CHRISTIAN LÉONARD

Sur la limite en loi et les fluctuations de certains modèles dynamiques d'interaction

Thèses d'Orsay, 1984

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1984__0148__P0_0>

ORSAY
n° d'ordre : 3738

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le TITRE de DOCTEUR 3° CYCLE

SPECIALITE : STATISTIQUES

PAR

M. LEONARD Christian

SUJET : "SUR LA LIMITE EN LOI ET LES FLUCTUATIONS DE CERTAINS MODELES DYNAMIQUES D'INTERACTION"

soutenue le 4 Juillet 1984 devant la Commission d'examen

MM. RUGET Gabriel Président
METIVIER Michel Rapporteur
BRETAGNOLLE Jean
DACUNHA-CASTELLE Didier
PRUM Bernard

ABSTRACT :

First, a variational principle is used to give a characterization of the Gibbs measure of thermodynamical system, then a spin system with mean field interactions (namely, the Curie-Weiss model) is studied. Considering the empirical probability measures, a law of large numbers for the equilibria is proved, as the number of spins tends to infinity, and an explicit computation of the critical temperature for the phase transition is given. A law of large numbers for interacting diffusion processes, which generalizes the dynamical Curie-Weiss model, and a result dealing with the fluctuation process in the non-critical case, are given.

Key-words : Gibbs (measure)
Curie-Weiss (model)
Phase transition
Law of large numbers
Fluctuation (process)
Empirical probability (measure)
Non-linear diffusion (process).

Je veux, avant tout, vivement remercier Michel Métivier, qui m'a aidé et conseillé lors de la réalisation de ce travail.

Anatole Joffe et Donald Dawson, qui m'ont accueilli chaleureusement au Canada, m'ont permis d'achever cette thèse dans les meilleures conditions possibles. Je leur en suis très reconnaissant.

Je remercie également Gabriel Ruget pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse, ainsi que Messieurs Bernard Prum, Jean Bretagnolle et Didier Dacunha-Castelle, pour avoir bien voulu s'associer au jury.

Martin Goldstein et Anatole Joffe ont généreusement financé mon voyage en France, lors de la soutenance de cette thèse.

Je dois enfin exprimer toute ma gratitude à Mesdames Francine Houle-Miller, Cynthia Callard, France Prud'Homme, Lucie Leblanc et Jeanne Bailleul, pour le soin avec lequel elles ont pris part à la réalisation matérielle de ce travail.

A Crouck et Néo, pour leur constant soutien.

Table des Matières

NOTATIONS

Si $(S,\mathcal{T}(S))$ est un espace mesurable muni de la tribu $\mathcal{T}(S)$,

$M_b(S)$ est l'ensemble des fonctions numériques de S , bornées et mesurables.

$\mathcal{M}(S)$ est l'espace des mesures signées sur S .

Si S est un espace topologique :

$C_b(S)$ est l'ensemble des fonctions numériques de S , continues et bornées.

$\mathcal{B}(S)$ est la tribu des ensembles boréliens.

$B(S)$ est l'ensemble des fonctions boréliennes de S .

$B_b(S)$ est l'ensemble des fonctions boréliennes bornées de S .

$\Pi(S)$ est l'ensemble des probabilités sur $(S,\mathcal{B}(S))$.

S' est le dual topologique de S .

$< .,. >$ désigne le crochet de dualité.

L^* est l'adjoint de l'opérateur linéaire L .

$f \circ \mu$ est l'image de la mesure μ par l'application mesurable f .

δ_x est la mesure de Dirac au point x .

$\mathcal{L}(Y)$ est la loi de la variable aléatoire Y .

$C_K^k(\mathbb{R}^n)$ (où $k \in \{0,1,\ldots,+\infty\}$) est l'ensemble des fonctions numériques de $\mathbb{R}^n$, k fois continûment dérivables et à support compact.

$C(\mathbb{R}^+ , \mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des trajectoires continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^n$.

INTRODUCTION

Signalons avant tout, que l'origine de ce travail est un article de D. Dawson [Daw].

0.1 - A QUOI NOUS INTERESSONS-NOUS ?

La motivation de cette thèse est l'étude de la statique et de la dynamique d'un système électromagnétique composé d'aimants dont les moments magnétiques (les spins) sont portés par une même direction : la droite réelle $\mathbb{R}$. L'espace géographique sur lequel sont situés ces aimants (l'ensemble des sites) n'est pas précisé. (Pour visualiser le modèle, on peut imaginer que cet ensemble de sites est inclus dans un plan). L'évolution d'un spin est déterminée par un potentiel extérieur : le potentiel propre, par un potentiel d'interaction avec un champ électrique extérieur et par un potentiel d'interaction avec l'ensemble des autres spins. De plus cet ensemble d'aimants interagit avec le reste de l'"univers" ; cette contrainte est décrite par la température du système. L'agitation thermique et le temps caractéristique de changement de signe d'un spin isolé étant d'un ordre très inférieur à celui d'une observation physique, la dynamique du système de spins est en général traitée par une description probabiliste.

Si on appelle $i \in \{1,\dots,N\}$ un site du système de N spins, et $x_i^N \in \mathbb{R}$ la valeur du spin en ce site, l'énergie d'interaction avec les autres aimants est : $- J\, x_i^N \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_j^N$, $J \geqslant 0$. Un tel système s'appelle un système de Curie-Weiss. Contrairement au modèle d'Ising (voir par exemple [Spi] et l'appendice A2), la géométrie de l'ensemble des sites n'intervient pas (il n'y a pas de notion de voisin). En outre, nous imposons aux potentiels extérieurs, aux constantes d'interaction J et à la température d'être les mêmes pour tous les sites, de sorte que la loi de $(x_1^N,\ldots,x_N^N)$ est symétrique. Autrement dit, $(x_1^N,\ldots,x_N^N)$ est une suite échangeable. Au chapitre 2, nous décrivons une dynamique physiquement acceptable. Tout au long de cet exposé, composé de quatre parties, nous nous intéresserons au comportement du système lorsque le nombre d'aimants N tend vers l'infini.

0.2 - DESCRIPTION DE NOTRE TRAVAIL

0.2.1. Contenu de la partie I

Au chapitre 1, nous faisons des rappels de thermodynamique statistique. On peut se reporter à [Gro] pour avoir une présentation agréable de ce sujet. Notre présentation n'est pas entièrement classique dans la mesure où nous prouvons au théorème 1.14 l'existence d'une unique probabilité qui, sous certaines contraintes, maximise l'entropie (second principe). Cette probabilité est la mesure de Gibbs.

Les techniques de démonstration de ce théorème proviennent essentiellement des grandes déviations ([Bre], [Aze]) .

Le chapitre 2 est consacré à la description du système de N spins : $x^N = (x_1^N,\ldots,x_N^N)$ lorsque N est fini. L'équilibre est décrit par la mesure de Gibbs : ρ_N (cf.(2.6)) et la dynamique est définie de telle sorte que sa mesure invariante soit ρ_N . Nous choisissons $t \to x^N(t)$, comme étant la solution de l'équation différentielle stochastique dans $\mathbb{R}^N$:

$$dx_i^N(t) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} b(x_i^N(t),x_j^N(t))dt + \sigma dw_i(t) \;;\quad i = 1,\ldots,N \;;\; w_i : \text{brownien.}$$

où $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} b(x,y_j)$ dérive des potentiels d'interaction et des potentiels propres et σ représente la température. Les fonctions $b(x,y)$ ne satisfont pas en général, aux hypothèses usuelles de croissance à l'infini des théorèmes d'existence et d'unicité d'une solution d'équation différentielle stochastique ; le théorème 2.16 donne une condition (de type monotonie) qui est mieux adaptée à la situation.

Si la condition initiale $x^N(0)$ est échangeable, il en est de même pour tout le processus. L'échangeabilité est une propriété fondamentale pour l'étude des lois des grands nombres, autant statique que dynamique, c'est pourquoi nous rappelons au chapitre 3, les résultats d'échangeabilité dont nous avons besoin par la suite. A peu de chose près, la présentation de ce chapitre est celle d'Aldous([Ald]). Notons, qu'en particulier, l'échangeabilité exprime l'idée intuitive qu'un système symétrique x^N est parfaitement décrit par sa loi empirique $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{x_i^N}$.

0.2.2. Contenu de la partie II

Dans cette partie nous étudions le comportement de ρ_N, lorsque N tend vers l'infini. Une "bonne" manière de regarder cette limite est de s'intéresser à la loi de la limite de $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{x_i^N}$.

Ellis et Newman ont montré ([EN1]) que la loi de la magnétisation moyenne $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i^N$ tend étroitement vers une probabilité de la forme $\sum_{\ell=1}^{k}\alpha_\ell\,\delta_{m_\ell}$, où $1 \leqslant k < \infty$, $\alpha_\ell > 0$ et $\sum_{\ell=1}^{k}\alpha_\ell = 1$. Au théorème 4.6 du chapitre 4, à l'aide d'une généralisation de leur méthode et de résultats d'échangeabilité, nous obtenons la limite de la loi de $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{x_i^N}$ (considéré comme probabilité aléatoire). Cette loi limite est de la forme

$$\sum_{\ell=1}^{k}\alpha_\ell\,\delta_{p_\ell},$$

où les α_ℓ sont les mêmes que précédemment et les p_ℓ sont des probabilités d'espérance m_ℓ . Autrement dit, $x^\infty = (x_1^\infty, x_2^\infty, \ldots)$ est un mélange de suites indépendantes identiquement distribuées de loi p_ℓ . (Pour cette notion, se reporter au chapitre 3). Ce résultat est à rapprocher de celui concernant les solutions du problème de Dobrushin-Landford-Ruelle (DLR) qui énonce que les solutions DLR sont des combinaisons linéaires convexes de probabilités extrêmales (les phases pures) ([Dob]). Nous dirons qu'il y a multiplicité de phases si k est strictement plus grand que 1 . Pour clore ce chapitre, nous étudions les limites des fonctions thermodynamiques usuelles.

Au chapitre 5, nous nous intéressons à la multiplicité de phases. Le théorème 5.3 nous donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait multiplicité de phases à une température T et sous un champ électrique h_o, à savoir que l'énergie libre limite $h \to F(T,h)$ n'est pas dérivable en $h = h_0$ Il est heureux de retrouver ce résultat, car c'est un phénomène général des coexistences de phases (à ce sujet, se reporter à la remarque 1.34). Au théorème 5.5, nous donnons une condition suffisante sur la température et les différents potentiels, pour qu'il y ait multiplicité de phases. Si, de plus, le potentiel propre vérifie l'inégalité GHS ([EN2]), il est alors possible d'obtenir une condition nécessaire et suffisante sur la température et les potentiels. C'est ce que nous faisons au théorème 5.7. Quelques techniques utilisées pour les démonstrations des théorèmes précédents, ainsi que la formule de Chernoff énoncée par Dacunha-Castelle ([Dac]), nous permettent de donner, sans difficultés supplémentaires, au théorème 5.10, un résultat de grandes déviations pour la magnétisation moyenne, en dehors de la "zone de phases multiples".

Les parties III et IV sont consacrées à la dynamique. Dans la partie III nous donnons quelques généralités sur les processus markoviens non-linéaires et les problèmes de martingales. Dans la partie IV nous étudions la limite de

$t \mapsto \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i^N(t)}$ et nous entamons l'étude de la limite du processus de fluctuations :

$$t \mapsto N^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i^N(t)} - \lim_{K \to \infty} E\left(\frac{1}{K} \sum_{j=1}^{K} \delta_{x_j^K(t)}\right) \right)$$

0.2.3. Contenu de la partie III

Au chapitre 6 nous donnons des résultats concernant les processus de Markov non-linéaires. Bien que cette notion, qui généralise celle de Markov linéaire, fut introduite en 1966 par Mac Kean ([MK1]), et souvent reprise par la suite, par exemple en [MK2], [Tan], [Szn], [Daw], [TaH] (cette liste est loin d'être exhaustive), dans un cadre proche du nôtre, ou bien dans l'étude probabiliste de l'équation de Boltzmann, il n'existe pas à notre connaissance d'exposé formel la concernant. A partir de [MK2], nous en donnons une définition formelle et nous prouvons les résultats qui sont énoncés sans démonstration au début de cet article. De manière à éviter les réflexes acquis avec le markov ordinaire (linéaire), nous nous efforçons de faire apparaître le lien entre ces deux notions.

Nous rappelons au chapitre 7 , des résultats classiques sur les problèmes de martingales. Ces résultats sont généralement énoncés dans le cadre $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ ([Pri], [StV]), nous les démontrons lorsque les trajectoires sont à valeurs dans un espace polonais. En particulier, la démonstration du théorème 7.8 ne fait pas intervenir de martingales exponentielles. Puis nous précisons ce qu'est une diffusion à valeurs dans un espace de Hilbert réel séparable. (Notre présentation est différente de celle de [Yor])

0.2.4 Contenu de la partie IV

Au chapitre 8 (on pourra se reporter à l'introduction de ce chapitre pour plus de détails) nous nous intéressons à la limite lorsque N tend vers l'infini de $\overline{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i^N}$, en tant que variable aléatoire dans $\pi[C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]$ ($\pi(S)$ est l'ensemble des probabilités sur S) où x_i^N est la trajectoire donnée par:

$$dx_i^N(t) = [\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} b(x_i^N(t), x_j^N(t))]dt + [\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \sigma(x_i^N(t), x_j^N(t))]\, dw_i(t)$$

Nous munissons $\pi[C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]$ d'une topologie plus fine que la topologie étroite, de sorte que nous obtenons la convergence de fonctionnelles comme:

$$E(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sup_{o\leq t\leq T} |x_i^N(t)|^q) \text{ ou bien } E[(\sup_{o\leq t\leq T} |x_i^N(t)||x_j^N(t)|)^{q/2}],(i\neq j)$$

pour $q \geq o$, pas trop grand.

Nous obtenons au théorème 2.2 du chapitre 8, la convergence de la loi de $\overline{X}_N$ vers δ_P, où P est la loi de l'unique solution trajectorielle de l'équation différentielle stochastique non-linéaire dans $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{cases} dx(t) = [\int_{\mathbb{R}^d} b(x(t),y)\ X_t oP(dy)]dt + [\int_{\mathbb{R}^d} \sigma\tau(x(t),y)\ X_t oP(dy)]dw_t \\ P = \text{loi de } X = \mathcal{L}(x) \end{cases}$$

x ainsi défini est un processus markovien non-linéaire et $P = \mathcal{L}(x)$ est une solution de l'équation aux dérivées partielles non-linéaire:

$$\frac{\delta \zeta}{\delta t}(t,dx) = A^*(\zeta(t))(dx) \qquad \text{où:}$$

$$A^*(\zeta)(dx) = -\frac{\delta}{\delta x}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^d} b(x,y)\,\zeta(dy)\right)\zeta\right](dx) + \frac{1}{2}\,\frac{\delta^2}{\delta x^2}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^d} \sigma(x,y)\,\zeta(dy)\right)^2 \zeta\right](dx)$$

Au chapitre 9, nous abordons le problème des fluctuations et plus particulièrement l'étude de la limite en loi des processus :

$$U_N(t) = N^{\frac{1}{2}}(X_N(t) - P(t)) \,. \qquad \text{(on note } P(t) = X_t o P)$$

La méthode utilise à nouveau un problème de martingales. Tanaka a prouvé en [Tan], par une méthode différente, que lorsque la fonction b est régulière et bornée et lorsque σ est une constante, U_N converge en loi vers un certain processus gaussien. Notre motivation est d'obtenir un résultat, lorsque la fonction b n'est pas bornée. La question de la bonne normalisation (et donc celle de la tension) n'est pas résolue. Par contre, nous donnons au théorème 9.16 quelques résultats concernant le processus limite éventuel. Sous certaines hypothèses, ce processus limite est l'unique solution du problème de martingales sur $\mathcal{S}'$ (l'espace des distributions tempérées), associé à la famille de générateurs $(G_t^{(1)})_{t\geq 0}$, où, pour toute fonction test $\tilde{\psi}$ de la forme $\tilde{\psi}(.) = \psi(\langle\varphi_1,.\rangle,\ldots,\langle\varphi_k,.\rangle)$ et tout élément ν de $\mathcal{S}'$:

$$(G_t^{(1)})\tilde{\psi}(\nu) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial\psi}{\partial y_j}(\langle\varphi_1,\nu\rangle,\ldots,\langle\varphi_k,\nu\rangle)\langle C_t\,\varphi_j,\nu\rangle$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j,j'=1}^{k} \frac{\partial^2\psi}{\partial y_j\,\partial y_{j'}}(\langle\varphi_1,\nu\rangle,\ldots,\langle\varphi_k,\nu\rangle)\left\langle\varphi_j'\,\varphi_{j'}'\left(\int\sigma(.,y)P(t,dy)\right)^2, P(t)\right\rangle .$$

L'opérateur C_t , qui intervient dans le terme de dérive, est l'adjoint de la partie linéaire de A^* autour de $P(t)$. Ce processus limite diffère d'un processus de Ornstein-Uhlenbeck généralisé (voir [HSt]) du fait que $(C_t)_{t\geq 0}$ est opérateur intégro-différentiel. Par conséquent, $(C_t)_{t\geq 0}$ n'est pas le générateur d'un semi-groupe markovien. Ce défaut de dissipativité provient des interactions.

Finalement, nous présentons à l'appendix A2, des résultats de simulations numériques concernant le modèle d'Ising sur le tore.

I - RAPPELS ET PRESENTATION

1. RAPPELS DE THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE

1.a UN BREF APERÇU DU LIEN ENTRE LA MECANIQUE CLASSIQUE ET LA THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE

La thermodynamique statistique, dans le cadre de la mécanique classique, se retrouve à l'aide de l'hypothèse d'ergodicité (1.10). Considérons un système formé de N particules i, appartenant à $\{1,2,\dots,N\}$, confinées dans un domaine $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$. Notons $q_i(t) \in \Lambda$, $p_i(t) \in \mathbb{R}^3$ et $(q,p)(t) \in (\Lambda\times\mathbb{R}^3)^N$ la *position*, la *quantité de mouvement* de la particule i, et les *coordonnées du système global* à l'instant $t \in \mathbb{R}^+$. $(\Lambda\times R^3)^N = P$ s'appelle l'*espace des phases* et Λ^N l'*espace des configurations*.

Le mouvement du système est régi par le système d'équations déterministes de Hamilton:

$$(1.1) \qquad d(q,p) \equiv (\dot{q},\dot{p})dt, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}, \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}$$

(coordonnée par coordonnée) où

$$H: \begin{cases} P\times\mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R} \\ (q,p,t) & \mapsto H(q,p,t) \end{cases}$$

est dérivable. H s'appelle le *hamiltonien*. Nous ne nous intéressons qu'au cas: $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$.

Remarque. On retrouve les équations de la mécanique classique en prenant:

$$(1.2) \qquad H(q,p) = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m_i} + U_{pot}(q)$$

où m_i est la masse de i, $\sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m_i}$ est l'énergie cinétique, et $U_{pot}(q)$ est l'énergie potentielle. Sous de bonnes conditions de régularité de H et Λ et de bonnes conditions aux frontières, l'évolution du système est unique, on peut alors définir le semigroupe T_t:

$T_t: \begin{cases} B_b(P) \to B_b(P) \\ f \mapsto T_t f \end{cases}$ où $T_t f(q(0),p(0)) \equiv f[(q,p)(t)]$ et T_t^* qui est la restriction de son adjoint à $\mathcal{M}(P)$.

La proposition suivante donne les invariants de l'évolution.

PROPOSITION 1.3. $\frac{d}{dt} T_t H = 0$, $\frac{d}{dt} T_t^* \lambda_P = 0$ où λ_P est la mesure de Lebesgue sur P. Ces solutions stationnaires sont uniques aux constantes près.

Idée de la démonstration:

$$\frac{dT_t f}{dt}(q,p) = \left(\frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial p}\dot{p}\right)(q,p)(t)$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial q} & \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial f}{\partial p} & \frac{\partial H}{\partial p} \end{vmatrix} (q,p)(t) = AT_t f(q,p)$$

donc $\quad f = H \Rightarrow \frac{dT_t f}{dt} = 0.$

$$A^*\mu = -\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\mu\right) + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial H}{\partial q}\mu\right) = \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial \mu}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial \mu}{\partial q}$$

donc $\quad \mu = \lambda_P \Rightarrow \frac{d}{dt} T_t^* \mu = 0$.

L'unicite provient du fait que A et A* sont des operateurs du premier ordre.

DEFINITION 1.4. λ_P s'appelle la *mesure de Liouville*.

Pour tout E réel appartenant à l'image de H: Im(H), on note C_E le sous-ensemble de P défini par:

(1.5) $$C_E = \{(q,p) \in P : H(q,p) = E\} .$$

On définit α_E, probabilité sur C_E par

(1.6) $$\forall A \in \ (P), \quad \alpha\ (A \cap C_E) \equiv E_{\lambda_P}(1_A | H=E)$$

ce qui signifie

(1.7) $$\forall A \in \ (P), \quad \forall \varphi \in B(\mathbb{R}),$$

$$\varphi \circ H \in L^1(\lambda_P) \Rightarrow \int_A \varphi \circ H(q,p)\, d\lambda_P(q,p) = \int_{Im(H)} \varphi(E)\alpha_E(A \cap C_E)\, dH \circ \lambda_P(E) .$$

L'existence et l'unicité de $\{\alpha_E\}_{E \in Im(H)}$ provient d'un théorème de désintégration.

REMARQUE 1.8. Une conséquence de (1.3) est (1.8) $T_t C_E \subset C_E$.
Le théorème ergodique nous permet d'écrire que si T_t est ergodique sur C_E, ce qui a un sens du fait de (1.8) (c'est-a-dire: si pour tout A element de (C_E) tel que pour tout t réel positif $T_t A = A$ alors $\alpha_E(A) = 0$ ou $\alpha_E(A) = 1$) alors pour tout f de $B_b(C_E)$ et tout (q_0,p_0) de C_E:

(1.9) $$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T T_f f(q_0,p_0)\, dt = \int_{C_E} f(\gamma)\, d\alpha_E(\gamma) .$$

Les échelles de temps sont telles que toute mesure physique est de la forme (1.9) .

1.10. L'HYPOTHESE ERGODIQUE. Bien que dans la plupart des cas nous ne savons pas si T_t est ergodique, le physicien fait l'hypothèse que le systeme se comporte comme s'il l'était. Cette hypothese est en accord avec les resultats expérimentaux.

Du fait de cette hypothèse, α_E décrit le comportement statistique du système sur C_E.

1.b UN CADRE PLUS GENERAL

Ce qui suit dans ce paragraphe est une abstraction obtenue à partir du paragraphe a. On se donne

(1.11.1) un borélien $\mathbb{P}$ de $\mathbb{R}^n$, $(n \in \mathbb{N})$

(1.11.2) une mesure positive σ sur $(\mathbb{P}, \;(\mathbb{P}))$, bornée ou non

(1.11.3) une fonction borélienne $H: \begin{cases} \mathbb{P} \to \mathbb{R} \\ p \mapsto H(p) \end{cases}$

Par analogie avec le paragraphe a, on appelle $\mathbb{P}$ l'espace des phases, σ la mesure de Liouville, H le hamiltonien. A partir des données 1.11, nous construisons le système microcanonique (définition 1.12) et le système canonique (définition 1.13).

DEFINITION 1.12. Le *système microcanonique* est $\{(C_E, \;(C_E), \alpha_E)\}_{E \in Im(H)}$ où C_E et α_E sont définis (comme en 1.5 et 1.6) par:

(1.12.1) $E \in Im(H)$, $C_E = \{p \in \mathbb{P}, H(p) = E\}$

(1.12.2) $\alpha_E \in \Pi(C_E)$, $\forall A \in \;(\mathbb{P})$, $\alpha_E(A \cap C_E) = E_\sigma(1_A | H=E)$ (voir 1.7).

REMARQUE. La donnée de 1.11, définit le système microcanonique de manière unique. C'est une conséquence d'un théorème de désintegration. (Voir par exemple [Bou].

L'hypothèse physique de départ, est que le système microcanonique décrit le comportement statistique du système physique étudie. Dans le cadre de la mécanique hamiltonienne, l'ergodicité permet de 'justifier cet axiome'.

Nous notons $\mathring{\overline{\text{supp}}}(H\circ\sigma)$ pour l'intérieur de l'enveloppe convexe du support de la mesure $H\circ\sigma$.

DEFINITION 1.13. Le *système canonique* est $\{(\mathbb{P},\mathcal{B}(\mathbb{P}),\rho_U)\}_{U\in\mathring{\overline{\text{supp}}}(H\circ\sigma)}$ où ρ_U est l'unique probabilite sur $\mathbb{P}$ vérifiant les conditions 1.13.1, 1.13.2 et 1.13.3 suivantes. ρ_U s'appelle la *mesure de Gibbs* d'énergie U.

REMARQUE. L'unicité de ρ_U énoncée dans cette définition est démontrée au théorème 1.14.

La condition 1 impose au système d'avoir une énergie moyenne U donnée

(1.13.1) $\rho_U \in \Pi_U^1 = \{\nu \in \Pi(\mathbb{P}) : \int_P H(p)d\nu(p) = U\}$ où $U \in \mathring{\overline{\text{supp}}}(H\circ\sigma)$.

La condition 2 est la relation de cohérence entre les systèmes microcanonique et canonique.

(1.13.2) $\rho_U \in \Pi^2 = \{\nu \in \Pi(\mathbb{P}) : \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{P}),\ \nu(A) = \int_{Im(H)} \alpha_E(A\cap C_E)dH\circ\nu(E)\}$.

La condition 3 est le second principe de la thermodynamique.

Notons $I(\nu.\mu)$ l'*information de Kullback* de ν, probabilité sur $(F,\mathcal{B}(F))$, par rapport à μ mesuré sur (F, (F)), défini par:

$$\forall\nu \in \Pi(F),\ I(\nu,\mu) = \begin{cases} \int_F \ln(\frac{d\nu}{d\mu})d\nu \text{ (éventuellement } +\infty\text{)}, & \text{si } \nu \ll \mu \\ +\infty & \text{si } \nu \not\ll \mu \end{cases}$$

Definissons la fonction $s : \overset{\circ}{\widehat{\mathrm{supp}(H\circ\sigma)}} \times \Pi(\mathbb{P}) \to \overline{\mathbb{R}}$ par:

$$\forall U \in \overset{\circ}{\widehat{\mathrm{supp}(H\circ\sigma)}}, \quad s(U,.) : \begin{cases} \Pi_U^{\;1} \cap \Pi^2 \to \overline{\mathbb{R}} \\ \nu \quad \mapsto \quad -I(\nu,\sigma) \end{cases}$$

Nous verrons plus loin que s a un statut d'entropie. La condition 3 est

(1.13.3) $s(U,\rho_U) = \sup\limits_{\nu \in \Pi_U^{\;1} \cap \Pi^2} s(U,\nu)$.

