0 N_C(-M_0) + 2 \deg.M_0 = 2g$. Donc $m(N_C) \leq g$.

2) La majoration va résulter du théorème de Nagata (4.3) et de l'inégalité de Clifford.

a) Si $N_C = D \oplus E$, on a $m(N_C) = \inf(h^0 D, h^0 E)$. Si $\deg D = 2d+g-1-\epsilon$, $\epsilon \geq 0$, on a : $h^0 D = 2d-\epsilon$ si D est non spécial, $h^0 D \leq d + \frac{g}{2} + \frac{1}{2}$ si D est spécial. Dans tous les cas, comme $2d < g$, $h^0 D \leq d + \frac{g}{2} + \frac{1}{2}$.

b) Si N_C est indécomposable, on utilise Nagata. On a :

$$0 \rightarrow D \rightarrow N_C \rightarrow E \rightarrow 0$$

avec $\deg D = 2d+g-1-\epsilon$, $\deg E = 2d+g-1+\epsilon$ et $1-g \leq \epsilon \leq g/2$.

Si $\epsilon \leq 0$, $m(N_C) \leq h^0 E \leq d + \frac{g}{2} + \frac{1}{2}$.

Si $\epsilon > 0$, on vérifie aussitôt que l'on a : $h^0 N_C \leq 2d+g+1$, sauf, peut-être, dans le cas où D est spécial et E non spécial. On a alors :

$$h^0 N_C \leq h^0 D + h^0 E \leq d + \frac{g}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2} + 2d + \epsilon$$

et, en tenant compte de $\epsilon \leq g/2$:

$$h^0 N_C \leq 3d + \frac{3g}{4} + \frac{1}{2}, \text{ d'où le résultat.}$$

Exemple 5.30.

Si C est de degré s^2 , non tracée sur une surface de degré $< s$, on sait ([15]) que $g \leq s^3 - 2s^2 + 1$. On a donc, pour s assez grand :

$$m(N_C) \leq \frac{s^3}{2} + 1.$$

Mais on a des raisons de croire que la majoration optimale serait en $s^3/6$, voir §6c.

g) h^0 -stabilité ; calcul de $m(N_C)$: les résultats positifs.

Nous allons utiliser le théorème 3.14 pour calculer $m(N_C)$ dans deux cas. D'abord, pour $g \leq 2d$, en utilisant des résultats de stabilité connus, puis en prouvant des résultats nouveaux, à l'aide des critères de stabilité et h^0 -stabilité 3.19 et 3.21. On utilisera pour cela, de manière systématique, les méthodes de liaison du §4e.

1) Utilisation de résultats antérieurs.

On suppose $g \leq 2d$.

A) Si $h^0 N_C(-2) = 0$, on sait que N_C est semi-stable ([4]). On retrouve ainsi le théorème 5.6.

B) Si C est de degré 7 et genre 5, on sait ([1]) que N_C est stable, donc $m(N_C) = 14$.

De même, si C est de degré 9 et genre 9 (cf. [40]), ou de degré 6 et genre 2 ([47]).

C) On peut utiliser les résultats de [7] concernant la semi-stabilité. Ainsi, pour $g=2$ et $d \geq 6$, la courbe générale a un fibré normal semi-stable. De même si $g=4$ et $d \geq 7$... Voir au §6b un tableau plus complet de ces résultats.

II) Les critères de stabilité et h^0 -stabilité.

Les critères 3.19 et 3.21 donnent aussitôt le théorème suivant :

Théorème 5.31.

Soit C une courbe lisse et connexe, tracée sur une surface lisse de degré s , de sorte qu'on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \omega_C(4-s) \rightarrow N_C \rightarrow \mathcal{O}_C(s) \rightarrow 0.$$

1) On suppose :

a) $\deg. \omega_C(4-s) \leq 1/2 \deg. N_C$.

b) $h^0 N_C(-2) \leq 2 h^1 \mathcal{O}_C(s-2)$.

Alors N_C est semi-stable. Si les inégalités sont strictes, N_C est stable.

2) On suppose :

c) $h^0 \omega_C(4-s) \leq 1/2 h^0 N_C$.

d) $h^0 N_C(-2) + h^1 \mathcal{O}_C(s) \leq 2 h^1 \mathcal{O}_C(s-2) + 1/2 h^1 N_C$.

Alors, N_C est h^0 -semi-stable. Si les inégalités sont strictes, N_C est h^0 -stable.

Démonstration :

Pour 1), on applique 3.19 avec $N = N_C(-2)$, tenant compte de la remarque 3.20.2), en notant que $h^0 \omega_C(2-s) = h^1 \mathcal{O}_C(s-2)$.

Pour 2), on applique 3.21 avec $N = N_C$ et pour K le double de la section plane. La vérification de la deuxième inégalité de 3.21 résulte alors d'un calcul facile, à l'aide du théorème de Riemann-Roch.

Remarque 5.32.

On peut énoncer un critère analogue dans le cas où la surface n'est pas lisse, mais bien entendu, il faut remplacer $\omega_C(4-s)$ par $N_{C/Q}$ et $0_C(s)$ par un faisceau convenable, cf., par exemple 4.2.

Pour utiliser le critère il faut analyser les conditions a) b) c) d). La proposition suivante éclaire déjà les cas de a) et c).

Proposition 5.33.

Soit C une courbe lisse et connexe. On suppose :

1) C tracée sur une surface lisse de degré s

2) $h^0 I_C(s) \geq 2$.

(C est alors sur deux surfaces lisses distinctes Q_1 et Q_2 de degré s).

Alors, la condition a) de 5.31 est réalisée.

Si de plus C n'est pas multiple dans l'intersection $Q_1 \cap Q_2$, on a aussi la condition c).

Démonstration :

1) La condition a) : On a $\deg. \omega_C(4-s) = (4-s)d + 2g - 2$ et $1/2 \deg. N_C = 2d + g - 1$. Il faut donc vérifier : $g-1 \leq (s-2)d$. Mais comme C est sur une surface lisse de degré s , on a l'inégalité suivante, due à Harris (cf. [22]) :

$$g-1 \leq \frac{d^2}{2s} + \frac{1}{2} d(s-4) \quad \text{qui implique l'inégalité}$$

voulue puisque $d \leq s^2$ (C est sur deux surfaces de degré s). En fait, si C n'est pas intersection complète de deux surfaces de degré s , on a même :

$$\deg. \omega_C(4-s) < 1/2 \deg. N_C.$$

2) La condition c) : Comme C est sur les surfaces lisses Q_1, Q_2 , on a les suites exactes :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow N_{C/Q_1} &\xrightarrow{i_1} N_C \xrightarrow{\pi_1} N_{Q_1}|_C \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow N_{C/Q_2} &\xrightarrow{i_2} N_C \xrightarrow{\pi_2} N_{Q_2}|_C \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Si $X = Q_1 \cap Q_2$, l'hypothèse faite implique : $N_{C/Q_1} \cap N_{C/Q_2} = N_{C/X} = 0$ (cf. 4.3.ter).

Il en résulte que $\pi_2 \circ i_1$ et $\pi_1 \circ i_2$ sont injectives. Soit Alors V_i l'image de $H^0 N_C$ dans $H^0 N_{Q_i}|_C$. L'injectivité de $\pi_2 \circ i_1$ assure que l'on a :

$$h^0_{N_{C/Q_1}} = h^0_{\omega_C}(4-s) \leq \dim.V_2 .$$

Mais on a aussi $h^0_{N_C} = \dim.V_2 + h^0_{N_{C/Q_2}} = \dim.V_2 + h^0_{\omega_C}(4-s)$.

$$\text{D'où } h^0_{\omega_C}(4-s) \leq 1/2 h^0_{N_C} .$$

Remarques 5.34.

0) La condition de 5.33 requise pour c) signifie que Q_1 et Q_2 ne sont pas tangentes le long de C , ou encore, que si Γ est liée à C par Q_1 et Q_2 , la liaison est géométrique cf. 4.13. Cette condition sera automatiquement réalisée si $\deg.\Gamma < \deg.C$ i.e. $s^2 < 2d$.

1) Il est possible que 5.33 soit encore valable si on suppose seulement que C est sur deux surfaces irréductibles de degré s . L'irréductibilité est, en tout cas, nécessaire. On voit aisément, en effet, que si C est plane de degré $d \geq 4$, ni a), ni c) ne sont réalisées pour $s = 2$.

2) Si $h^0 I_C(s) = 1$, les conditions a) et c) ne sont pas réalisées en général (par exemple si C est intersection complète $s \times t$, ou liée à une courbe plane par des surfaces de degrés s et t , cf. 5.25. Cependant, il peut arriver que ces conditions soient vérifiées, cf. ci-dessous IV.

3) Soit d') la condition : $h^1 I_C(s) \leq 1/2 h^1 N_C$. Il est clair que b) et d') impliquent d). Mais il y a des exemples où d) est réalisée, et non d') cf. 5.40.B.

On notera que d') est réalisée dès que $h^0 I_C(s) \geq 2$. Si C est géométriquement liée à Γ par deux surfaces de degré s , cela résulte de la suite exacte (5) de 4.e sinon, cela résulte de [32] 1.3.1, vu les traductions de [32] 1.2.4.

III) Le cas de la liaison par deux surfaces de même degré.

Les critères de stabilité 5.31, et les calculs de liaison de 4.17 vont nous permettre d'obtenir de nombreux résultats de semi-stabilité et de h^0 -semi-stabilité. Comme pour le théorème 5.20, nous partons d'une courbe Γ vérifiant $h^0 N_\Gamma(-2) = 0$.

Théorème 5.35.

Soient Γ et C deux courbes lisses, géométriquement liées par deux surfaces de degré s . On suppose que les conditions L_1, L_2 de 4.13 sont réalisées. On suppose de plus :

$$1) \quad h^0 N_\Gamma(-2) = 0 .$$

$$2)a) \quad h^1 I_\Gamma(s-2) = 0 ; \quad b) \quad h^1 I_\Gamma(2s-4) = 0 .$$

Alors, N_C est semi-stable et h^0 -semi-stable.

Démonstration :

On applique 5.31. La condition L_1 assure la lissité des surfaces qui lient C et Γ . En vertu de 5.33, les conditions a) et c) sont réalisées. Comme on a aussi d') (cf. Rem. 5.34.3)), il suffit de vérifier la condition b) :

$h^0 N_C(-2) \leq 2 h^1 O_C(s-2)$. Mais, comme $h^1 I_C(s-2) = h^1 I_\Gamma(s-2) = 0$, on peut appliquer la formule iii) de 4.18. On a :

$$h^0 N_C(-2) = h^1 N_C(-2) = h^1 N_\Gamma(-2) + 2 h^1 O_C(s-2) - 2 h^1 O_\Gamma(s-2) \text{ et comme}$$

$$h^1 N_\Gamma(-2) = h^0 N_\Gamma(-2) = 0, \text{ on a le résultat.}$$

Remarques 5.36.

1) La condition 2 b) ne sert qu'à assurer la connexité de C .

2) La suite exacte (5) de 4.e montre qu'on a en fait $h^0 N_C(-2) = 2 h^1 O_C(s-2)$ puisque, dans tous les cas, $h^1 N_C(-2) = h^0 N_C(-2) \geq 2 h^1 O_C(s-2)$. Ceci montre que cette méthode ne peut jamais donner de résultats de stabilité (et non seulement de semi-stabilité).

D'autre part, le calcul précédent montre que si $h^0 N_C(-2) = 2 h^1 O_C(s-2)$, on a aussi $h^0 N_\Gamma(-2) = 2 h^1 O_\Gamma(s-2)$. Comme, pour s grand, $h^1 O_\Gamma(s-2) = 0$, on voit que la méthode ne peut fonctionner qu'avec $h^0 N_\Gamma(-2) = 0$.

3) Nous verrons d'autres résultats dans le cas de la liaison inégale, cf. IV ci-dessous.

Applications 5.37.

Comme pour 5.22, on considère une courbe lisse Γ vérifiant $h^0 N_\Gamma(-2) = 0$ et un entier s tel que $I_\Gamma(s)$ soit engendré par ses sections globales. Les conditions 2) a et b seront réalisées pour s assez grand. La courbe C obtenue par une liaison assez générale à partir de Γ , par des surfaces de degré s sera telle que N_C soit semi-stable et h^0 -semi-stable.

Exemple A : les courbes de degré s^2-1 liées aux droites.

On reprend cet exemple déjà abordé en 4f et 5.25 c₁. Si D est une droite, on a bien $h^0 N_D(-2) = 0$ ainsi que $h^1 I_D(n) = 0$ pour tout n . Comme $I_D(s)$ est engendré par ses sections pour $s \geq 1$, on a donc, pour une telle courbe de degré s^2-1 , assez générale, N_C semi-stable et h^0 -semi-stable, donc :

$m(N_C) = 1/2 h^0 N_C = (s^3 + 6s^2 + 5s)/6$. En particulier, par $(s^3 + 6s^2 + 5s)/6$ points généraux de $\mathbb{P}^3$, il passe une telle courbe de degré $s^2 - 1$. On remarquera que nos méthodes ne permettent pas de prouver que toutes les courbes du schéma de Hilbert considéré ont un fibré normal semi-stable, on a seulement un résultat générique. Nous verrons, au N° 5.48 qu'en fait, pour C générale, N_C est stable et h^0 -stable.

Exemple B : les courbes projectivement normales.

On prend pour Γ une courbe du type étudié dans [4] (voir aussi 5.11, 5.19, 5.21). On obtient ainsi une courbe C projectivement normale avec N_C semi-stable. Si Γ est une cubique rationnelle, C est de degré $s^2 - 3$ et genre $(s-2)(s^2 - 6)$; si par exemple $s = 4$, C est de degré 13 et genre 20...

Exemple C :

Si Γ est rationnelle, assez générale, et si s est assez grand, la méthode s'applique. La nullité des $h^1 I_\Gamma(n)$ voulus résulte, comme en 5.22, des résultats de rang maximum. Par exemple, si Γ est de degré 4, $s \geq 4$ convient. On obtient, pour $s = 4$, une courbe C de degré 12 et genre 16, pour $s = 5$, de degré 21 et genre 51 etc...

Exemple D :

De même, si Γ est réunion disjointe de droites, assez générale, la méthode s'applique pour s assez grand. Si Γ est réunion de 2 droites, $s \geq 3$ convient. Pour $s = 3$, voir 5.22, pour $s = 4$, C est de degré 14 et genre 23 etc...

Si Γ est réunion de 3 droites, on obtient pour $s = 4$ C de degré 13 et genre 18.

Il serait fastidieux d'énumérer les exemples. Si on se souvient que pour g donné, il existe des courbes Γ de degré d , avec $h^0 N_\Gamma(-2) = 0$, dès que $d \geq D_p(g)$, que l'on peut ensuite lier à C par des surfaces de degré s , pour s assez grand, on mesurera la profusion d'exemples fournis par le Théorème 5.35.

IV) La liaison inégale.

On va maintenant appliquer le critère de stabilité 5.31 à une courbe C , liée à Γ par des surfaces de degrés inégaux s et t , $s < t$, les calculs étant toujours menés à l'aide de la proposition 4.17.

Dans ce cas, les deux conditions a) et c) de 5.31 ne sont plus automatiquement réalisées (on a $h^0 I_C(s) = 1$, cf. Rem. 5.34.2).

Précisément nous montrons ci-dessous que, pour Γ donnée, il n'y a qu'un nombre fini de couples (s, t) avec $s < t$, tels que la courbe C liée à Γ par des surfaces de degrés s et t vérifie a). C'est sans doute aussi vrai pour c), mais le calcul est plus ardu (cf. Ex. E).

En général, donc, N_C sera instable et h^0 -instable. Cependant, lorsque a) et/ou c) sont vérifiés, la méthode (5.31 et les calculs de 4.17) donne parfois de meilleurs résultats que la liaison égale ($s = t$). On entend ici meilleur aux sens suivants :

- 1) D'abord, on obtient parfois des résultats de stabilité (et non seulement de semi-stabilité comme la liaison égale cf. Rem. 5.36.2) voir les exemples A, B, C, E.
- 2) Ensuite, on obtient des résultats même si la courbe Γ initiale n'est pas une "bonne" courbe (i.e. ne vérifie pas $h^0 N_{\Gamma}(-2) = 0$, voire a un fibré normal N_{Γ} instable) ; cf. Ex. C, E).
- 3) Enfin, contrairement au Th. 5.35, on peut quelquefois se passer de l'hypothèse $h^1 I_{\Gamma}(s-2) = 0$, (cf. Ex. D).

Une des raisons qui explique ces phénomènes (particulièrement 1)) est que le critère 5.31 n'est pas optimal dans le cas de la liaison égale : on ne tient pas assez compte du fait que C est sur plusieurs surfaces de degré s , voir V pour une amélioration de ce critère.

Dans les exemples traités apparaissent aussi deux autres phénomènes :

- 1) Même si a) et/ou c) sont réalisées, le critère 5.31 ne s'applique pas toujours (cf. Ex. E).
- 2) On rencontre un grand nombre d'exemples où N_C est semi-stable, mais h^0 -instable (cf. Ex. E).

Conformément au plan envisagé, nous précisons déjà, pour Γ donnée, à quelle condition C vérifie a).

Proposition 5.38.

Soit Γ , de degré d_{Γ} et genre g_{Γ} , liée à C par des surfaces de degrés s et t , $s \leq t$. On a : $\deg. \omega_C(4-s) \leq 1/2 \deg. N_C$ si et seulement si $(1/2)(t-s)st - (t-2)d_{\Gamma} + g_{\Gamma} - 1 \leq 0$ (*).

Démonstration :

La condition s'écrit $g_C + (2-s)d_C \leq 1$. Or, on a $d_C = st - d_{\Gamma}$, $g_C - g_{\Gamma} = (\frac{s+t}{2} - 2)(d_C - d_{\Gamma})$ (cf. 4.15) d'où le résultat en remplaçant.

Remarques 5.39.

1) Pour Γ et s fixés, la condition est de la forme at^2+bt+c , avec $a > 0$. Il n'y a donc qu'un nombre fini de valeurs convenables pour t . En particulier, pour t grand, N_C est instable.

2) On sait que $t=s$ vérifie (*) (au moins si l'une des surfaces est lisse, cf. 5.33). Si d'autres t conviennent, c'est que $t=s+1$ vérifie aussi (*). Ceci nous conduit à la condition :

$$(**) \quad s^2 - (2d_\Gamma - 1)s + 2(g_\Gamma + d_\Gamma - 1) \leq 0.$$

Pour Γ fixée, un nombre fini de s vérifient cette condition, donc il n'y a qu'un nombre fini de couples (s, t) vérifiant (*).

3) On vérifie qu'il existe toujours au moins un s satisfaisant (**) (en écrivant que la différence des racines est ≥ 1 , on tombe sur la condition

$g_\Gamma \leq 1/2 (d_\Gamma - 1)(d_\Gamma - 2)$, toujours remplie). Si Γ est plane, $s = d_\Gamma$ ou $d_\Gamma - 1$ conviennent mais C est alors une intersection complète $s \times s$ (resp. $(s-1) \times (s+1)$).

Quelques exemples 5.40.

A) Soit Γ une quartique elliptique ($d_\Gamma = 4$, $g_\Gamma = 1$) et C , de degré 16 et genre 31, liée à Γ par deux surfaces de degrés 4, 5, la surface de degré 4 étant lisse (cf. 4.13). On a : $\deg \omega_C(4-s) = 2g - 2 = 60$, $\deg N_C = 124$, d'où la condition a).

D'autre part, $h^0 N_C(-2)$ se calcule par liaison (4.17), on trouve $h^0 N_C(-2) = 12$.

Comme $h^0 I_C(2) = h^1 I_C(2) = 0$ (Γ est intersection complète, donc C projectivement normale), on a $h^0 O_C(2) = h^0 O_P(2) = 10$. Par Riemann-Roch, $h^0 O_C(2) - h^1 O_C(2) = 32 + 1 - 31 = 2$, d'où $h^1 O_C(2) = 8$ et on a donc b), avec inégalité stricte. Il résulte de 5.31 que N_C est stable, donc aussi h^0 -stable puisque $g \leq 2d$.

B) Soit Γ une courbe de degré 10 et genre 11 avec une résolution :

$$0 \rightarrow O_P(-5)^4 \rightarrow O_P(-4)^5 \rightarrow I_\Gamma \rightarrow 0.$$

On sait (cf. [4]) que $h^0 N_\Gamma(-2) = 0$.

Soit C , liée à Γ par des surfaces de degrés 7 et 8, la surface de degré 7 étant lisse. On a : $d_C = 46$, $g_C = 209$. On calcule par liaison $h^0 N_C = 189$, $h^1 N_C = 5$, $h^0 N_C(-2) = 50$. Par ailleurs, $h^0 \omega_C(4-s) = 90 < 1/2 h^0 N_C$. On calcule ensuite $h^1 O_C(7) = 5$, $h^1 O_C(5) = 34$ par Riemann-Roch en tenant compte du fait que C est projectivement normale et que $h^0 I_C(5) = 0$, $h^0 I_C(7) = 1$. On a donc aussi la condi-

tion b) :

$$50 = h^0 N_C(-2) < 2 h^1 0_C(s-2) = 68 .$$

En revanche, d') n'est pas vérifiée :

$$h^1 0_C(s) = 5 > 1/2 h^1 N_C = 5/2 , \text{ mais on a cependant d) :}$$

$$h^0 N_C(-2) + h^1 0_C(s) = 57 < 2 h^1 0_C(s-2) + 1/2 h^1 N_C = 68 + 5/2 .$$

On en conclut que N_C est h^0 -stable (et aussi stable).

C) Voici un exemple avec N_Γ instable : On prend Γ de degré 5 et genre 2 (liée à une droite par des surfaces de degrés 2 et 3) et on lie Γ à C de degré 15 et genre 27 par des surfaces de degrés 4 et 5, la surface de degré 4 étant lisse. On vérifie aussitôt que N_C est stable et h^0 -stable.

D) Dans cet exemple, la condition $h^1 I_\Gamma(s-2) = 0$ est en défaut.

Soit Γ rationnelle de degré 4. On sait que $h^0 N_\Gamma(-2) = 0$. Par ailleurs, on a $h^1 I_\Gamma(1) = 1$ et pour $n \neq 1$, $h^1 I_\Gamma(n) = 0$. Si on lie Γ par des surfaces lisses de degrés 3 et 4, on obtient C , de degré 8 et genre 6.

On a la suite exacte : $0 \rightarrow \omega_C(1) \rightarrow N_C \rightarrow 0_C(3) \rightarrow 0$ qui donne $h^0 \omega_C(1) = 13$, $h^0 N_C = 32$, $\deg. \omega_C(1) = 18$, $\deg. N_C = 42$ d'où les conditions a) et c).

Par ailleurs, d'après 4.17 on a : $h^0 N_C(-2) = h^0 I_\Gamma(2) + \dim. \text{Im } \gamma_C(-2)$. Mais, $h^0 I_\Gamma(2) = 1$ et comme $\gamma_C(-2)$ est à valeurs dans $H^1 I_C(1) \oplus H^1 I_C(2)$, qui est de dimension 1 (cf. 4.15), on a $h^0 N_C(-2) \leq 2$.

Comme $h^0 I_C(1) = h^1 I_C(1) = 0$, on a $h^0 0_C(1) = 4$, donc, par Riemann-Roch, $h^1 0_C(1) = 1$. On a donc $h^0 N_C(-2) \leq 2 h^1 0_C(1)$ c'est-à-dire b). Il en résulte que N_C est semi-stable et h^0 -semi-stable.

Cette méthode vaut dans de nombreux cas, voir §6b. On notera qu'on est largement tributaire, pour évaluer les $h^1 I_C(n)$ de résultats de "rang maximum" cf. 5.22.

E) Les courbes liées aux intersections complètes.

Nous étudions plus à fond l'exemple suivant : Γ est intersection complète de deux surfaces de degrés a, b ; $a \leq b$. On lie Γ à C par deux surfaces de degrés s et $s+1$. On suppose $s > b$ de sorte que $I_\Gamma(s)$ est engendré par ses sections et qu'on est dans la bonne situation de 4.13 avec les conditions L_1, L_2 .

Rappelons qu'on a $d_\Gamma = ab$, $g_\Gamma = (\frac{a+b}{2}-2)ab+1$ et la résolution :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_P(-a-b) \rightarrow \mathcal{O}_P(-a) \otimes \mathcal{O}_P(-b) \rightarrow \mathcal{I}_\Gamma \rightarrow 0.$$

L'inégalité (**) devient : $s^2 - (2ab-1)s + (a+b-2)ab \leq 0$, qui est vérifiée pour $b < s \leq ab - \frac{1}{2} + \sqrt{ab(a-1)(b-1)+1} = r(a,b)$. On note que : $2ab-a-b+1 \leq r(a,b) \leq 2ab$. Lorsque $a=b$ et $a > 1$, on peut être plus précis, on a : $[r(a,a)] = 2a^2-a-1$.

La condition a) de 5.31 est donc réalisée lorsque :

$$b < s \leq [r(a,b)]. \quad (E_1)$$

On étudie maintenant la condition b) de 5.31 :

$$h^0 N_C(-2) \leq 2 h^1 \mathcal{O}_C(s-2).$$

D'après 4.18 on a :

$$h^0 N_C(-2) - h^1 \mathcal{O}_C(s-2) - h^1 \mathcal{O}_C(t-2) = h^0 N_\Gamma(-2) - h^1 \mathcal{O}_\Gamma(s-2) - h^1 \mathcal{O}_\Gamma(t-2).$$

Supposons, pour simplifier, $s \geq a+b-2$, de sorte que $\mathcal{O}_\Gamma(s-2)$ et $\mathcal{O}_\Gamma(t-2)$ sont non spéciaux ($t=s+1$). On calcule $h^0 N_\Gamma(-2)$ en tenant compte de l'égalité $N_\Gamma = \mathcal{O}_\Gamma(a) \otimes \mathcal{O}_\Gamma(b)$:

$$h^0 N_\Gamma(-2) = \binom{a+1}{3} + \binom{b+1}{3} - \binom{b-a+1}{3}.$$

Puis on calcule $h^1 \mathcal{O}_C(s-2) = h^0 \mathcal{I}_\Gamma(t-2) = h^0 \mathcal{I}_\Gamma(s-1)$ (cf. 4.15). On a ainsi :

$$h^1 \mathcal{O}_C(s-2) = \binom{s-a+2}{3} + \binom{s-b+2}{3} - \binom{s-a-b+2}{3}$$

et, de même :

$$h^1 \mathcal{O}_C(t-2) = h^1 \mathcal{O}_C(s-1) = \binom{s-a+1}{3} + \binom{s-b+1}{3} - \binom{s-a-b+1}{3}$$

et la condition b) de 5.31 s'écrit alors :

$$3s^2 + 3s - a(2a^2 - 3ab + 3b^2 + 6b - 2) \geq 0 \quad (E_2),$$

et donc, cette condition est satisfaite dès que :

$$s \geq u(a,b) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{6}$$

avec $\Delta = 9 + 12[2a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + 6ab - 2a]$.

On vérifie facilement que, pour $2 \leq a \leq b$, on a $\Delta < 36 a^2 b^2$ et donc (E_2) est satisfaite si $s \geq ab$. On a donc prouvé :

Proposition 5.41.

Soit Γ une intersection complète de deux surfaces de degrés a, b , avec $2 \leq a \leq b$ et soit C , lisse et connexe, liée à Γ par deux surfaces de degrés s et $s+1$, avec :

$$ab \leq s \leq [r(a, b)]$$

(par exemple, $s \leq 2ab - a - b + 1$). Alors, N_C est semi-stable, et même stable si l'on a :

$$ab < s < [r(a, b)] .$$

Remarques 5.42.

1) Lorsque $a = b$, la condition (E_2) est asymptotiquement du type $s \geq \sqrt{\frac{2}{3}} a^{3/2}$ et les s convenables sont donc, pour a grand, dans un intervalle $[\sqrt{\frac{2}{3}} a^{3/2}; 2a^2 - a + 1]$.

2) Lorsque $s < u(a, b)$, le critère 5.31 ne s'applique pas. C'est le cas, par exemple, pour $a = 2$, $b = 8$, $s = 10$ ou encore, pour $a = b = 5$, $s = 10$. J'ignore, dans ce cas, si le fibré normal est encore semi-stable.

Nous étudions maintenant, toujours pour les courbes liées aux intersections complètes, la h^0 -stabilité.

Les calculs sont plus compliqués. Nous supposons, pour simplifier, $a = b$ et $s > 2a$.

On étudie la condition c) de 5.31 :

$$h^0 \omega_C(4-s) \leq 1/2 h^0 N_C .$$

Les méthodes de calcul sont analogues (cf. 4.f) et utilisent la résolution de I_C :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-2s-1+a)^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-2s-1+2a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-s-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-s) \rightarrow I_C \rightarrow 0 .$$

La condition c) est alors traduite par (E_3) :

$$3s^2 + 15s - 2a^3 - 18a^2 - 22a + 6 \leq 0 \quad (E_3)$$

qui est satisfaite pour $s \leq v(a) = \frac{-15 + \sqrt{\Delta_1}}{6}$, avec $\Delta_1 = 225 + 24(a^3 + 9a^2 + 11a - 3)$.

On a donc déjà :

Proposition 5.43.

Avec les notations de 5.41, supposons de plus $a = b$ et :

$$\sup(v(a); u(a,a)) < s \leq 2a^2 - a - 1 ,$$

alors N_C est semi-stable (et même stable si $s < 2a^2 - a - 1$), mais h^0 -instable.

Comme $v(a)$ et $u(a,a)$ sont tous deux équivalents à $\sqrt{\frac{2}{3}} a^{3/2}$ pour a grand, on voit qu'on obtient ainsi beaucoup d'exemples de fibrés normaux N_C stables mais h^0 -instables. Par exemple si $a = 3$ et $s = 9$, on obtient C de degré 81 et genre 550 dont le fibré normal N_C est stable et h^0 -instable.

On s'intéresse maintenant à la condition d) de 5.31 :

$$h^0 N_C(-2) + h^1 O_C(s) \leq 2 h^1 O_C(s-2) + (1/2) h^1 N_C .$$

Elle se traduit ainsi :

$$3s^2 + 15s - 2a^3 - 18a^2 + 26a - 18 \geq 0 \quad (E_4).$$

On notera la similitude de E_3 et E_4 ; (E_4) sera satisfaite si :

$$s \geq w(a) = \frac{-15 + \sqrt{\Delta_2}}{6}$$

avec $\Delta_2 = 225 + 24(a^3 + 9a^2 - 13a + 9)$.

Pour appliquer 5.31, on doit donc avoir :

$$w(a) \leq s \leq v(a) .$$

Pour $a \rightarrow \infty$, on a $v(a) - w(a) \rightarrow 0$, donc, en général, il n'y a pas d'entier s compris entre $w(a)$ et $v(a)$. Ainsi pour $a = 1000$, on a : $w(a) = 25933,151\dots$; $v(a) = 25933,46\dots$ donc la méthode ne s'applique pas.