THEOREME 1.14. Il existe une unique probabilité ρ_U sur $(\mathbb{P},\mathcal{B}(\mathbb{P}))$ vérifiant (1.13.1), (1.13.2) et (1.13.3). Elle est donnée par:

(1.14.1) $\dfrac{d\rho}{d\sigma}(p) = \dfrac{\exp(\theta H(p))}{\tilde{Z}(\theta)}$, $p \in \mathbb{P}$, où

(1.14.2) $\tilde{Z}(\theta) = \int_{\mathbb{P}} \exp(\theta H(p))d\sigma(p)$

pour $\theta \in \Theta = \{y \in \mathbb{R},\ \tilde{Z}(y) < +\infty\}$ et θ est l'unique solution en η de

$\dfrac{d}{d\eta} \ln\tilde{Z}(\eta) = U$ (1.14.3).

La démonstration de ce théorème utilise les lemmes 1.15, 1.17 et 1.18 suivants.

LEMME 1.15. $\forall\nu \in \Pi^2$, $\nu \ll \sigma \Rightarrow \dfrac{d\nu}{d\sigma}(p) = \dfrac{dH\circ\nu}{dH\circ\sigma}(H(p))$ σ-presque partout. En particulier, $I(\nu,\sigma) = I(H\circ\nu,H\circ\sigma)$, $\forall\nu \in \Pi^2$.

DEMONSTRATION. a) $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $H\circ\sigma(A) = 0 \Rightarrow \sigma(H^{-1}(A)) = 0 \Rightarrow$ $H\circ\nu(A) = \nu(H^{-1}(A)) = 0$.

b) $\forall\nu \in \Pi^2$ tel que $\nu \ll \sigma$, $\forall f \in B_b(\mathbb{P})$:

$$\langle f\frac{d\nu}{d\sigma},\sigma\rangle = \langle f,\nu\rangle = \int_{\mathrm{Im}(H)} dH\circ\nu(E) \int_{C_E} f(p)d\alpha_E(p), \text{ (car } \nu \in \Pi^2)$$

$$= \int_{\mathrm{Im}(H)} \frac{dH\circ\nu}{dH\circ\sigma}(E)\Big(\int_{C_E} f(p)d\alpha_E(p)\Big)dH\circ\sigma(E) = \langle f\frac{dH\circ\nu}{dH\circ\sigma}(H(.)),\sigma\rangle$$

car (1.7). □

A partir de maintenant, on note $e = H\circ\sigma$.

REMARQUE 1.16. Compte tenu du lemme 1.15 et de la condition (1.13.2), la recherche de ρ_U est équivalente à celle de e_U, probabilité sur $Im(H)$, telle que:

(1.16.1) $I(e_U,e) = \operatorname{Inf}_{m\in\tilde{\Pi}^1_U} I(m,e)$ où $\tilde{\Pi}^1_U = \{m\in\Pi(Im(H)) : \int_{Im(H)} E\,dm(E) = U\}$.

Nous notons $\tilde{s}(U,.):\begin{cases}\tilde{\Pi}_U \to \mathbb{R}\\ m \mapsto -I(m,e)\end{cases}$.

LEMME 1.17. On pose (1.17.1) $h(U) = \sup_{\theta\in\Theta} (U\theta - \ln\tilde{Z}(\theta))$.
Si $U \in \overset{\circ}{\widehat{\text{supp}(e)}}$ alors $\sup_{m\in\tilde{\Pi}_U} \tilde{s}(U,m) = -h(U)$. Si e_U est une probabilité sur $Im(H)$ telle que $\frac{de_U}{de}(E) = \frac{\exp(\theta_U E)}{\tilde{Z}(\theta_U)}$ σ p.p. ou θ_U est l'unique solution de $\frac{d}{d\eta}\ln \tilde{Z}(\eta)\big|_{\eta=\theta_U} = U$ (1.17.2) alors

(1.17.3) $\tilde{s}(U,e_U) = \sup_{m\in\tilde{\Pi}_U} \tilde{s}(U,m) = -h(U)$ et $e_U \in \tilde{\Pi}_U$.

DEMONSTRATION. 1° Montrons que $\sup_{m\in\Pi_U} \tilde{s}(U,m) \le -h(U)$. On note $\tau_U(e)(dE) \equiv e(U+dE)$ et $\tau_U(m)(dE) \equiv m(U+dE)$.

$\forall\theta \in\Theta$, $U\theta - \ln\tilde{Z}(\theta) = U\theta - \ln\int\exp(\theta E)de(E) = -\ln\int\exp(\theta E)d\tau_U(e)(E)$

$$\le -\ln\int\exp[\theta E - \ln(\frac{d\tau_U(m)}{d\tau_U(e)}(E))]d\tau_U(m)(E)$$

(vaut éventuellement $+\infty$)

$$\le \int[\ln(\frac{d\tau_U(m)}{d\tau_U(e)}(E)) - \theta E]d\tau_U(m)(E) \qquad \text{(Jensen)}$$

$$= I(m,e)$$

(car $I(\tau_U(m),\tau_U(e)) = I(m,e)$ et $\int E\,d\tau_U(m)(E) = 0$).

2° Montrons que $\sup_{m\in\tilde{\Pi}_U} \tilde{s}(U,m) = \tilde{s}(U,e_U) = -h(U)$ et $e_U \in \tilde{\Pi}_U$ (1.17.3).

Il suffit de vérifier que $I(e_U,e) = h(U)$ et $e_U \in \tilde{\Pi}_U$. $\theta \to \ln\tilde{Z}(\theta)$ est strictement convexe sur Θ car $(\ln\tilde{Z})''(\theta) = \mathrm{Var}(e_U) > 0$.

D'autre part, $\theta \to U - \ln\tilde{Z}(\theta)$ atteint son sup fini, si U appartient à $\widehat{\mathring{\mathrm{supp}}(e)}$ [Aze] en θ_U et $\frac{d}{d\eta} \ln\tilde{Z}(\eta)\big|_{\eta=\theta_U} = U$.

θ_U est l'unique solution de cette équation car $(\ln\tilde{Z})'$ est strictement croissante. Donc: $h(U) = U\theta_U - \ln\tilde{Z}(\theta_U)$.

De plus, $\int E\, de_U(E) = U$ car $\varphi(t) \equiv \int \exp(tE)de_U(E) = \frac{\tilde{Z}(t+\theta_U)}{\tilde{Z}(\theta_U)}$

et $\varphi'(0) = (\ln\tilde{Z})'(\theta_U) = U$. Finalement,

$$I(e_U,e) = \int \ln\left(\frac{\exp(\theta_U E)}{\tilde{Z}(\theta_U)}\right)de_U(E) = U\theta_U - \ln\tilde{Z}(\theta_U) = h(U). \quad \square$$

LEMME 1.18. $\tilde{s}(U,.)$ est concave.

DEMONSTRATION. 1° $\tilde{\Pi}_U$ est un ensemble convexe.

2° Si m et μ sont des probabilités, $m \mapsto I(m,\mu)$ est convexe [Bre].

3° Si m est absolument continu par rapport à e, alors:

$$I(m,e) = \int \ln\left(\frac{dm}{de}\right)dm = \int \ln\left(\frac{dm}{d\mu}\cdot\frac{d\mu}{de}\right)dm = I(m,\mu) + \int \ln\left(\frac{d\mu}{de}\right)dm$$

où μ est choisi tel que: $\forall m \in \Pi(\mathrm{Im}(H))$, $m \ll e \Rightarrow m \ll \mu \ll e$, ce qui est possible en prenant μ vérifiant: $\mu \ll e$ et $\frac{d\mu}{de} > 0$, e-presque partout. Or, $m \mapsto \int \ln\left(\frac{d\mu}{de}\right)dm$ est linéaire (à valeurs $\bar{\mathbb{R}}$) et $\{m \in \Pi(\mathrm{Im}(H)) : m \ll e\}$ est convexe, donc: $m \mapsto I(m,e)$ est convexe. $\square$

DEMONSTRATION DU THEOREME 1.14. Compte tenu du lemme 1.17 et de la remarque 1.16, il reste à prouver que e_U est l'unique solution de (1.17.3).

D'après le lemme 1.18, l'ensemble des solutions de (1.17.3) est convexe. Supposons qu'il contienne deux éléments distincts e_1 et e_2 alors $\frac{1}{2}(e_1+e_2)$ est aussi solution et:

$$I(\tfrac{1}{2}(e_1+e_2),e) = \int \phi[\tfrac{1}{2}\frac{de_1}{de}(E)+\tfrac{1}{2}\frac{de_2}{de}(E)]de(E) \qquad (\phi(x)=x\ln x)$$

$$< \tfrac{1}{2}(I(e_1,e)+I(e_2,e)) = \inf_{m\in\tilde{\Pi}} I(m,e) \quad (\phi \text{ est strictement convexe})$$

Il apparait une contradiction, ce qui prouve l'unicité.

Finalement, la propriété (1.13.2) permet de construire ρ_U à partir de e_U. □

COROLLAIRE 1.19. (de la démonstration) $s(U,.)$ est concave.

DEMONSTRATION. C'est une conséquence des lemmes 1.15, 1.18 et de la convexité de $\Pi_1^U \cap \Pi_2$.

1.c LA DEFINITION DES FONCTIONS THERMODYNAMIQUES ET QUELQUES REMARQUES

On note $\langle f\rangle_U = \int_{\mathbb{P}} f(p)d\rho_U(p)$.

DEFINITIONS 1.20. On pose $\theta = -\beta = -\frac{1}{kT}$ où $k > 0$ est la constante de Boltzmann.

Température: $T = -\frac{1}{k\theta}$

Energie interne: $U(\beta) = \langle H\rangle_U$ (1.13.1) (voir 1.32)

Entropie: $S(U) = -kh(U) = -kI(\rho_U,\underset{\sim}{\sigma}) = -k\langle \ln \frac{d\rho_U}{d\sigma}\rangle_U$

Fonction de partition: $\beta \to Z(\beta) = \tilde{Z}(-\beta)$

Energie libre: $F(\beta) = -kT \ln Z(\beta) = -\frac{\ln Z(\beta)}{\beta}$.

REMARQUE 1.21. Sur la définition de T. Elle permet a priori de définir des températures dans $\bar{\mathbb{R}}$. Les systèmes physiques sont constitués d'un grand nombre de particules ($N=+\infty$). $N=+\infty$ ne permet de donner un sens qu'aux températures positives si H est de la forme (1.2) et U_{pot} est borné inférieurement.

Les températures négatives apparaissent, par exemple, dans les systèmes antiferromagnétiques (où l'entropie augmente lorsque l'energie interne diminue, voir (1.28.2)).

REMARQUE 1.22. Sur l'entropie. Parmi les informations, entre deux probabilités P et Q, de la forme $(\phi;P,Q) = E_P(\phi(\frac{dP}{dQ}))$ où ϕ est continue, $\phi(1) = 0$ et est telle que ≥ 0, $\phi = \ln$ est la seule fonction telle que: $\mathcal{I}(\phi;P_1 \otimes P_2, Q_1 \otimes Q_2) = \mathcal{I}(\phi;P_1,Q_1)+\mathcal{I}(\phi;P_2,Q_2)$. Cette propriété s'appelle l'*extensivité* de l'entropie.

REMARQUE 1.23. h est convexe et $-h(U) = \sup_{\nu \in \Pi_U^1 \cap \Pi^2} s(U,\nu) = \tilde{s}(U,e_U)$ avec s(U,.) concave, se traduit par:

$$U \to S(U) \quad \text{est une fonction concave}$$

et

$$s(U,.): \begin{cases} \Pi_U^1 \cap \Pi^2 \to \bar{\mathbb{R}} \\ \nu \mapsto s(U,\nu) \end{cases} \quad \text{est une fonction concave qui atteint}$$

son maximum S(U) à l'équilibre ρ_U.

Notons L(f) la *transformée de Legendre* de la fonction f de domaine Df

$$L(f)(x) = \sup_{y \in Df} (yx - f(y))$$

(1.17.1) s'écrit

(1.24.1) $h(U) = L(\ln\tilde{Z})(U) = \theta_U U - \ln\tilde{Z}(\theta_U)$

avec

(1.25.1) $(\ln\tilde{Z})'(\theta_U) = U$.

Comme $\ln\tilde{Z}$ est convexe nous obtenons par dualité de Legendre

(1.26.1) $\ln\tilde{Z}(\theta) = L(h)(\theta)$,

(1.27.1) $\ln\tilde{Z}(\theta_U) = U\theta_U - h(U)$

(1.28.1) $h'(U) = \theta_U$.

(1.25.1) et (1.28.1) sont les relations de *dualité entre l'énergie et la température* et donnent

(1.25.2) $U = -\frac{d}{d\beta}\ln Z(\beta)$,

(1.28.2) $\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}$.

(1.26.1) et (1.27.1) donnent:

(1.26.2) $-\frac{F}{T} = L(-S)(-\frac{1}{T})$ et

(1.27.2) $F = U - TS$

ce qui prouve que la définition de F est cohérente avec celle de la thermodynamique classique.

On vérifie aisement que

(1.29) $F(T) = -L(S \to U(S))(T)$ (d'apres 1.26.2) .

REMARQUE. Pour $T \neq \pm\infty$, (1.28.2) et le théorème des fonctions implicites nous permettent de donner un sens à (1.29).

REMARQUE 1.30. La convexité de $\ln Z$ et la relation (1.25.2) prouve qu'il y a bijection entre U et β. On peut donc écrire $\rho_{U(\beta)} = \rho^{\beta}$, (*) ce qui permet de donner une définition plus claire de l'énergie interne:

(1.31) $\quad U(\beta) = \langle H, \rho^{\beta}\rangle = \langle H\rangle^{\beta}$.

Avec ces nouvelles notations:

(1.32) $\quad \rho_{U(\beta)} = \rho^{\beta(U)}$ et $\dfrac{d\rho^{\beta}}{d\sigma}(p) = \dfrac{\exp(-\beta H(p))}{Z(\beta)}$ σpresque partout.

REMARQUE 1.33. Sur le nombre de particules N. Les résultats énoncés précédemment n'ont de l'intérêt que si $\Theta \neq \phi$. Or un hamiltonien H ayant un sens physique est une variable extensive, donc $|H_N|$ tend vers $+\infty$ lorsque N tend vers $+\infty$. La fonction de partition Z_N n'est définie que si N est fini, soit n fini où $\mathbb{P}_N \subset \mathbb{R}^n$. Le problème $N \to +\infty$ nécessite des *renormalisations* ainsi que la définition d'une *limite thermodynamique* qui dépend de la forme des $\mathbb{P}_N$ et des H_N.

REMARQUE 1.34. Sur la pression et la multiplicité des phases. On indice par N les variables qui correspondent à un système de N particules. Supposons que H_N dépende d'une variable extérieure P (la pression pour un gaz, le champ électrique extérieur pour un système électromagnetique), et que $P \mapsto H_N(P)$ soit dérivable.

V_N , défini par $V_N \equiv -\dfrac{\partial U_N}{\partial P}$, est le volume ou la magnétisation, alors:

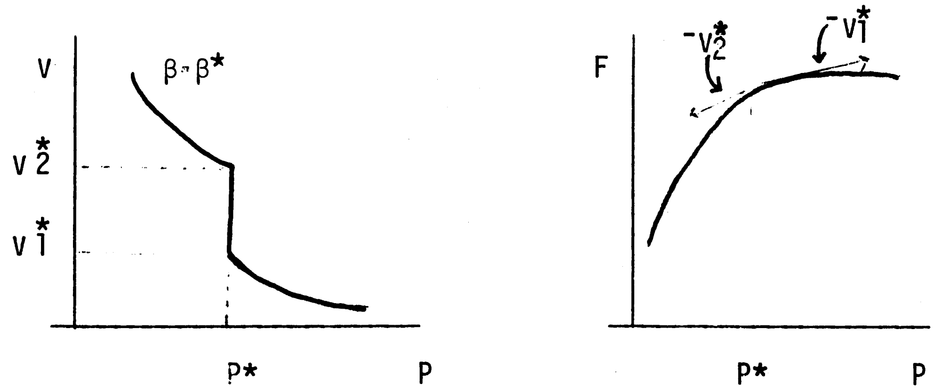
$$V_N(\beta,P) = \left\langle -\frac{\partial H_N}{\partial P}\right\rangle^{\beta} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial P}\ln Z_N(\beta,P) = -\frac{\partial}{\partial P}F_N(\beta,P).$$

Pour étudier le système $N = +\infty$, on regarde entre autres les limites:

$$U^{\beta} = \lim_{N\to\infty}\left\langle\frac{H_N}{N}\right\rangle^{\beta} \quad \text{et} \quad \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}F_N(\beta,P) .$$

(*) β est un indice

Supposons que ces limites existent, et que pour tout N et tout β , $P \mapsto F_N(\beta,P)$ soit concave (c'est souvent le cas). Alors $P \mapsto F(\beta,P)$ sera concave, mais pourra ne plus être dérivable en certains points. (Voir le Th. 5.3.). Nous illustrons ce phénomène par les courbes isothermes $\beta = \beta^*$ correspondant à un gaz inffni.



On dit alors qu'il y a multiplicité de phases en (β^*,P^*) car en ce point (U,V) n'est pas entièrement defini. En résume la multiplicité de phases n'a lieu que si une variable extérieure autre que β intervient et si $N = \infty$, puisque lorsque $N < \infty$, F_N est dérivable.

1.35 LA MESURE DE GIBBS POUR UN SYSTEME DE N SPINS. La mesure de Liouville est de la forme $\sigma_N(dp) = \bigotimes_{i=1}^{N} \alpha_i(dp_i)$ (1.35.1) où α_i est une probabilite (sur R, R^2, R^3, S^1, S^2, etc.).

Le hamiltonien H est de la forme $H_N(p) = \sum_{i=1}^{N} U_i(p)$ (1.35.2) où $U_i(p)$ est le potentiel d'interaction du spin i avec les N spins $1,\ldots,N$.

On remarque que $\rho_N^0 = \sigma_N$ (en $\rho = 0$), c'est-à-dire dans le cas des systèmes ferromagnétiques que σ_N est l'état d'équilibre lorsque $T = +\infty$. L'entropie $S_N(U) = s(U,\rho_N^{\beta(U)})$ mesure la "proximité" de l'équilibre $\rho_N^{\beta(U)}$ et de $\sigma_N = \rho_N^0$. ρ_N^0 peut être interprété comme l'état du système le "plus désordonné autorisé par la nature" (en fait par le modèle).

1.32 s'écrit

$$(1.36) \qquad \rho_N^\beta = Z_N^{-1}(\beta) \exp(-\beta \sum_{i=1}^{N} U_i(.)) \bigotimes_{i=1}^{N} \alpha_i \ .$$

2. PRESENTATION D'UN SYSTEME DE CURIE-WEISS DYNAMIQUE

2.a DESCRIPTION D'UN SYSTEME DE N SPINS

i appartenant à $\{1,\dots,N\}$ s'appelle un *site*. En chacun de ces sites "vit" un processus à valeurs réelles. Soit: $x_i^N(\omega,t) \in R$, $(i \in \{1,\dots,N\},\ t \in R^+,\ \omega \in \Omega)$ la réalisation de ce processus au site i et à l'instant t pour l'événement ω. $x_i^N(t)$ s'appelle le *spin* en i, à l'instant t. On appelle x^N le processus à valeurs $\mathbb{R}^N$ défini par:

$$x^N : \begin{cases} \Omega\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^N \\ (\omega,t) \mapsto (x_1^N(\omega,t),\dots,x_N^N(\omega,t)). \end{cases}$$

2.b LES EQUILIBRES

On appelle *équilibre* toute probabilité invariante $\rho_N \in \Pi(\mathbb{R}^N)$. Pour que le modèle soit physiquement acceptable il faut que ρ_N soit une mesure de Gibbs de la forme (1.38).(*) Avec les notations du paragraphe 1:

(2.1) $\qquad \mathbb{P}_N = \mathbb{R}^N$.

On dira qu'un système de N spins et un *système de Curie-Weiss* si en outre, le hamiltonien H_N est de la forme:

(2.2) $$H_N : \begin{cases} \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto -h\sum_{i=1}^N x_i - \frac{J}{2N}\Big(\sum_{i=1}^N x_i\Big)^2 \end{cases} \qquad (h\in\mathbb{R},\ J\in]0,+\infty[)$$

h est un *champ électrique extérieur*, $-\frac{J}{2N}\Big(\sum_{i=1}^N x_i\Big)^2 = -\frac{J}{2}\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N x_j\Big)\sum_{i=1}^N x_i$ est l'*énergie d'interaction*, $\frac{J}{2}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N x_j$ a la dimension d'un champ électrique, c'est le *champ moyen*.

(*) On demande à un équilibre de réaliser le maximum de l'entropie.

Compte tenu de (1.38) et du fait que $J > 0$ et $\beta > 0$, si $h=0$ on voit que $d\rho_N^\beta/d\sigma_N$ est maximal lorsque les spins sont de mêmes signes. C'est un système *ferromagnétique*.

On impose à la mesure de Liouville d'être de la forme (1.35), avec en outre: pour tout i de $\{1,\dots,N\}$, $\alpha_i = \alpha$, soit

(2.3) $$\sigma_N(dx) = \bigotimes_{i=1}^{N} \alpha(dx_i), \quad dx = \prod_{i=1}^{N} dx_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N),$$

$$dx_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \forall i \in \{1,\dots,N\}.$$

De manière à pouvoir effectuer tous les calculs par la suite, α doit vérifier la condition

(2.4) $$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall \beta > 0, \quad \forall h \in \mathbb{R}, \quad \forall J > 0,$$

$$Z_N(\beta,h) = \int_{\mathbb{R}^N} \exp[\beta(h \sum_{i=1}^{N} x_i + \frac{J}{2N}(\sum_{i=1}^{N} x_i)^2] \bigotimes_{i=1}^{N} \alpha(dx_i) < +\infty$$

qui est équivalente à

(2.5) $$\forall y \in [0,+\infty[, \quad \int_{R} \exp(yx^2)\alpha(dx) < +\infty.$$

Finalement

(2.6) $$\rho_N^{\beta,h}(dx) = Z_N^{-1}(\beta,h)\exp[\beta(h \sum_{i=1}^{N} x_i + \frac{J}{2N}(\sum_{i=1}^{N} x_i)^2)] \bigotimes_{i=1}^{N} \alpha(dx_i)$$

où α est une probabilité sur $\mathbb{R}$ qui vérifie (2.5).

2.c LA DYNAMIQUE

Etant donnee une probabilité ρ_N, il y a à priori plusieurs dynamiques qui l'admettent comme équilibre. Nous choisissons une dynamique du type diffusion de la forme: (voir [Daw], [DZw])

(2.7) $\quad dx_i^N(t) = (v(x_i^N(t))+\theta\bar{x}^N(t)+h)dt + \sigma dw_i(t),\ i \in \{1,\dots,N\}$

où $\bar{x}^N = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j^N$, σ est une constante strictement positive et

$w = (w_1,\dots,w_N)$ est un brownien de $\mathbb{R}^N$ à coordonnées indépendantes.

On note $A_N : C_K^2(\mathbb{R}^N) \to B_b(\mathbb{R}^N)$, l'opérateur d'évolution (backward)

défini par

(2.8) $$\forall f \in C_K^2(\mathbb{R}^N),\quad A_N f(x) = \sum_{i=1}^{N} (v(x_i)+\theta\bar{x}+h)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{\sigma^2}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$

σ sera choisi tel que le problème des martingales associé à A_N ait une solution unique. Soit $\{P_{N,x}\}_{x\in\mathbb{R}^N}$ la solution du problème des martingales

(2.9) $$\forall f \in C_K^2(\mathbb{R}^N),\ \forall x \in \mathbb{R}^N,\quad E_x f(X(t)) = f(x)+E_x\int_0^t A_N f(X(s))ds\ .$$

On note $P_{N,x}^t = X(t)\circ P_{N,x}$ $p_t = \int_{R^N} P_{N,x}^t p_0(dx)$ pour $p_0 \in \Pi(\mathbb{R}^N)$ (intégrale faible) et A_N^* l'adjoint formel de A_N.

$$\forall f \in C_K^\infty(\mathbb{R}),\quad \langle f,p_t\rangle = \langle f,p_0\rangle + \langle f,\int_0^t A_N^* p_s ds\rangle$$ s'écrit:

(2.10.1) $$\frac{\partial p_t}{\partial t} = A_N^* p_t$$ (au sens des distributions) où

(2.10.2) $$\forall\mu \in \Pi(R^N),\quad A_N^*\mu(dx) = \sum_{i=1}^{N} -\frac{\partial}{\partial x_i}[(v(x_i)+\theta\bar{x}+h)\mu(dx)] + \frac{\sigma^2}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\mu(dx)\ .$$

(2.11) $\quad\rho$ est une probabilité invariante $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+,\ p_t = p_0 = \rho$

(2.10) et (2.11) donnent:

(2.12) $\quad \rho$ est une probabilité invariante $\Leftrightarrow \begin{cases} \rho \text{ est une probabilité} \\ A_N^* \rho = 0 \text{ (au sens des distributions)} \end{cases}$

En effectuant un calcul formel on obtient:

$$(2.12) \Leftrightarrow \frac{d\rho}{dx}(x) = C_N^{-1} \exp\left[\frac{2}{\sigma^2}\left(\frac{\theta}{2N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 + h \sum_{i=1}^{N} x_i\right)\right] \prod_{i=1}^{N} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} V(x_i)\right)$$

où $V(x) = \int_0^x v(y)dy$, C_N: constante de normalisation. Pour identifier ρ et ρ_N (2.6), on pose:

(2.13.1) $\quad \beta = \frac{2}{\sigma^2}, \quad J = \theta$.

De manière à ce que la mesure de Liouville $\alpha^{\otimes N}$ soit indépendante de β on impose à v d'être de la forme:

(2.13.2) $\quad v(x) = \frac{\sigma^2}{2} \tilde{v}(x)$, donc:

(2.13.3) $\quad \frac{d\alpha}{dx}(x) = z^{-1} \exp \int_0^x \tilde{v}(y)dy > 0$ où

$$z = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\int_0^x \tilde{v}(y)dy\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} V(x)\right)dx .$$

La condition 2.5 est alors équivalente à

(2.13.4) $\quad \forall y \in [0,+\infty[, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(yx^2 + \int_0^x \tilde{v}(u)du\right)dx < +\infty$

(ce qui implique que z est fini).

Par la suite nous nous intéressons donc à l'équation differentielle stochastique dans $\mathbb{R}^N$ (e.d.s. dans $\mathbb{R}^N$)

(2.14) $\quad dx_i^N(t) = \left(\frac{\sigma^2}{2} \tilde{v}(x_i^N(t)) + \theta \bar{x}^N(t) + h\right)dt + \sigma dw_i(t), \quad i \in \{1,\dots,N\}$

où $w^N = (w_1,\dots,w_N)$ est un brownien à coordonnées indépendantes de $\mathbb{R}^N$.

EXISTENCE ET UNICITE D'UNE SOLUTION DE 2.14:

Théorème 2.15

Si b: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est mesurable et localement borné

Si a: $\mathbb{R}^N \to$ {matrices N x N} est continu et vérifié:

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \quad \inf_{y \in \mathbb{R}^N} \langle a(x)y, y\rangle > o$$

et s'il existe une constante K telle que:

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \ |||a(x)||| \geq K\ (1+||x||^2) \qquad \text{et}$$

$$< x, b(x) > \leq K\ (1+||x||^2)$$

Alors le problème des martingales dans $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^N)$ associé au générateur G_N: $\forall f \in C_K^2(\mathbb{R}^N)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $G_N f(x)$

$$G_N f(x) = \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x)$$

admet une solution unique

démonstration: Voir [STV], Thm 10.2.2. □

Le théorème 2.15 est un théorème d'existence et d'unicité des solutions faibles de l'e.d.s 2.14. Le théorème 2.16 nous donne un résultat d'existence et d'unicité des solutions fortes de 2.14.

Théorème 2.16

Si v est localement lipschitzieme et s'il existe deux constantes K, r ≥ 0 telles que: $\forall\ x,z$,

$$\tilde{v}(x) - \tilde{v}(z) \leq K(x-z), \quad x\tilde{v}(x) \leq K\ (1+x^2), \quad |\tilde{v}(x)| \leq K\ (1+|x|^r)$$

alors 2.14 admet une unique solution trajectionelle.

démonstration: Voir la proposition 3.1 du chapitre 8.

2.17 RECAPITULATION. Nous étudions $(x^N)_{N\geq 1}$ la suite d'équations différentielles stochastiques, $x^N \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^N)$.

(2.17.1) $dx_i^N(t) = (v(x_i^N(t))+\theta\bar{x}^N(t))dt+\sigma dw_i(t)$, $i=1,\dots,N$, $\theta>0$, $\sigma>0$,

où $w^N = (w_1^N,\dots,w_N^N)$ est un brownien à coordonnées indépendantes et $\forall x \in \mathbb{R}$, $v(x) = \frac{\sigma^2}{2}\tilde{v}(x)+h$, $h \in \mathbb{R}$; $\bar{x}^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^N$.

De manière à pouvoir appliquer le théorème 2.16, nous imposons a la fonction $\tilde{v}$:

(2.17.2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tilde{v}(x) = x.\tilde{v}_1(x)+\tilde{v}(0)$ avec $\sup_{x\in\mathbb{R}} \tilde{v}_1(x) < +\infty$

de plus:

(2.17.3) $\forall y \in \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}} \exp(yx^2+\int_0^x \tilde{v}(u)du)dx < +\infty$ (condition 2.5).

REMARQUE. Au chapitre 8, nous étudions la loi des grands nombres par un Famille d'e.d.s plus générale que 2.17.1, à savoir:

$$dx_i^N(t) = [v(x_i^N(t)) + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f(x_i^N(t), x_j^N(t))]dt + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \sigma(x_i^N(t), x_j^N(t))dw_j(t)$$

où v, f et σ vérifient les hypothèses (H) du théorème 2.2 du chapitre 8.

3. QUELQUES RESULTATS D'ECHANGEABILITE

ρ_N donné par (2.6), de même que la loi du système (2.14) si sa condition initiale est échangeable, sont des lois de suites finies échangeables (à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^N$ et $(C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}))^N$). L'échangeabilité est une propriete essentielle du système de Curie-Weiss, à l'équilibre ou dynamique.

Les résultats que nous enonçons dans ce paragraphe, se trouvent pour la plupart dans [Ald]. Nous reppelons la démonstration des résultats importants pour la suite de l'exposé.

Les propositions 3.5 et 3.8 formalisent l'idée intuitive que la loi d'un échantillon échangeable (fini ou infini) est entièrement déterminée par celle de sa probabilité empirique.

Le lemme 3.9 est fondamental pour obtenir des conditions nécessaires et suffisantes de tension de suites d'échantillons échangeables. Les lemmes 3.11 et 3.12 ainsi que les corollaires 3.13 et 3.14 n'apparaissent pas explicitement dans [Ald]. La proposition 3.15 et la seconde partie du Théorème 3.18 sont dûes à Kallenberg [Kal]. Le théorème 3.18 est fondamental dans notre exposé car il décrit la limite thermodynamique.

DEFINITION 3.1. Une suite finie $(Z_1,\dots,Z_N)$ de variables aléatoires est dite *échangeable* (ou *N-échangeable* pour indiquer le nombre de variables aléatoires), si:

$(Z_1,\dots,Z_N) \overset{\mathcal{L}}{=} (Z_{\Pi(1)},\dots,Z_{\Pi(N)})$, pour toute permutation Π de $\{1,\dots,N\}$. Une suite infinie $(Z_1,Z_2,\dots)$ est dite *échangeable* si

$(Z_1, Z_2, \ldots) \overset{\mathcal{L}}{=} (Z_{\Pi(1)}, Z_{\Pi(2)}, \ldots)$, pour toute permutation finie Π de $\{1,2,\ldots\}$ c'est-a-dire toute permutation Π telle que $\# \{i, \Pi(i) \neq i\} < +\infty$.

3.a LES SUITES INFINIES ECHANGEABLES

Le théorème fondamental concernant les suites infinies échangeables est le théorème de De Finetti, qui dit que toute suite infinie de variables aléatoires réelles est un "mélange" de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (i.i.d.). La réciproque est évidente. On étend sans difficulté ce théorème lorsque les variables aléatoires sont à valeurs dans un espace de Borel:S.(*) Avant de définir les mélanges d'i.i.d., nous avons besoin de la notion de probabilité aléatoire.

DEFINITION 3.2. $\alpha : (\Omega, \mathcal{F}(\Omega)) \to (\Pi(S), \mathcal{F}(\Pi(S)))$ est une *probabilité aléatoire* si elle est $\mathcal{F}(\Pi(S))$-mesurable, ou $\mathcal{F}(\Pi(S))$ est la plus petite tribu rendant toutes les applications

$$\begin{cases} \Pi(S) \to \mathbb{R}, \\ \theta \mapsto \theta(A) \end{cases} \quad A \in \mathcal{F}(S) \text{ mesurables.}$$

Soit α une probabilité aleatoire, il est possible de construire $(Y_i)_{i\geq 1}$ tel que conditionnellement à $\alpha = \theta$ (θ probabilite generique), $(Y_i)_{i\geq 1}$ est i.i.d. (θ).

Lorsque $S = \mathbb{R}$. On note $F(\theta,t) = \theta(]-\infty,t])$ et $F^{-1}(\theta,x) = \inf\{t, F(\theta,t) \geq x\}$. Si ξ est uniforme sur $[0,1]$ ($U(0,1)$) alors $F^{-1}(\theta,\xi)$ a pour loi θ. Si $(\xi_i)_{i\geq 1}$ est i.i.d. ($U(0,1)$) alors $(F^{-1}(\theta,\xi_i))_{i\geq 1}$ est i.i.d. (θ). Soit α une probabilite aleatoire independante de $(\xi_i)_{i\geq 1}$ et posons $\hat{Y}_i = F^{-1}(\alpha,\xi_i)$ ($i \geq 1$), alors $(\hat{Y}_i)_{i\geq 1}$ vérifie la propriete requise.

(*)

Lorsque S est de Borel, la propriete suivante est verifiee. Soit ξ de loi $U(0,1)$, pour toute μ probabilité sur S, il existe $f:[0,1] \to S$ tel que $f(\xi)$ a pour loi μ.

DEFINITION 3.3. Soit $(Y_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aleatoires à valeurs dans un espace de Borel S, soit α une probabilite aléatoire sur S, on dit que $(Y_i)_{i\geq 1}$ est un *mélange d'i.i.d. dirigé par* α si:

$$(\alpha, Y_1, Y_2, \dots) \overset{\mathcal{L}}{=} (\alpha, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \dots), \text{ pour } (\hat{Y}_i)_{i\geq 1} \text{ construit plus haut.}$$

Notons $(Y_1, Y_2, \dots) = \underset{\sim}{Y}$, $\mathcal{L}(\alpha)$ la loi de α et $\mathcal{B}(S)$ la tribu sur S. Il est clair que: $P(\underset{\sim}{Y} \in A) = \int_{\Pi(S)} \theta^{\otimes\infty}(A)\mathcal{L}(\alpha)(d\theta)$, $\forall A \in \mathcal{B}(S^\infty)$, $\underset{\sim}{\hat{Y}}$ est le *mélange canonique* d'i.i.d. dirigé par α.

Il est maintenant possible d'énoncer correctement le théorème de De Finetti.

THEOREME 3.4. (De Finetti) Soit $\underset{\sim}{Z}$ une suite infinie échangeable à valeurs dans un espace de Borel S, alors $\underset{\sim}{Z}$ est un mélange d'i.i.d.

DEMONSTRATION. Voir [Ald].

Dans ce qui suit, nous nous interessons à des problemes de convergence; nous supposons que S est polonais.

$\Lambda_N : S^N \to \Pi(S)$ est défini par $\Lambda_N(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i}$

$\Lambda : S^\infty \to \Pi(S)$ est defini par $\Lambda(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} \lim\text{ étroite}_{N\to\infty} \Lambda_N(x_1, \dots, x_N) \\ \delta_0, \quad \text{si la limite n'existe pas} \end{cases}$.

La proposition 3.5 suivante est une conséquence immediate de la définition 3.3 et du theorème de Glivenko-Cantelli.

PROPOSITION 3.5. Si la suite infinie $\underset{\sim}{Y}$ est un mélange d'i.i.d., alors ce mélange est dirigé par $\alpha = \Lambda(\underset{\sim}{Y})$ et cette probabilité aléatoire dirigeante est unique presque sûrement.

3.b LES SUITES FINIES ECHANGEABLES

Dans ce cadre le théorème de De Firetti ne peut pas se généraliser, une suite finie échangeable n'étant pas nécessairement la "restriction" d'une suite infinie échangeable (si cela arrive, il se peut aussi qu'elle soit la restriction de plusieurs suites infinies échangeables distinctes). Toutefois, le lemme 3.8 suivant est l'analogue partiel du théorème de De Firetti.

Prenons N constantes appartenant à $S: y_1,\dots,y_N$ non nécessairement distinctes, et mettons-les dans un ordre aléatoire:

(3.6) $\quad \underset{\sim}{Y} = (Y_1,\dots,Y_N) = (y_{\hat{\Pi}(1)},\dots,y_{\hat{\Pi}(N)})$;

$\hat{\Pi}$ est la permutation aléatoire sur $\{1,\dots,N\}$ de loi uniforme.

La distribution empirique de $\underset{\sim}{Y}$ est une distribution fixe $\Lambda_N(y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{y_i} = \Lambda_N(\underset{\sim}{Y})$ (3.7). Réciproquement, il est clair que si $\underset{\sim}{Y}$ est N-échangeable et satisfait (3.7) alors $\underset{\sim}{Y}$ a pour loi (3.6). $\underset{\sim}{Y}$ s'appelle un *processus d'urne*.

PROPOSITION 3.8. Soit U_N l'ensemble des lois $\mathcal{L}(\underset{\sim}{Y})$ où $\underset{\sim}{Y}$ est un processus d'urne. Soit U_N^* l'ensemble des distributions empiriques $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{y_i}$. Soit $\Phi: U_N \to U_N^*$ la bijection naturelle $\Phi(\mathcal{L}(\underset{\sim}{Y})) = \Lambda_N(\underset{\sim}{Y})$. Soit $\underset{\sim}{Z} = (Z_1,\dots,Z_N)$ une suite finie N-échangeable à valeurs dans un espace espace de Borel S. Alors $\Phi^{-1}(\Lambda_N(\underset{\sim}{Z}))$ est une probabilité conditionnelle régulière pour $\underset{\sim}{Z}$ sachant $\Lambda_N(\underset{\sim}{Z})$.

DEMONSTRATION. Voir [Ald].

Ce qui signifie que conditionnellement à la distribution empirique, les N valeurs intervenant dans la distribution empirique apparaissent dans un ordre aléatoire uniforme. Ou bien de manière moins précise qu'une suite N-échangeable est un melange de processus d'urne.

3.c DES RESULTATS DE CONVERGENCE

S est un espace polonais. S^N et S^∞ sont munis de la topologie produit.

LEMME 3.9. Soient $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ des probabilites aléatoires sur S $(E\alpha_n)_{n\geq 1}$ est tendu dans $\Pi(S)$ si et seulement si $(\mathcal{L}(\alpha_n))_{n\geq 1}$ est tendu dans $\Pi(\Pi(S))$.

DEMONSTRATION. ([Ald]).

Condition nécessaire. Fixons $\varepsilon > 0$. Par hypothèse il existe un compact $K_j \subset S$ tel que: $E\alpha_n(K_j^C) \leq \varepsilon 2^{-2j}$, $\forall j,n \geq 1$.

L'inegalité de Tchebichev donne:

(3.9.1) $P(\alpha_n(.,K_j^C) > 2^{-j}) \leq \varepsilon 2^{-2j}/2^{-j} = \varepsilon 2^{-j}$, $\forall j,n \geq 1$.

En posant $\Theta = \{\theta \in \Pi(S),\ \theta(K_j^C) \leq 2^{-j},\ \forall j \geq 1\}$, on a d'après (3.9.1): $P(\alpha_n \in \Theta) \geq 1-\varepsilon$, $\forall n \geq 1$. On conclut en remarquant que Θ est un compact de $\Pi(S)$.

La condition suffisante est immédiate en vertu de:
$<\phi, E\alpha_n> = E<\phi,\alpha_n>$, $\forall\phi \in C(S)$. Ce qui implique la continuité de :

$\mathcal{L}(\alpha_n) \mapsto E(\alpha_n)$ □

Le lemma 3.9 va nous permettre d'énoncer un résultat de compacité faible, à la proposition 3.13.

CAS 1. $\underset{\sim}{Z}^k$ $(k \geq 1)$ sont des suites infinies échangeables

Par définition de la topologie de S^∞, nous avons:

$$(3.10) \qquad \underset{\sim}{Z}^k \underset{k\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} \underset{\sim}{Z} \Leftrightarrow (Z_1^k,\ldots,Z_m^k) \underset{k\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} (Z_1,\ldots,Z_m), \quad \forall m \geq 1.$$

Il est clair que $\underset{\sim}{Z}$ est échangeable.

On note $\alpha_k = \Lambda(\underset{\sim}{Z}^k)$ et $\alpha = \Lambda(\underset{\sim}{Z})$.

LEMME 3.11. $\underset{\sim}{Z}^k$ $(k \geq 1)$ sont des suites infinies échangeables. $(\mathcal{L}(\underset{\sim}{Z}^k))_{k\geq 1}$ est tendu dans $\Pi(S^\infty)$ si et seulement si $(\mathcal{L}(Z_1^k))_{k\geq 1}$ est tendu dans $\Pi(S)$.

DEMONSTRATION. $(\mathcal{L}(\underset{\sim}{Z}^k))_{k\geq 1}$ tendu $\Leftrightarrow \forall m \geq 1$, $(\mathcal{L}(Z_1^k,\ldots,Z_m^k))_{k\geq 1}$ tendu.

La condition nécessaire est évidente.

Condition suffisante:

$(\mathcal{L}(Z_1^k))_{k\geq 1}$ tendu $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K \subset S$, K compact tel que: $\forall k \geq 0$, $P(Z_1^k \in K) \geq 1-\varepsilon$. $\hat{\underset{\sim}{Z}}^k$ est la suite canonique associée à $\underset{\sim}{Z}^k$ (voir 3.3)

$$\begin{aligned}
P\{(Z_1^k,\ldots,Z_m^k) \in K^m\} &= P\{(\alpha_k,\hat{Z}_1^k,\ldots,\hat{Z}_m^k) \in \Pi(S)\times K^m\} \\
&= \int_{\Pi(S)} P\{(Z_1^k,\ldots,Z_m^k) \in K^m \mid \alpha_k = \theta\}\mathcal{L}(\alpha_k)(d\theta) \\
&= \int_{\Pi(S)} \theta(K)^m \mathcal{L}(\alpha_k)(d\theta) \\
&\geq \left[\int_{\Pi(S)} \theta(K)\mathcal{L}(\alpha_k)(d\theta)\right]^m \quad \text{(inégalité de Jensen)} \\
&= P(Z_1^k \in K)^m \\
&\geq (1-\varepsilon)^m \geq 1-m\varepsilon. \qquad \square
\end{aligned}$$

LEMME 3.12. Si $\underset{\sim}{Z}$ est ∞-echangeable et $\alpha = \Lambda(\underset{\sim}{Z})$ alors $\mathcal{L}(Z_1,\ldots,Z_m) = E(\alpha^{\otimes m})$, $\forall m \geq 1$.

DEMONSTRATION. $\forall\varphi \in C_b(S^m)$,

$$E(\alpha,\varphi(Z_1,\ldots,Z_m)) = \int_{\Pi(S)} E[(\alpha,\varphi(Z_1,\ldots,Z_m))\,|\alpha = \theta]\mathcal{L}(\alpha)(d\theta)$$

$$= \int_{\Pi(S)} (\theta,<\varphi,\theta^{\otimes m}>)\mathcal{L}(\alpha)(d\theta)$$

$$= (E\alpha,<\varphi,E\alpha^{\otimes m}>) .$$

D'autre part $E(\alpha,\varphi(Z_1,\ldots,Z_m)) = (E\alpha,<\varphi,\mathcal{L}(Z_1,\ldots,Z_m)>)$.

En particulier, $\mathcal{L}(Z_1^k) = E(\alpha_k)$ et le lemme 3.9 permettent d'énoncer la

PROPOSITION 3.13. Les $\underset{\sim}{Z}^k$ $(k \geq 1)$ étant des suites infinies échangeables. $(\mathcal{L}(Z_1^k))_{k\geq 1}$ est tendu dans $\Pi(S)$ si et seulement si $(\mathcal{L}(\Lambda(\underset{\sim}{Z}^k)))_{k\geq 1}$ est tendu dans $\Pi(\Pi(S))$.

COROLLAPRE 3.14. Une probabilité aléatoire α sur S est entièrement déterminée par $\{E(\alpha^{\otimes m})\}_{m\geq 1}$.

DEMONSTRATION. C'est une conséquence directe de 3.5 et 3.12.

PROPOSITION 3.15. Les $\underset{\sim}{Z}^k$ $(k \geq 1)$ étant des suites infinies échangeables. La suite $(\underset{\sim}{Z}^k)_{k\geq 1}$ converge en loi vers $\underset{\sim}{Z}$ si et seulement si la suite $(\Lambda(\underset{\sim}{Z}^k))_{k\geq 1}$ converge en loi vers $\Lambda(\underset{\sim}{Z})$.

DEMONSTRATION. [Kal,Ald]. S est un espace polonais métrisé par d, alors $\Pi(S)$ est un espace polonais métrisé par $\tilde{d}$, où

$$\forall\mu,\nu \in \Pi(S),\ \tilde{d}(\mu,\nu) = \inf\{Ed(X,Y), \mathcal{L}(X) = \mu,\ \mathcal{L}(Y) = \nu\}.$$

On peut montrer plus precisement qu'il existe $g:\Pi(S)\times\Pi(S) \to \Pi(S^2)$ mesurable tel que:

(3.15.1) $\tilde{d}(\mu,\nu) = \int_{S^2} d(x,y)g(\mu,\nu)(dx,dy)$.

Condition suffisante. D'après le théorème de représentation de Skorohod on peut supposer que $\Lambda(\underset{\sim}{Z}^k) = \alpha_k \underset{k\to\infty}{\to} \alpha = \Lambda(\underset{\sim}{Z})$ p.s., alors

(3.15.2) $\tilde{d}(\alpha_k,\alpha) \underset{k\to\infty}{\to} 0$ p.s.

Pour tout k, $(\underset{\sim}{V}^k,\underset{\sim}{W}^k) = ((V_i^k,W_i^k))_{i\geq 1}$ est la suite ∞-échangeable dirigée par $g(\alpha_k,\alpha)$. Alors:

(3.15.3) $\underset{\sim}{V}^k \overset{\mathcal{L}}{=} \underset{\sim}{Z}^k;\ \underset{\sim}{W}^k \overset{\mathcal{L}}{=} \underset{\sim}{Z},\quad \forall k \geq 1$ et

$E(d(V_1^k,W_1^k)|g(\alpha_k,\alpha)) = \tilde{d}(\alpha_k,\alpha)$ (en raison de 3.15.1), donc

(3.15.4) $Ed(V_1^k,W_1^k) \underset{k\to\infty}{\to} 0$ (3.15.2 et convergence dominée).

3.15.3 et 3.15.4 impliquent $\underset{\sim}{Z}^k \underset{k\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} \underset{\sim}{Z}$.

Condition nécessaire: Supposons $\underset{\sim}{Z}^k \underset{k\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} \underset{\sim}{Z}$. $E(\alpha_k) = \mathcal{L}(Z_1^k)$ (3.12) et 3.9 montrent que $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ est tendu. Si $\hat{\alpha}$ est une limite etroite, la condition suffisante implique $\hat{\alpha} \overset{\mathcal{L}}{=} \alpha$. Donc $\alpha_k \underset{k\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} \alpha$. □

CAS 2. $\underset{\sim}{Z}^k$ est une suite N_k-échangeable ($k\geq 1$) et $\lim_{k\to\infty} N_k = +\infty$. Nous dirons que $\underset{\sim}{Z}^k$ tend en loi vers $\underset{\sim}{Z}$ lorsque k tend vers l'infini si 3.10 est vérifie. $\underset{\sim}{Z}$ est alors une suite ∞-échangeable.

LEMME 3.16. Si $\underset{\sim}{Z}$ est N-échangeable alors $\mathcal{L}(Z_1) = E(\Lambda_N(\underset{\sim}{Z}))$.

DEMONSTRATION. $\forall\varphi \in C_b(S)$, $E\varphi(Z_1) = \int_{U_N^*} E(\varphi(Z_1)|\Lambda_N(\underset{\sim}{Z}) = \theta)\mathcal{L}(\Lambda_N(Z))(d\theta)$ (en raison de 3.8). Si $\theta = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{y_i}$ alors $E(\varphi(Z_1)|\Lambda_N(\underset{\sim}{Z}) = \theta) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \varphi(y_i) = \langle\varphi,\theta\rangle$. Donc:

$$\langle\varphi,\mathcal{L}(Z_1)\rangle = E\varphi(Z_1) = \langle\varphi, E(\Lambda_N(\underset{\sim}{Z}))\rangle. \quad \square$$

PROPOSITION 3.17. $\underset{\sim}{Y}$ est N-échangeable.

Si $\underset{\sim}{Z}$ est la suite ∞-échangeable dirigée par $\Lambda_N(\underset{\sim}{Y})$, alors:

$$\forall 1 \leq m \leq N, \quad \|\mathcal{L}(Y_1,\dots,Y_m)-\mathcal{L}(Z_1,\dots,Z_m)\| \leq \frac{m(m-1)}{2N} .$$

DEMONSTRATION. Voir [Ald].

La proposition 3.17 permet d'étendre immédiatement 3.15 au cas 2.

Le lemme 3.16 permet d'étendre immédiatement 3.13 au cas 2. Nous avons le:

THEOREME 3.18. $\underset{\sim}{Z}^k$ est N_k-échangeable ($k \geq 1$) et $N_k \underset{k\to\infty}{\to} +\infty$

(3.18.1) $\{\mathcal{L}(\Lambda_{N_k}(\underset{\sim}{Z}^k))\}_{k\geq 1}$ est tendu dans $\Pi(\Pi(S))$ si et seulement si $\{\mathcal{L}(Z_1^k)\}_{k\geq 1}$ est tendu dans $\Pi(S)$.

(3.18.2) $\underset{\sim}{Z}^k$ tend en loi vers $\underset{\sim}{Z}$ au sens 3.10, lorsque k tend vers l'infini, si et seulement si $\Lambda_{N_k}(\underset{\sim}{Z}^k)$ tend en loi vers $\Lambda(\underset{\sim}{Z})$, dans $\Pi(S)$.

Le lemma 3.19 suivant apparait dans des articles de Sznitman et Tanaka.