En revanche, pour a assez petit, la méthode peut s'appliquer. Par exemple, pour $a = 3$, on peut prendre $s = 5, 6, 7$; pour $a = 4$, $s = 9, 10$; pour $a = 5$, $s = 12, 13, 14$ etc... pour $a = 100$, $s = 850\dots$

J'ignore s'il existe une infinité d'entiers a tels que l'intervalle $[w(a), v(a)]$ contienne un entier.

V) Une amélioration du critère de stabilité.

Théorème 5.44.

Soient C une courbe lisse et connexe, s un entier, S un sous-espace projectif de dimension n de $\mathbb{P}(H^0 I_C(s))$, espace des surfaces de degré s contenant C . On suppose que les surfaces de S n'ont que des points doubles ordinaires sur C , que l'une d'entre elles au moins est lisse, et que deux surfaces distinctes de S ne sont pas tangentes le long de C .

On suppose de plus que l'on a : $h^1 O_C(s-2) > 0$.

1) On suppose :

a) Pour toute surface $Q \in S$:

$$\deg. N_{C/Q} \leq 1/2 \deg. N_C.$$

b) $h^0 N_C(-2) \leq 2 h^1 O_C(s-2) + n$.

Alors N_C est semi-stable. Si les inégalités sont strictes, N_C est stable.

2) On suppose :

c) Pour toute surface $Q \in S$:

$$h^0 N_{C/Q} \leq 1/2 h^0 N_C.$$

d) $h^0 N_C(-2) + h^1 O_C(s) \leq 2 h^1 O_C(s-2) + 1/2 h^1 N_C + n$.

Alors, N_C est h^0 -semi-stable. Si les inégalités sont strictes, N_C est h^0 -stable.

Démonstration :

La démonstration reprend celle de 5.31 (donc de 3.19 et 3.21). L'idée est la suivante : si L est un sous-faisceau inversible de N_C , on majore son degré en écrivant que, dans $H^0 N_C(-2)$, l'espace $H^0 L(-2)$ ne rencontre aucun des sous-espaces $H^0 N_{C/Q}(-2)$ pour $Q \in S$.

Lemme 5.45.

Le sous-espace $\bigcup_{Q \in S} \mathbb{P} H^0 N_{C/Q}(-2)$ est un sous-schéma fermé de $\mathbb{P} H^0 N_C(-2)$, de dimension au moins égale à $h^1 O_C(s-2) + n - 1$.

Démonstration de 5.45.

Comme $N_{C/Q} \simeq \omega_C(4-s)(e_1 + \dots + e_p)$ où les e_i sont les points singuliers de Q sur C , on a $h^0 N_{C/Q}(-2) \geq h^0 \omega_C(2-s) = h^1 O_C(s-2) > 0$ donc l'énoncé a bien un sens.

Soit $Q \in S$, on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow N_{C/Q} \rightarrow N_C \xrightarrow{\varphi_Q} N_Q|_C \simeq \mathcal{O}_C(s)$$

et φ_Q induit donc $\psi_Q : H^0 N_C(-2) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_C(s-2)$.

Soit $\psi : S \times H^0 N_C(-2) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_C(s-2)$ définie par $\psi(Q, x) = \psi_Q(x)$. On vérifie que ψ est un morphisme de schémas (les H^0 étant considérés comme espaces affines). En effet ψ est linéaire en x et si f est une équation de Q , ψ est aussi linéaire en f . Soit $X = \psi^{-1}(0) = \{(Q, x) \mid \psi_Q(x) = 0\}$. C'est un sous-schéma fermé de $S \times H^0 N_C(-2)$, donc sa projection $\bar{X}$ dans $S \times \mathbb{P} H^0 N_C(-2)$ aussi. Soit $p_2 : S \times \mathbb{P} H^0 N_C(-2) \rightarrow \mathbb{P} H^0 N_C(-2)$ la deuxième projection. Comme S est un espace projectif, p_2 est propre, donc $p_2(\bar{X})$ est un sous-schéma fermé. Vu la suite exacte ci-dessus, on a : $p_2(\bar{X}) = \bigcup_{Q \in S} \mathbb{P} H^0 N_{C/Q}(-2)$. Par ailleurs, si $Q_1 \neq Q_2$, on a :

$$H^0 N_{C/Q_1}(-2) \cap H^0 N_{C/Q_2}(-2) = 0.$$

En effet, comme Q_1 et Q_2 ne sont pas tangentes le long de C , on a $N_{C/Q_1} \cap N_{C/Q_2} = 0$, cf. 4.3 ter. Il en résulte que la fibre de p_2 en un point de $p_2(\bar{X})$ est réduite à un point. Si p_1 est la première projection, la fibre de p_1 en Q est $\mathbb{P} H^0 N_{C/Q}(-2)$, de dimension $\geq h^0 \omega_C(2-s)-1 = h^1 \mathcal{O}_C(s-2)-1$. Comme $\dim S = n$, on en déduit : $\dim p_2(\bar{X}) = \dim \bar{X} \geq n + h^1 \mathcal{O}_C(s-2)-1$.

Revenons maintenant à 5.44.

Soit L un sous-faisceau inversible de N_C .

Si pour un $Q \in S$ on a : $L \subset N_{C/Q}$, on conclut par a) ou c). Sinon, c'est que $L \cap N_{C/Q} = (0)$, donc que, dans $\mathbb{P} H^0 N_C(-2)$, $\mathbb{P} H^0 L(-2)$ ne rencontre pas $\bigcup_{Q \in S} \mathbb{P} H^0 N_{C/Q}(-2)$. On doit donc avoir :

$$h^0 L(-2) + h^1 \mathcal{O}_C(s-2) + n \leq h^0 N_C(-2).$$

On distingue alors stabilité et h^0 -stabilité.

Posons $\deg L = 1/2 \deg N_C + \varepsilon$.

On a $h^0 L(-2) = \varepsilon + h^1 L(-2)$. Si Q est une surface lisse de S , on a :

$$L(-2) \hookrightarrow N_Q|_C(-2) = \mathcal{O}_C(s-2)$$

(puisque $L(-2)$ ne rencontre pas $N_{C/Q}(-2)$) donc $h^1 L(-2) \geq h^1 0_C(s-2)$.

On en déduit $\varepsilon \leq h^0 N_C(-2) - 2 h^1 0_C(s-2) - n$ d'où la conclusion.

Pour la h^0 -stabilité, on pose :

$$h^0 L = 1/2 h^0 N_C + \varepsilon \quad \text{et on a (3.22)}$$

$h^0 L - h^0 L(-2) \leq h^0 0_C(s) - h^0 0_C(s-2)$ ce qui donne, avec Riemann-Roch,

$$h^0 L(-2) \geq \varepsilon + h^1 0_C(s-2) + 1/2 h^1 N_C - h^1 0_C(s)$$

d'où $\varepsilon \leq h^0 N_C(-2) - 2 h^1 0_C(s-2) + h^1 0_C(s) - 1/2 h^1 N_C - n$

et la démonstration de 5.44 est achevée.

Remarques 5.46.

1) L'hypothèse que les surfaces n'ont que des points doubles ordinaires est largement superflue. Elle ne sert qu'à assurer que l'on a :

$$\omega_C(4-s) \hookrightarrow N_{C/Q}$$

pour Q éventuellement singulière, ce qui est vrai dans un cadre plus général.

2) Les conditions a) et c), en revanche, nécessitent de contrôler les singularités des surfaces de Q (cf. 4.2). En effet, si Q a les points doubles $e_1, \dots, e_n$,

$$N_{C/Q} = \omega_C(4-s)(e_1 + \dots + e_n) .$$

Pour cela, on utilisera bien sûr 4.8 qui nous permettra d'appliquer 5.44 dans le cas d'un pinceau de surfaces ($n=1$). Le cas général est visiblement complexe, cf. 5.49.

L'application de 5.44 se fait, comme pour 5.31, grâce à la liaison. Le théorème suivant améliore 5.35 ; on prouve la stabilité de N_C (non plus seulement la semi-stabilité).

Théorème 5.47.

Soit Γ une courbe lisse et s un entier. On suppose que Γ vérifie :

$$(1) \quad h^1 I_\Gamma(s-3) = h^2 I_\Gamma(s-4) = 0 \quad (\text{cf. 4.8}) .$$

On suppose de plus que l'on a : $h^0 N_\Gamma(-2) = 0$ (resp. $h^0 N_\Gamma(-2) = 1$).

Soit S un pinceau de surfaces de degré s , contenant Γ , assez général, et C la courbe liée à Γ par les surfaces de S .

Alors, C est une courbe lisse et N_C est stable et h^0 -stable (resp. semi-stable et h^0 -semi-stable).

Démonstration :

Vu 4.10 et 4.13 (on notera que $I_\Gamma(s-2)$, donc a fortiori $I_\Gamma(s)$, est engendré par ses sections), on peut choisir S tel que les surfaces de S soient presque toutes lisses, aient au plus un point double ordinaire sur C et que la liaison de Γ et C vérifie les conditions L_1, L_2 de 4.13.

De plus, comme I_Γ est m -régulier pour $m \geq s-2$ (cf. [37] lect. 14), on a aussi :

$$h^1 I_\Gamma(2s-4) = 0 \quad (\text{donc } C \text{ connexe})$$

$$h^1 O_C(s-2) = h^0 I_\Gamma(s-2) > 0 \quad (\text{puisque } I_\Gamma(s-2) \text{ est engendré par ses sections}).$$

On applique alors 5.44, avec $n=1$.

La condition d') : $2 h^1 O_C(s) \leq h^1 N_C$ est réalisée (cf. 5.34.3).

D'après 4.18, on a :

$$h^0 N_C(-2) = h^0 N_\Gamma(-2) + 2 h^1 O_C(s-2), \text{ d'où la condition b),}$$

avec inégalité stricte si $h^0 N_\Gamma(-2) = 0$, avec égalité si $n=1$.

On a aussi d), dans les mêmes conditions.

Vérifions maintenant a), avec inégalité stricte. Comme Q a, au plus, un point double e sur C , $N_{C/Q} = \omega_C(4-s)$ ou $\omega_C(4-s)(e)$, donc, $\deg. N_{C/Q} \leq \deg. \omega_C(4-s) + 1$. Pour montrer $\deg. N_{C/Q} < 1/2 \deg. N_C$, on utilise encore la majoration de Harris (cf. 5.33) :

$$g-1 \leq \frac{d^2}{2s} + \frac{1}{2} d(s-4)$$

le résultat vient de ce que l'on a $s \geq 3$ (cf. 4.9).

Vérifions enfin c) :

D'après 4.15 et 4.18, on a :

$$h^0 N_C - 2 h^0 \omega_C(4-s) = h^0 N_\Gamma - 2 h^0 \omega_\Gamma(4-s).$$

Comme $I_\Gamma(s-2)$ est engendré par ses sections, Γ est sur une surface lisse de degré $s-2$, et on a donc :

$$0 \rightarrow \omega_\Gamma(6-s) \rightarrow N_\Gamma \rightarrow O_\Gamma(s-2) \rightarrow 0,$$

d'où $h^0 \omega_\Gamma(4-s) \leq h^0 N_\Gamma(-2) \leq 1$.

Comme $h^0 N_\Gamma \geq 4d_\Gamma \geq 4$, on a :

$$h^0 N_C - 2 h^0 \omega_C(4-s) \geq 3 .$$

Mais, si $Q \in S$, $N_{C/Q} = \omega_C(4-s)$ ou $\omega_C(4-s)(e)$, donc $h^0 N_{C/Q} \leq h^0 \omega_C(4-s) + 1$, et donc :

$$h^0 N_C - 2 h^0 N_{C/Q} \geq 1 .$$

(En fait, dès que $s \geq 4$, on a $h^0 \omega_C(4-s)(e) = h^0 \omega_C(4-s)$ car $h^1 \omega_C(4-s)(e) = h^0 \mathcal{O}_C(s-4)(-e) = h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(s-4)(-e) = h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(s-4) - 1$).

Applications 5.48.

Parmi les applications de 5.47, il y a déjà toutes celles que l'on a vues en 5.37 (pourvu que s soit assez grand) : si on part d'une courbe Γ vérifiant $h^0 N_\Gamma(-2) = 0$, on trouve maintenant la stabilité de N_C .

C'est le cas pour les courbes de degré s^2-1 liées aux droites, dès que $s \geq 3$.

Ainsi, la courbe générale de degré 8 et genre 7, liée à une droite par deux surfaces cubiques a son fibré normal stable.

On a le même résultat pour les courbes de degré s^2-2 (resp. s^2-3) liées à deux droites disjointes (resp. à une cubique rationnelle) pour $s \geq 4$, cf. 5.37.

La variante avec $h^0 N_\Gamma(-2) = 1$ s'applique lorsque Γ est une conique et $s \geq 4$ (pour $s = 3$, C est de degré 7 et genre 5 et on sait que N_C est stable, cf. [1]).

On obtient donc ainsi :

Pour $s \geq 4$ la courbe générale de degré s^2-2 , liée à une conique par deux surfaces de degré s a son fibré normal semi-stable et h^0 -semi-stable. On en déduit, en calculant $h^0 N_C$ par liaison, la minoration suivante de $m(s^2-2)$ pour $s \geq 4$:

$$m(s^2-2) \geq \binom{s+3}{3} - 2s + 1 = (s^3 + 6s^2 - s + 12)/6 .$$

Remarque 5.49.

1) On peut, bien entendu, imaginer d'appliquer 5.44 avec $n > 1$. Cependant, si C est liée à Γ par deux surfaces de degré s et si C et Γ sont projectivement normales, on voit via 4.15 et 4.18 que la condition b) de 5.44 équivaut à :

$$(b') \quad h^0 N_\Gamma(-2) \leq n + 2 h^1 \mathcal{O}_\Gamma(s-2) .$$

Mais on a $n \leq h^0 I_C(s) - 1 = h^0 \omega_\Gamma(4-s) + 1 = h^1 Q_\Gamma(s-4) + 1$ donc, si (b') est réalisée, on a :

$$h^0 N_\Gamma(-2) \leq 1 + h^1 O_\Gamma(s-4) + 2 h^1 O_\Gamma(s-2) .$$

Il en résulte que pour s assez grand, les seuls cas d'applications de 5.44 via liaison sont ceux de 5.47 : $h^0 N_\Gamma(-2) = 0$ ou 1 .

2) Pour s assez petit, on peut cependant espérer quelques résultats. Par exemple, si Γ est une courbe de degré 4 et genre 1, liée à C (degré 12, genre 17) par des surfaces de degré 4, on a $h^0 I_C(4) = 3$ et on peut envisager d'appliquer 5.44 avec $n=2$ pour obtenir la semi-stabilité de N_C . On manque pour cela d'un lemme de contrôle des singularités analogue à 4.8, mais pour les plans de $P(h^0 I_\Gamma(4))$.

§6. Résultats et questions ouvertes.

a) Résultats concernant la condition $h^0 N_C(-2) = 0$; calcul de $D_p(g)$.

On renvoie au §5 b,c,d pour les principaux théorèmes concernant $D_p(g)$.

Par rapport à [7], nos résultats principaux sont les suivants :

1) Minoration de $D_p(g)$ (5.17).

Si $f(d) = \frac{1}{9\sqrt{3}} (6d+1)^{3/2} - 2d+1$ et si f^{-1} est la fonction inverse de f , on a : $D_p(g) \geq f^{-1}(g)$, donc aussi $D_p(g) \geq [f^{-1}(g)] + 1$ pour $g \geq 1$.

On en déduit le comportement asymptotique : $\limsup g^{-2/3} D_p(g) = (\frac{9}{8})^{1/3}$ (et non plus seulement $\leq$) et le calcul de D_p dans l'exemple d'Ellia (5.19).

Cette minoration peut parfois être améliorée par un usage direct de 5.15. Par exemple, si $g=5$, on a $[f^{-1}(g)] + 1 = 7$, mais, si C est de degré 7 et genre 5, on a $h^0 N_C(3) = 17$, donc C est sur une surface de degré 3 et la minoration de 5.15 :

$$h^0 N_C(-2) \geq \frac{s^3-s}{6} - (s-2)d + g - 1$$

appliquée à $s=3$ donne $h^0 N_C(-2) \geq 1$, donc $D_p(5) \geq 8$.

Dans le tableau ci-dessous, c'est ainsi qu'on obtient les améliorations de la minoration de $D_p(g)$, sauf pour $g=2$. Dans ce cas, on a la proposition :

Proposition 6.1.

On a : $D_p(2) \geq 7$.

Démonstration :

L'argument ci-dessus donne $D_p(2) \geq 6$. Il reste donc à voir que si C est de degré 6 et genre 2, on a $h^0 N_C(-2) > 0$.

Soit $\Gamma = G \cup D$ la réunion disjointe d'une conique G et d'une droite D ; Γ est de degré 3 et genre -1 , donc, par une liaison assez générale dans des surfaces de degré 3, Γ est liée à C de degré 6 et genre 2. Les courbes ainsi obtenues forment un ouvert Ω de $H_{6,2}$, dense puisque $H_{6,2}$ est irréductible. Comme la propriété $h^0 N_C(-2) = 0$ est ouverte, il suffit de voir que si $C \in \Omega$, $h^0 N_C(-2) \neq 0$.

Mais alors, on a par 4.17 :

$$h^0 N_C(-2) = h^0 N_\Gamma(-2) + \dim \operatorname{Im} \gamma_C(-2) - \dim \operatorname{Im} \gamma_\Gamma(-2)$$

et comme $h^0 N_\Gamma(-2) = 1$, il suffit de prouver que $\gamma_\Gamma(-2) = 0$.

Pour ceci, on choisit un repère de $\mathbb{P}^3$ de sorte que D ait pour équations $X=Y=0$ et G , $X^2+Y^2+T^2=Z=0$. Si f et g sont les équations des surfaces liant Γ et C , on a donc : $f = (X^2+Y^2+T^2)f_1 + Zf_2 = Xf'_1 + Yf'_2$ avec $d^0 f_1 = 1$ et $d^0 f_2 = d^0 f'_i = 2$, et de même pour g .

Comme Γ est union disjointe de G et D , on a : $0_\Gamma = 0_G \oplus 0_D$, $N_\Gamma = N_G \oplus N_D$. Rappelons que la flèche $\gamma_\Gamma(-2)$ est obtenue en composant les flèches naturelles (cf. 4.17) :

$$H^0 N_\Gamma(-2) \xrightarrow{i_\Gamma(-2)} H^0 0_\Gamma(1)^2$$

$$\text{et} \quad H^0 0_\Gamma(1)^2 \xrightarrow{u_\Gamma(-2)} H^1 I_\Gamma(1)^2$$

(on notera que l'on a $h^1 I_\Gamma(1) = 1$).

Comme $H^0 N_D(-2) = 0$, il suffit de vérifier que $\gamma_\Gamma(-2)$ est nulle sur $H^0 N_G(-2)$. Or, on a : $N_G = 0_G(1) \oplus 0_G(2)$ et on vérifie que la flèche i_Γ est définie par :

$$i_\Gamma : 0_G(1) \oplus 0_G(2) \rightarrow 0_G(3)^2$$

$$(u, v) \mapsto (uf_2 + vf_1, ug_2 + vg_1).$$

Après tensorisation par $0_G(-2)$ il reste :

$$H^0 0_G \rightarrow H^0 0_G(1)^2$$

$$v \mapsto (vf_1, vg_1)$$

où v est une constante. Il suffit alors de montrer que la fonction sur Γ , de degré 1, qui vaut f_1 sur G et 0 sur D a une image nulle dans $H^1 I_\Gamma(1)$ i.e. provient d'une fonction F de $H^0 0_{\mathbb{P}^3}(1)$. On cherche $F = aX + bY + cZ + dT$; comme $F|_D = 0$, on a $c = d = 0$. Posons $f_1 = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + d_1 T$. Alors, si $F = a_1 X + b_1 Y$, on a $F|_G = f_1|_G$. En effet, comme $f_1(X^2+Y^2+T^2) + Zf_2 = Xf'_1 + Yf'_2$, on voit que $d_1 = 0$, et comme G est dans le plan $Z=0$, on a la conclusion.

2) Des majorations de $D_p(g)$ sont obtenues, dans de nombreux cas, grâce aux méthodes de liaison : Th. 5.20 et 5.23, et à la formule : $D_p(g+g') \leq D_p(g) + D_p(g')$. On a rassemblé, pour $g \leq 43$, tous ces résultats dans un tableau.

On notera que, dans la plupart des cas, on a seulement un encadrement de $D_p(g)$.

Les résultats seraient nettement améliorés si la réponse à la question suivante était positive :

Question 6.2.

Si C et Γ sont liées par des surfaces de degré s, t , la flèche naturelle :

$$\gamma_C(-2) : H^0 N_C(-2) \rightarrow H^1 I_C(s-2) \oplus H^1 I_C(t-2)$$

est-elle toujours nulle ? ou pour C assez générale ? ou encore, pour Γ donnée, existe-il C avec $\gamma_C(-2) = 0$? [On comparera à 6.1].

En cas de réponse affirmative, il suffit pour prouver que $h^0 N_C(-2)$ est nul, de vérifier :

$h^0 N_\Gamma(-2) = h^0 I_\Gamma(s-2) = h^0 I_\Gamma(t-2) = 0$, i.e. on n'a plus à se soucier des $h^1 I_\Gamma(n)$. Avec cette hypothèse, la valeur de D_p serait alors voisine de celle fournie par les minoration ci-dessus. Par exemple, on aurait $D_p(2) = 7$, $D_p(5) \leq 9$, $D_p(6) = 9$... Précisément, pour $g \leq 20$, les seuls cas où la valeur de D_p différencierait de la minoration seraient $g = 5$ et $g = 10$. Pour $g = 5$, on ne saurait toujours pas montrer $g = 8$ faute d'une liaison convenable. Pour $g = 10$, par liaison avec une courbe $(6, 2)$ on trouverait $D_p(10) = 11$.

On remarquera que la fonction D_p n'est pas croissante : $D_p(2) \geq 7$, $D_p(3) = 6$. On n'a toujours pas, pour $g \geq 3$, la majoration $D_p(g) \leq g+3$ qui permettrait de simplifier les démonstrations de [2]. Il manque les cas : $g = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20$.

Tableau des résultats sur D_p : (les * signalent les valeurs connues avec certitude).

Tableau 6I

g	1 *	2	3 *	4 *	5	6	7	8	9	10	11 *	12	13 *	14	15 *
$[f^{-1}(g)]+1$	4	5	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	11	12
$D_p \geq$	5	7	6	7	8	9	9	9	10	10	10	11	11	12	12
$D_p \leq$	5	10	6	7	12	12	13	14	18	19	10	15	11	16	12

g	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26 *	27	28	29	30
$[f^{-1}(g)]+1$	12	12	13	13	13	14	14	14	15	15	15	16	16	16	16
$D_p \geq$	13	13	13	13	14	14	14	15	15	15	15	16	16	16	17
$D_p \leq$	17	18	18	19	24	24	20	25	21	26	15	20	23	21	22

g	31	32	33	34	35 *	36	37	38 *	39	40	41 *	42	43
$[f^{-1}(g)]+1$	17	17	17	17	18	18	18	18	19	19	19	19	20
$D_p \geq$	17	17	18	18	18	19	19	19	19	19	20	20	20
$D_p \leq$	27	27	28	29	18	23	25	19	24	29	20	25	21

Résultats sur $G_p(d)$

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$G_p(d) \geq$	0	-1	0	0	1	3	4	4	4	11	13	15	15	15	26
d	16	17	18	19	20	21									
$G_p(d) \geq$	26	26	35	38	41	43									

b) Résultats concernant la stabilité et la h^0 -stabilité.

Rappelons quelques définitions (cf. [7]).

Soit $g \in \mathbb{N}$; on désigne par $D_{SS}(g)$ (resp. $D_S(g)$) le plus petit entier d tel qu'il existe une courbe C lisse et connexe de $\mathbb{P}^3$, de degré d et genre g telle que N_C soit semi-stable (resp. stable).

On définit de manière analogue $D_{SS}^0(g)$ (resp. $D_S^0(g)$) en exigeant de plus que $h^1 N_C$ soit nul.

Enfin on définit D_{hSS} (resp. D_{hS} , D_{hSS}^0 , D_{hS}^0) en remplaçant partout la stabilité par la h^0 -stabilité.

On a, de manière évidente :

$$D_{SS} \leq D_S ; D_{SS} \leq D_{SS}^0 \leq D_P ; D_S \leq D_S^0$$

et de même avec D_{hSS} .

D'autre part, on a $D_{SS}^0 \leq D_{hSS}^0$ (Rem. 5.27.2) et on rappelle que si $g \leq 2d$ il y a équivalence entre h^0 -stabilité et stabilité.

Le résultat suivant est dans [7] :

Théorème 6.3 (Ellingsrud-Hirschowitz).

- i) Pour $g \geq 2$ les suites D_S^0 , D_{SS}^0 sont finies.
- ii) Pour $g \geq 1$ et $d \geq D_S^0(g)$ (resp. $d \geq D_{SS}^0(g)$) il existe C , lisse, connexe de degré d et genre g , avec N_C stable (resp. semi-stable).
- iii) Pour $g, g' \geq 1$, on a $D_S^0(g+g') \leq D_S^0(g) + D_{SS}^0(g')$.
- iv) Pour $g \geq 3$, on a $D_S^0(g) \leq g+3$.
- v) Pour $g \geq 1$, on a $D_S^0(g+1) \leq D_{SS}^0(g) + 2$.
- vi) On a :

$$1 \leq \limsup g^{-2/3} D_{SS}^0(g) \leq \limsup g^{-2/3} D_S^0(g) \leq \left(\frac{9}{8}\right)^{1/3}.$$

1) Minoration de $D_{SS}^0(g)$, estimation asymptotique.

La proposition suivante est analogue à 5.15.

Proposition 6.4.

Soit C une courbe lisse et connexe de degré d et genre g .

On pose $s = \inf \{n \in \mathbb{N} \mid h^0 I_C(n) \neq 0\}$. Alors :

- 1) $h^1 N_C \geq h^1 O_C(s) \geq h^1 O_C(s-1) - d \geq \frac{s^3 + 3s^2 + 2s}{6} - sd + g - 1$.
- 2) Si $3^5(d+g-1)^2 - (6d+1)^3 > 0$, on a $h^1 N_C > 0$.

Démonstration :

1) La première inégalité résulte de la suite exacte usuelle associée au plongement de C sur une surface de degré s , la seconde de 3.5 par dualité ; la troisième s'obtient en tenant compte de ce que $h^0 I_C(s-1)$ est nul, donc $h^0 O_C(s-1) \leq$

$$h^0 O_P(s-1) = \frac{s^3 + 3s^2 + 2s}{6}.$$

2) Comme pour 5.16, c'est $4p^3 - 27q^2 < 0$ (après le changement de variables $s' = s+1$).

On introduit alors la fonction $\varphi(d) = 1 - d + \frac{(6d+1)^{3/2}}{9\sqrt{3}}$ et sa réciproque φ^{-1} .

On note que $\varphi(d) = d + f(d)$ avec les notations de 5.17. On a aussitôt :

Corollaire 6.5.

On a, pour $g \geq 1$: $D_{SS}^0(g) \geq \varphi^{-1}(g)$ (donc aussi $D_S^0(g)$, $D_{hSS}^0(g)$, $D_{hS}^0(g)$).

Cette minoration n'est pas du tout optimale pour les petites valeurs de g . En revanche, elle donne :

Théorème 6.6 : (estimation asymptotique de $D_{SS}^0(g)$).

On a : $\limsup g^{-2/3} D_{SS}^0(g) = (\frac{9}{8})^{1/3}$.

Même assertion pour D_S^0 , D_{hSS}^0 , et, cf. 5.18, pour D_p .

Démonstration :

Outre 6.3 vi), il suffit de noter que l'on a : $\varphi(d) \sim \frac{2\sqrt{2}}{3} d^{3/2}$, donc $\varphi^{-1}(g) \sim (\frac{9}{8})^{1/3} g^{2/3}$.

2) Minoration de $D_{SS}(g)$.

Elle repose sur les résultats de Gruson et Peskine concernant la majoration du genre des courbes non contenues dans une surface de degré $< s$:

Théorème 6.7 : (Gruson-Peskine [17]).

Soit $G(d,s) = \sup \{g(C) \text{ pour } C \text{ lisse, connexe de degré } d, \text{ non contenue dans une surface de degré } < s\}$.

1) Si $d = s^2 - r$ avec $0 \leq r \leq s-1$, on a $G(d,s) = 1 + s^3 - 2s^2 - 2rs + \frac{r^2+5r}{2}$.

2) Si $d = s^2 - 2s + 3 + v$, avec $0 \leq v \leq s-3$, on a

$G(d,s) = s^3 - 5s^2 + 9s - 6 + v(v+2s-3)/2$.

3) Si $d = s^2 - 2s + 2 = (s-1)^2 + 1$, on a $G(d,s) = 1 + (s-3)d = s^3 - 5s^2 + 8s - 5$.

Pour $d \in \mathbb{N}$, soit alors $s(d)$ l'unique entier s tel que

$$(s-1)^2 + 1 \leq d \leq s^2.$$

On vérifie que la fonction $d \mapsto G(d, s(d))$ est strictement croissante pour $d \geq 3$. On a : $G(3, s(3)) = 0$, $G(4, s(4)) = 1$ etc...

Soit maintenant g un entier, $g \geq 1$. Il existe un unique entier d tel que :

$$G(d-1, s(d-1)) < g \leq G(d, s(d)) .$$

On pose $\psi(g) = d$.

Théorème 6.8.

On a $D_{SS}(g) \geq \psi(g)$ pour $g \geq 1$.

Démonstration :

Posons $d = D_{SS}(g)$ et supposons $d < \psi(g)$ i.e. $G(d, s(d)) < g$. Si C est une courbe lisse et connexe de degré d et genre g , elle est donc sur une surface de degré $< s = s(d)$. On a alors par la suite exacte usuelle un quotient E de N_C qui est un sous-faisceau inversible de $\mathcal{O}_C(s-1)$. On a donc $\deg.E \leq (s-1)d$ et on vérifie sur les valeurs de 6.7 que $(s-3)d < G(d, s) \leq g-1$ donc $\deg.E \leq (s-1)d < 2d+g-1 = 1/2 \deg.N_C$. Le fibré normal est donc instable ce qui contredit la définition de $D_{SS}(g)$.

Remarque 6.8.bis.

De 6.8 résulte la minoration asymptotique :

$\limsup D_{SS}(g) g^{-2/3} \geq 1$. Dans certains cas, on sait que la minoration 6.8 est optimale :

Théorème 6.8.ter.

Soit s un entier. Pour $d = s^2, s^2-1, s^2-2, (s-1)^2+1$, on a :
 $D_{SS}(G(d, s)) = d = \psi(G(d, s))$. Pour $d = s^2, s^2-1, s^2-2$, on a :
 $D_{hSS}(G(d, s)) \leq d$.

Démonstration :

C'est 5.1, 5.35, 5.47 et [5].

Pour g petit, voir le tableau 6.II qui donne les valeurs de $\psi(g)$.