LEMME 3.19. Si q_N est la loi d'une suite N-echangeable sur un espace de Borel S alors: $\forall k \in \{1,2,\dots\}$, $\forall f_k \in M_b(S^k)$:

$$\begin{aligned} E_{q_N}(<f_k,\Lambda_N(X^N)^{\otimes k}>) &= <f_k,E_{q_N}(\Lambda_N(X^N)^{\otimes k})> \\ &= <f_k\otimes 1^{\otimes(N-k)},q_N> + O(\tfrac{1}{N}) \end{aligned}$$

DEMONSTRATION. U_N^* est défini en 3.8:

$$(3.19.1)\quad E_{q_N}(\langle f_k, \Lambda_N(\underset{\sim}{X}^N)^{\otimes k}\rangle) = \int_{U_N^*} E_{q_N}(\langle f_k, \Lambda_N(\underset{\sim}{X}^N)^{\otimes k}\rangle \mid \Lambda_N(\underset{\sim}{X}^N)=\theta)\mathcal{L}(\Lambda_N(\underset{\sim}{X}^N))(d\theta)$$

$$= \int_{U_N^*} \langle f_k, \theta^{\otimes k}\rangle \mathcal{L}(\Lambda_N(\underset{\sim}{X}^N))(d\theta)$$

$$= \langle f_k, \int_{U_N^*} \theta^{\otimes k}\mathcal{L}(\Lambda_N(\underset{\sim}{X}^N))(d\theta)\rangle$$

$$(3.19.2)\quad \langle f_k \otimes 1^{\otimes(N-k)}, q_N\rangle = E_{q_N}(f_k(X_1^N,\dots,X_k^N))$$

$$= \int_{U_N^*} E_{q_N}(f_k(X_1^N,\dots,X_k^N) \mid \Lambda_N(\underset{\sim}{X}^N)=\theta)\mathcal{L}(\Lambda_N(\underset{\sim}{X}^N))(d\theta).$$

On note $I_{N,k} = \{(i_1,\dots,i_k) \in \{1,\dots,N\}^k : i_1,\dots,i_k \text{ tous distincts}\}$

$$\# I_{N,k} = A_N^k = N(N-1)\dots(N-k+1).$$

Si $\theta = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{y_i}$, $y_i \in S$ ($\forall i \in \{1,\dots,N\}$), alors

$$\langle f_k, \theta^{\otimes k}\rangle = \frac{1}{N^k}\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\{1,\dots,N\}^k} f_k(y_{i_1},\dots,y_{i_k})$$

et

$$E_{q_N}(f_k(X_1^N,\dots,X_k^N) \mid \Lambda_N(\underset{\sim}{X}^N) = \theta) = \frac{1}{\# I_{N,k}}\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in I_{N,k}} f_k(y_{i_1},\dots,y_{i_k})$$

d'après 3.8. Donc

$$|E_{q_N}(f_k(X_1^N,\dots,X_k^N) \mid \Lambda_N(\underset{\sim}{X}^N)=\theta) - \langle f_k, \theta^{\otimes k}\rangle|$$

$$\leq \frac{1}{N^k}\sum_{\substack{(i_1,\dots,i_k)\in \\ \{1,\dots,N\}^k \setminus I_{N,k}}} |f_k(y_{i_1},\dots,y_{i_k})|$$

$$+ \frac{1}{N^k}\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in I_{N,k}} \left(\frac{N^k}{A_N^k}-1\right)|f_k(y_{i_1},\dots,y_{i_k})|$$

$$2\|f_k\|_\infty \left(1- \frac{A_N^k}{N^k}\right) .$$

Si $k = 1$: $1 - \frac{A_N^k}{N^k} = 0$, $\forall k \geq 2$, $1- \frac{A_N^k}{N^k} = 1- \prod_{j=1}^{k-1} (1- \frac{j}{N}) = O(\frac{1}{N})$. En effet:

$$\ln \prod_{j=1}^{k-1} (1- \frac{j}{N}) = - \frac{k(k-1)}{N} + O(\frac{1}{N^2}) \text{ et } 1-\exp(- \frac{k(k-1)}{N} + O(\frac{1}{N^2})) = O(\frac{1}{N}).$$

Finalement, $\forall N \geq 1$, $\forall k \geq 1$, $E_{q_N}(f_k(X_1^N,\ldots,X_k^N) | \Lambda_N(\underset{\sim}{X}^N)=\theta)$

$= <f_k, \theta^{\otimes k}> + O(\frac{1}{N})$ ce qui avec 3.19.1 et 3.19.2 achève la démonstration. □

II - LE SYSTEME A L'EQUILIBRE

4. LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE $(N \to \infty)$ DE $\rho_N^{\beta,h}$

Dans ce paragraphe $\rho_N^{\beta,h}$ est donné par 2.6 et vérifie 2.5.

NOTATIONS. $\rho_N^{\beta,h}$ est la loi de $\underset{\sim}{X}^N = (X_1^N,\dots,X_N^N)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$

Nous notons

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i^N , \qquad M_N = \frac{S_N}{N} \qquad \text{(magnétisation)}$$

$$s_N = \sum_{i=1}^{N} x_i^N , \qquad m_N = \frac{s_n}{N}$$

M_N a pour loi $\nu_N \in \Pi(\mathbb{R})$

4.a RAPPEL DE CERTAINS RESULTATS DE ELLIS ET NEWMAN ([EN 1])

Les principaux arguments probabilistes permettant la démonstration du théorème 4.5 suivant sont la remarque 4.1 et le lemme 4.2.

REMARQUE 4.1. La loi de S_N est $Z_N(\beta,h)^{-1} \exp[\beta(hs + \frac{J}{2N} s^2)]\alpha^{*N}(ds)$ où $*$ désigne le produit de convolution.

LEMME 4.2. Si W est une variable aléatoire réelle de loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{\beta J})$ indépendante de S_N, pour tout $N \geq 1$, alors, étant donnés γ et m réels

$$(4.2.1) \qquad \frac{W}{N^{\frac{1}{2}-\gamma}} + \frac{S_N - Nm}{N^{1-\gamma}} \quad \text{a pour loi} \quad \frac{\exp[-Ng_{\beta,h}(\frac{s}{N^\gamma} + m)]ds}{\int_{\mathbb{R}} \exp[-Ng_{\beta,h}(\frac{s}{N^\gamma} + m)]ds}, \quad \text{ou}$$

$$(4.2.2) \qquad g_{\beta,h}(t) = \frac{\beta J}{2} t^2 - \ln \varphi[\beta(h+Jt)], \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{et}$$

$$(4.2.3) \qquad \varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(tx)\alpha(dx), \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

DEMONSTRATION. Voir [EN1], Lemme 3.3.

4.2.2 et 4.2.3 ont un sens en raison de la première partie du lemme suivant.

LEMME 4.3. Si α vérifie 2.5 et $g_{\beta,h}$ est defini par 4.2.2 et 4.2.3, alors:

(4.3.1) $g_{\beta,h}$ est analytique réelle

(4.3.2) $\lim_{|t|\to+\infty} g_{\beta,h}(t) = +\infty$

(4.3.3) $g_{\beta,h}$ admet un nombre fini de minima globaux

(4.3.4) $\int_{\mathbb{R}} \exp(-Ng_{\beta,h}(t))dt < +\infty, \quad \forall N \in \{1,2,\dots\}$.

DEMONSTRATION. Voir [EN1], lemme 3.1.

(4.4) NOMENCLATURE. Soient ℓ un entier strictement positif, ℓ réels distincts: $m_1,\dots,m_\ell$ et ℓ entiers strictement positifs $k_1,\dots,k_\ell$, on dit que $(m_1,k_1;\dots;m_\ell,k_\ell)$ *est admissible pour* (α,β,h) si l'ensemble des minima globaux de $g_{\beta,h}$ est $\{m_1,\dots,m_\ell\}$ et si pour tout $i=1,\dots,\ell$: $g_{\beta,h}(t) = g_{\beta,h}(m_i)+\lambda(m_i)[(t-m_i)^{2k_i}/(2k_i)! \;+o((t-m_i)^{2k_i})]$ lorsque $t \to m_i$, ou k_i s'appelle le *type* du minimum m_i.

$\lambda(m_i)$ est un réel strictement positif et s'appelle la force du minimum m_i. (α,β,h) est dit *pur* si $g_{\beta,h}$ admet un unique minimum global. (α,β,h) pur est dit *centré en* m si $g_{\beta,h}$ atteint son minimum en m.

THEOREME 4.5. (4.5.1) Si $(m_1,k_1;\ldots,m_\ell,k_\ell)$ est admissible pour (α,β,h), alors

$$\mathcal{L}(M_N) = \nu_N \xrightarrow[N\to+\infty]{\text{étt}} \nu_\infty = \sum_{i=1}^{\ell} \bar{b}_i\, \delta_{m_i} \quad \text{où}$$

$$\bar{b}_i = \frac{b_i}{\sum_{j=1}^{\ell} b_j} \quad \text{et} \quad b_i = \begin{cases} [\lambda(m_i)]^{-1/2k_i} & \text{si } k_i = \max_j\{k_j\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(4.5.2) Si (α,β,h) est pur et centré en m, (m,k) étant admissible pour (α,β,h) alors

$$\mathcal{L}\left(N^{1/2k}\,\frac{S_N-Nm}{N}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{\text{étt}} \begin{cases} \mathcal{N}(0,\lambda(m)^{-1}-1) & \text{si } k=1 \text{ (alors } \lambda^{-1}-1>0) \\ z^{-1}\exp\left(-\frac{\lambda(m)x^{2k}}{(2k)!}\right) & \text{si } k\geq 2 \end{cases}$$

DEMONSTRATION. [EN1].

4.b. UNE LOI DES GRANDS NOMBRES

Le théorème 4.6 donne la loi de $\Lambda(\underset{\sim}{X})$, où $\underset{\sim}{X}$ est la limite au sens 3.10 des $\underset{\sim}{X}^N$ et $\Lambda(\underset{\sim}{X}) = \lim\text{ étroite}_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}$ est la probabilité aléatoire dirigeante du mélange d'i.i.d. $\underset{\sim}{X}$. (Voir 3.4 et 3.5).

THEOREME 4.6. Si $(m_1,k_1;\ldots;m_\ell,k_\ell)$ est admissible pour (α,β,h) et si $(\ln\varphi)''$ est bornée, alors $\Lambda_N(\underset{\sim}{X}^N) \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{L}} \Lambda(\underset{\sim}{X})$ dans $\Pi(\mathbb{R})$, et

$$\mathcal{L}(\Lambda(\underset{\sim}{X})) = \sum_{i=1}^{\ell} \bar{b}_i\,\delta_{p_i} \quad (\in \Pi(\Pi(\mathbb{R}))) \text{ où } \bar{b}_i \text{ est défini en 4.5.1 et}$$

$$p_i(dx) = \varphi[\beta(Jm_i+h)]^{-1}\exp[\beta(Jm_i+h)x]\alpha(dx).$$

Le reste du paragraphe 4.b est consacré à la démonstration du théorème 4.6. Avant d'effectuer cette démonstration, nous en exposons le plan en 4.7. et nous énonçons le lemme 4.8. Pour démontrer 4.6, nous supposons que 4.8 est vérifié. La démonstration de 4.8, qui utilise les lemmes 4.9, 4.10 et 4.11, est faite à la fin du paragraphe 4.b.

4.7. PLAN GENERAL DE DEMONSTRATION D'UNE CONVERGENCE EN LOI.

Soit Y^N une suite de variables aléatoires, on veut montrer

(4.7.1) $\mathcal{L}(Y_N) \underset{N\to\infty}{\overset{\text{étr}}{\longrightarrow}} \mathcal{L}(Y)$.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\{\mathcal{L}(Y_N), N\geq 1\}$

(4.7.1) $\Leftrightarrow \{\mathcal{L}(Y_N)\}_{N\geq 1}$ est tendu et $\mathcal{A} = \{\mathcal{L}(Y)\}$.

La condition est clairement nécessaire. Elle est aussi suffisante, en effet: Supposons $\mathcal{L}(Y_N) \underset{N\to\infty}{\not\to} \mathcal{L}(Y) \Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0, \forall N, \exists M(N,\varepsilon)$ tel que $M(N,\varepsilon) \geq N$ et $d(\mathcal{L}(Y_{M(N,\varepsilon)}), \mathcal{L}(Y))) \geq \varepsilon$. Mais on peut extraire de $\mathcal{L}(Y_{M(N,\varepsilon)})$ une suite convergente, cette suite converge vers $\mathcal{L}(Y)$ et il y a contradiction. (Nous avons utilisé $d(.,.)$, mais l'argument est topologique). Les démonstrations se feront en trois étapes.

1. TENSION. $\mathcal{L}(Y_N)$ est tendu ($\Rightarrow \mathcal{A} \neq \phi$).

2. IDENTIFICATION de $\mathcal{A}$. Condition nécessaire que tout élément de $\mathcal{A}$ doit verifier: $\mathcal{A} \subset A$

3. UNICITE. A l'aide de 2) on montre que $\# A = 1$. (La condition 2) etait suffisante.)

Notations

$s_k = \sum_{j=1}^{k} x_j$; $Z(\beta,h_{k,N}) = \int_{\mathbb{R}} \exp[\beta(h_{k,N}s + \frac{J}{2N} s^2)]\alpha^{*(N-k)}(ds)$ et

$h_{k,N} = h + J(s_k/N)$.

LEMME 4.8

$$(4.8.1) \qquad Z_N(\beta,h)^{-1}Z(\beta,h_{k,N}) = \sum_{i=1}^{\ell} \bar{b}_i\varphi[\beta(h+Jm_i)]^{-k}\exp(\beta Jm_i s_k)+o_N \quad (1)$$

$$(4.8.2) \qquad \exists a,b,c \in \mathbb{R} \text{ tels que } \forall s_k \in \mathbb{R}, \quad \forall N \in \{1,2,\ldots\},$$

$$Z_N(\beta,h)^{-1}Z(\beta,h_{k,N}) \leq \exp(a|s_k|+bs_k^2+c) .$$

DEMONSTRATION de 4.8: Voir plus loin.

DEMONSTRATION du théorème 4.6:

On suppose que 4.8 est vérifié. Nous suivons le plan de démonstration exposé en 4.7.

TENSION. Nous allons utiliser le critère de tension suivant:

Soit Λ une famille de probabilités absolument continues par rapport à une même μ. Soit $\Phi:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\phi(x)}{x} = +\infty$. Alors si $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda} \int\Phi(\frac{d\lambda}{d\mu})d\mu < +\infty$, Λ est relativement compacte. D'après le theoreme 3.18, il nous suffit de verifier le critère precedent pour la famille de probabilites $\{X_1^N\circ\rho_N\}_{N\geq 1}$: $\forall N \geq 1$, $X_1^N\circ\rho_N \ll \alpha$ et

$$\frac{d(X_1^N\circ\rho_N)}{d\alpha}(x_1) = Z_N(\beta,h)^{-1}Z(\beta,h_{1,N})\exp[\beta(hx_1+\frac{J}{2N}x_1^2)].$$ Prenons

$\Phi(x) = x\ln(x) \vee 0$, Φ est croissante.

Une consequence de 4.8.2 est:

$$\exists a,b,c > 0, \quad \forall N \geq 1, \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}, \quad \frac{d(X_1^N\circ\rho_N)}{d\alpha}(x_1) \leq \exp(a|x_1|+bx_1^2+c) .$$

Comme Φ est croissante:

$$\forall N \geq 1, \quad \int_{\mathbb{R}} \Phi(\frac{d(X_1^N\circ\rho_N)}{d\alpha}(x_1))\alpha(dx_1) \leq \int_{\mathbb{R}}(a|x_1|+bx_1^2+c)\exp(a|x_1|+b(x_1^2)+c)\alpha(dx_1)$$

$$< +\infty \quad \text{(d'apres l'hypothese 2.5).}$$

Par conséquent $\{\mathcal{L}(\underset{\sim}{X}^N)\}_{N\geq 1}$ est relativement compact dans $\Pi(\Pi(\mathbb{R}))$.

IDENTIFICATION.

(4.6.1) $\forall k \in \{1,2,\dots\}$, $\forall f_k \in B_b(R^k)$:

$$\lim_{N\to+\infty} \langle f_k \otimes 1^{\otimes(N-k)}, \rho_N\rangle = \langle f_k, \sum_{i=1}^{\ell} \bar{b}_i p_i^{\otimes k}\rangle.$$

En effet:

$$\langle f_k \otimes 1^{\otimes(N-k)}, \rho_N\rangle = \int_{\mathbb{R}^k} Z_N(\beta,h)^{-1} Z(\beta,h_{k,N}) \exp[\beta(hs_k + \frac{J}{2N} s_k^2)] f_k(x_1,\dots,x_k) \prod_{j=1}^{k} \alpha(dx_j)$$

4.6.1 est alors une conséquence de 4.8 et du théorème de convergence dominée.

Nous avons montré que $\{\mathcal{L}(\Lambda_N(\underset{\sim}{X}^N))\}_{N\geq 1}$ est tendu. Soit μ une valeur d'adhérence quelconque de cette suite et $\{\mathcal{L}(\Lambda_{N_m}(\underset{\sim}{X}^{N_m}))\}_{m\geq 1}$ une suite extraite de limite μ. Alors, d'apres 4.6.1 et le lemme 3.19:

$$\forall k \in \{1,2,\dots\},\quad \forall f_k \in B_b(R^k),\ \langle f_k, \int_{\Pi(\mathbb{R})} \theta^{\otimes k} \mu(d\theta)\rangle = \langle f_k, \sum_{i=1}^{\ell} \bar{b}_i p_i^{\otimes k}\rangle.$$

Soit: toute valeur d'adhérence de $\{\mathcal{L}(\Lambda_N(\underset{\sim}{X}^N))\}_{N\geq 1}$: μ, vérifie

$$(4.6.2)\quad \forall k \in \{1,2,\dots\},\quad \int_{\Pi(\mathbb{R})} \theta^{\otimes k} \mu(d\theta) = \sum_{i=1}^{\ell} \bar{b}_i p_i^{\otimes k}.$$

UNICITE. Le corollaire 3.14 nous dit que μ est déterminé de manière unique par 4.6.2) On vérifie que $\mu = \sum_{i=1}^{\ell} \bar{b}_i \delta_{p_i}$ est solution de 4.6.2. Ce qui acheve la demonstration du théorème 4.6. $\square$

LEMME 4.9. Il existe $\delta > 0$ suffisamment petit tel que, pour tout i de $\{1,\dots,\ell\}$ lorsque N tend vers l'infini, $\forall t$, $|t| < \delta N^{1/2k_i}$

$$(4.9.1) \quad N\left(g\left(\frac{t}{N^{1/2k_i}}+m_i\right)-g(m_i)\right) = \lambda(m_i)\frac{t^{2k_i}}{(2k_i)!} + O_{N\to\infty}\left(\frac{|t|^{2k_i+1}}{N^{-1/2k_i}}\right) + o_{N\to\infty}(1)P_1(t)$$

$$(4.9.2) \quad N\left(g\left(\frac{t}{N^{1/2k_i}}+m_i\right)-g(m_i)\right) \geq \frac{1}{2}\frac{\lambda(m_i)}{(2k_i)!}t^{2k_i} + P_2(t)$$

où P_1 et P_2 sont des polynômes de degrés respectifs $2k_i$ et $2k_i-1$.

DEMONSTRATION. Facile. Voir [EN1] □

LEMME 4.10.

On pose $\gamma = \inf\limits_t g(t) = g(m_i)$,

$\forall i \in \{1,\dots,\ell\}$; et $V = \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\ell}]m_i-\delta,m_i+\delta[$, $\inf\limits_{t\in V} g(t) = \gamma+\varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$

$\{f_N\}$ est une suite de fonctions.

Si : (4.10.1) $\sup\limits_N \int_{\mathbb{R}} \exp(-g(t))|f_N(t)|dt < +\infty$,

Alors: (4.10.2) $\exp(N\gamma)\int_V \exp(-Ng(t))f_N(t)dt = O_{N\to+\infty}(\exp(-N\varepsilon))$.

Si (4.10.3): les f_N sont continues et $f_N \underset{N\to\infty}{\to} f$ uniformément sur tout compact et si (4.10.4): il existe F, tel que

$\forall N$, $\forall t$, $\left|f_N\left(\frac{t}{N^{1/2k}}+m\right)\right| \leq F(t)$ et $\int_{\mathbb{R}} F(t)\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\lambda(m)}{(2k)!}t^{2k}+P_2(t)\right]dt < +\infty$.

Alors: (4.10.5) $N^{1/2k}\exp(N\gamma)\int_{m-\delta}^{m+\delta}\exp(-Ng(t))f_N(t)dt$

$$= f(m)\lambda(m)^{-1/2k}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{t^{2k}}{(2k)!}\right)dt + o_{N\to\infty}(1) .$$

DEMONSTRATION: a) 4.10.1 $\Rightarrow$ 4.10.2

$$|\exp(N\gamma)\int_V \exp(-Ng(t))f_N(t)dt| \le \exp(N\gamma)\exp[-(N-1)(\gamma+\varepsilon)]\int_V \exp(-g(t))|f_N(t)|dt$$

$$\le \exp(-N\varepsilon)\exp(\gamma+\varepsilon)\int_{\mathbb{R}}\exp(-g(t))|f_N(t)|dt,$$

b) (4.10.3 & 4.10.4) $\Longrightarrow$ 4.10.5

Pour tout i de $\{1,\ldots,\ell\}$ (on omettra l'indice i)

$$N^{1/2k}\, a\exp(N\gamma)\int_{m-\delta}^{m+\delta}\exp(-Ng(t))f_N(t)dt =$$

$$= N^{1/2k}\int_{-\delta}^{\delta}\exp\{-N[g(t+m)-g(m)]\}f_N(t+m)dt$$

$$\int_{|t|<\delta N^{1/2k}}\exp\{-N[g(\frac{t}{N^{1/2k}}+m)-g(m)]\}f_N(\frac{t}{N^{1/2k}}+m)dt$$

Alors 4.9.2 et 4.10.4 nous permettent d'appliquer le théorème de convergence dominée et avec 4.9.1 et 4.10.3 nous obtenons 4.10.5 $\square$

LEMME 4.11 Posons $m = \int x\,\alpha(dx)$. Si α est non degenerée ($\alpha \neq \delta_m$), alors

(4.11.1) $\varphi(t)^{-1} = o_{t\to\pm\infty}(\exp(-mt))$, $\forall m$;

si $m=0$, $\exists a > 0$, $\varphi(t)^{-1} = o_{t\to\pm\infty}(\exp(-a|t|))$. Si de plus α vérifie 2.5, alors

(4.11.2) $(\ln\varphi)'(t) = O_{t\to\pm\infty}(\frac{t}{y})$, $\forall y > 0$.

REMARQUE Si 2.5 est affaiblie et seulement 4.11.3 est vérifié

(4.11.3) $\exists\bar{y} > 0$, $\forall y \le \bar{y}$, $\int_{\mathbb{R}}\exp(yx^2)\alpha(dx) < +\infty$.

Alors 4.11.2 est vrai avec $y \le \bar{y}$.

DEMONSTRATION. Notons $\bar{\alpha}^m(dx) = \alpha(dx+m)$ de sorte que $\int x\bar{\alpha}^m(dx) = 0$, $\varphi_\alpha(t) = \exp(tm)\varphi_{\bar{\alpha}^m}(t)$ et $(\ln\varphi_\alpha)(t) = mt+(\ln\varphi_{\bar{\alpha}^m})(t)$ (4.11.4). Puisque α n'est pas dégeneree $\bar{\alpha}^m$ charge un borélien de $\mathbb{R}^+$ et de $\mathbb{R}^-$.

On en déduit 4.11.1.

Pour démontrer 4.11.2, en raison de 4.11.4, il suffit de considérer m=0.

$$(\ln\varphi)'(t) = \frac{\int x\exp(tx)\alpha(dx)}{\varphi(t)} \le \frac{\int_{[-\theta(t),\theta(t)]} x\exp(tx)\alpha(dx)}{\int_{[-\theta(t),\theta(t)]} \exp(tx)\alpha(dx)} + \frac{\int_{[-\theta(t),\theta(t)]^c} x\exp(tx)\alpha(dx)}{\varphi(t)}$$

(si $t \ge 1$ et $\theta(t) > 0$)

$$\le \theta(t) + \frac{\int_{-\infty}^{-\theta(t)} |x|\exp(x)\alpha(dx)}{\varphi(t)} + \frac{\int_{\theta(t)}^{+\infty} x\exp(tx-\frac{y}{2}x^2)\exp(\frac{yx^2}{2})\alpha(dx)}{\varphi(t)}$$

or $\int_{\theta(t)}^{+\infty} x\exp(-tx-\frac{y}{2}x^2)\exp(\frac{yx^2}{2})\alpha(dx) \le \sup_{x\ge\theta(t)} (x\exp(tx-\frac{y}{2}x^2)) \int_{\theta(t)}^{+\infty} \exp(\frac{yx^2}{2})\alpha(dx)$.

Nous choisissons $\theta(t)$ tel que, $\theta(t) > 0$ et $\sup_{x\ge\theta(t)} (x\exp(tx-\frac{y}{2}x^2)) = \theta(t)\exp(t\theta(t)-\frac{y}{2}\theta(t)^2)$. Soit $\theta(t) = \frac{t}{2y}(1+(1+\frac{4y}{t^2})^{1/2})$ et

$$\frac{\int_{\theta(t)}^{+\infty} x\exp(tx)\alpha(dx)}{\varphi(t)} \le \frac{\theta(t)}{\varphi(t)} \exp(t\theta(t)-y\theta(t)^2) \int_{\theta(t)}^{+\infty} \exp(yx^2)\alpha(dx) = \theta(t) \quad \text{car}$$

$t\theta(t)-y\theta(t)^2 < 0$, $\varphi(t)^{-1}$ a une décroissance exponentielle (4.11.1) α vérifie 2.5.

Finalement $(\ln\varphi)'(t) = O(\frac{t}{y})$ lorsque $t \to +\infty$. La démonstration est identique lorsque $t \to -\infty$. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le lemme 4.8

DEMONSTRATION du lemme 4.8 :

Par un calcul analogue à celui de 4.2.1, on obtient

$$Z(\beta,h_{k,N}) = \left(\frac{\beta JN}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{\mathbb{R}} \exp[-(N-k)\tilde{g}_{k,N}(t)]dt \quad \text{avec}$$

$$\tilde{g}_{k,N}(t) = \frac{N}{N-k}\,\frac{\beta J}{2}\,t^2 + \ln\varphi[\beta(h_{k,N}+Jt)] \qquad \text{donc:}$$

$$Z_N(\beta,h)^{-1}Z(\beta,h_{k,N}) = \frac{\int_{\mathbb{R}}\exp[Ng(t)-(N-k)\tilde{g}_{k,N}(t)]\exp(-Ng(t))dt}{\int_{\mathbb{R}}\exp(-Ng(t))dt} \quad ; \text{ or}$$

$$Ng(t)-(N-k)\tilde{g}_{k,N}(t) = -N\ln\varphi[\beta(h+Jt)]+(n-k)\ln\varphi[\beta(h+Jt)+ J\,\frac{s_k}{N}] =$$

$$\frac{\ln\varphi[\beta(h+Jt)+\beta J\frac{s_k}{N}]-\ln\varphi[\beta(h+Jt)]}{\beta J\, s_k/N}\,\beta Js_k - k\ln\varphi[\beta(h+Jt)+\frac{\beta Js_k}{N}] \qquad \text{donc}$$

(4.8.1) $\quad Z_N(\beta,h)^{-1}Z(\beta,h_{k,N})$

$$= \frac{\int_{\mathbb{R}}\varphi[\beta(h+Jt)]^{-k}\exp\{\beta Js_k(\ln\varphi)'[\beta(h+Jt)]\}\psi_N(s_k,t)\exp(-Ng(t))dt}{\int_{\mathbb{R}}\exp(-Ng(t))dt}$$

$$\text{ou}\quad \psi_N(s_k,t) = \exp\{\frac{1}{N}(\beta Js_k)^2\int_0^1 d\theta_1\int_0^{\theta_1} d\theta_2\,(\ln\varphi)''[\beta(h+Jt)+\theta_2\beta J\frac{s_k}{N}]$$
$$+ \frac{1}{N}\beta Js_k\int_0^1 d\theta(\ln\varphi)'[\beta(h+Jt)+\theta\beta J\frac{s_k}{N}]\} \;.$$

Notons $\bar{k} = \max_{i\in\{1,\dots,\ell\}}\{k_i\}$ et $h(s_k,t) = \varphi[\beta(h+Jt)]^{-k}\exp\{\beta Js_k(\ln\varphi)'[\beta(h+Jt)]\}$

4.8.1 s'écrit:

$$(4.8.3)\qquad Z_N^{-1}(\beta,h)Z(\beta,h_{k,N})$$

$$= \frac{\exp(N\gamma)[N^{\frac{1}{2\bar{k}}}\int_V h(s_k,t)\psi_N(s_k,t)\exp(-Ng(t))dt + \sum_{i=1}^{\ell} N^{(\frac{1}{2\bar{k}}-\frac{1}{2k_i})} N^{\frac{1}{2k_i}} \int_{m_i-\delta}^{m_i+\delta} h(s_k,t)\psi_N(s_k,t)\exp(-Ng(t)dt]}{\exp(N\gamma)[N^{\frac{1}{2\bar{k}}}\int_V \exp(-Ng(t))dt + \sum_{i=1}^{\ell} N^{(\frac{1}{2\bar{k}}-\frac{1}{2k_i})} N^{\frac{1}{2k_i}} \int_{m_i-\delta}^{m_i+\delta} \exp(-Ng(t)dt]}$$

La limite du dénominateur de 4.8.3

Dans ce cas $f_N = 1$ pour tout N, 4.10.1, 4.10.3, et 4.10.4 clairement vérifiés et:

$$(4.8.4)\qquad \exp(N\gamma)N^{\frac{1}{2\bar{k}}} \int_R \exp(-Ng(t)dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{t^{2\bar{k}}}{(2\bar{k})}\right)dt \sum_{\substack{1\le i\le \ell \\ k_i=\bar{k}}} \lambda(m_i)^{-\frac{1}{2\bar{k}}} + o_{N\to\infty}(1)\ .$$

La limite du numérateur de 4.8.3.

Nous allons maintenant vérifier les conditions 4.10.1, 4.10.3 et 4.10.4 lorsque

$$f_N(t) = h(s_k,t)\psi_N(s_k,t).$$

Une conséquence de 4.11.1 est:

(4.8.5) $\exists a_1, b_1 \geq 0,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi[\beta(h+Jt)]^{-k} \leq \exp(a_1+b_1|t|)$.

Une conséquence de 4.11.2 est:

$$\exists a_2 \geq 0,\ \forall b>0,\ \forall t \in \mathbb{R},\ |(\ln\varphi)'(t)| \leq a_2+b|t| \quad \text{donc}$$

(4.8.6) $\exists a_3 \geq 0,\ \forall b > 0,\ \forall t,\ s_k \in \mathbb{R},$

$$\exp\{\beta J s_k(\ln\varphi)'[\beta(h+Jt)]\} \leq \exp(a_3|s_k|+b|s_k||t|).$$

De même, $\forall b > 0,\ \forall t,\ s_k \in \mathbb{R},\ \forall N,$

$$\left|\frac{1}{N}\beta J s_k \int_0^1 d\theta(\ln\varphi)'[\beta(h+Jt)+\theta\beta J\frac{s_k}{N}]\right| \leq a_2\beta J\frac{|s_k|}{N} + 2b|\beta(h+Jt)|\beta J\frac{|s_k|}{N} + b(\beta J)^2\frac{s_k^2}{N^2}$$

qui avec l'hypothèse $(0\leq)\ \sup_t (\ln\varphi)''(t) < +\infty$ donne:

(4.8.7) $\exists a_4, b_4 \geq 0,\ \forall b > 0,\ \forall t,\ s_k \in R,\ \forall N \in \{1,2,\dots\},$

$$\psi_N(s_k,t) \leq \exp(a_4\frac{|s_k|}{N} + b_4\frac{s_k^2}{N} + b\frac{|s_k|}{N}|t|) .$$

VERIFICATION DE 4.10.1

$$\int_R \exp(-g(t))\ |h(s_k,t)\psi_N(s_k,t)|dt$$

$$= \int_R \varphi[\beta(h+Jt)]^{-(k-1)}\exp\{\beta J s_k(\ln\varphi')[\beta(h+Jt)]\}\exp(-\frac{\beta J t^2}{2})dt$$

4.8.6, 4.8.5 et 2.5 prouvent 4.10.1 pour tout s_k.

VERIFICATION DE 4.10.3 Evident, avec pour tout s_k :
$h(s_k,t)\psi_N(s_k,t) \underset{N\to\infty}{\to} h(s_k,t)$ uniformément sur tout compact, en t.

VERIFICATION DE 4.10.4. C'est une conséquence de 4.8.4, 4.8.5 et 4,8.7.

Nous venons de prouver:

$$(4.8.8) \quad \forall s_k \in \mathbb{R}, \quad \exp(N\gamma)N^{\frac{1}{2\overline{k}}}\int_{\mathbb{R}} h(s_k,t)\psi_N(s_k,t)\exp(-Ng(t))dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{t^{2\overline{k}}}{2\overline{k}\,!}\right)dt \sum_{\substack{1\le i\le \ell \\ k_i=\overline{k}}} \lambda(m_i)^{-\frac{1}{2\overline{k}}} h(s_k,m_i)+o_{N\to\infty}(1)$$

De plus: $\forall N \in \{1,2,\dots\}$, $\forall b > 0$, $\forall s_k \in \mathbb{R}$:

$$0 \le h(s_k,t)\psi_N(s_k,t) \le \exp\left(a_3|s_k|+a_4\frac{|s_k|}{N} + b_4\frac{s_k^2}{N}\right)\varphi[\beta(h+Jt)]^{-k}\exp(b|s_k||t|)$$

et $|s_k||t| \le \frac{1}{2}(s_k^2+t^2)$, donc:

$\exists a_5,b_5 \ge 0$, $\forall N \in \{1,2,\dots\}$, $\forall b > 0$, $\forall s_k \in \mathbb{R}$,

$$\left|\exp(N\gamma)N^{\frac{1}{2\overline{k}}}\int h(s_k,t)\psi_N(s_k,t)\exp(-Ng(t))dt\right|$$

$$\le \exp(a_5|s_k|+b_5 s_k^2)\exp(N\gamma)N^{\frac{1}{2\overline{k}}}\int\varphi[(h+Jt)]^{-k}\exp(bt^2)\exp(-Ng(t))dt.$$

Il est possible de choisir b suffisamment petit pour que
$\exp(N\gamma)N^{\frac{1}{2\overline{k}}}\int\varphi[\beta(h+Jt)]^{-k}\exp(bt^2)\exp(-Ng(t))dt$ ait une limite (on vérifie à nouveau 4.10.1 et 4.10.4), donc:

(4.8.9) $\exists a_5, b_5, c_5 \in \mathbb{R}, \quad \forall N \in \{1,2,\dots\}, \quad \forall s_k \in \mathbb{R},$

$$\left| \exp(N\gamma) N^{\frac{1}{2k}} \int h(s_k,t)\psi_N(s_k,t)\exp(-Ng(t))dt \right| \leq \exp(a_5|s_k|+b_5 s_k^2+c_5).$$

4.8.1 est une conséquence de 4.8.4, 4.8.3 et 4.8.8

et du fait que $g'(m_i) = 0 \Leftrightarrow (\ln\varphi)'[\beta(h+Jm_i)] = m_i$.

4.3.2 est une consequence de 4.8.1, 4.8.4 et 4.8.9 □

4.c QUELQUES LIMITES DE FONCTIONS THERMODYNAMIQUES

NOTATIONS. Si $(m_1,k_1;\ldots;m_\ell,k_\ell)$ est admissible pour $(\alpha,\beta,,h)$, on note:

(4.13) $\mathcal{M}(\beta,h) = \{m_i,\ i\in\{1,\ldots,\ell\}:\bar{b}_i>0\}$

et $\bar{b}_{\beta,h}(m_i) = \bar{b}_i,\quad \forall m_i \in \mathcal{M}(\beta,h).$

On note L(f): la transformée de Lengendre de f.

THEOREME ET DEFINITION 4.14. Les limites suivantes existent:

$\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\langle H_N,\rho_N^{\beta,h}\rangle \equiv U(\beta,h)$: énergie interne

$\lim\limits_{N\to+\infty} -\frac{\ln[Z_N(\beta,h)]}{N\beta} \equiv F(\beta,h)$: énergie libre

$\lim\limits_{N\to+\infty} -\frac{1}{N}\, k\langle \ln(\frac{d\rho_N^{\beta,h}}{d\alpha^{\otimes N}}),\rho_N^{\beta,h}\rangle \equiv S(\beta,h)$: entropie

$\lim\limits_{N\to+\infty} \langle M_N,\rho_N^{\beta,h}\rangle \equiv M(\beta,h)$: magnétisation .

De plus:

(4.14.1) $U(\beta,h) = -\sum\limits_{m\in\mathcal{M}(\beta,h)} \bar{b}_{\beta,h}(m)(hm+\frac{J}{2}m^2)$

(4.14.2) $F(\beta,h) = \frac{1}{\beta}\inf\limits_{t} g_{\beta,h}(t) = \frac{1}{\beta} g_{\beta,h}(m) \quad (\forall m \in \mathcal{M}(\beta,h))$

$h \to F(\beta,h)$ est convexe.

(4.14.3) $F(\beta,h) = U(\beta,h)-TS(\beta,h)$

(4.14.4) $M(\beta,h) = \sum\limits_{m\in\mathcal{M}(\beta,h)} m\, \bar{b}_{\beta,h}(m)$.

DEMONSTRATION.

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\langle H_N, \rho_N^{\beta,h}\rangle = \lim_{N\to+\infty} \int -(hm+\frac{J}{2}m^2)\nu_N^{\beta,h}(dm) .$$

On obtient 4.14.1 à l'aide du théorème de convergence dominée

$$-\frac{\ln(Z_N(\beta,h))}{N\beta} = -\frac{1}{2\beta N}\ln(\frac{\beta JN}{2\pi}) - \frac{\ln\int_{\mathbb{R}} \exp[-N_{q_{\beta,h}}(t)]dt}{N\beta}$$

Une limite simple de fonctions convexes est convexe. On en deduit 4.14.2.

$$\lim_{N\to+\infty} -\frac{1}{N} k\langle \ln(\frac{d\rho_N^{\beta,h}}{d\alpha^{\otimes N}}), \rho_N^{\beta,h} \rangle = \lim_{N\to+\infty} \langle -\beta k(hm_N + \frac{J}{2}m_N^2 + \frac{k\ln Z_N(\beta,h)}{N}, \rho_N^{,h}\rangle$$

$$= \beta k[U(\beta,h)-TS(\beta,h)]$$

Ce qui prouve 4.14.3

$$\lim_{N\to+\infty} \langle M_N, \rho_N^{\beta,h}\rangle = \lim_{N\to+\infty} \langle x, \nu_N^{\beta,h}\rangle$$

4.14.4 s'obtient sans modification de la démonstration du théorème 4.5, en vérifiant qu'on peut appliquer le théorème de convergence dominée. □

PROPOSITION 4.15.

(4.15.1) $F(\beta,h) = \inf_t V_{\beta,h}(t)$ avec $V_{\beta,h}(t) = -ht - \frac{Jt^2}{2} + \frac{\phi(t)}{\beta}$

où $\phi = L(\ln\varphi)$ est la transformee de Cramer de α. 4.15.1 s'ecrit aussi

(4.15.2) $F(\beta,h) = -L(V_{\beta,0})(h)$

(4.15.3) $F_{h_0}(\beta,h) \equiv F(\beta,h_0+h) = -L(V_{\beta,h_0})(h)$.

DEMONSTRATION. C'est une consequence du lemme 4.16 suivant en prenant dans ce lemme $g(t) = \frac{Jt^2}{2}$ et $f(t) = \frac{1}{\beta}\ln\varphi\,[\beta(h+Jt)]$. $\square$

LEMME 4.16. Si f est convexe, $F = L(f)$ et $G = L(g)$ alors

$$\inf_x (g(x)-f(x)) = \inf_x (F(x)-G(x))$$

DEMONSTRATION.

$$\begin{aligned}\inf_x (F(x)-G(x)) &= \inf_x [F(x)-\sup_y (xy-g(y))] \\ &= \inf_x [F(x)+\inf_y (g(y)-xy)] \\ &= \inf_y [g(y)+\inf_x (F(x)-xy)] \\ &= \inf_y (g(y)-f(y)) \,. \qquad \square\end{aligned}$$

4.17. UNE REMARQUE SUR LA FONCTION $V_{\beta,h}$. $V_{\beta,h}(t) = u(t)-T(-k\phi(t))$ où k est la constante de Boltzmann, $u(t) = -h.t-\frac{Jt^2}{2}$ est l'energie interne pour la magnetisation t et $-k\phi(t)$ a la dimension d'une entropie. $V_{\beta,h}(t)$ est l'*énergie libre pour la magnétisation* t. $+k\phi(t)$ "mesure la difficulte" qu'a la magnetisation t pour s'eloigner de $m = \int x\alpha(dx)$. En particulier $t \to k\phi(t)$ est minimal en $t=m$ et $k\phi(m) = 0$.

Plus precisement, si $(Z_i)_{i\geq 1}$ est i.i.d. (α), alors pour tout $\Delta > 0$:

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\ln[P(\frac{\sum_{i=1}^{N} Z_i}{N} > m+\Delta)] = -\phi(m+\Delta); \quad \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \ln[P(\frac{\sum_{i=1}^{N} Z_i}{N} < m-\Delta)] = -\phi(m-\Delta)$$

avec $\phi(m) = 0$, et:

$$\begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ \Lambda \mapsto -\phi(m+\Lambda) \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ \Delta \mapsto -\phi(m-\Delta) \end{cases}$$

sont des fonctions negatives decroissantes.

PROPOSITION 4.18. Pour tout h admettant un voisinage sur lequel $F(\beta,.)$ est derivable:

(4.18.1) $M(\beta,h) = -\frac{\partial}{\partial h} F(\beta,h)$.

DEMONSTRATION. $\langle M_N, \rho_N^{\beta,h} \rangle = \frac{1}{N\beta} \frac{\partial}{\partial h} \ln Z_N(\beta,h)$.

4.18 est une conséquence du theorème d'analyse convexe suivant. □

THEOREME 4.19. Soit C un convexe, f une fonction convexe finie, différentiable sur C. $\{f_n, n \geq 1\}$ est une suite de fonctions convexes, finies, differentiables sur C, telle que: $\forall x \in C$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$, $\forall x \in C$, et cette convergence est uniforme sur tout compact.

DEMONSTRATION. Voir [Roc].

5. MULTIPLICITE DE PHASES; GRANDES DEVIATIONS

5.a MULTIPLICITE DE PHASES

DEFINITION 5.1. On dit qu'il y a multiplicité de phases sous le champ h_0 et à la température β si le cardinal de $\mathcal{M}(\beta,h_0)$ (voir 4.13) est strictement superieur à 1.

LEMME 5.2. $V_{\beta,h}$ a le même nombre de minima locaux que $g_{\beta,h}$.

DEMONSTRATION. $V'_{\beta,h}(t) = 0 \Leftrightarrow \beta(h+Jt) = \phi'(t) \Leftrightarrow g'_{\beta,h}(t) = 0$ car $\phi' = (\ln\varphi)'^{-1}$, et $g'_{\beta,h}(t) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq (\ln\varphi)'[\beta(h+Jt)] \Leftrightarrow$ $\phi'(t) \geq \beta(h+Jt)$ car de plus ϕ' est croissante. □

Le théorème 5.3 suivant permet de faire le bien entre la définition 5.1 et celle donnée en 1.34.

THEOREME 5.3. Il y a multiplicité de phases sous le champ h_0 et à la temperature β si et seulement si $F(\beta,.)$ n'est pas derivable en h_0.

DEMONSTRATION. C'est une conséquence du lemme 5.2 et 4.15.3. En effet, V_{β,h_0} admet plusieurs minima locaux si et seulement si elle differe de sa convexifiée $\widehat{V_{\beta,h_0}}$ qui admet une partie affine de pente nulle. Or $F_{h_0}(\beta,h) = F(\beta,h_0+h) = -L(V_{\beta,h_0})(h) = -L(\widehat{V_{\beta,h_0}})(h)$. Il y a donc multiplicité de phases si et seulement si $F_{h_0}(\beta,.)$ n'est pas derivable en h=0. □

La proposition 5.4 suivante, precise la proposition 4.18 et le theorème 5.3. Rappelons qu'une fonction convexe admet toujours une derivee à droite et a gauche.

PROPOSITION 5.4. $\operatorname{Max} \mathcal{M}(\beta,h) = \frac{\partial^+ F}{\partial h}(\beta,h)$ (derivée à droite)

$\operatorname{Min} \mathcal{M}(\beta,h) = \frac{\partial^- F}{\partial h}(\beta,h)$ (dérivee à gauche)

DEMONSTRATION. C'est une conséquence de 5.2 et de 4.15.3. □

THEOREME 5.5. α verifie 2.5 et est non-degeneree. On note $m = \int_{\mathbb{R}} x\alpha(dx)$, $\bar{\alpha}$ la probabilite definie par: $\bar{\alpha}(dx) = \alpha(dx+m)$, $(\forall dx \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $\operatorname{Var}(\alpha) = \int x^2\alpha(dx) - m^2$. Si $\beta J > \frac{1}{\operatorname{Var}(\alpha)}$, il existe un champ $h(\beta)$ sous lequel il y a multiplicité de phases.

Si de plus $\bar{\alpha}$ est symetrique, le champ $h(\beta) = -mJ$ convient.

DEMONSTRATION. Les extrema locaux de $g_{\beta,h}$ sont donnés par l'equation $g'_{\beta,h}(t) = 0 \Leftrightarrow t = (\ln\varphi_\alpha)'[\beta(h+Jt)] \Leftrightarrow$ $t-m = (\ln\varphi_{\bar{\alpha}})'[\beta(h+Jt)]$. Prenons $h = h_\alpha = -mJ$ et posons $u = t-m$, alors

$$(5.5.1) \qquad g'_{\beta,h_\alpha}(t) = 0 \Leftrightarrow u = (\ln\varphi_{\bar{\alpha}})'(\beta Ju)$$

$u=0$ est toujours solution car $\int x\bar{\alpha}(dx) = 0$. Compte tenu de 4.11.2, 5.5.1 admettra des racines autres que $u=0$, si

$$\frac{d}{du}(\ln\varphi_\alpha)'(\beta Ju)\Big|_{u=0} > 1 \Leftrightarrow \beta J \operatorname{Var}(\alpha) > 1.$$

Remarquons que la plus petite racine > 0 et la plus grande < 0 correspondent à des minima locaux de g_{β,h_α}. Le lemme 5.2 nous permet alors d'énoncer que $V_{\beta,h}$ admet au moins deux minima locaux si $\beta J > \frac{1}{\operatorname{Var}(\alpha)}$, donc:

$$(5.5.2) \qquad V_{\beta,h_\alpha} \text{ diffère de sa convexifiée } \widehat{V_{\beta,h_\alpha}}, \text{ si } \beta J > \frac{1}{\operatorname{Var}\alpha}.$$

Nous allons montrer maintenant qu'il existe un point en lequel $F(\beta,.)$ n'est pas derivable.

D'apres 4.15.3, $F(\beta,h) = F_{h_\alpha}(\beta,h-h_\alpha) = -L(\widehat{V_{\beta,h_\alpha}})(h-h_\alpha)$.

D'apres 5.5.2, $\widehat{V_{\beta,h_\alpha}}$ admet au moins une partie linéaire, soit h_1 sa pente. Alors F_{h_α} n'est pas dérivable en h_1, ce qui equivaut a: F n'est pas dérivable en $h = h_1+h_\alpha$. Ce qui demontre la premiere partie de 5.5.

Si $\bar{\alpha}$ est symetrique, $V_{\beta,h_\alpha}(m+.)$ est une fonction paire. En effet $\phi_\alpha(t) = \phi_{\bar{\alpha}}(t-m)$ et $\phi_{\bar{\alpha}}$ est paire. Or

$$V_{\beta,h_\alpha}(t) = mJt - \frac{Jt^2}{2} + \frac{\phi_{\bar{\alpha}}(t-m)}{\beta} = -\frac{J}{2}(t-m)^2 + \frac{1}{\beta}\phi_{\bar{\alpha}}(t-m) + \frac{Jm^2}{2}$$

donc $V_{\beta,h}$ admet au moins deux minima globaux si $\beta J > \frac{1}{\mathrm{Var}(\alpha)}$, et elle differe de sa convexifiée qui admet une partie lineaire de pente $h_1 = 0$. □

Il existe une classe de probabilités α, pour laquelle nous avons un résultat plus precis que celui du theoréme 5.5, ce sont les probabilités vérifiant l'inegalite G.H.S. (Griffiths, Hurst, Sherman). Ellis et Newman ont montre dans un cadre beaucoup plus général le theoréme suivant.

THEOREME 5.6. Inégalité G.H.S., hypothèses simplifiées. Soit α une probabilite symétrique sur $\mathbb{R}$, verifiant 5.6.1 ou bien 5.6.2

(5.6.1) $\alpha = \frac{1}{2}(\delta_{-y}+\delta_{+y})$, $(y \geq 0)$

(5.6.2) α est absolument continue et il existe I positif (eventuellement $+\infty$) tel que:

$$\frac{d\alpha}{dx} = \begin{cases} \text{constante } \exp-\int_0^x G(y)dy, & x \in]-I,I[\\ 0 & x \notin]-I,I[\end{cases}$$

ou $G(0) = 0$ et G est convexe sur $[0,I[$.

Soit $M \geq 0$, tel que $Z(h) = \int_R \exp(hx+Jx^2)\alpha(dx) < +\infty$, $\forall h \in \mathbb{R}$, $\forall J < M$. Alors l'inégalite suivante est verifiee:

$$\forall J < M, \quad \forall k \geq 0, \quad \frac{\partial^3}{\partial h^3} \ln Z(h) \leq 0.$$

DEMONSTRATION. Voir [EN2]. □

THEOREME 5.7. m, $\mathrm{Var}(_\alpha)$ et $\bar{\alpha}$ sont définis comme en 5.5. α verifie 2.5. Si $\bar{\alpha}$ verifie 5.6.1 ou bien 5.6.2, alors

<u>Sous le champ h=-mJ</u>

si $\beta J > \frac{1}{\mathrm{Var}(\alpha)}$ il y a multiplicite de phases et $\#\mathcal{K}(\beta,h) = 2$

si $\beta J \leq \frac{1}{\mathrm{Var}(\alpha)}$ il n'y a pas multiplicité de phases ($\#\mathcal{K}(\beta,h) = 1$)

<u>Sous un champ h ≠ -mJ</u>

Il n'y a jamais multiplicité de phases.

DEMONSTRATION. (Faite pour m=0). La première partie est une conséquence de la demonstration de 5.5 et du fait que 5.6 implique que $\ln \varphi_{\bar{\alpha}}$ est concave à droite de 0 et convexe à gauche.

La seconde partie: $V''_{\beta,0}(t) = -J + \frac{\phi''(t)}{\beta}$. Or

$$5.6 \Rightarrow \phi'''(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Donc $V_{\beta,0}$ est convexe à droite de son minimum le plus grand. Comme elle est analytique, elle n'a pas de zone linéaire et $F(\beta,h)$ est dérivable pour $h > 0$. De même pour $h < 0$. □

REMARQUE 5.8. Lorsque α vérifie 5.6.1 ou 5.6.2, l'hypothèse $(\ln\varphi)''$ bornée qui apparait dans le theoreme 4.6 est vérifiée.

5.b UN RESULTAT DE GRANDES DEVIATIONS

Une inspection précise de la preuve de la formule de Chernoff donnée par Dacunha-Castelle [Dac], permet de l'enoncer, sans modification de la démonstration, sous la forme suivante:

THEOREME 5.9. Formule de Chernoff. Soit $(Y_N)_{N\geq 1}$ une suite de variables aléatoires. On suppose que Y_N verifie les trois hypothèses suivantes

(5.9.1) $E\exp tY_N = \phi_N(t) < +\infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}$

(5.9.2) $\frac{1}{N}\ln\phi_N(t) \to \psi(t)$

simplement sur $]0,+\infty[$, ψ est dérivable sur $]0,+\infty[$

(5.9.3) Y_N n'est pas asymptotiquement dégénérée.

Alors, si $a > \psi'^{+}(0)$: $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\ln P(Y_N > Na) = -L(\psi)(a)$.

REMARQUE. L'hypothèse 2 est équivalente à la condition apparamment plus forte:

$$\frac{1}{N}\ln\phi_N(t) \underset{N\to\infty}{\to} \psi(t) \quad \text{et} \quad \frac{1}{N}(\ln\phi_N)'(t) \to \psi'(t)$$

uniformément sur tout compact de $]0,+\infty[$. Ceci est du au fait que les fonctions $\frac{1}{N}\ln\phi_N$ sont convexes. (Voir le théorème 4.19, par exemple)

PROPOSITION 5.10. Si α vérifie 2.5 et l'une des hypothèses de l'inegalité G.H.S.:5.6.1 ou 5.6.2, alors:

$$\forall a > \max\mathcal{M}(\beta,h_0),\ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\, \rho_N^{\beta,h_0}(M_N > a) = -\beta[V_{\beta,h_0}(a) - \inf_t V_{\beta,h_0}(t)].$$

Rappelons que $\inf_t V_{\beta,h_0}(t) = V_{\beta,h_0}(m)$, $\forall m \in \mathcal{M}(\beta,h_0)$.