3) Estimation asymptotique de D_{SS} et D_S .

Elle va résulter du lemme suivant :

Lemme 6.9.

Soit G un entier, $G > 5457$. Il existe un entier s , $s \geq 20$, unique, tel que:

$$\alpha(s-1) < G \leq \alpha(s) , \text{ avec } \alpha(s) = s^3 - 4s^2 + 2s + 4 .$$

Alors :

1) Il existe des entiers d, g , avec :

$$a) s+1 \leq d \leq 3s$$

$$b) 3-d \leq g \leq d-3$$

tels que : $G = g + (s-2)(s^2-2d)$.

2) Il existe une courbe C lisse et connexe de degré s^2-d , avec s, d comme ci-dessus, et de genre G , dont le fibré normal est stable et h^0 -stable.

Démonstration :

1) La fonction $\alpha(s)$ est croissante et $\alpha(19) = 5457$, d'où l'encadrement de G . Si on pose : $\beta(d, g) = g + (s-2)(s^2-2d)$, on vérifie aussitôt :

$$\beta(s+1, 0) = \alpha(s) ; \beta(3s, 0) < \alpha(s-1) ; \beta(d+1, d-2) > \beta(d, 3-d) ,$$

donc, pour d variant dans $[s+1, 3s]$, les intervalles $[\beta(d, 3-d) ; \beta(d, d-3)]$ recouvrent tout l'intervalle $[\alpha(s-1), \alpha(s)]$. En particulier, G est atteint.

2) Comme $d \geq 21$ et $3-d \leq g \leq d-3$, il existe une courbe lisse Γ de degré d et genre g , de rang maximum, vérifiant $h^0 N_{\Gamma}(-2) = 0$ (voir 5.11 ter, le tableau de 6.a et la démonstration de 5.23).

On a alors $h^2 I_{\Gamma}(s-4) = h^1 O_{\Gamma}(s-4) = 0$ car $(s-4)d > 2g-2$ ($s \geq 10$). D'autre part, on a aussi $h^1 I_{\Gamma}(s-3) = 0$. En effet, comme Γ est de rang maximum, il suffit de vérifier :

$$h^0 O_{\Gamma}(s-3) = (s-3)d + 1 - g \leq h^0 O_p(s-3) = \binom{s}{3}$$

et ceci découle de $s \geq 19$.

On peut donc appliquer le théorème 5.47. Si C est liée à Γ par un pinceau convenable de surfaces de degré s , C est lisse et connexe, de degré s^2-d , de genre $(s-2)(s^2-2d) + g = G$ et N_C est stable et h^0 -stable.

Corollaire 6.10 (estimation asymptotique).

On a :

$$\limsup g^{-2/3} D_S(g) = \limsup g^{-2/3} D_{SS}(g) = 1$$

$$\limsup g^{-2/3} D_{hSS}(g) \leq \limsup g^{-2/3} D_{hS}(g) \leq 1 .$$

Démonstration :

Il suffit de montrer que $\limsup \leq 1$ (cf. 6.9). Si $G \in [\alpha(s-1), \alpha(s)]$, on a $G \sim s^3$ pour s grand et $D_S(G) \leq s^2-d \leq s^2$, d'où la conclusion. De même pour D_{hS} .

4) Relations entre stabilité et h^0 -stabilité.

On a vu (5.26) que si $g \leq 2d$, ces deux notions coïncident. En revanche, lorsque le genre est grand par rapport au degré, la situation est plus complexe, la manipulation des sections globales étant, du fait des phénomènes de spécialité, plus délicate que celle du degré. On a ainsi beaucoup de questions naturelles sans réponse.

Question 6.11.

Soit C lisse et connexe, avec $h^0 N_C(-2) = 0$ et N_C stable ; N_C est-il h^0 -stable ? (On sait qu'il est h^0 -semi-stable et que $h^1 N_C = 0$). Une réponse positive donnerait pour D_{hS}^0 la même estimation asymptotique que pour D_P . En ce qui concerne D_{hSS} , on a rencontré de nombreux exemples (cf. 5.43) avec N_C semi-stable mais pas h^0 -semi-stable, mais aucun dans l'autre sens.

Question 6.12.

Pour une courbe lisse C , a-t-on :

$$N_C \text{ } h^0\text{-semi-stable} \implies N_C \text{ semi-stable ?}$$

On aurait alors $D_{hSS} \geq D_{SS}$, donc la même estimation asymptotique pour les deux. En ce sens, un résultat intéressant serait le suivant (évidemment vrai si $h^0 I_C(s) \geq 2$, cf. 5.33).

Question 6.13.

Si C est lisse connexe, tracée sur une surface de degré s , a-t-on :

$$\deg. \omega_C(4-s) > \frac{1}{2} \deg. N_C \implies h^0 \omega_C(4-s) > \frac{1}{2} h^0 N_C ?$$

Remarquons déjà que si C est de degré d , avec $(s-1)^2 + 1 < d \leq s^2$, et genre g avec $g > G(d,s)$, on sait que N_C est instable (cf. 6.8), mais il n'est pas évident que N_C soit h^0 -instable.

Comme C est alors sur une surface de degré $s-1$, en minorant $h^0 \omega_C(5-s) = h^1 0_C(s-5)$, on se ramène essentiellement à majorer $h^0 N_C$:

Question 6.14.

Soit C lisse et connexe, de degré d , avec $(s-1)^2 + 1 < d \leq s^2$ et de genre $g > G(d,s)$. A-t-on :

$$\frac{1}{2} h^0 N_C < \binom{s-2}{3} - (s-5)d + g - 1 ?$$

Une réponse positive à 6.13 donnerait la minoration $D_{hSS}(g) \geq \psi(g)$, donc l'estimation asymptotique. On a cependant, pour $s \leq 3$:

Lemme 6.15.

Si C , lisse et connexe, est tracée sur une surface Q de degré $s \leq 3$ et si $\deg. \omega_C(4-s) > \frac{1}{2} \deg. N_C$, on a $h^0 N_{C/Q} > \frac{1}{2} h^0 N_C$, donc C h^0 -instable. En particulier, pour $g \leq 33$, on a $D_{hSS}(g) \geq \psi(g)$.

Démonstration :

On a $0 \rightarrow N_{C/Q} \rightarrow N_C \rightarrow E \rightarrow 0$, avec $E \subset \mathcal{O}_C(s)$. Il en résulte que $\deg. N_{C/Q} \geq \deg. \omega_C(4-s)$, donc $N_{C/Q}$ est non spécial puisque $s \leq 3$. On a alors : $h^0 N_C = h^0 N_{C/Q} + h^0 E$ et $h^0 N_{C/Q} = 2d + \epsilon$, $\epsilon > 0$. Mais, $h^0 E < 2d$, c'est clair si E est non spécial et sinon, par Clifford, $h^0 E \leq h^0 \mathcal{O}_C(s) \leq \frac{sd}{2} + 1 < 2d$ car $s \leq 3$.

5) Tableau des résultats pour $g \leq 43$ (Tableau 6.II).

A) $g \leq 32$.

Dans ce cas, on a $D_{SS}(g) = D_{hSS}(g) = D_{SS}^0(g) = D_{hSS}^0(g)$ et $D_S(g) = D_{hS}(g) = D_S^0(g) = D_{hS}^0(g)$. En effet, on a alors $g \leq 2\psi(g) \leq 2D_{SS}(g)$ (resp. $2D_{hSS}(g)$, cf. 6.15), on est donc dans le cas $g \leq 2d$ où stabilité et h^0 -stabilité sont équivalentes et entraînent $h^1 N_C = 0$ (5.26).

La minoration de $D_{SS}(g)$ est donnée par la fonction ψ (cf. 6.8) sauf pour $g = 32$, où $\psi(32) = 16$ mais $D_{SS}(32) \geq 17$, voir plus loin.

Pour les majorations nouvelles on a indiqué par une lettre les méthodes utilisées :

Méthode a.

C'est la méthode de liaison inégale (§5g, IV).

Les liaisons utilisées figurent au tableau 6.III.

On utilise parfois des courbes de genre < 0 ; il s'agit de courbes non connexes, unions disjointes de courbes rationnelles (si possible de degré $\neq 2$) et de droites. Ainsi $(d_F, g_F) = (2, -1)$ correspond à deux droites, $(3, -1)$ une conique et une droite, $(3, -2)$ trois droites etc...

Méthode b.

C'est la méthode de liaison égale (Th. 5.35), cf. Tableau 6.III.

Méthode b'.

La variante utilisant les pinceaux (Th. 5.47).

Méthode c.

L'application directe de 5e.B pour les courbes de degré d et genre $d+1$ sur des surfaces cubiques (resp. d , $2d$, sur des quartiques).

Méthode d.

C'est l'usage de $h^0 N_C(-2) = 0$ cf. 6.d.

Méthode e.

C'est l'application des formules de [7] $D_S^0(g+1) \leq D_{SS}^0(g) + 2$;

$$D_S^0(g) \leq D_{SS}^0(g) + 2 .$$

On notera que pour $D_{SS}(g)$, les résultats sont les meilleurs possibles, sauf pour $g = 14, 17$ et 21 . Les courbes correspondantes sont liées par des surfaces de degré 4 à des courbes Γ de degrés et genres respectifs $(5, 2)$; $(4, 1)$; $(3, 1)$, qui ne vérifient pas $h^0 N_\Gamma(-2) = 0$. Dans les cas $(5, 2)$ et $(3, 1)$, N_Γ est même instable.

Dans le cas de D_S en revanche, certains résultats devraient pouvoir être améliorés. Par exemple, on peut penser que l'on a : $D_S(6) = 8$, $D_S(12) = 11$, $D_S(13) = 11$... voir questions 6.17 etc...

Remarque 6.16.

Les courbes C de degré 16 et genre 32 présentent un phénomène particulier. Comme $h^0 O_C(4) = 33$, C est sur deux surfaces de degré 4, mais, comme C n'est pas intersection complète, C est donc nécessairement sur une surface de degré 3 et N_C est instable, donc $D_{SS}(32) \geq 17$. Comme $D_{SS}(33) = 16$, on voit que D_{SS} n'est pas une fonction croissante. Signalons que pour le cas $d_C = 17$, $g_C = 32$ on utilise une courbe Γ de degré 7 et genre 2 non connexe (union d'une $(6, 3)$ et d'une droite).

B) $33 \leq g \leq 43$.

A partir de $g = 33$, comme on n'a plus $g \leq 2d$, la situation devient plus complexe, en raison de deux phénomènes : 1) la stabilité et la h^0 -stabilité ne sont plus équivalentes (on a rencontré une courbe de degré 17 et genre 35 dont le fibré normal est semi-stable mais h^0 -instable cf. 5.27.3).

2) En général, on a $h^1 N_C > 0$ (par exemple, c'est le cas ici pour les intersections complètes de deux surfaces de degré 4, $d = 16$, $g = 33$, $h^1 N_C = 2$). Les méthodes sont

essentiellement les mêmes que pour $g \leq 32$. Le cas $g = 35$ résulte d'un résultat de [5] : si C est la courbe des zéros d'une section de $E(4)$ où E est un fibré de corrélation nulle C est de degré 17 et N_C est stable. On en déduit, par Clifford que N_C est h^0 -semi-stable. Attention, C n'est pas la courbe (17,35) évoquée ci-dessus (elle n'est pas projectivement normale).

On vérifie que $h^1 N_C = 0$, donc $D_S^0(35) = 17$, $D_{hSS}^0(35) = 17$. D'après [7], il existe C' , de degré 18 et genre 35 avec $N_{C'}$ stable, donc h^0 -stable (puisque $35 < 2 \times 18$), donc $D_{hS}^0 \leq 18$.

Les résultats obtenus pour D_{SS} sont optimaux sauf pour $d = 38, 39, 43$. Pour les autres fonctions, de nombreuses améliorations sont sans doute possibles.

Tableau 6II : Résultats de stabilité ; $g \leq 32$.

g	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$D_{SS} \geq$	4	6	6	7	7	8	8	9	9	9	10	11	11	11	12	12
$D_{SS} \leq$	4	6	6	7 _d	7	8 _a	8 _b	9 _a	9	9	10	11 _c	11 _d	13 _c	12 _d	12 _b
$D_S \leq$	∞	6	6	7	7	9 _e	8 _{b'}	9	9	10 _a	11 _e	12 _e	13 _e	13 _e	14 _e	14 _e

g	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
$D_{SS} \geq$	12	13	13	13	13	14	14	14	15	15	15	15	16	16	16	17
$D_{SS} \leq$	14 _e	13 _b	13 _a	13 _b	14 _a	14 _a	14 _b	14 _{b'}	15 _a	15	15 _a	15 _b	16 _a	16 _a	16 _a	17 _a
$D_S \leq$	14 _e	15 _e	13 _a	13 _{b'}	15 _e	16 _e	14 _{b'}	15 _a	15 _a	17 _e	15 _a	15 _{b'}	16 _a	16 _a	16 _a	17 _a

g	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
$D_{SS} \geq$	16	17	17	18	18	18	18	19	19	19	19
$D_{SS} \leq$	16	17 _a	17 _a	18 _a	18 _b	19 _a	19 _b	19 _b	19 _a	19 _b	20 _b
$D_{hSS} \leq$	16	17	17	18	18	19	19	19	19	19 _b	20 _b
$D_S \leq$	17 _a	17	17 _[5]	18	20 _e	19	21 _e	23	19	19 _{b'}	21 _e
$D_{hS} \leq$	17	17	18	18	20 _e	19	21	23	19	19 _{b'}	21 _e
$D_{SS}^0 \leq$	17	17	17	18	18 _b	19	21	23	19	19	21
$D_{hSS}^0 \leq$	17	17	17	18	18	19	21	23	19	19	21
$D_S^0 \leq$	17	17	17	18	20	19	21	23	19	19	21
$D_{hS}^0 \leq$	17	17	18	18	20	19	21	23	19	19	21

Tableau 6II : suite ; $33 \leq g \leq 43$.

Tableau 6III : Liaisons utilisées

$C(d_C, g_C)$ est liée à $\Gamma(d_\Gamma, g_\Gamma)$ par des surfaces de degrés s, t

s, t	3,3	3,4	3,4	3,5	4,4	4,4	4,4	4,4	4,4	4,4
d_Γ, g_Γ	1,0	4,0	3,-1	5,0	4,0	3,-2	3,0	2,-1	2,0	1,0
d_C, g_C	8,7	8,6	9,8	10,10	12,16	13,18	13,20	14,23	14,24	15,28

s, t	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4,6
d_Γ, g_Γ	7,4	6,1	6,2	5,-1	5,0	5,2	4,-1	4,0	4,1	7,2
d_C, g_C	13,19	14,21	14,22	15,24	15,25	15,27	16,29	16,30	16,31	17,32

s, t	4×6	4×5	4,5	4,6	5×5	4×6	5×5	5×5	5×6	5×5	5×5
d_Γ, g_Γ	7,3	3,-1	3,0	6,0	7,4	5,-4	6,0	6,1	11,13	6,3	5,-2
d_C, g_C	17,33	17,34	17,35	18,36	18,37	19,38	19,39	19,40	19,41	19,42	20,43

6) Questions ouvertes.

Soit C une courbe lisse et connexe. Par définition, le fibré normal N_C est instable s'il existe un sous-faisceau inversible L de N_C , avec $\deg.L > 1/2 \deg.N_C$. Quitte à augmenter L , on peut supposer que le quotient N_C/L est lui aussi inversible, de sorte que $L = N_{C/Q}$, où Q est une surface irréductible contenant C (cf. 4.3.bis).