DEMONSTRATION. Nous allons appliquer 5.9 avec $Y_N = S_N$

$$\phi_N(t) = Z_N(\beta,h_0)^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} \exp(t \sum_{i=1}^{N} x_i) \exp[\beta(h_0 \sum_{i=1}^{N} x_i + \frac{J}{2N} (\sum_{i=1}^{N} x_i)^2)]\alpha^{\otimes N}(dx)$$

$$= Z_N(\beta,h_0)^{-1}\ Z_N(\beta,h_0 + \frac{t}{\beta})$$

$$\frac{1}{N} \ln\phi_N(t) \underset{N\to+\infty}{\to} \psi(t) = -\beta F_{h_0}(\beta, \frac{t}{\beta}) + \beta F(\beta,h_0).$$

Comme α vérifie 5.6.1 ou 5.6.2, ψ est dérivable en tout point différent de 0. Les hypothèses de 5.9 sont bien vérifiées. D'autre part, $\psi'^{+}(0) = -\frac{\partial^+ F}{\partial h}(\beta,h)|_{h=h_0} = \max(\beta,h_0)$ (voir 5.4). Finalement, en conséquence de 4.15.3:

$$L(\psi)(a) = \sup_t[at - \psi(t)] = \sup_t[at + \beta F_{h_0}(\beta,\frac{t}{\beta})] - \beta F(\beta,h_0)$$

$$= \sup_t[at - \beta L(V_{\beta,h_0})(\frac{t}{\beta})] - \beta \inf_t V_{\beta,h_0}(t)$$

$$= \beta \sup_u[au - L(V_{\beta,h_0})(u)] - \beta \inf_t V_{\beta,h_0}(t)$$

$$= \beta(\widehat{V_{\beta,h_0}}(a) - \inf_t V_{\beta,h_0}(t)) .$$

Mais $a > \max(\beta,h_0) \Rightarrow \widehat{V_{\beta,h_0}}(a) = V_{\beta,h_0}(a)$. □

III - QUELQUES GENERALITES CONCERNANT LES PROCESSUS

6) Processus markoviens non-linéaires

Le cadre: $(S, \mathcal{C}(S))$ est un espace mesurable. π est muni de la plus petite tribu rendant mesurables toutes les applications:

$$\begin{cases} \pi(S) \to \mathbb{R} \\ \mu \to \mu(A) \end{cases} \quad \text{où } A \in \mathcal{C}(S).$$

$$\Omega = S^{\mathbb{R}^+}$$

On note X le processus canonique défini par: $X = (X_t)_{t\geq 0} : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times \Omega \to S \\ (t,\omega) \to X_t(\omega) = \omega(t) \end{cases}$

Ω est muni de la famille croissante de tribus $(F_t)_{t\geq 0}$

$F_t = \sigma(X_s,\ 0\leq s\leq t)$; $F = \bigvee_{t\geq 0} F_t$

Notations: $X_t \circ P = P^t$, $\forall\, P \in \pi(\Omega)$

$(\theta_t)_{t\geq 0}$ est la famille d'opérateurs de translation définie par:

$\forall t\geq 0,\ \theta_t : \begin{cases} \Omega \to \Omega \\ \omega \to \theta_t(\omega), \end{cases}$ $\forall s\geq 0,\ X_s \circ \theta_t = X_{t+s}$

Définition 6.1

Un processus de Markov non-linéaire sur S est une famille de probabilités sur (Ω, F): $\{P_\mu, \mu \in \pi(S)\} \subset \pi(\Omega)$, satisfaisant aux conditions suivantes:

(Mnℓ 1) $\forall\, B \in F$, $\begin{cases} \pi(S) \to \mathbb{R} \\ \mu \to P_\mu(B) \end{cases}$ *est mesurable.*

(Mnℓ 2) $\forall \mu \in \pi(S)$, $P_\mu^0 = \mu$

(Mnℓ 3) $\forall t,\ u\geq 0$, $\forall f \in M_b(S)$, $\forall \mu \in \pi(S)$,

$$E_{P_\mu}[f(X_{t+u})|F_t] = E_{P_\mu}[f(X_{t+u})|X_t] = E_{P_{P_\mu^t}}[f(X_u)|X_0] \circ \theta_t$$

Remarque 6.2: Mnℓ 3 est équivalent à:

$\forall t,u \geq 0$, $\forall f \in M_b(S)$, $\forall \mu \in \pi(S)$

$$E_{P_\mu}[f(X_{t+u})|F_t] = E_{P_\mu}[f(X_{t+u})|X_t] = E_{P_{P_\mu^t}}[f(Y_u)|Y_o = \bullet](X_t)$$

où $\forall t \geq o, Y_t : \begin{cases} \Omega' = \Omega \to S \\ \omega' \to \omega'(t) \end{cases}$ et $(Y_t)_{t\geq o}$ est une copie indépendante de S

La première égalité de Mnℓ 3 est la propriété de Markov, tandis que la deuxième donne la nature de l'inhomogénéité temporelle. Comme nous le verrons plus loin au chapitre 8. , un exemple de processus continu markovien non-linéaire est obtenu lorsqu'on cherche la solution de:

$$\begin{cases} dx_t = b(x_t, p^t)dt + \sigma(x_t, p^t)dw_t \\ p = \mathcal{L}(x) \end{cases}$$

La proposition 6.3 et la corollaire 6.5 donne le lien entre le Markov ordinaire et le non-linéaire.

Rappelons qu'un processus de Markov ordinaire (voir par exemple: [Dyn]) est donné par une famille de probabilités sur (Ω, F): $\{P_{\delta_x}, x \in S\} \subset \pi(\Omega)$,

satisfaisant aux conditions suivantes:

(M1) $\forall B \in F$, $\left\{ \begin{array}{l} S \to \mathbb{R} \\ x \to P_{\delta_x}(B) \end{array} \right.$ est mesurable.

(M2) $\forall x \in S$, $P^0_{\delta_x} = \delta_x$

(M3) $\forall t,u \geq 0$, $\forall f \in M_b(S)$, $\forall x \in S$

$$E_{P_{\delta_x}}[f(X_{t+u})|F_t] = E_{P_{\delta_x}}[f(X_{t+u}|X_t)] = E_{P_{\delta_{X_t}}}[f(X_u)]$$

M1 permet de donner un sens à $P_\mu \equiv \int_S P_{\delta_x}\,\mu(dx)$, pour tout μ de $\pi(S)$

Alors P_μ, ainsi défini, vérifie M2 et M3, où δ_x est remplacé par μ.

Proposition 6.3

Un processus de Markov non-linéaire est un processus de Markov ordinaire, si et seulement si:

(6.3.1) $$P_\mu = \int_S P_{\delta_x}\,\mu(dx), \quad \forall\mu \in \pi(S)$$

Remarque: 6.3.1 a un sens en raison de $Mn\ell$ 1.

Par la suite nous emploierons des versions conditionnelles régulières dans les démonstrations, par commodité d'écriture. Les résultats énoncés dans ce chapitre sont vrais, même sans l'existence de ces v.c.r.

Démonstration de 6.3:

a) condition nécessaire: par hypothèse: $E_{P_{P_\mu^t}}[f(X_u)|X_o]\circ\theta_t = E_{P_{\delta_{X_t}}}[f(X_u)]$

Prenons t = 0, alors:

$$\langle f,P_\mu^u\rangle = E_{P_\mu}[f(X_u)] = E_{P_\mu}E_{P_\mu}[f(X_u)|X_o] = E_{P_\mu}E_{P_{\delta_{X_o}}}[f(X_u)]$$

$$= E_{P_\mu}\langle f, P_{\delta_{X_o}}^u\rangle = \langle f, \int_S P_{\delta_x}^u\,\mu(dx)\rangle$$

b) condition suffisante: $\forall\phi \in M_b(S)$:

$$E_{P_{P_\mu^t}}\{\phi(X_o)\,E_{P_{P_\mu^t}}[f(X_u)|X_o]\} = E_{P_{P_\mu^t}}[\phi(X_o)\,f(X_o)]$$

$= \int_S E_{P_{\delta_x}} [\phi(X_o)\ f(X_u)] P^t_\mu\ (dx)$ (par hypothèse)

$= \int_S \phi(x)\ E_{P_{\delta_x}} [f(X_u)] P^t_\mu\ (dx)$

$= E_{P_{P^t_\mu}} \{\phi(X_o)\ E_{P_{\delta_{X_o}}} [f(X_u)]\},$ donc

$E_{P_{P^t_\mu}} [f(X_u)|X_o] = E_{P_{\delta_{X_o}}} [f(X_u)]$ et par conséquent, d'après Mnℓ 3:

$E_{P_\mu} [f(X_{t+u})|X_t] = E_{P_{P^t_\mu}} [f(X_u)|X_o] o\, \theta_t = E_{P_{\delta_{X_t}}} [f(X_u)]$ □

Proposition 6.4

Si $\{P_\mu,\ \mu \in \pi(S)\}$ est un Markov non-linéaire et si on définit:

$\forall t \geq o,\ \forall \mu \in \pi(S),\ U_t(\mu) = P^t_\mu$

alors $(U_t)_{t \geq o}$ est un semi-groupe d'opérateurs (éventuellement non linéaires) sur $\pi(S)$

démonstration: Pour effectuer les calculs suivants, nous utilisons la remarque 6.2.

$\forall t,\ u \geq 0,\ \forall f \in M_b,\ \forall \mu \in \pi(S),$

$$<f, U_{t+u}\ (\mu)> = E_{P_\mu} [f(X_{t+u})] = E_{P_\mu}\ E_{P_\mu} [f(X_{t+u})|X_t]$$

$$= E_{P_\mu}\ E_{P_{P^t_\mu}} [f(Y_u)|Y_o = X_t] = \int_\Omega P_\mu(d\omega) \int_{\Omega'} (Y_u(\omega'))P_{P^t_\mu}(d\omega'|Y_o = X_t(\omega))$$

$$= \int_{\Omega'} f(Y_u(\omega'))\ [\int_\Omega P_{P^t_\mu}\ (\cdot|Y_o = X_t(\omega))P_\mu(d\omega)](d\omega')$$

où $\int_\Omega P_{P^t_\mu}(\cdot|Y_o = X_t(\omega))P_\mu(d\omega) = \nu(\cdot)$ est défini faiblement.

Il est clair que ν est une probabilité. Il reste à prouver $\nu = P_{P^t_\mu}$, car

si c'est le cas

$$<f,U_{t+u}(\mu)> = <f(Y_u),\nu> = <f,P^u_{P^t_\mu}> = <f,U_u(P^t_\mu)> = <f,U_u \circ U_t(\mu)>$$

Preuve de $\nu = P_{P^t_\mu}$:

$$\forall A \in F', \nu(A) = \int_\Omega P_{P^t_\mu}(A|Y_o = X_t(\omega))\ P^t_\mu(d\omega)$$

$$= \int_\Omega P_{P^t_\mu}(A|Y_o = X_t(\omega))\ P_{P^t_\mu}(d\omega) \qquad (\text{Mn}\ell\ 2 \Rightarrow \mathcal{L}(Y_o) = P^t_\mu)$$

$$= P_{P^t_\mu}(A) \qquad \square$$

<u>*Corollaire 6.5*</u> *$(U_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe d'opérateurs linéaires (pour les combinaisons convexes) si et seulement si $\{P_\mu, \mu \in \pi(S)\}$ est un Markov ordinaire.*

<u>démonstration</u>: C'est une conséquence immédiate de 6.3 et 6.4 $\square$

6.4 s'écrit: (6.6) $\forall t, s \geq 0, \forall \mu \in \pi(S),\quad P^t_{P^s_\mu} = P^{t+s}_\mu$

<u>*Corollaire 6.7*</u> *$\forall t \geq 0, \forall \mu \in \pi(S), \theta_t \circ P_\mu = P_{P^t_\mu}$*

<u>démonstration</u>: C'est une conséquence de 6.6 et de la propriété de Markov $\square$

De manière imprécise, on peut dire qu'un processus markovien strictement non linéaire garde la mémoire de sa condition initiale. Si U_t n'est pas linéaire, il n'est pas possible de considérer son adjoint T_t comme dans le cas du markov ordinaire. Toutefois, c'est une notion partielle d'adjoint de $(U_t)_{t\geq 0}$ qui va nous permettre de démontrer la proposition 6.12.

Lemma 6.8 *Définissons:* $\forall o \leq s \leq t$, $\forall \mu \in \pi(S)$, $\forall f \in M_b(S)$, $\forall x \in S$

(6.8.1) $T^t_{P^s_\mu} f\ (x) \equiv E_{P^s_\mu}\ [f(X_{t-s}) \mid X_o = x]$

alors $\forall o \leq s \leq t$, $\forall \mu \in \pi(S)$

(6.8.2) $T^t_{P^s_\mu}\ T^u_{P^t_\mu} = T^u_{P^s_\mu}$

Remarque D'après 6.8.2, pour μ donné, $(T^t_{P^s_\mu})_{o \leq s \leq t}$ est un semi-groupe généralisé d'opérateurs linéaires (pour cette notion, voir [Nev])

Remarque Une conséquence immédiate de 6.8.1 est que si on note $\nu = P^s_\mu$, alors $T^t_{P^s_\mu} = T^{t-s}_{P^o_\nu}$, ce qui signifie que $T^t_{P^s_\mu}$ ne dépend de s que par P^s_μ.

En particulier, $\lim\limits_{t\downarrow s} \dfrac{T^t_{P^s_\mu}\phi - \phi}{t-s}$ (limite forte dans $M_b(S)$) ne dépend de s que par P^s_μ, ce qui permet de définir:

(6.9) $$G(\nu)\phi = \lim_{h\downarrow o} (T^h_{P^o_\nu}\phi - \phi)h^{-1} = \lim_{t\downarrow s} (T^t_{P^s_\mu}\phi - \phi)(t-s)^{-1} \quad (\text{où } \nu = P^s_\mu),\ \forall s \geq o$$

si $\phi \in D(G(\nu)) = \{\phi \in M_b(S),\ \lim\limits_{h\downarrow o} (T^h_{P^o_\nu}\phi - \phi)h^{-1}$ existe dans $M_b(S)\}$

Le cas $S = \mathbb{R}^d$

$C^\infty_K(\mathbb{R}^d) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est muni de sa topologie usuelle.

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, son dual, est l'espace des distributions.

Proposition 6.10

$G(\nu)$ étant défini comme en 6.9, si pour tout $\nu \in \pi(\mathbb{R}^d)$, on a: $C_k^\infty(\mathbb{R}^d) \subset D(G(\nu))$ et $G(\nu)$: $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \to B_b(\mathbb{R}^d)$ est continu,

alors: $\forall \mu \in \pi(\mathbb{R}^d)$, $\forall t \geq 0$, $\frac{d}{dt}(U_t\mu) = A^*(U_t\mu)$ (dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$) où

$$A^*(\nu) = G(\nu)^*(\nu) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{U_h\nu - \nu}{h} \quad (\text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)),\ \forall \nu \in \pi(\mathbb{R}^d)$$

et $G(\nu)^*$: $(B_b(\mathbb{R}^d))' \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est l'adjoint de $G(\nu)$.

preuve: $\forall \phi \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\displaystyle\lim_{u\downarrow t} \frac{T_{P^t_\mu}\phi - \phi}{u-t} = G(P^t_\mu)(\phi) \in B_b(\mathbb{R}^d)$, et:

$\forall\, 0 \leq s \leq t$, $\frac{\partial}{\partial t} T^t_{P^s_\mu}\phi = T^t_{P^s_\mu} G(P^t_\mu)\phi$ ($\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t^+}$ car nous avons des limites fortes de $\frac{1}{2}$- groupe)

$$\forall q \in (B_b(\mathbb{R}^d))',\ < \frac{\partial}{\partial t} T^t_{P^s_\mu}\phi, q >_{B_b, B_b'} = < T^t_{P^s_\mu} G(P^t_\mu)(\phi), q >_{B_b, B_b'}$$

$$= <\phi, G(P^t_\mu)^*\, U^t_{P^s_\mu}(q)>_{\mathcal{D},\mathcal{D}'}$$

Nous avons noté $U^t_{P^s_\mu}$ pour l'adjoint de $T^t_{P^s_\mu}$.

La dernière égalité a un sens car $G(P^t_\mu)$ est continu et $\mathcal{D} \underset{\text{dense}}{\to} B_b$

Or: $< \frac{\partial}{\partial t} T^t_{P^s_\mu}\phi, q>_{B_b,B_b'} = <\phi, \frac{\partial}{\partial t} U^t_{P^s_\mu} q>_{B_b,B_b'}$, où :

$\frac{\partial}{\partial t} U^t_{P^s_\mu} q$ est défini au sens faible.

Comme $(B_b(\mathbb{R}^d))' \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on déduit:

$$\forall 0 \leq s \leq t,\ \forall \mu \in \pi(\mathbb{R}^d),\ \forall q \in (B_b(\mathbb{R}^d))',\ \frac{\partial}{\partial t} U^t_{P^s_\mu} q = G(P^t_\mu)^* U^t_{P^s_\mu}(q)$$

(dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$)

La proposition sera donc démontrée en prenant $q = P^t_\mu$, si on prouve que:

$$U^t_{P^s_\mu}(P^s_\mu) = P^t_\mu$$

$$\text{Or: } \forall f \in B_b(\mathbb{R}^d),\ \langle f, U^t_{P^s_\mu}(P^s_\mu)\rangle = \langle T^t_{P^s_\mu} f, P^s_\mu\rangle = E_{P_{P^s_\mu}} E_{P_{P^s_\mu}}[f(X_{t-s})|X_o]$$

$$= \langle f, P^{t-s}_{P^s_\mu}\rangle = \langle f, P^t_\mu\rangle \qquad \square$$

<u>Remarque</u> Contrairement au cas linéaire, on ne peut rien conclure sur la densité du domaine de A^*. Même si le processus est continu à droite (dans ce cas $D(G(\nu))$ est dense, pour tout $\nu \in \pi(S)$) rien ne permet d'assurer, dans un cadre général, que $\nu \in D(G(\nu^*))$.

Observons finalement que, lorsque le processus est markovien linéaire (ordinaire), $G(\nu)$ ne dépend pas de ν.

7) Le problème des martingales

a) Le Cadre   S est un espace polonais

L'espace canonique est $\Omega = C(\mathbb{R}^+, S)$

On note $X = (X_t)_{t\geq o}$ le processus canonique Ω est muni de la famille croissante de sous-tribus $F_t = \sigma(X_s, o\leq s\leq t)$, $F = \bigvee_{t\geq o} F_t$

On munit Ω de la topologie de la convergence uniforme sur tout borné de $\mathbb{R}^+$.

Proposition 7.1 $F = \mathcal{B}(\Omega)$

$$\forall t \geq o,\ F_t = \sigma \{ B \subset \Omega :\ \{\omega_{|[o,t]},\ \omega \in B\} \in (C([o,t],S))\}$$

Proposition 7.2   *Si S est polonais alors Ω est polonais*

Les démonstrations sont classiques □

b) Le problème des martingales

G: $C_b(S) \supset D(G) \to B_b(S)$ est un opérateur linéaire, de domaine D(G), sous-espace vectoriel de $C_b(S)$. G est éventuellement non borné

Définition 7.3   *On dit que* $P: \begin{cases} S \to \pi(\Omega) \\ x \to P_x \end{cases}$ *résoud le problème des martingales sur Ω, de générateur $(G,D(G))$ si:*

(7.3.1) $\forall x \in S,\ P_x^o = x_o \circ P = \delta_x$

(7.3.2) $\forall x \in S,\ \forall \psi \in D(G),\ M_\psi(t) = \psi(X(t)) - \int_o^t G\psi(X(s))ds$ *est une P_x-martingale pour* $(F_t)_{t\geq o}$

On écrit P_x résoud $PM(x,G,D(G))$ et P résoud $PM(G,D(G))$

Remarque 7.4   Pour tout ψ de D(G) et tout x de S, M_ψ est continue en t et $\{M_\psi(t,\omega),\ \omega \in \Omega\}$ est borné.

c) La propriété de Markov

Nous donnons au théorème 7.8 une condition suffisante pour que le processus X soit fortement markovien.

Remarque 7.5 Puisque Ω est métrisable et séparable, pour tout temps d'arrêt τ, F_τ est une sous-tribu de F qui possède un système dénombrable de générateurs. (CF [Pri])

Remarque 7.6 Puisque Ω est polonais, Q étant un élément de $\pi(\Omega)$, il existe une version régulière de $Q(|F_\tau)$, c'est à dire un noyau $N(\omega,A)$ tel que:

1) $\forall A \in F$, $N(\cdot,A)$ est F_τ-mesurable.

2) $\forall \omega \in \Omega$, $N(\omega,\cdot) \in \pi(\Omega)$

3) $N(\cdot,A) = Q(A,F_\tau)$ Q-presque surement.

Notation: Les opérateurs de translation sur Ω

$$\theta_t : \Omega \to \Omega \qquad \theta_t\omega(s) = \omega(t+s)$$

$$\theta_\tau : \Omega \to \Omega \qquad \theta_\tau\omega(s) = \omega(\tau(\omega)+s)$$

Proposition 7.7 *Soit $P = \{P_x, x \in S\}$ une solution de $PM(G,D(G))$*

Supposons:

(7.7.1) Il existe un sous-ensemble dénombrable $\Delta(G)$ de $D(G)$, tel que $\forall\psi \in D(G)$, $\exists\{\psi_n, n \geq 1\} \subset \Delta(G)$, t.q. $\psi_n \xrightarrow[\text{simplem}^{\underline{t}}]{n\to\infty} \psi$ et $G\psi_n \xrightarrow[\text{simplem}^{\underline{t}}]{n\to\infty} G\psi$ et $\{||\psi_n||, ||G\psi_n||, n \geq 1\}$ est borné.

Soit τ un temps d'arrêt borné. Soit $\omega \to Q^x(\omega)$ une version régulière de $P_x(|F_\tau)$

Alors, il existe un sous-ensemble N_x de Ω qui est P_x-négligeable et tel *que:*

(a) $\forall\omega \notin N_x$, $\forall\psi \in D(G)$, $\Delta M_\psi(\tau,t) \equiv M_\psi(\tau+t) - M_\psi(\tau)$ *est une* Q^x_ω*-martingale par rapport aux* $\theta^{-1}(F_t)$

(b) *Si on pose* $H^x_\omega(\cdot) = Q^x_\omega(\theta^{-1}_{\tau(\omega)}(\cdot))$ $(\forall\omega \notin N_x)$

H^x_ω *est une solution de* $PM(X_\tau(\omega), G, D(G))$

Remarque: Nous verrons plus loin que 7.7.1 n'est pas très restrictif dans les applications.

démonstration de (a): On veut: $\forall\omega \notin N_x$, $\forall$ $o\leq s\leq t$, $\forall A \in \theta_\tau^{-1}(F_s)$,

$$(7.7.2) \qquad E_{Q^x_\omega}[1_A(\bar\omega)\ \Delta M_\psi(\tau(\bar\omega),t)] = E_{Q^x_\omega}[1_A(\bar\omega)\ \Delta M_\psi(\tau(\bar\omega),s)]$$

$$\forall B \in F_\tau,\ E_{P_x}[1_B(\omega)\ E_{Q^x_\omega}(1_A(\bar\omega)\Delta M_\psi(\tau(\bar\omega),t))]$$

$$= E_{P_x}[1_B 1_A(M_\psi(\tau+t) - M_\psi(\tau))]$$

$$= E_{P_x}[1_B 1_A(M_\psi(\tau+s) - M_\psi(\tau))]$$

$$= E_{P_x}[1_B\ E_{Q^x_\omega}(1_A(\bar\omega)\ \Delta M_\psi(\tau(\bar\omega),s))]$$

L'avant dernière égalité est due au fait que $\theta_\tau^{-1}(F_s) \subset F_{\tau+s}$, donc $1_B 1_A$ et $M_\psi(\tau)$ sont $F_{\tau+s}$-mesurables et comme τ est borné on peut appliquer le théorème d'arrêt à la martingale M_ψ.

D'après le théorème d'existence de v.c.r dans un polonais (Remarque 7.6), il existe un ensemble $N^{A,\psi}_{s,t}$, P_x-négligleable tel que:

Pour tout ω n'appartenant pas à $N^{A,\psi}_{s,t}$, 7.7.2 est vérifié.

Notons F_s un système dénombrablede générateurs de $\theta_\tau^{-1}(F_s)$ (Remarque 7.5) et posons $N_x^1 = \bigcup_{\psi\in\Delta(G)} \bigcup_{\substack{s,t\in \mathbb{Q}^+ \\ s\le t}} \bigcup_{A\in F_s} N_{s,t}^{A,\psi}$

Compte tenu de 7.7.1, N_s^1 est P_x-négligeable et:

$\forall\omega \notin N_x^1$, $\forall\psi \in D(G)$, $\forall o \le s \le t$, $\forall A \in \theta_\tau^{-1}(F_s)$, 7.7.2 est vérifié.

En effet, si: $\forall n \ge o$, s_n, $t_n \in \mathbb{Q}^+$, $s_n \downarrow s$, $t_n \downarrow t$, $s_n \le t_n$, $A_n \in F_{s_n}$

$$1_{A_n} \xrightarrow[P_x.p.s]{} 1_A$$

et 7.7.1: $\psi_n \in \Delta(G)$, $\psi_n \xrightarrow[simp]{\pm} \psi$, $G\psi_n \xrightarrow[simp]{\pm} G\psi$, $\{||\psi_n||, ||G\psi_n||, n\ge 1\}$

est borné alors

$$1_{A_n} \Delta M_{\psi_n}(\tau+t_n) \xrightarrow[P_x.p.s.]{} 1_A \Delta M_\psi(\tau+t)$$

$$1_{A_n} \Delta M_{\psi_n}(\tau+s_n) \xrightarrow[P_x.p.s.]{} 1_A \Delta M_\psi(\tau+s)$$

et on peut appliquer le théorème de convergence dominée, de sorte que (a) est démontré.

<u>Remarque 7.7.3</u> Pour la convergence dans $L^1(P_x)$ il est nécessaire et suffisant d'avoir les convergences en P_x-probabilité $\psi_n \to \psi$, $G\psi_n \to \psi$ et la P_x-équi-intégrabilité de $\{\Delta M_{\psi_n}, n \ge 1\}$. Mais ceci doit être vérifié pour tout P_x, $(x \in S)$, de sorte que dans le cadre d'un thèorème général où $\{P_x, x \in s\}$ n'est pas précisé, la condition 7.7.1 n'est pas très restrictive.