Un tel sous fibré L de N_C , avec $\deg.L > 1/2 \deg.N_C$ et N_C/L inversible est nécessairement unique. Il se peut que la surface Q associée à L (i.e. telle que $L \simeq N_{C/Q}$) soit unique elle aussi. Sinon c'est que les surfaces Q_1, Q_2 avec $N_{C/Q_1} = N_{C/Q_2} = L$ sont tangentes le long de C . Si Q est une surface lisse contenant C , de degré n , on sait que $N_{C/Q}$ est isomorphe à $\omega_C(4-n)$ et $\deg.N_{C/Q}$ est alors une fonction décroissante de n . Posons $s(C) = \inf \{n \in \mathbb{N} \mid h^0 I_C(n) \neq 0\}$. Pour vérifier la condition $\deg.N_{C/Q} \leq 1/2 \deg.N_C$ pour Q lisse, il suffit de le faire pour $n = s(C)$ i.e. pour les surfaces de degré minimal contenant C . Lorsque $h^0 I_C(s) \geq 2$, on sait (cf. 5.33) que la condition est automatiquement réalisée i.e. $\deg.\omega_C(4-s) \leq 1/2 \deg.N_C$ pour $s = s(C)$, avec inégalité stricte si C n'est pas une intersection complète de deux surfaces de degré s .

On pourrait se demander, plus généralement, si lorsque N_C est instable, une surface Q qui déstabilise N_C n'est pas nécessairement de degré $s = s(C)$, auquel cas, pour s'assurer de la semi-stabilité de N_C , il suffirait de vérifier, soit que $h^0 I_C(s) \geq 2$, soit que $h^0 I_C(s) = 1$, mais que la surface de degré s contenant N_C ne déstabilise pas C .

Les exemples suivants montrent qu'il n'en est rien et que les surfaces déstabilisantes peuvent être de degré $> s(C)$ (elles sont alors singulières).

Exemple 1.

D'après [8] il existe une courbe rationnelle C , de degré 5, avec N_C instable. Alors, C n'est pas sur une quadrique ([8] ou [29]), mais, comme $h^0 O_C(3) = 16$, on a $h^0 I_C(3) \geq 4$. On a donc $s(C) = 3$, $h^0 I_C(3) \geq 2$ et cependant N_C instable. La construction de [8] fournit d'ailleurs des exemples où la surface déstabilisante est de degré 4.

Exemple 2.

Dans [10] (Ex. 2.5), on trouve un exemple de courbe rationnelle C de degré 6, à fibré normal déstabilisé par une surface de degré 4, alors que $h^0 I_C(3) = 1$ et que la surface cubique ne déstabilise pas N_C . Toutefois, la courbe C possède un point double ordinaire.

Dans [8] on rencontre C , rationnelle de degré 6, lisse, dont le fibré normal est déstabilisé par une surface de degré 4. Mais là, on n'est pas sûr de la valeur de $h^0 I_C(3)$ (on a $h^0 I_C(3) \geq 1$).

Dans les exemples précédents les courbes ne sont pas générales (en particulier $h^0 N_C(-2)$ n'est pas nul). On peut donc espérer un résultat générique :

Question 6.17.

Soient d, g des entiers, H une composante irréductible de $H_{d,g}$. Soit s la valeur générique de $s(C) = \{\inf n \mid h^0 I_C(n) \neq 0\}$, pour C dans H et soit h la valeur générique de $h^0 I_C(s)$.

1) On suppose $h \geq 2$; N_C est-il semi-stable (resp. h^0 -semi-stable) pour C générale dans H ?

2) On suppose $h = 1$ et, pour C générique, tracée sur une surface Q de degré s , on suppose $\deg. N_{C/Q} \leq 1/2 \deg. N_C$ (resp. $h^0 N_{C/Q} \leq 1/2 h^0 N_C$). Alors, N_C est-il semi-stable (resp. h^0 -semi-stable) pour C générale dans H ?

L'intérêt d'une réponse positive à 6.17.1) c'est d'avoir aussitôt une réponse positive à 6.18 :

Question 6.18.

Soient s, d des entiers ; $s \geq 1$, $(s-1)^2 + 1 \leq d \leq s^2$. Alors on a (?) :

$$D_{SS}(G(d,s)) = d = \psi(G(d,s)) \quad (\text{cf. 6.7...})$$

et $D_{hSS}(G(d,s)) \leq d$.

Remarques 6.19.

1) Nous avons prouvé $D_{SS}(G(d,s)) = d$ pour $d = s^2$, $s^2 - 1$, $s^2 - 2$, $s^2 - 2s + 2$, cf. 6.8 ter.

2) Pour $G(s^2 - 1, s) < g \leq G(s^2, s)$ on peut se demander si $D_{SS}(g) = s^2$. Le cas $g = 32$ montre que ce n'est pas toujours vrai, mais il serait intéressant d'avoir une indication sur le cas général pour juger de la régularité de la fonction D_{SS} .

L'analogie de 6.17 avec la stabilité est inexact pour les intersections complètes de deux surfaces de même degré, ou pour les courbes de genre ≤ 1 . Par exemple, si C est rationnelle de degré 4, assez générale, C est sur une quadrique lisse Q et $\deg. N_{C/Q} = 6 < 1/2 \deg. N_C = 14$. Mais cependant, N_C est décomposé, donc seulement semi-stable. Là encore, pour trouver un scindage de N_C , il faut prendre

une surface de degré 3 contenant C , assez singulière (cf. [8]).

Pour $g \leq 1$, ce phénomène est lié au théorème de Nagata ; pour $g \geq 2$ on peut espérer un résultat du type de 6.17, mais avec la stabilité, sauf, bien entendu, pour les intersections complètes.

On a remarqué que les méthodes développées au §5 ne donnent, en général, que des résultats concernant la semi-stabilité d'une courbe générique. Voici cependant un exemple où on a un résultat valable pour toutes les courbes de degré et genre donné (on pourra comparer à [1] ou [4]).

Proposition 6.20.

Soit C une courbe lisse et connexe de degré 8 et genre 7. Alors, N_C est semi-stable. Il existe de telles courbes avec N_C semi-stable, mais non stable.

Démonstration :

On vérifie aussitôt que C n'est ni plane, ni sur une quadrique. Comme $h^0 \mathcal{O}_C(3) = 18$, on a $h^0 I_C(3) \geq 2$ et C est liée par deux surfaces de degré 3 à une courbe de degré 1 et genre 0, i.e. une droite. Il en résulte que C est projectivement normale avec la résolution :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-5)^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-3)^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-4) \rightarrow I_C \rightarrow 0$$

et on a donc $h^0 N_C(-2) = 4 = 2 h^1 \mathcal{O}_C(1)$.

Soit Q une surface de degré 3 contenant C . Si $\deg N_{C/Q} \leq 1/2 \deg N_C = 22$, on peut appliquer 5.31 et N_C est semi-stable. Sinon, toute surface de degré 3 contenant C est telle que $\deg N_{C/Q} > 22$, donc déstabilise C , mais ceci contredit l'unicité de la surface déstabilisante, (pour une raison de degré, deux surfaces de degré 3 ne peuvent être tangentes le long de C). Pour C générale, N_C est stable (5.48). Cependant, sur une surface de Cayley Q (cf. [4]) on trouve des courbes C de degré 8 et genre 7 avec $\deg N_{C/Q} = 22$. Il suffit de prendre une courbe associée au diviseur $7\ell - 3e_1 - \sum_{i=2}^6 2e_i$ qui passe alors par deux des quatre points singuliers de Q .

Le ressort de la démonstration précédente c'est le fait que $h^0 N_C(-2)$ et $h^1 \mathcal{O}_C(s-2)$ sont constants sur tout $H_{d,g}$. On peut se demander si ce type de phénomène se produit, plus généralement, dans le cas des courbes projectivement normales.

Question 6.21.

Soit H l'ouvert de $H_{d,g}$ des courbes projectivement normales de degré d et genre g (s'il en existe). On suppose qu'il existe $C_0 \in H$ avec N_{C_0} semi-stable. Alors, N_C est-il semi-stable pour toute C dans H ?

c) Résultats concernant $m(N_C)$ et $m(d,g)$.

Voir les définitions en 2.a et 2.3.

1) Pour $m(N_C)$, le problème est résolu, en théorie au moins. Si N_C n'est pas h^0 -semi-stable, il existe un sous-faisceau inversible D de N_C , avec N_C/D inversible et $h^0 D > 1/2 h^0 N_C$. On a alors : $m(N_C) = h^0 N_C - h^0 D < 1/2 h^0 N_C$ (cf. 3.7).

Si N_C est h^0 -semi-stable, on a $m(N_C) = 1/2 h^0 N_C$ (cf. 3.14).

Bien entendu, il reste à décider de la h^0 -semi-stabilité de N_C (cf. 6.b), et à calculer $h^0 N_C$ (cf. 4.f).

2) Majorations de $m(d,g)$.

Nous avons vu les majorations suivantes :

$$i) m(d,g) \leq 1/2 \dim H_{d,g} . \quad (2.1)$$

ii) Si toutes les courbes de $H_{d,g}$ sont tracées sur des surfaces de degré s :

$$m(d,g) \leq \binom{s+3}{3} - 1 . \quad (2.2)$$

$$iii) Si \quad g \leq 2d \quad , \quad m(d,g) \leq 2d . \quad (5.28)$$

$$iv) Si \quad g > 2d . \quad (5.30)$$

$$* \quad m(d,g) \leq g$$

$$* \quad m(d,g) \leq \sup \left(d + \frac{g+1}{2} ; \frac{3d}{2} + \frac{3g+1}{8} \right) .$$

La majoration iii) ci-dessus est optimale lorsque g est petit. On peut toutefois se demander s'il n'existe pas une fonction de g , disons $F(g)$, beaucoup plus petite que $g/2$, telle que, pour $d \geq F(g)$ on ait $m(d,g) \leq 2d$. On espérerait un comportement asymptotique de $F(g)$ en $\alpha g^{2/3}$.

La majoration ii) est optimale lorsque le genre est très grand. Par exemple si $g = (d-1)(d-2)/2$, les courbes sont planes et $m(d,g) \leq 3$.

Dans la zone intermédiaire, la majoration iv) est assez grossière. La majoration i) est évidemment idéale, mais, malheureusement, à notre connaissance le comportement de la fonction $g \mapsto \dim H_{d,g}$ est encore trop mal connu pour permettre

une utilisation efficace de i).

Nous nous contenterons donc de poser la question suivante :

Question 6.22.

Soient d, s des entiers avec $s \geq 1$ et $(s-1)^2 + 1 \leq d \leq s^2$. Soit g un entier quelconque. Est-il vrai que l'on a :

$$m(d, g) \leq 1/2 \dim H_{d, G(d, s)} ?$$

(Si $g > G(d, s)$, les courbes de $H_{d, g}$ sont sur des surfaces de degré $< s$ et on a, par ii), $m(d, g) \leq \binom{s+2}{3} - 1 < 1/2 \dim H_{d, G(d, s)}$ (au moins pour $d \geq s^2 - s$); si $g \leq G(d, s)$, l'assertion de 6.22 sous-entend que la fonction $g \mapsto \dim H_{d, g}$ est croissante).

Pour le calcul explicite de $\dim H_{d, G(d, s)}$, voir ci-dessous 3.iv.

3) Minorations de $m(d, g)$.

Elles proviennent toutes de 2.4 :

i) Si C est un point lisse de $H_{d, g}$, on a :

$$m(d, g) \geq m(N_C) .$$

ii) On obtient ainsi, vu le point 1) ci-dessus :

Théorème 6.23.

1) Soient g_1, g_2 des entiers. On a :

$$D_{hSS}^0(g_1 + g_2) \leq D_{hSS}^0(g_1) + D_{hSS}^0(g_2) .$$

2) Soient d, g des entiers avec $g \geq 1$ et $d \geq D_{hSS}^0(g)$ (resp. $g = 0$ et $d \geq 3$). Il existe une courbe C lisse et connexe, de degré d et genre g , telle que N_C soit h^0 -semi-stable et vérifie $h^1 N_C = 0$.

On a alors : $m(d, g) \geq 2d$.

Démonstration :

L'assertion concernant $m(d, g)$ résulte aussitôt de 2), vu 2.4 et 3.14.

Pour 1), nous allons montrer que si C_i , $i = 1, 2$, est une courbe lisse, connexe, de degré d_i et genre g_i , avec N_{C_i} h^0 -semi-stable et $h^1 N_{C_i} = 0$, et si l'une au moins des C_i n'est pas une droite, il existe une courbe C lisse et connexe, de degré $d = d_1 + d_2$ et de genre $g = g_1 + g_2$, avec N_C h^0 -semi-stable et

$h^1 N_C = 0$. Il suffira alors, pour prouver 2), de raisonner par récurrence sur d en prenant pour C_2 une droite.

La méthode utilisée est la même que dans [7] (on comparera 6.23 et 6.3 ci-dessus) et nous la rappelons brièvement.

1) On appelle association de C_1 et C_2 une réunion $A = h_1(C_1) \cup h_2(C_2)$ où h_1, h_2 sont des homographies de $\mathbb{P}^3$ et où $h_1(C_1)$ et $h_2(C_2)$ se coupent transversalement en un unique point P ; A est une courbe de degré $d = d_1 + d_2$, localement intersection complète, donc N_A est un faisceau localement libre de rang 2 sur A . Pour C_1, C_2 données, l'existence d'une telle association vient de [31]. On notera, pour simplifier : $A = C_1 \cup C_2$.

La suite exacte naturelle :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_A \rightarrow \mathcal{O}_{C_1} \oplus \mathcal{O}_{C_2} \rightarrow k(P) \rightarrow 0$$

$$(f_1, f_2) \mapsto f_1(P) - f_2(P)$$

montre que A est de genre $g = g_1 + g_2$.

En tensorisant par N_A , on obtient :

$$(1) \quad 0 \rightarrow N_A \rightarrow N_A|_{C_1} \oplus N_A|_{C_2} \rightarrow N_A \otimes k(P) \rightarrow 0.$$

Par ailleurs, pour $i = 1, 2$, l'inclusion $I_A \subset I_C$ induit la suite exacte (cf., par exemple, [25]) :

$$(2.i) \quad 0 \rightarrow N_{C_i} \xrightarrow{\varphi_i} N_A|_{C_i} \rightarrow k(P) \rightarrow 0.$$

2) Comme N_{C_i} est h^0 -semi-stable et que $h^1 N_{C_i} = 0$, on a $m(N_{C_i}) = 2d_i$, donc il existe un diviseur positif M_i sur C_i , de degré $2d_i$, tel que :

$H^0 N_{C_i}(-M_i) = 0$. On peut, de plus, supposer que M_i ne rencontre pas P .

Soit $M = M_1 + M_2$, c'est un diviseur de degré $2d$ sur A . Nous allons prouver :

Lenme 6.23.1.

Si A est l'association générique de C_1 et C_2 on a, avec les notations ci-dessus, $H^0 N_A(-M) = 0$ et $H^1 N_A = 0$.

3) Admettons provisoirement 6.23.1. On pose, revenant aux notations du §1 :

$q(z) = dz + 1 - g$, $p(z) = 2d$, $X = M$, $Y = A$. Comme on a $H^0 N_A(-M) = 0$, la flèche $r: H^0(A, N_A) \rightarrow H^0(M, N_A|_M)$ est surjective, donc, par 1.5, la projection $f: D(p, q) \rightarrow H(q)$ est lisse au voisinage de (M, A) . Comme A est lissifiable ([25] Th. 4.5), si C est une courbe lisse et connexe voisine de A , avec $h^1 N_C = 0$, f est encore lisse en un point (M', C) voisin de (M, A) , donc, par 2.4.2, on a $m(N_C) = 2d$, ou encore, vu 3.14, N_C h^0 -semi-stable. Ceci achève de prouver 6.23.

4) Il reste à prouver 6.23.1.

Les suites exactes (1) et (2.i) restent valables en tensorisant par $O_A(-M)$ et $O_{C_i}(-M_i)$. On note encore φ_i la flèche : $N_{C_i}(-M_i) \rightarrow N_A|_{C_i}(-M_i)$. Passant aux sections globales dans (2.i) ainsi tensorisée on voit que $H^0 N_A|_{C_i}(-M_i)$ est de dimension un. Puis, avec (1), on obtient :

$$0 \rightarrow H^0 N_A(-M) \rightarrow H^0 N_A|_{C_1}(-M_1) \oplus H^0 N_A|_{C_2}(-M_2) \rightarrow N_A(-M) \otimes k(P)$$

et il reste à voir que si σ_i désigne une section non nulle de $H^0 N_A|_{C_i}(-M_i)$, $\sigma_1(P)$ et $\sigma_2(P)$ sont linéairement indépendants dans $N_A(-M) \otimes k(P)$. Pour cela, on associe à σ_i le sous-fibré L_i de $N_A|_{C_i}(-M_i)$, saturé de l'image de $\sigma_i: O_{C_i} \rightarrow N_A|_{C_i}(-M_i)$.

On a, toujours par (1) :

$$0 \rightarrow L_i(-P) \rightarrow L_i \rightarrow k(P) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad L_i(-P) \quad \text{est un sous-fibré de} \\ N_{C_i}(-M_i). \quad \text{On notera que l'on a} \quad H^0 L_i(-P) = 0, \quad \text{mais} \quad H^0 L_i \neq 0.$$

5) Rappelons alors la construction fondamentale utilisée dans [7]. On considère la surface réglée $X_i = \mathbb{P}(N_{C_i}(-M_i))$. Soit $\pi_i: X_i \rightarrow C_i$ la projection canonique. Le noyau de $\varphi_i \otimes k(P)$ définit un point x_i de X_i , avec $\pi_i(x_i) = P$. Rappelons que x_i correspond à un plan tangent à C_i en P ; les points x_1, x_2 seront appelés les points bases de l'association A . Le sous-fibré $L_i(-P)$ définit une section de X_i , passant par x_i .

D'autre part, l'application φ_i induit une application birationnelle de X_i dans $Y_i = \mathbb{P}(N_A|_{C_i}(-M_i))$ qui n'est autre que la transformation élémentaire de X_i en x_i (cf. aussi [25]). Cette transformation s'obtient en éclatant x_i dans X_i , puis en contractant la transformée propre de la fibre de X_i en P . Elle induit un

isomorphisme de $\mathbb{P}(T_{x_i})$ (où T_{x_i} est l'espace tangent de X_i en x_i) sur la fibre de Y_i en P , soit $\mathbb{P}(N_A|_{C_i} \otimes k(P))$. Comme on a égalité en P :

$$N_A|_{C_1} \otimes k(P) = N_A \otimes k(P) = N_A|_{C_2} \otimes k(P) ,$$

on en déduit un isomorphisme entre $\mathbb{P}(T_{x_1})$ et $\mathbb{P}(T_{x_2})$. Si deux vecteurs tangents δ_1 et δ_2 en x_1 et x_2 se correspondent par cet isomorphisme, les points doubles (x_1, δ_1) et (x_2, δ_2) (éléments de $\mathbb{P}(T_{x_1})$ et $\mathbb{P}(T_{x_2})$) seront dits associés. L'intérêt de cette notion dans la situation présente vient du lemme suivant ([54]).

Lemme 6.23.2.

Avec les notations ci-dessus, désignons par δ_i le vecteur tangent en x_i à la section de X_i définie par $L_i(-P)$. Alors, σ_1 et σ_2 sont linéairement dépendants en P si et seulement si les points doubles (x_1, δ_1) et (x_2, δ_2) sont associés.

6) Pour terminer, il suffit d'appliquer le lemme suivant (cf. [54]) qui est aussi le ressort de [7] :

Lemme 6.23.3.

Soient C_i, M_i ($i=1,2$) comme en 2) ci-dessus et soit (x_i, δ_i) un point double de $\mathbb{P}(N_{C_i}(-M_i))$. On suppose que l'un au moins des points x_i correspond à un plan non osculateur à C_i . Alors, si A est l'association générique de C_1 et C_2 , de points bases x_1, x_2 , les points doubles (x_1, δ_1) et (x_2, δ_2) ne sont pas associés.

Remarque.

C'est pour pouvoir trouver un x_i correspondant à un plan tangent à C_i non osculateur qu'il faut supposer que l'une au moins des C_i n'est pas une droite.

Corollaire 6.24.

1) Si $d \geq D_p(g)$, (ou $d \geq 3$, si $g=0$), on a $m(d, g) \geq 2d$.

Dans ce cas, on peut imposer aux $2d$ points d'être sur une surface donnée (cf. 5.12).

2) Si $g \neq 2$ et $d \geq g+3$, on a $m(d, g) = 2d$.

Le même résultat vaut pour $g=2$ et $d \geq 6$.

Démonstration :

1) a déjà été vu (5.11 et 5.12). Pour 2) cela résulte de 6.3 iv), compte tenu du fait que l'on a $g \leq 2d$.

iii) Pour $d = s^2$, $s^2 - 1$, $s^2 - 2$, on a :

$$m(d, G(d, s)) = \frac{1}{2} \dim H_{d, G(d, s)}.$$

Il s'agit du cas des intersections complètes de deux surfaces de degré s (resp. des courbes liées à une droite, resp. à une conique). Comme ce sont des courbes projectivement normales, le schéma de Hilbert est lisse et la minoration de $m(d, g)$ vient de la h^0 -stabilité des fibrés normaux correspondants (cf. 6.8 ter).

iv) La question 6.17 (resp. 6.18), si elle admet une réponse positive, donne une réponse positive pour 6.25 (resp. 6.25 bis) qui généralise le point iii) ci-dessus :

Question 6.25.

Soient d, g des entiers. On suppose qu'il existe une composante irréductible H de $H_{d, g}$, réduite, telle que $\dim H = \dim H_{d, g}$, et qui vérifie l'une des conditions de 6.17 (i.e. les courbes de H sont soit sur deux surfaces de degré minimal, soit sur une seule, ne déstabilisant pas le fibré normal), alors, est-il vrai que

$$m(d, g) = \lceil 1/2 \dim H_{d, g} \rceil ?$$

Question 6.25 bis.

Soient s, d des entiers avec $s \geq 1$ et $(s-1)^2 + 1 \leq d \leq s^2$. A-t-on :

$$m(d, G(d, s)) = \lceil 1/2 \dim H_{d, G(d, s)} \rceil ?$$

Nous précisons maintenant la valeur de la dimension du schéma de Hilbert correspondant aux courbes de genre maximum.

Calcul 6.26 : la fonction $M(d)$.

On définit pour $d \geq 1$ une fonction $M(d)$ en posant $M(1) = 2$, $M(2) = 3$, $M(3) = 6$, et, pour $d \geq 4$, si $(s-1)^2 + 1 \leq d \leq s^2$, avec $s \geq 2$,
 $M(d) = \frac{1}{2} \dim H_{d, G(d, s)}^0$, où $H_{d, G(d, s)}^0$ désigne la composante irréductible du schéma de Hilbert qui contient les courbes de degré d et genre $G(d, s)$ non tracées sur une surface de degré $< s$.

On a alors les calculs suivants :

1) $d = s^2$; $G(d,s) = s^3 - 2s^2 + 1$; (intersection complète).

On a, pour $s \geq 2$:

$$M(d) = (s^3 + 6s^2 + 11s - 6)/6 .$$

2) $d = s^2 - 1$; $G(d,s) = s^3 - 2s^2 - 2s + 4$; (courbe liée à une droite).

On a, pour $s \geq 3$:

$$M(d) = (s^3 + 6s^2 + 5s)/6 .$$

3) $d = s^2 - r$, avec $1 < r < s-1$; $G(d,s) = s^3 - 2s^2 - 2rs + (r^2 + 5r + 2)/2$; courbe liée à une courbe plane de degré r .

On a, pour $s \geq 4$:

$$M(d) = (s^3 + 6s^2 + 11s)/6 - rs + (3r^2 - 3r + 2)/4 .$$

4) $d = s^2 - s + 1 = s^2 - (s-1)$; $G(d,s) = (2s^3 - 7s^2 + 7s - 2)/2$; courbe liée à une courbe plane de degré $s-1$.

On a, pour $s \geq 3$:

$$M(d) = (2s^3 + 9s^2 + 7s + 12)/12 .$$

5) $d = s^2 - s = s^2 - 2s + 3 + (s-3)$; $G(d,s) = (2s^3 - 7s^2 + 3s + 6)/2$; courbe projectivement normale.

On a, pour $s \geq 5$:

$$M(d) = (2s^3 + 9s^2 - 5s + 30)/12 .$$

Pour $s = 3$, $d = 6$, $G(6,3) = 3$, $M(6) = 12$.

Pour $s = 4$, $d = 12$, $G(12,4) = 17$, $M(12) = 24$.

6) $d = s^2 - 2s + 3 + v$, avec $1 < v < s-3$; $G(d,s) = s^3 - 5s^2 + 9s - 6 + v(v + 2s - 3)/2$; courbe projectivement normale.

On a, pour $s \geq 5$:

$$M(d) = (s^3 + 3s^2 - 4s)/6 - vs/2 + (3v^2 + 13v + 24)/4 .$$

7) $d = s^2 - 2s + 4 = s^2 - 2s + 3 + 1$; $G(d,s) = s^3 - 5s^2 + 10s - 7$; courbe projectivement normale.

On a, pour $s \geq 5$:

$$M(d) = (s^3 + 3s^2 - 7s + 63)/6 .$$

8) $d = s^2 - 2s + 3$; $G(d,s) = s^3 - 5s^2 + 9s - 6$; courbe projectivement normale.

On a, pour $s \geq 4$:

$$M(d) = (s^3 + 3s^2 - 4s + 36)/6 .$$

9) $d = s^2 - 2s + 2 = (s-1)^2 + 1$; $G(d, s) = s^3 - 5s^2 + 8s - 5$; courbe des zéros d'une section de $E(s-1)$ où E est un fibré de corrélation nulle.

On a, pour $s \geq 4$:

$$M(d) = (s^3 + 3s^2 - s + 9)/6 .$$

Pour $s = 2$, $d = 5$, $G(5, 2) = 1$, $M(5) = 10$.

Pour $s = 3$, $d = 10$, $G(10, 3) = 11$, $M(10) = 20$.

Remarques 6.27.

1) On notera que $2M(d)$, qui est une dimension, est un entier. En revanche, $M(d)$ peut ne pas être entier. Précisément, $M(d)$ est entier sauf dans les cas suivants :

- Dans le cas N° 3, $d = s^2 - r$, $0 < r < s-1$, lorsque $r \equiv 0, 1 \pmod{4}$; par exemple $M(32) = 68,5$.
- Dans le cas N° 4, $d = s^2 - s + 1$, lorsque $s \equiv 1, 2 \pmod{4}$; par exemple $M(21) = 43,5$.
- Dans le cas N° 5, $d = s^2 - s$, lorsque $s \equiv 0, -1 \pmod{4}$; par exemple $M(42) = 93,5$.
- Dans le cas N° 6, $d = s^2 - 2s + 3 + v$ avec $1 < v < s-3$, lorsque s est pair et $v \equiv 2, -1 \pmod{4}$, ou lorsque s est impair et $v \equiv 1, 2 \pmod{4}$; par exemple $M(29) = 59,5$.
- Dans le cas N° 7, $d = s^2 - 2s + 4$, lorsque s est pair ; par exemple $M(28) = 57,5$.
- Dans le cas N° 9, $d = s^2 - 2s + 2$, lorsque s est pair ; par exemple, $M(26) = 54,5$.

2) La fonction $M(d)$ n'est pas croissante (comparer les termes en s pour s assez grand). Elle l'est cependant pour $d \leq 49$, mais $M(49) = 118$ et $M(50) = 117,5$.

3) On remarque que pour d grand, on a : $M(d) \sim \frac{1}{6} d^{3/2}$.

Explications des calculs.

Nous avons déjà rencontré 1 et 2. Les huit premiers cas peuvent se traiter avec la formule d'Ellingsrud ([6]). Dans les cas 2, 3 et 4, on a, par liaison, une résolution :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-2s+1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-2s+r) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-2s+r+1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-s)^2 \rightarrow I_C \rightarrow 0 .$$

Dans les cas 5 à 8, on a le caractère numérique d'une courbe C par [15] :

$$(2s-3, 2s-4, \dots, s+v, s+v, s+v-1, \dots, s+1, s, s)$$

qui conduit à la résolution :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-s-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-s-v-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-2s+2) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-s-v) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-s)^3 \rightarrow I_C \rightarrow 0.$$

On doit distinguer les cas $v = s-3$ (5), $v = 1$ (7), $v = 0$ (8).

Dans le cas 9), la courbe générale est la courbe des zéros d'une section de $E(s-1)$ où E est un fibré de corrélation nulle.

On a alors les suites exactes :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-2s+2) \rightarrow E(-s+1) \rightarrow I_C \rightarrow 0$$

$$\text{et } 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(+s-2) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}}(s) \rightarrow E(s-1) \rightarrow 0$$

d'où l'on déduit $\dim H_{d,g} = h^0 E(s-1) + 4$ et la valeur annoncée.

On peut aussi procéder par liaison : C est liée par deux surfaces de degré s à une courbe Γ de degré $2s-2$, tracée sur une quadrique et de type $(s, s-2)$, donc liée à deux droites disjointes dans l'intersection de la quadrique et d'une surface de degré s .

d) Résultats concernant $m(d)$.

Rappelons, cf. 2.0, que $m(d)$ est le nombre maximum de points généraux de $\mathbb{P}^3$ par lesquels on peut faire passer une courbe lisse et connexe de degré d .

$$\text{On a : } m(d) = \sup_{g \geq 0} m(d, g).$$

1) Le fil conducteur.

La question suivante est l'aboutissement naturel des questions 6.18, 6.22, 6.25 :

Question 6.28.

A-t-on, pour tout $d \geq 1$, $m(d) = [M(d)]$?

Nous allons maintenant essayer de comparer $m(d)$ à la valeur espérée $[M(d)]$.

2) Les majorations.

Les majorations de $m(d)$ résultent de celles de $m(d, g)$, cf. 6.c.2. On a, en particulier :

Proposition 6.29.

1) Pour $d \leq 17$, $d \neq 16$, on a $m(d) \leq 2d$.

(Pour $d = 16$, $m(16) \leq 33$).

2) Supposons $(s-1)^2 + 1 \leq d \leq s^2$, avec $s \geq 5$.

a) Si $17 \leq d \leq 35$, on a :

$$m(d) \leq \frac{3d}{2} + \frac{3}{8} G(d,s) + \frac{1}{4}.$$

b) Si $d \geq 36$, on a :

$$m(d) \leq d + \frac{1}{2} G(d,s) + \frac{1}{2}.$$

3) On a : $\limsup d^{-3/2} m(d) \leq 1/2$.

(Pour le point 1), on utilise les points ii) et iii) de 6.c.2 : si $d \leq 6$, on a $g \leq 2d$, donc $m(d) \leq 2d$; si $6 < d \leq 11$ et si C n'est pas plane, on a $g \leq 2d$ donc $m(d) \leq 2d$; pour les courbes planes $m(d) \leq 3 < 2d$; si $11 < d \leq 15$ et si C n'est pas sur une surface cubique on a $g \leq 2d$, donc $m(d) \leq 2d$; sur une surface cubique $m(d) \leq 19 < 2d$; si $d = 16$, et si C n'est pas sur une surface cubique, on a $g \leq 33$, donc $m(d) \leq 33$; si $d = 17$ et si C n'est pas sur une surface quartique, on a $g \leq 35$ et, si $g = 35$, C est la courbe associée à un faisceau de corrélation nulle pour laquelle $h^0 N_C = 68$, donc $m(d) \leq 34$).