<u>démonstration de (b)</u> Prenons $B \in F_s$ et $A = \theta_\tau^{-1}(B)$

$$E_{Q_\omega^x}(1_A \Delta M_\psi(\tau,v)) = \int 1_A(\bar\omega)\Delta M_\psi(\tau(\omega),v)(\bar\omega)\, Q_\omega^x(d\bar\omega)$$

$$= \int 1_B(\theta_{\tau(\omega)}(\bar\omega))[\psi(X_v(\theta_{\tau(\omega)}(\bar\omega)))-\psi(X_o(\theta_{\tau(\omega)}(\bar\omega))) - \int_o^v G\psi(X_u(\theta_{\tau(\omega)}(\bar\omega)))du]Q_\omega^x(d\bar\omega)$$

$$= E_{H^x_\omega}(1_B\, \Delta M_\psi(o,v))$$

D'autre part, il existe N^2_x élément de F, tel que $P_x(N^2_x) = 0$ et pour tout ω n'appartenant pas à N^2_x:

$$H^x_\omega\{\bar{\omega},\ X_o(\bar{\omega}) = X_{\tau(\omega)}(\omega)\} = Q^x_\omega\{\bar{\omega},\ X_o(\theta_{\tau(\omega)}(\bar{\omega})) = X_{\tau(\omega)}(\omega)\}$$

$$= P_x\{\bar{\omega},\ X_\tau(\bar{\omega}) = X_\tau | \tau\}(\omega) = 1$$

Finalement on prend $N_x = N^1_x \cup N^2_x$ □

Théorème 7.8 *Supposons que PM(G,D(G)) admette une solution unique, que (G,D(G)) vérifie 7.7.1 et que* $\begin{cases} S \to \mathbb{R} \\ x \to P_x(B) \end{cases}$ *soit mesurable pour tout B de F.*

Alors $\{P_x,\ x \in S\}$ *est fortement markovien.*

démonstration: . L'unicité est évidente.

. Soit τ un temps d'arrêt borné alors:

$\forall A \in Fs$, $\forall x \in S$, $P_x[\theta_\tau^{-1}(A) | F_\tau](\omega) = Q^x_\omega(\theta_\tau^{-1}(A)) = H^x_\omega(A)$, P_x.p.s.

Mais d'après l'unicité de la solution de $PM(P_x^{\tau(\omega)}, G, D(G))$:

$\forall \omega \notin N_x$, $H^x_\omega(A) = P_x^{\tau(\omega)}(A)$

donc $\forall \omega \notin P_x^{\tau(\omega)}(A) = P_x[\theta_\tau^{-1}(A) | F_\tau](\omega)$, qui est la propriété de Markov forte pour tout temps d'arrêt borné et qui implique la propriété de Markov forte pour tout temps d'arrêt. □

On définit la famille d'opérateurs linéaires $(T_t)_{t\geq o}$ par.

$$\forall t \geq o,\ T_t: \begin{cases} B_b(S) \to \mathbb{R}^S \\ \psi \to T_t\psi \end{cases} ;\ \forall x \in S,\ T_t\psi(x) \equiv E_{P_x}[\psi(X_t)]$$

Il est clair que:

(7.9) $\quad \forall\psi \in D(G),\ T_t\psi(x) = \psi(x) + \int_o^t T_s(G\psi)(x)ds$

<u>Remarque</u>: $T_t\psi$ est borné mais n'est pas a priori mesurable.

<u>*Proposition 7.10*</u> *Considérons les deux propriétés:*

(7.10.1) $\quad \forall t \geq o,\ x \to P_x^t$ *est mesurable.*

(7.10.2) $\quad \forall t \geq o,\ x \to P_x^t$ *est continu*

où $\pi(S)$ *est muni de la topologie de la convergence étroite et de la tribu des boréliens correspondante*

(7.10.1) $\Rightarrow \forall t \geq o,\ \forall\psi \in B_b(S),\ T_t\psi \in B_b(S)$

(7.10.2) $\Rightarrow \forall t \geq o,\ \forall\psi \in C_b(S),\ T_t\psi \in C_b(S)$

<u>démonstration</u>: $x \to P_x^t \to \langle\psi, P_x^t\rangle = T_t\psi(x)$ où la deuxième application est continue si $\psi \in C_b(S)$ (par définition de la topologie de $\pi(S)$) et mesurable si $\psi \in B_b(S)$ (car S est métrisable séparable donc normal à base dénombrable d'ouverts) $\square$

Si la condition 7.10.1 (resp 7.10.2) est vérifiée, T_t est une contraction positive dans $B_b(S)$ (resp $C_b(S)$). En conclusion:

Sous les hypothèses de 7.8 $(T_t)_{t\geq o}$ *est un semi-groupe markovien sur* $B_b(S)$

A partir de maintenant les hypothèses de 7.8 seront supposées vérifiées

d) <u>Le Théorème de Hille-Yosida</u>

Du fait que les trajectoires sont continues (à droite suffirait), $(T_t)_{t\geq o}$ est fortement continu. L'intérèt de cette propriété est qu'elle permet de caractériser le semi-groupe par son générateur (cette caractérisation ne peut se faire que sur $\{f,\ T_t f \underset{t\downarrow o}{\rightarrow} f\})$

Appelons g et $\mathcal{D}(g)$ le générateur de $(T_t)_{t\geq o}$ et son domaine:

$$\mathcal{D}(g) = \{f \in B_b(S),\ \lim_{t\downarrow o} \frac{T_t f-f}{t} \text{ existe et appartient à } B_b(S)\}$$

$$\forall f \in \mathcal{D}(g),\ gf = \lim_{t\downarrow o} \frac{T_t f-f}{t}$$

Théorème 7.11 (Hill e - Yosida)

Soient B un espace de Banach et g un opérateur linéaire sur B. Pour que g soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur B, il est nécessaire et suffisant que les conditions suivantes soient satisfaites:

a) Le domaine $\mathcal{D}(g)$ de g est dense dans B.

b) L'équation $\lambda f-g(f) = h$ a une solution $f \in \mathcal{D}(g)$ pour tout h de B et tout $\lambda > o$.

c) $||\lambda f-g(f)|| \geq ||\lambda f||$, $\forall f \in \mathcal{D}(g)$, $\forall\lambda > o$

<u>démonstration</u>: Voir [Dyn], [Yos] , [Nev]

<u>Remarque</u>: Lorsque $(g,\mathcal{D}(g))$ vérifie 7.11.c on dit que g est dissipatif sur $\mathcal{D}(g)$

7.9 nous permet d'écrire (7.12) $\forall\psi \in D(G),\ g\psi = G\psi$. Par conséquent $(G,D(G))$ est dissipatif. Il se peut que $\overline{D(G)} \subsetneq B_b(S)$, alors la condition 7.11.a n'est pas vérifiée pour G. Toutefois $(T_t)_{t\geq o}$ est entièrement déterminé par la donnée $(G,D(G))$ si:

$$(7.13) \qquad \overline{\{\psi \in D(G),\ ||\psi|| \leq 1\}}^{\text{simple}} = \{\psi \in B_b(S),\ ||\psi|| \leq 1\}$$

où $\bar{A}^{\text{simple}}$ est l'adhérence de A pour la topologie de la convergence simple. En effet, c'est une conséquence de la définition de $(T_t)_{t\geq o}$ et du théorème de convergence dominée. Nous précisons cette remarque au théorème 7.19.

e) Des résultats de dualité

Nous appelons $\mathcal{M}(S)$ l'ensemble des mesures σ-additives signées bornées sur S. $\mathcal{M}(S)$ est muni de la norme de la variation sur S. $M(S)'$ est son dual.

Proposition 7.14 $B_b(S) \to \mathcal{M}(S)'$ *l'injection est isométrique.*

démonstration: $\begin{cases} B_b(S) & \to \mathcal{M}(S)' \\ f & \to \langle f,\bullet\rangle \end{cases}$ □

Nous appelons faible (w) la topologie $\sigma(\mathcal{M}(S)',\mathcal{M}(S))$, et w-lim la limite correspondante.

Proposition 7.15 $B_b(S)$ *est w-fermé*

démonstration: facile □

Proposition 7.16 $\forall\mu \in \mathcal{M}(S),\ \forall t \geq o,\ U_t\mu \equiv \int_S P_x^t\mu(dx)$

$(U_t)_{t\geq o}$ est un semi-groupe de contractions positives sur $\mathcal{M}(S)$.

$\forall t \geq o,\ U_t(\pi(S)) \subset \pi(S)$

Le semi-groupe adjoint de $(U_t)_{t\geq o}$ coïncide avec $(T_t)_{t\geq o}$ sur $B_b(S)$.

démonstration: facile □

Nous appelons $\tilde{g}$ le générateur faible de $(T_t)_{t\geq o}$, et $\mathcal{D}(\tilde{g})$ son domaine, définis par:

$$\mathcal{D}(\tilde{g}) = \{\psi \in B_b(S), \quad \underset{t\downarrow o}{\text{w-lim}} \ \frac{T_t\psi-\psi}{t} \in B_b(S)\}$$

$$\forall\psi \in \mathcal{D}(\tilde{g}), \ \tilde{g}\psi = \underset{t\downarrow o}{\text{w-lim}} \ \frac{T_t\psi-\psi}{t}$$

Il est clair que $(\tilde{g},\mathcal{D}(\tilde{g}))$ prolonge $(g,\mathcal{D}(g))$

Proposition 7.17 $\tilde{g}$ *caractérise* T_t

démonstration: Voir [Dyn] □

Proposition 7.18

$$\forall\{f_n,n\geq 1\} \subset B_b(S), \ \forall f \in B_b(S), \ f_n \xrightarrow[w]{n\to+\infty} f \iff \begin{cases} f_n \ \overrightarrow{\text{simplement}} \ f \\ \{\|f_n\|, \ n\geq 1\} \text{ est borné} \end{cases}$$

démonstration: classique □

Ce qui permet d'écrire:

7.7.1 <=> Il existe un sous-ensemble dénombrable $\Delta(G)$ de $D(G)$, tel que.

$$\forall\psi \in D(G), \ \exists\{\psi_n, \ n\geq 1\} \subset \Delta(G), \quad \begin{matrix} \psi_n \underset{w}{\to} \psi \\ G\psi_n \underset{w}{\to} G\psi \end{matrix}$$

7.13 <=> $\overline{D(G)}^{w} = B_b(S)$ (on a utilisé 7.15)

Finalement nous obtenons le théorème de caractérisation de la loi de X en fonction de $(G,D(G))$:

Théorème 7.19 *Si* • *PM(G,D(G)) admet une solution* *unique* $\{P_x, x \in S\}$

• *(G,D(G)) vérifie 7.7.1* • *D(G) vérifie 7.13* • $\forall t \geq o$, $x \to P_x^t$ *est mesurable*

Alors $(T_t)_{t\geq o}$ *est un semi-groupe fortement markovien sur* $B_b(S)$, *dont* *le générateur faible $\tilde{g}$ est la cloture faible de G dans $B_b(S)$*

<u>démonstration</u>: Se déduit facilement du fait que le générateur faible d'un semi-groupe fortement continu (<=> faiblement continu) est faiblement clos □

<u>$S = \mathbb{R}^d$</u>

<u>*Proposition 7.20*</u>

Si $S = \mathbb{R}^d$ *et* G: $D(G) = \begin{cases} C_K^k(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow \quad C_K(\mathbb{R}^d) \\ f & \longmapsto \quad Gf = \sum_{j=0}^{k} a^{(j)} D^j f \end{cases}$

$$\text{où} \quad a^{(j)} D^j f(x) = \sum_{\ell \in \{1,\dots,d\}^j} a^{(j)}_{\ell_1,\dots,\ell_j} \frac{\partial^j}{\partial x_{\ell 1} \dots \partial x_{\ell j}} f(x)$$

et $a^{(j)}_{\ell}$ *est mesurable et bornée sur tout compact*

Alors les propriétés 7.7.1 et 7.13 sont vérifiées

Remarque: La proposition 7.20 est démontrée dans le cadre général $k \in \mathbb{N}$, mais la condition de dissipativité de G n'est vérifiée sur un domaine D(G) suffisament grand (au sens 7.13) que pour k = 1,2.

La proposition 7.20 est vraie lorsque $D(G) = C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$

<u>démonstration</u>: 7.13 est une conséquence du fait que $C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ est faiblement dense dans $B_b(\mathbb{R}^d)$

7.7.1 est une conséquence immédiate du lemme suivant.

<u>*Lemme 7.21*</u>

$(C_K^k(\mathbb{R}^d), ||| \ |||_k)$ *est séparable, où* $|||f|||_k = ||f||_\infty + \sum_{j=1}^{k} \sum_{\ell \in \{1,\dots,d\}^j} \left|\left|\frac{\partial^j f}{\partial x^\ell}\right|\right|_\infty$

On peut construire A dénombrable et $|||\ |||_k$*-dense dans* $C_K^k(\mathbb{R}^d)$ *de sorte que:*

$$\forall f \in C_K^k(\mathbb{R}^d),\quad \exists\ K \text{ compact de } \mathbb{R}^d,\ \exists \{f_n,\ n\geq 1\} \subset A,\ t.q.$$

$$\forall n \geq 1,\ supp(f_n) \subset K \text{ et } f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{|||\ |||_k} f$$

Ce lemme nous permet d'obtenir une propriété plus forte que 7.7.1, où les convergences (w) sont remplacées par des convergences uniformes.

<u>démonstration du lemme</u>: Pour simplifier les notations nous prenons $d = 1$. On pose $K_n = [-n,n]$, $n \geq 1$. Fixons $n \geq 1$ pour le moment.

On note $C^j_{K_n}(\mathbb{R}) = \{f,\ f \in C^j(\mathbb{R}) \text{ et } supp(f) \subset K_n\}$

On sait que $(C^o_{K_n}(\mathbb{R}),\ \|\ \|_\infty)$ est un espace de Banach séparable, il en est de même pour $([C^o_{K_n}(\mathbb{R})]^{k+1},\ \sum_{j=o}^{k} \|\ \|_\infty)$.

Soit P l'isomorphisme isométrique P: $\begin{cases} (C^k_{K_n}(\mathbb{R}),\ |||\ |||_k) \longrightarrow (W_n,\ \sum_{j=o}^{k} \|\ \|_\infty) \\ \qquad f \longmapsto Pf = (D^j f)_{j=o,1,\ldots,k} \end{cases}$

où $W_n = P(C^k_{K_n}(\mathbb{R})) \hookrightarrow [C^o_{K_n}(\mathbb{R})]^{k+1}$

Par le théorème de l'application ouverte, et du fait que $(W_n,\ \sum_{j=o}^{k} \|\ \|_\infty)$ est complet (classique), W_n est fermé dans $[C^o_{K_n}(\mathbb{R})]^{k+1}$, c'est donc un Banach séparable et il en est de même pour $(C^k_{K_n}(\mathbb{R}),|||\ |||_k) = P^{-1}(W_n,\ \sum_{j=o}^{k} \|\ \|_\infty)$. En outre: $\forall f \in C^k_K(\mathbb{R})$, $\exists n \geq 1$ t.q. $f \in C^k_{K_n}(\mathbb{R})$.

Finalement, si A_n est dénombrable et dense dans $C^k_{K_n}(\mathbb{R})$, alors $A = \bigcup_{n=1} A_n$ est dénombrable et dense dans $C^k_K(\mathbb{R})$. □

S de dimension infinie

Le cadre

S = H' est le dual topologique d'un espace de hilbert séparable: H. On peut considérer deux topologies naturelles sur H'. On note H'_β, H' muni de la topologie forte (de la norme) et H'_σ , H' muni de la topologie faible $\sigma(H',H)$

H'_β n'est pas identifié à H, par contre $(H'_\beta)' = H''$ est identifié à H.

On note $\Omega_\beta = C(\mathbb{R}^+, H'_\beta)$ et $\Omega_\sigma = C(\mathbb{R}^+, H'_\sigma)$

Remarques: En dimension infinie, H'_σ n'est pas complet et par conséquent Ω_σ n'est pas complet, contrairement à Ω_β qui est polonais.

Bien que $\pi(H'_\beta) = \pi(H'_\sigma)$ (on montre facilement que $\mathcal{B}(H'_\beta) = \mathcal{B}(H'_\sigma)$), en dimension infinie $\pi(\Omega_\beta) \neq \pi(\Omega_\sigma)$, puisque $\Omega_\beta \subsetneq \Omega_\sigma$.

Définition 7.22 *On appelle opérateur de diffusion sur H', tout opérateur linéaire L, de domaine D(L): un sous-espace vectoriel de* $C^2(H'_\beta)$ *de la forme:*

$$L: \ D(L) \to B(H')$$

$$f(\cdot) \to Lf(\cdot) = \langle b(\cdot), Df(\cdot)\rangle_{H',H''} + \frac{1}{2} \langle a(\cdot), D^2 f(\cdot)\rangle_{H'\hat{\otimes}_1 H', (H'\hat{\otimes}_1 H')'}$$

où Df et $D^2 f$ *désignent les dérivées première et seconde de f.*

$H'\hat{\otimes}_1 H'$ *est le produit tensoriel nucléaire de H' par lui-même.*

b: $H' \to H'$ *est mesurable,* $a: H' \to H'\hat{\otimes}_1 H'$ *est mesurable symétrique et positif.*

a et b sont fortement bornés sur tout borné de H'_β

La définition 7.22 est choisie de manière à être cohérente avec la formule d'Ito énoncée à la proposition 7.23. On note $L(H')$ l'espace des opérateurs linéaires continus sur H'_β. $\sigma_2(H')$ est celui des opérateurs de Hilbert - Schmidt sur H'_β, muni de sa norme $||\cdot||_2$.

$\sigma^+_1(H')$ est l'ensemble des opérateurs nucléaires positifs sur H'_β.

$(B^1(t))_{t\geq o}$ est un brownieu sur H', de covariance $W \in \tau^+_1(H')$

$(B^2(t))_{t\geq o}$ est un brownien cylindrique sur H'.

b: $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{Q} \to H'$; ϕ_1: $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{Q} \to L(H')$; ϕ_2: $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{Q} \to \sigma_2(H')$

sont des processus $(F_t)_{t\geq o}$ - bien mesurables tels que:

$$\forall T\geq o,\ E[\int_o^T ||b(s,\cdot)||^2_{H'} ds] < +\infty,\ E[\int_o^T ||\phi_1(s,\cdot) o W^{\frac{1}{2}}||^2_2\, ds] < +\infty,$$

$$E[\int_o^T ||\phi_2(s,\cdot)||^2_2 ds] < +\infty$$

<u>*Proposition 7.23*</u> *(Formule d'Ito)*

Soit $x^i_t = x_o + \int_o^t b(s)ds + \int_o^t \phi^i(s)dB^i_s$; $i = 1,2$. $x_o \in L^2(\mathcal{Q}, F_o, \mathbb{P})$ *et*

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times H' \to \mathbb{R} \\ (t,x) \to f(t,x) \end{cases}$$

, C^1 en t, C^2 en x, et telle que f, $\frac{\partial f}{\partial t}$, $D_x f$ et $D^2_x f$ soient bornés sur tout borné de $\mathbb{R}^+ \times H'$. Alors:

$$\forall t\geq o,\ f(t,x^i_t) = \int_o^t < \phi_i(s)(dB^i_s),\ D_x f(s,x^i_s) >_{H',H''}$$

$$+ \int_o^t [\ \frac{\partial f}{\partial s}(s,x^i_s) + <b(s),\ D_x f(s,x^i_s)>_{H',H''}$$

$$+ \frac{1}{2} <a^i(s),\ D^2_x f(s,x^i_s)>_{H'\hat{\otimes}_1 H',(H'\hat{\otimes}_1 H')'}]ds,\ i = 1,2$$

Si $(h_j)_{j\geq 1}$ est une base orthonormée de H et $(h_j^*)_{j\geq 1}$ sa base duale dans H', alors:

$$a_1(t) = \sum_{j\geq 1} (\phi_1(t) o W^{\frac{1}{2}})(h_j^*) \otimes (\phi_1(t) o W^{\frac{1}{2}})(h_j^*) \quad \in \quad H'\hat{\otimes}_1 H'$$

$$a_2(t) = \sum_{j\geq 1} \phi_2(t)(h_j^*) \otimes \phi_2(t)(h_j^*) \quad \in \quad H'\hat{\otimes}_1 H'$$

preuve: pour une démonstration rigoureuse (avec H = H'), voir [Yor]

L'idée est la suivante: (on prend $\frac{\partial f}{\partial t} = o$)

$$df(x_t) = \langle dx_t, Df(x_t)\rangle_{H',H''} + \frac{1}{2}\langle dx_t, D^2f(x_t)(dx_t)\rangle_{H',H''}$$

$$= \langle \phi(t)(dB_t), Df(x_t)\rangle_{H',H''} + \langle b(t), Df(x_t)\rangle_{H',H''} dt$$

$$+ \frac{1}{2}\langle \phi(t)(dB_t), D^2f(x_t)(\phi(t)(dB_t))\rangle_{H',H''}$$

or, le dernier terne s'écrit:

$$\frac{1}{2}\langle \phi(t)(dB_t) \otimes \phi(t)(dB_t), D^2f(x_t)\rangle_{H'\hat{\otimes}_1 H''', (H'\hat{\otimes}_1 H''')'}$$

et pour $\phi \in \sigma_2(H')$:

$$\phi(t)(dB_t) \otimes \phi(t)(dB_t) = \sum_{i,j} \Big(\sum_\ell \phi_{i\ell}\, \phi_{j\ell}\Big)\, h_i^* \otimes h_j^*\, dt =$$

$$\sum_{i,j,\ell} \langle h_i \otimes h_j, \phi(h_\ell^*) \otimes \phi(h_\ell^*)\rangle_{H\otimes H,\, H'\otimes H'}\, h_i^* \otimes h_j^* dt = \sum_\ell \phi(h_\ell^*) \otimes \phi(h_\ell^*) dt$$

lorsque $\phi \in L(H')$, $\phi\, o\, W^{\frac{1}{2}} \in \sigma_2(H')$. □

On considère les classes suivantes de fonctions:

C^2_b = {f: $H'_\beta \to \mathbb{R}$; f est de classe C^2, et f, Df, D^2f sont bornés sur tout H'}

C^2_{loc} = {f: $H'_\beta \to \mathbb{R}$; f est de classe C^2, et f, Df, D^2f sont bornés sur tout borné de H'_β}

$C^{2,n} = \{f: H'_\beta \to \mathbb{R}, \exists\, Q_n$, projecteur orthogonal de H', de dimension n,

tel que: $\quad f(x) = f(Q_n(x))$ et f est de classe $C^2\}$

<u>*Lemma 7.24*</u> *Toute fonction de $C^{2,n}$ est la forme:*

$$x \to f(x) = \tilde{f}\,(\sum_{i=1}^{n} <v_i, x>_{H,H'}\, v_i^*) = \hat{f}\,[(<v_i,x>_{H,H'})_{1\le i\le n}],\ \hat{f}\in C^2(\mathbb{R}^n)$$

où $(v_i)_{1\le i\le n}$ est un système linéairement indépendant dans H, et

$<v_i, v_j^*> = \delta_{ij}$, $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$. De plus:

$$\forall x \in H',\ Df(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i\, \hat{f}\,[(<v_k,x>_{H,H'})_{1\le k\le n}]\, v_i \in H \cong H''$$

$$D^2 f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial^2_{ij}\, \hat{f}[(<v_k,x>_{H,H'})_{1\le k\le n}]v_i \otimes v_j \in H\otimes H \subset (H'\hat{\otimes}_1 H')'$$

<u>preuve</u>: facile □

Il arrive souvent qu'un problème de martingales apparaisse naturellement sous la forme cylindrique suivante:

$$X(o)o\,P_x = \delta_x \text{ et}$$

$$\forall n \ge 1,\ \forall \hat{f} \in C^2(\mathbb{R}^n),\ \forall v_1,\dots,v_n \in H,$$

$$\hat{f}(<v_i,X(t)>_{1\le i\le n}) - \int_0^t \sum_{i=1}^{n} \partial_i\, \hat{f}(<v_k,X(s)>_{1\le k\le n})\ <v_i,b(X(s))>_{H,H'}ds$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i,j=1}^{n} \partial^2_{ij}\ \hat{f}(<v_k,X(s)>_{1\le k\le n})<v_i\otimes v_j,\ a(X(s))>_{H\otimes H,H'\hat{\otimes}_1 H'}ds$$

est une P_x- martingale locale continue.

Ce qui, compte tenu du lemma 7.24, est équivalent à la forme (1) du théorème 7.25 suivant:

Théorème 7.25 Soit P_x une loi de probabilité telle que $X(o)oP_x = \delta_x$. Les cinq propositions suivantes sont équivalentes:

(1) $\forall n \geq 1$, $\forall f \in C^{2,n}$, $H_t^f = f(X(t)) - f(X(o)) - \int_o^t Lf(X(s))ds$ est une martingale locale continue.

(2) $\forall f \in C_b^2$, H_t^f est une martingale continue.

(3) $\forall f \in C_{loc}^2$, H_t^f est une martingale locale continue.

(4) $\forall v \in H$, $M^v(t) = \langle v, X(t)-X(o) - \int_o^t b(X(s))ds\rangle_{H,H'}$ est une martingale locale de processus croissant $A^v(t) = \int_o^t \langle v\otimes v, a(X(s))\rangle ds$

(5) $\forall v \in H$, $X^v(t) = \exp\{ M^v(t) - \frac{1}{2} A^v(t) \}$ est une martingale locale.

<u>démonstration</u>: Voir [Yor]

Proposition 7.26 Si l'un des problèmes de martingales associé à 7.25 . 1, 2, 3, 4 ou 5 admet une unique solution $\{P_x, x \in H'\}$ et si: $\forall t \geq o$, $x \to P_x^t$ est mesurable, alors $\{P_x, x \in H'\}$ est fortement markovien, et le générateur faible de ce processus de Markov est la cloture faible de L dans $B_b(H')$. Ce processus de Markov s'appelle une <u>diffusion dans H'</u>.