Remarque 6.30.

Les majorations 2a et b et l'estimation asymptotique 3 sont sans doute mauvaises. En effet, si on pense que $m(d) = [M(d)]$, cf. 6.28, on a $M(d) \sim \frac{d^{3/2}}{6}$, cf. 6.27.3.

Pour obtenir de meilleures majorations de $m(d)$, il faudrait savoir majorer $\dim H_{d,g}$. Par exemple pour $d = 18$, si $g > 39$, les courbes de $H_{d,g}$ sont sur une surface quartique, donc $m(d,g) \leq 34$; si $g = 39$, $m(d,g) \leq \frac{1}{2} \dim H_{18,39} = M(18) = 36$; si $g \leq 36$, $m(d) \leq 36$. Pour montrer que $m(d) \leq 36$, il reste à montrer que $H_{18,37}$ et $H_{18,38}$ sont de dimension ≤ 72 . Le problème semble abordable par liaison, une courbe C de $H_{18,38}$ étant, par exemple, liée par des surfaces de degré 5 à une courbe Γ de degré 7 et genre 5. Mais, on ne contrôle pas les singularités de cette courbe Γ (car $I_C(5)$ n'est pas engendré par ses sections) et il faut être prudent. Dans ce cas, C. Peskine, m'a montré que l'on a bien $\dim H_{18,38} = 72$ en utilisant une méthode analogue à celle de [15].

Pour d plus grand, le problème est encore plus ardu. Par exemple si $d = 25$ et si $51 \leq g \leq 56$, la courbe générale de $H_{d,g}$ n'est pas, a priori, sur une surface de degré < 8 , ce qui exclut l'usage des méthodes de liaison.

3) La minoration par $2d$; calcul de $m(d)$ pour $d \leq 17$.

Théorème 6.31.

Pour $d \neq 2$, on a : $m(d) \geq 2d$.

Corollaire 6.32.

Pour $d \leq 17$, $d \neq 2$, $d \neq 16$, on a $m(d) = 2d$. On a $m(2) = 3$; $m(16) = 33$.

Cela résulte de 6.23 et 6.29.

4) Minorations de $m(d)$ pour d grand ; comparaison de $m(d)$ et $[M(d)]$.

Rappelons (cf. 5.8) qu'on a posé, pour $r \geq 1$:

$$G_p(r) = \sup \{g \in \mathbb{N} \mid \text{Il existe } C \in H_{r,g} \text{ avec } h^0 N_C(-2) = 0\} .$$

(Voir en 6.a le tableau donnant $G_p(r)$).

On a alors le théorème suivant :

Théorème 6.33.

Soit s un entier, $s \geq 5$ et d tel que $(s-1)^2 + 1 \leq d \leq s^2$.

1) Si $d = s^2$, $s^2 - 1$, $s^2 - 2$, on a $m(d) \geq M(d)$ (cf. 6.c.3 iii).

2) Si $d = s^2 - r$, avec $3 \leq r \leq s-1$, on a les deux minoration suivantes :

a) $m(d) \geq \frac{s^3 + 6s^2 + 11s}{6} - rs + G_p(r) + 2r - 2$.

b) $m(d) \geq \frac{s^3 + 6s^2 + 8s}{6} - rs + r^2 - r + 2$.

3) Si $d = s^2 - s$, on a $m(d) \geq \frac{s^3 + 3s^2 + 2s}{6} - 1$.

4) Si $d = s^2 - s - 1$, on a $m(d) \geq \frac{s^3 + 3s^2 - 4s + 18}{6}$.

5) Si $d = s^2 - 2s + 3 + v$, avec $0 \leq v \leq s-5$, on a $m(d) \geq \frac{s^3 + 3s^2 - 10s}{6} - vs + v^2 + 5v + 8$.

6) Si $d = s^2 - 2s + 2$, on a $m(d) \geq \frac{s^3 + 3s^2 - 4s + 18}{6}$.

Corollaire 6.34.

On a $\liminf d^{-3/2} m(d) \geq 1/6$. (Asymptotiquement, on peut imposer $1/6 d^{3/2}$ points à une courbe de degré d).

Remarques 6.35.

- 1) Sauf pour $d = s^2$, s^2-1 , s^2-2 , les minoration ci-dessus sont moins bonnes que la valeur espérée $[M(d)]$. Par exemple, pour $d = s^2-r$, on a

$$M(d) = \frac{s^3+6s^2+11s}{6} - rs + \frac{3r^2-3r+2}{4}$$
 La différence est donc $\frac{3r^2-11r+10}{4} - G_p(r)$. Mais, on sait que pour $r \rightarrow \infty$, $G_p(r) \sim \frac{2\sqrt{2}}{3} r^{3/2}$, donc pour r grand, la différence peut être importante. Pour r fixé cependant, cette différence est indépendante de s . Ainsi, elle est égale à 1 pour $r=3$, à 3 pour $r=4$, à 6 pour $r=5$ etc... Pour $d = s^2-2s+2$, la différence est égale à $(s-3)/2$.
- 2) Dans le cas $d = s^2-r$, $3 \leq r \leq s-1$, on a donné deux minoration. La minoration a) est meilleure pour r petit, l'autre pour r grand. Précisément pour s grand, la minoration a) est meilleure pour $r \leq \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2}}$.

Démonstration de 6.33.

La minoration 2a) s'obtient par une liaison dans deux surfaces de même degré s . Soit Γ une courbe lisse et connexe de degré r , avec $3 \leq r \leq s-1$ et de genre $G = G_p(r)$, telle que $h^0 N_\Gamma(-2) = 0$. D'après [14], on sait que $h^1 I_\Gamma(n) = 0$ pour $n \geq s-4$. D'autre part, on a $(s-4)r > 2G-2$. Cela résulte en effet, de la majoration: $G_p(r) \leq f(r) = \frac{1}{9\sqrt{3}} (6r+1)^{3/2} - 2r+1$ (cf. 5.16, 5.17). On en déduit aussitôt : $h^1 O_\Gamma(s-4) = h^1 O_\Gamma(s-2) = 0$, donc aussi que $I_\Gamma(s)$ est engendré par ses sections.

Dans une liaison assez générale de Γ par des surfaces de degré s , on obtient C , lisse, connexe, de degré s^2-r . D'après 5.35, N_C est h^0 -semi-stable, donc $m(N_C) = h^0 N_C/2$. D'autre part, comme $h^1 I_\Gamma(s) = h^1 I_\Gamma(s-4) = 0$, C est un point lisse de son schéma de Hilbert (cf. 4.g), donc $m(d) \geq m(N_C)$ (cf. 2.4). Or,

$$h^0 N_C = h^0 N_\Gamma + 2 h^0 I_\Gamma(s) - 2 h^0 I_C(s)$$
 puisque $h^1 I_\Gamma(s) = 0$ (cf. 4.18), mais $h^0 N_\Gamma = 4r$, $h^0 I_C(s) = 2 + h^1 O_\Gamma(s-4) = 2$, et $h^0 I_\Gamma(s) = \binom{s+3}{3} - sr - 1 + G$ et on a ainsi la minoration a).

Les autres minoration s'obtiennent en liant des courbes planes par liaison inégale : pour 2b, on lie une courbe plane de degré $r-1$ par deux surfaces de degrés $s-1$ et $s+1$, le résultat vient de 5.25.A₂. Pour 3, 4, 5 et 6, on lie une courbe plane de degré s^2-s-d par deux surfaces de degrés $s-1$ et s , le résultat vient encore de 5.25.A₂.

5) Tableau comparatif de $m(d)$ et $M(d)$ pour $18 \leq d \leq 50$.

Les méthodes utilisées sont divisées en quatre rubriques :

- a) La minoration $m(d) \geq 2d$.
- b) Les cas $d = s^2$, $s^2 - 1$, $s^2 - 2$, où l'on sait $m(d) \geq M(d)$.
- c) La liaison égale i.e. la minoration 2a de 6.33.
- d) La liaison inégale avec des courbes planes.

d	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
$M(d)$	36	38	40	43,5	45	47	50	54	54,5	56	57,5	59,5	63	67,5	68,5	70
$m(d) \geq$	36 a	38 a	40 a	42 a	44 c	47 b	50 b	54 b	53 d	54 a	56 a	58 a	60 a	62 c,a	65 c	69 c

d	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
$M(d)$	73	77	82	82	83	84	85,5	89	93,5	99	99,5	100,5	103	107	112	118	117,5
$m(d) \geq$	73 b	77 b	82 b	80 d	78 d	78 d	80 a	82 a	86 c	90 c	93 c	97 c	102 c	107 b	112 b	118 b	115 d

Index

(Voir aussi §0 Notations)

$D_m; d, g$	§2, a
$D(p, q)$	§1, a
D_p	Déf. 5.8
$D_{SS}, D_{SS}^0; D_{hSS}, \dots$	§6b
G_p	Déf. 5.8
$f(d)$	5.16.*
f_m	§2a
$H_{d, g}$	§2, a
$H_{d, g, i}$	Rem. 2.5.3
$Hilb_P^P$	§1, a
H_m	§2, a
$H(p)$	§1, a
h^0 -semi-stable ; h^0 -stable ; sous- h^0 -stable	Déf. 3.11
L_1, L_2	(conditions de liaison 4.13)
$m(d), m(d, g)$	Déf. 2.0
$m(d, g, i)$	Rem. 2.5.3
$m(N)$	Déf. 2.3
$M(d)$	6.26
T_X^1	§4, d
γ_C, γ_Γ	§4, d
$\varphi(g), \psi(g)$	§6, b
π_m	§2, a

Bibliographie

- [1] E. BALLICO et P. ELLIA.- J. Reine Angew. Math. 350, 1984, p. 87-93.
- [2] E. BALLICO et P. ELLIA.- Invent. Maths 79, 1985, p. 541-555.
- [3] D. CORAY.- Proc. Lond. Math. Soc. (3), 46, 1983, p. 263-287.
- [4] P. ELLIA.- Math. Ann., 264, 1983, p. 389-396.
- [5] P. ELLIA, L. GRUSON, C. PESKINE.- Manuscrit, Nice, 1984.
- [6] G. ELLINGSRUD.- Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, 8, 1975, p. 423-432.
- [7] G. ELLINGSRUD et A. HIRSCHOWITZ.- C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 1984, t. 299, p. 245-248.
- [8] D. EISENBUD et A. VAN DE VEN.- Math. Ann., 256, 1981, p. 453-463.
- [9] W. FULTON.- Algebraic Curves, Benjamin.
- [10] F. GHIONE et G. SACCHIERO.- Manuscripta Math., 33, 1980, p.111-128.
- [11] P. GRIFFITHS et J. HARRIS.- Compositio Math., 50, 1983, p. 207-265.
- [12] A. GROTHENDIECK.- Fondements de la géométrie algébrique, Sémin. Bourbaki, 1957-1962.
- [13] A. GROTHENDIECK.- Eléments de géométrie algébrique, Publ. Math. IHES.
- [14] L. GRUSON, R. LAZARSFELD, C. PESKINE.- Invent. Maths, 72, 1983, p. 491-506.
- [15] L. GRUSON et C. PESKINE.- Lecture notes in Maths, 687, 1977, p. 31-59.
- [16] L. GRUSON et C. PESKINE.- Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, 15, 1982, p. 401-418.
- [17] L. GRUSON et C. PESKINE.- Lecture Notes in Maths, 997, 1983, p. 218-227.
- [18] J. HARRIS.- Curves in projective space, Presses de l'Université de Montréal.
- [19] J. HARRIS et K. HULEK.- Math. Ann., 264, 1983, p. 129-135.
- [20] R. HARTSHORNE.- Algebraic Geometry, 1977, Springer Verlag.
- [21] R. HARTSHORNE.- Lecture Notes in Maths, 156, 1970.
- [22] R. HARTSHORNE.- In Vector bundles and differential equations, Birkhäuser.
- [23] R. HARTSHORNE.- Math. Ann., 238, 1978, p. 229-280.
- [24] R. HARTSHORNE et A. HIRSCHOWITZ.- Lecture Notes in Maths, 961, 1982, p. 169-188.

- [25] R. HARTSHORNE et A. HIRSCHOWITZ.- Preprint N° 42, Université de Nice, 1984.
- [26] R. HARTSHORNE et A. HIRSCHOWITZ.- Preprint N° 54, Université de Nice, 1983.
- [27] R. HARTSHORNE et A. HIRSCHOWITZ.- Manuscrit, Nice, 1985.
- [28] A. HIRSCHOWITZ.- Acta Math., 146, 1981, p. 209-230.
- [29] K. HULEK.- Math. Ann., 258, 1981, p. 201-206.
- [30] K. HULEK et G. SACCHIERO.- Arch. der Math., 40, (1), 1983, p. 61-68.
- [31] S. KLEIMAN.- Compositio Math., 28, 3, 1974, p. 287-297.
- [32] J.O. KLEPPE.- Thèse, Institute of Mathematics, University of Oslo, 1981.
- [33] S. LICHTENBAUM et M. SCHLESSINGER.- Trans. AMS, 128, 1967, p. 41-70.
- [34] R. MAGGIONI et A. RAGUSA.- J. of Algebra, 92, 1985, p. 176-193 et 194-207.
- [35] M. MARUYAMA.- Nagoya Math. J., 58, 1975, p. 25-68.
- [36] C. MICHEL.- Compléments de géométrie moderne, Paris, Vuibert, 1926.
- [37] D. MUMFORD.- Lectures on curves on an algebraic surface, 1966, Princeton University Press.
- [38] D. MUMFORD.- Amer. J. Maths, 84, 1962, p. 642-648.
- [39] M. NAGATA.- Nagoya Math. J., 37, 1970, p. 191-196.
- [40] P.E. NEWSTEAD.- J. Lond. Math. Soc., (2), 28, 1983, p. 428-434.
- [41] D. PERRIN.- C. R. Acad. Sci. Paris, 299, Série I, 1984, p. 451-453.
- [42] D. PERRIN.- C. R. Acad. Sci. Paris, 299, Série I, 1984, p. 879-882.
- [43] D. PERRIN.- C. R. Acad. Sci. Paris, 300, Série I, N° 2, 1985, p. 39-42.
- [44] C. PESKINE, L. SZPIRO.- Invent. Maths, 26, 1974, p. 271-302.
- [45] A. PRABHAKAR RAO.- Invent. Maths, 50, 1979, p. 205-217.
- [46] M. RAYNAUD.- Bull. Soc. Math. France, 110, 1982, p. 103-125.
- [47] G. SACCHIERO.- Comm. in Algebra, 11, (18), 1983, p. 2115-2121.
- [48] E. SERNESI.- Seminario di variabili complesse 1981, Bologna, 1982.
- [49] E. SERNESI.- Invent. Maths, 75, 1984, p. 25-57.
- [50] F. TAKEMOTO.- Nagoya Math. J., 47, 1972.
- [51] A. VAN DE VEN.- C. R. Acad. Sci. Paris, 289, Série A, 1979, p. 111-113.
- [52] L. EIN.- Hilbert scheme of smooth space curves, Preprint Los Angeles, 1985.
- [53] E. BALLICO.- On the postulation of disjoint rational curves in a projective space, Preprint Pisa 1984.
- [54] G. ELLINGSRUD et A. HIRSCHOWITZ, en préparation.