<u>preuve</u>: D'après le lemma 7.24 et la démonstration de 7.25 il est possible de ne considérer que 7.26.1, à la place de 7.25.1, avec:

(7.26.1) $\forall n \geq 1$, $\forall f \in \tilde{C}^{2,n}$, H_t^f est une P_x-martingale locale continue

où $\tilde{C}^{2,n} = \{f: H' \to \mathbb{R},\ f(\cdot) = \hat{f}[(\langle v_i, \cdot\rangle)_{1\leq i\leq n}],\ \hat{f} \in C_b^2(\mathbb{R}^n)$

et $\{v_i,\ 1 \leq i \leq n\} \subset \{h_j,\ j \geq 1\}$: base orthonornée de H'$\}$

De plus, la suite de temps d'arrêt $(\tau_p)_{p \geq 1}$, $\tau_p = \inf\{t,\ ||X(t)||_{H'} \geq p\}$,

est telle que: $\forall p \geq 1$, $\forall n \geq 1$, $\forall f \in C^{2,n}$, $H^f_{t \wedge \tau_p}$ est une martingale

continue. Considérons la famille de fonctions $\{\phi_p,\ p \geq 1\}$, définie

par: $\forall p \geq 1$, $\forall x \in H'$, $\phi_p(x) = \varphi_p(||x||^2_{H'})$ où

$\varphi_p \in C^\infty_K(\mathbb{R})$, $o \leq \varphi_p \leq 1$; $\varphi_p(y) = 1$, $\forall o \leq y \leq p^2$; $\varphi_p(y) = o$, $\forall y \geq (p+1)^2$

Clairement: $\forall p \geq 1$, $\forall n \geq 1$, $\forall f \in \tilde{C}^{2,n}$, $H^f_{t \wedge \tau_p} = H^{f \cdot \phi_p}_{t \wedge \tau_p}$

On note $C_{B_{p+1}}$: l'ensemble des fonctions continues à support dans

$B_{p+1} = \{x \in H',\ ||x||_{H'} \leq p + 1\}$,

par conséquent 7.25.1 est équivalent à:

(7.26.2) $\forall p \geq 1$, $\forall n \geq 1$, $\forall f \in \tilde{C}^{2,n} \cap B_{p+1}$, $H^f_{t \wedge \tau_p}$ est une P_x-martingale

continue.

Il reste à prouver que: $\forall p \geq 1$, $(L, D(L) = \bigcup_{n \geq 1} \tilde{C}^{2,n} \cap C_{B_{p+1}})$

vérifie 7.7.1 et 7.13, pour pouvoir appliquer 7.19. Or $\bigcup_{n \geq 1} \tilde{C}^{2,n} \cap C_{B_{p+1}}$

est une réunion dénombrable de fonctions faiblement continues à support

faiblement compact et de dimension finie. Le raisonnement de 7.21 peut

donc s'appliquer, ce qui prouve la propriété 7.7.1.

Finalement, il est clair que l'ensemble des restrictions à B_p

de tous les éléments de $\bigcup_{n \geq 1} \tilde{C}^{2,n} \cap C_{B_{p+1}}$ est vaguement dense dans l'ensemble des fonctions faiblement boréliennes sur B_p. Mais les fonctions fortement boréliennes sont les fonctions faiblement boréliennes. $\square$

IV - LE SYSTEME DYNAMIQUE

8) Une loi des grands nombres pour des systèmes de diffusions avec interaction et à coefficients non-bornés

1. Introduction

Nous considerons le système de N équations différentielles stochastiques suivant:

$$(1.1)\quad dx_i^N(t) = \Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} b(x_i^N(t),x_j^N(t))\Big)dt + \Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma(x_i^N(t),x_j^N(t))\Big)dw_i(t)$$

$$i = 1, \dots, N$$

où pour tout $1 \leq i \leq N$, $x_i^N(t)$ appartient à $\mathbb{R}^d$ et $(w_i)_{1\leq i\leq N}$ est une famille indépendante de mouvements browniens à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Une telle équation intervient dans la description de certains systèmes de spins avec une interaction de type champ moyen. ([Daw], [Léo]). 1.1 peut aussi décrire l'évolution dans $\mathbb{R}^d$ d'un système de N particules identiques. La variation à l'instant t , du $i^{\text{ème}}$ spin (ou de la position de la $i^{\text{ème}}$ particule) dépend non seulement de $x_i^N(t)$, mais aussi du système global: $x^N(t) = (x_1^N(t), \dots, x_N^N(t))$. Une forme possible de la fonction $b(x_i,x_j)$ est $b(x_i,x_j) = v(x_i) + f(x_i,x_j)$, où v est un champ de forces extérieur, dans lequel se trouve le système, et $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f(x_i,x_j)$ est la force que l'ensemble du système exerce sur i (du fait de sa forme, c'est un champ moyen). Si σ modélise l'agitation thermique, la température thermodynamique est de l'ordre de trace $(\sigma\sigma^*)$.

Nous nous intéressons à la limite du système 1.1, lorsque N tend vers l'infini. Puisque les N spins sont identiques, il est naturel d'étudier la limite en loi de la variable aléatoire

$\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i^N}$ à valeurs dans les probabilités sur $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$: l'ensemble des trajectoires continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^d$. (Pour une justification de cette idée intuitive, voir le théoreme 4.2).

Le résultat principal est énoncé au théorème 2.2 De nombreux auteurs se sont interessés à une telle limite, comme par exemple Mac Kean ([McK]), Sznitman ([Szn]), Dawson ([Daw]) ou Oelschläger ([Oel]) (cette liste n'est pas exhaustive). Dans [McK], [Daw] et [Oel], la limite est étudiée à l'aide du processus:

$$(1.2)\quad \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \{\text{probabilités sur } \mathbb{R}^d\} \\ t \to \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i^N(t)} \end{cases}$$

ce qui donne une convergence moins puissante que celle obtenue dans [Szn] à l'aide de $\bar{X}_N$. Comme dans [Szn], nous utiliserons des résultats d'échangeabilité (voir, par exemple: [Ald]) pour obtenir la convergence en loi de $\bar{X}_N$. D'autre part cette convergence permet de garder une formulation "backward" (problème de martingale) moins exigeante sur la régularité des coefficients b et σ , que la formulation "forward" à laquelle on aboutit en étudiant 1.2
En particulier, nous n'avons pas besoin d'approximation par des coefficients réguliers (comme en [Oel]). Nos hypothèses sur les coefficients b et σ (en particulier sur leur croissance) permettent de généraliser les résultats de [Daw] et [Oel].

Finalement, nous obtenons une convergence plus fine que celle de la convergence en loi des variables aléatoires à valeurs dans les probabilités sur $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, ce qui nous permet, par exemple, d'avoir la convergence de fonctionnelles comme:

$$E\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \sup_{0\le t\le T} |x_i^N(t)|^q\right) \quad \text{ou} \quad E\left(\sup_{0\le t\le T} |x_i^N(t)\, x_j^N(t)|^{q/2}\right)$$

pour $q \geq 0$, pas trop grand.

2. Notations. Résultat principal. Plan

2a) Les notations

$|\cdot|$ et $<\cdot,\cdot>$ désignent la norme et le produit scalaire de $\mathbb{R}^m$

σ^* est l'adjoint de l'opérateur linéaire σ. $tr(\sigma)$ est sa trace.

$C^2(\mathbb{R}^m)$ est l'espace des fonctions numériques de $\mathbb{R}^m$, deux fois continuement dérivables

$C_K^2(\mathbb{R}^m)$ est le sous-espace de $C^2(\mathbb{R}^m)$ constitué de ses éléments à support compact.

S_m est l'ensemble des opérateurs symétriques, définis, positifs sur $\mathbb{R}^m$.

$C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, l'espace des trajectoires continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^d$, est muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

$D(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, l'espace des trajectoires "càdlàg" de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^d$, est muni de la topologie de Skorokhod.

δ_x est la mesure de Dirac au point x .

$f \circ \mu$ désigne l'image de la mesure μ par la fonction mesurable f .

Si Y est une variable aléatoire $\mathcal{L}(Y)$ désigne sa loi.

Si M est un espace topologique:

$\mathcal{B}(M)$ est sa tribu de Borel

$C(M)$ est l'ensemble des fonctions continues de M dans $\mathbb{R}$.

$C_b(M) = \{f,\ f \in C(M),\ f \text{ bornée}\}$

$\Pi(M)$ est l'ensemble des probabilités sur $(M, \mathcal{B}(M))$

$\mathcal{M}_b^+(M)$ est l'ensemble des mesures positives bornées sur $(M, \mathcal{B}(M))$

$\Pi(M)$ et $\mathcal{M}_b^+(M)$ sont munis de la topologie étroite (affaiblie par $C_b(M)$).

Si f est une fonction numérique sur M et μ est une mesure sur M on note: $\langle f,\mu\rangle = \int_M f(x)\mu(dx)$

Si ϕ est un élément strictement positif de $C(M)$:

$$C_\phi(M) = \{F \in C(M),\quad \sup_{x\in M} \frac{F(x)}{\phi(x)} < +\infty\}$$

$\Pi_\phi(M) = \{P \in \Pi(M),\ \langle\phi,P\rangle < +\infty\}$ est muni de la topologie affaiblie par $C_\phi(M)$.

2b) Un sous-espace topologique de $\Pi\{\Pi[C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]\}$: $\tilde{\mathcal{P}}_p$

On se donne $p \geq 0$ et on considère famille $(\phi_{T,p})_{T\geq 0}$ d'éléments de $C[C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]$, définie comme suit:

Pour tout $T \geq 0$, $\phi_{T,p} : \begin{cases} C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d) & \to \mathbb{R}^{+*} \\ x & \mapsto 1 + \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t)|^p \end{cases}$

$\mathcal{G}_p = \bigcap_{T \geq 0} \Pi_{\phi_{T,p}} [C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]$ est muni de la topologie affaiblie par $\bigcup_{T \geq 0} C_{\phi_{T,p}} [C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)]$, et de la tribu de Borel correspondante: $\mathcal{B}(\mathcal{P}_p)$.

On définit pour tout $T \geq 0$, $\tilde{\phi}_{T,p} : \begin{cases} \mathcal{P}_p & \to \mathbb{R}^{+*} \\ P & \mapsto \langle \phi_{T,p}, P \rangle \end{cases}$

$\tilde{\mathcal{P}}_p = \bigcap_{T \geq 0} \Pi_{\tilde{\phi}_{T,p}} (\mathcal{P}_p)$ est muni de la topologie affaiblie $\bigcup_{T \geq 0} C_{\tilde{\phi}_{T,p}} (\mathcal{P}_p)$.

2c) <u>Le cadre probabiliste</u>

L'espace probabilisé de base est $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathcal{F}, \mathbb{P})$ où $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une famille croissante de sous-tribus de et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega,\mathcal{F})$. On suppose que pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t$ contient les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathcal{F}$ et que $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est continu à droite . $(w_i)_{i\geq 1}$ est une suite de mouvements browniens indépendants, à valeurs $\mathbb{R}^d$, construits sur $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On se donne $b: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $\sigma: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to S_d$

Pour tout $N \geq 1$, $x^N = (x_i^N)_{1\leq i \leq N}$ est une variable aléatoire sur $C(\mathbb{R}^+ , \mathbb{R}^{dN}) \cong C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)^N$ solution de l'équation différentielle stochastique:

$$(2.1) \qquad x_i^N(t) = x_i^N(0) + \int_0^t b[\, x_i^N(s), \bar{X}_N(s)\,]\, ds + \int_0^t \sigma[\, x_i^N(s), \bar{X}_N(s)\,]\, dw_i(s) \quad , \quad 1 \le i \le N$$

où $\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i^N} \in \Pi[C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]$

et $f[x,\mu] \equiv \int f(x,y)\mu(dy)$, $\forall f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ou S_d ,

$\forall \mu \in \Pi(\mathbb{R}^d)$

On note pour tout $N \ge 1$, $P_N = \mathcal{L}(x^N) \in \Pi[C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]$

$\bar{P}_N = \mathcal{L}(\bar{X}_N) \in \Pi\{\Pi[C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]\}$

X est le processus canonique sur $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$.

2d) <u>Les hypothèses (H) sur les fonctions b et σ</u>

H_1 : $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $b(\cdot,x)$ est localement lipschitzienne.

Il existe une constante $K \ge 0$, telle que les conditions H_2 à H_8 suivantes soient vérifiées.

H_2 : $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^d$, $\langle x - z, b(x,y) - b(z,y)\rangle \le K\,|x - z|^2$

H_3 : $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^d$, $|b(y,x) - b(y,z)| \le K\,|x - z|$

H_4 : $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^d$, $\mathrm{tr}[\,(\sigma(x,y) - \sigma(z,y))(\sigma(x,y) - \sigma(z,y))^*\,]$

$+ \mathrm{tr}[\,(\sigma(y,x) - \sigma(y,z))(\sigma(y,x) - \sigma(y,z))^*] \le K\,|x - z|^2$

On écrit: $b(x,y) = v(x) + f(x,y)$

avec $|f(x,y)| \le f_1(x) + f_2(y)$; $f_1, f_2 \ge 0$

H_5: $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $<x,v(x)> + |x| f_1(x) \leq K(1+|x|^2)$

H_6 : $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $f_2(x) \leq K(1+|x|)$

H_7 : $\exists r \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $|v(x)| + f_1(x) \leq K(1+|x|^r)$

H_8 : $\forall x,y \in \mathbb{R}^d$, $\mathrm{tr}[\sigma\sigma^*(x,y)] \leq K(1+|x|^2+|y|^2)$

2e) Le résultat principal

Théorème 2.2

On suppose que les hypothèses (H) *sont vérifiées. Alors si*

(2.2.1) *pour tout* $N \geq 1$, $\mathcal{L}(X^N(0)) \in L^4(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

l'équation différentielle stochastique 2.1 *admet une unique solution trajectorielle dans* $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{dN})$. *De plus, si pour* $\mu \in \Pi(\mathbb{R}^d)$

(2.2.2) $\mathcal{L}(\bar{X}_N(0)) \underset{N\to\infty}{\to} \delta_\mu$ *(étroitement dans* $\Pi[\Pi(\mathbb{R}^d)]$) , *et si*

(2.2.3) *pour* $p \geq \max(4,2r)$, $\sup_{N\geq 1} E\int |x|^p [\bar{X}_N(0)](dx) < +\infty$

*(*r *apparait dans* H_7) , *alors*

(2.2.4) *pour tout* $0 \leq q < p$, $\mathcal{L}(\bar{X}_N) \underset{N\to\infty}{\to} \delta_P$ *dans* $\tilde{\mathcal{P}}_q$ *(pour la topologie de* $\tilde{\mathcal{P}}_q$*) où* P *est la loi de l'unique solution trajectorielle continue de l'équation différentielle stochastique non-linéaire dans* $\mathbb{R}^d$, *suivante:*

$$(2.2.5)\begin{cases} x(t) = x(0) + \int_0^t b[x(s),X(s)\circ P]ds + \int_0^t \sigma[x(s),X(s)\circ P]dw_s \\ P = \mathcal{L}(x) \\ \mathcal{L}(x(0)) = X(0)\circ P = \mu \end{cases}$$

Preuve: La première partie du théorème est démontrée à la proposition 3.3. Compte tenu de la proposition 3.4, on peut supposer que pour tout $N \geq 1$, x^N est échangeable dans $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)^N$. Pour prouver 2.2.4, il suffit de prouver que la famille $\{\bar{P}_N, N \geq 1\}$ est relativement compacte dans $\tilde{\mathcal{P}}_p$, ce que nous faisons au lemme 5.10, et qu'elle admet une unique valeur d'adhérence, qui est δ_P. Au lemme 6.1, nous prouvons que si $\bar{Q}$ est une valeur d'adhérence de $\{\bar{P}_N, N \geq 1\}$, alors $\bar{Q}(\mathcal{E}_\mu) = 1$, où $\mathcal{E}_\mu$ est l'ensemble des solutions du problème de martingale non-linéaire associé à 2.2.5. Au lemme 6.2, nous prouvons que $\mathcal{E}_\mu = \{P\}$ ce qui achève la démonstration de 2.2 $\square$

Remarque: La convergence 2.2.4 implique en particulier:

$$\forall T \geq 0, \forall 0 \leq q < p, \lim_{N\to\infty} E\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \sup_{0\leq t\leq T} |x_j^N(t)|^q\right) = \int_{C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)} \sup_{0\leq t\leq T} |x(t)|^q P(dx)$$

2f) Plan de la suite

Au chapitre 3, nous prouvons l'existence, l'unicité et l'échangeabilité des systèmes finis décrits par l'équation 2.1.

Au chapitre 4, nous rappelons des résultats importants d'échangeabilité, en particulier le théorème 4.2, dû à Kallenberg, nous donne l'équivalence de la convergence de $(x^N)_{N \geq 1}$ (au sens 4.2.1) et de celle de $(\bar{X}_N)_{N\geq 1}$. Le théorème de de Finetti nous permettra au chapitre 7, d'étendre le résultat du Théorème 2.2. Nous rappelons aussi dans ce chapitre un critère de tension des $\mathcal{D}$-semi-martingales, dû à Métivier, qui nous servira au chapitre 5, pour obtenir la relative compacité de $\{\bar{P}_N, N \geq 1\}$. A la première partie du chapitre 5, nous établissons une condition suffisante de relative compacité dans un sous-espace topologique de $\Pi[\Pi(S)]$, où S est un espace polonais. Dans la seconde partie, nous appliquons ce résultat pour établir la relative compacité de $\{\bar{P}_N, N \geq 1\}$.

Au chapitre 6, nous obtenons l'unicité de la valeur d'adhérence, de $\{\bar{P}_N, N \geq 1\}$, et nous l'identifions.

Finalement, nous donnons quelques résultats supplémentaires, au chapitre 7. Nous y obtenons, en particulier, un résultat de propagation du chaos.

3. Existence, unicité et échangeabilité des systèmes finis

On considère l'équation différentielle stochastique à valeurs dans $\mathbb{R}^m$:

$$E(\xi_0, \tilde{b}, \tilde{\sigma}) : x(t) = \xi_0 + \int_0^t \tilde{b}(s,x(s))ds + \int_0^t \tilde{\sigma}(s,x(s))dw_s$$

où $\tilde{b} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{\sigma} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m \to S_m$ et $(w_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^m$, construit sur $(\mathcal{a}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Proposition 3.1

Si $\tilde{b}$ *et* $\tilde{\sigma}$ *vérifient les hypothèses suivantes:*

H_1' : $\forall R \geq 0$, $\exists K_R \geq 0$, $\forall t \geq 0$, $\forall x,y \in \mathbb{R}^m$,

$$(|x| \leq R \text{ et } |y| \leq R) \Rightarrow |\tilde{b}(t,x) - \tilde{b}(t,y)|^2 + tr[(\tilde{\sigma}(t,x) - \tilde{\sigma}(t,y))(\tilde{\sigma}(t,x) - \tilde{\sigma}(t,y))^*] \leq K_R|x-y|^2$$

H_2' : $\exists K \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $\forall t \geq 0$, $\langle x,b(t,x)\rangle + tr[\sigma\sigma^*(t,x)] \leq K(1 + |x|^2)$

H_3' : ξ_0 est indépendant de $(w_t)_{t\geq 0}$

H_4' $\xi_0 \in L^4(\mathcal{a}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

alors, il existe une unique solution continue de $E(\xi_0, \tilde{b}, \tilde{\sigma})$

Remarque 3.2 Rappelons que si H_1' et H_3' sont vérifiés, si H_2' est remplacé par:

H_2'' : $\exists K \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $\forall t \geq 0$, $|b(t,x)|^2 + tr[\sigma\sigma^*(t,x)] \leq K(1 + |x|^2)$

ainsi que H_4' par

H_4'' : $\xi_0 \in L^2(\mathcal{a}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

alors $E(\xi_0, \tilde{b}, \tilde{\sigma})$ admet une unique solution continue.

(Voir par exemple [GSk], Ch2, Th3)

Preuve de 3.1. Pour tout $n \geq 1$, on définit:

$$\tilde{b}_n(x) = \begin{cases} \tilde{b}(x) & \text{si } |x| \leq n \\ \tilde{b}(n \frac{x}{|x|}) & \text{si } |x| \geq n \end{cases} \qquad \tilde{\sigma}_n(x) = \begin{cases} \tilde{\sigma}(n) & \text{si } |x| \leq n \\ \tilde{\sigma}(n\frac{x}{|x|}) & \text{si } |x| \geq n \end{cases}$$

$\tilde{b}_n$ et $\tilde{\sigma}_n$ vérifient H_1' et H_2'', et d'après la remarque 3.2, il existe une unique solution continue de $E(\xi_0, \tilde{b}_n, \tilde{\sigma}_n)$, qu'on note x_n. Soit $\tau_n = \inf\{t, |x_{n+1}(t)| \geq n\}$, d'après le lemme de localisation des intégrales stochastiques, on a:

$x_{n+1}(t \wedge \tau_n) = x_n(t \wedge \tau_n)$, donc $\tau_n \leq \tau_{n+1}$, et la proposition 3.1 sera démontrée si l'on prouve que: $\mathbb{P}\{\sup_{n\geq 1}\tau_n = +\infty\} = 1$. Pour cela, nous allons montrer que

(3.1.1) $\quad \forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}(\forall n, \tau_n \leq t) = 0$

$$\mathbb{P}(\forall n, \tau_n \leq t) \leq \mathbb{P}(\tau_{n_0} \leq t) \leq \mathbb{P}\{\sup_{0\leq s\leq t} |x_{n_0+1}(s)| \geq n_0\}$$

(3.1.2)
$$\leq \frac{1}{n_0^4} E(\sup_{0\leq s\leq t} |x_{n_0+1}(s)|^4)$$

Mais d'après le lemme 5.8, $\sup_{n_0 \geq 1} E(\sup_{0\leq s\leq t} |x_{n_0+1}(s)|^4) < +\infty$

On obtient 3.1.1 en faisant $n_0 \to +\infty$ dans 3.1.2. □

A partir du maintenant on supposera H_3'.

Proposition 3.3

Sous les hypothèses (H) *, pout tout* $N \geq 1$ *, si* $E(|x^N(0)|^4) < +\infty$ *l'équation* 2.1 *admet une unique solution continue.*

Preuve: Il suffit de vérifier H_1' et H_2' avec

$$\tilde{b}(t,x^N) = (b[x_i^N,\bar{X}_N])_{1\leq i\leq N} \quad \text{et} \quad \tilde{\sigma}(t,x^N) = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}[x_1^N,\bar{X}_N] & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{\sigma}[x_N^N,\bar{X}_N] \end{bmatrix}$$

Tout est clair, sauf $\langle x^N, \tilde{b}(t,x^N)\rangle \leq K(1+|x^N|^2)$

$$\langle x^N, \tilde{b}(t,x^N)\rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle x_j^N, b[x_j^N,\bar{X}_N]\rangle = N \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \langle x,b(x,y)\rangle \bar{X}_N(dx)\bar{X}_N(dy)$$

$$\leq N \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} (\langle x, v(x)\rangle + |x|f_1(x) + |x|f_2(y))\bar{X}_N(dx)\bar{X}_N(dy)$$

$$\leq N \int_{\mathbb{R}^d} (\langle x,v(x)\rangle + |x|f_1(x) + \tfrac{1}{2}|x|^2 + \tfrac{1}{2}f_2(x)^2)\bar{X}_N(dx)$$

$$\leq N \int_{\mathbb{R}^d} C(1+|x|^2)\bar{X}_N(dx) \leq N\,C(1+|x^N|^2) \quad \square$$

Θ_N désigne l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, N\}$. Pour tout élément θ de Θ_N , on définit les fonctions suivantes (aussi dénotées par θ) :

$$\theta : \begin{cases} \mathbb{R}^{dN} \to \mathbb{R}^{dN} \\ (x_1, \ldots, x_N) \to (x_{\theta(1)}, \ldots, x_{\theta(N)}) \end{cases}$$

$$\theta : \begin{cases} C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)^N \to C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)^N \\ (x_1, \ldots, x_N) \to (x_{\theta(1)}, \ldots, x_{\theta(N)}) \end{cases}$$

A_N est le générateur infinitésimal associé à 2.1, défini par:

$\forall \psi \in C_K^2(\mathbb{R}^{dN}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^{dN}$

$$A_N\psi(x) = \sum_{i=1}^{N} < \frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x) \;,\; b[x_i,\bar{X}_N]> + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} tr(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2}(x)\,\sigma\sigma^*[x_i,\bar{X}_N])$$

<u>Proposition 3.4</u>

On note x *la solution de* 2.1, *de loi initiale* q .

$q^* = \frac{1}{N!}\sum_{\theta\in\Theta_N}\theta\circ q$ et $\mathcal{L}(x)^* = \frac{1}{N!}\sum_{\theta\in\Theta_N}\theta\circ(x)$, *sont les symétrisées de* q *et* $\mathcal{L}(x)$.

Si $\tilde{x}$ *est la solution de* 2.1, *de loi initiale* q^*, *alors*
$\mathcal{L}(\tilde{x}) = \mathcal{L}(x)^*$

En particulier, la solution de 2.1 *en tant que variable aléatoire sur* $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{dN}) \cong C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)^N$ *est une suite* N*-échangeable si et seulement si sa condition initiale est une suite* N*-échangeable sur* $(\mathbb{R}^d)^N$. *De plus:*

$$\mathcal{L}(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{x_i}) = \mathcal{L}(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{\tilde{x}_i})$$

Voir le §4.a, pour la définition de l'échangeabilité.

<u>Preuve:</u> Nous allons montrer que $\mathcal{L}(\tilde{x}) = \mathcal{L}(x)^*$.

$\forall 0 \le s \le t$, $\forall f$ $\mathcal{F}_s$-mesurable et bornée, $\forall \psi \in C_K^2(\mathbb{R}^{dN})$;

$<f\cdot[\psi(X_t) - \psi(X_s) - \int_s^t A_N\psi(X_u)du] \,,\mathcal{L}(x)> = 0$, donc:

$$\forall\theta \in \Theta_N, \ < f\cdot[\psi\circ\theta(X_t) - \psi\circ\theta(X_s) - \int_s^t A_N(\psi\circ\theta)(X_u)du] \ , \quad (x) > \ = 0 \quad \Rightarrow$$

(symétrie de A_N)

$$\forall\theta \in \Theta_N, \ < f\cdot[\psi\circ\theta(X_t) - \psi\circ\theta(X_s) - \int_s^t A_N\psi(\theta(X_u))du] \ , \quad (x) > \ = 0 \quad \Rightarrow$$

$$< f\cdot[\psi(X_t) - \psi(X_s) - \int_s^t A_N\psi(X_u)du] \ , \quad (x)^* > \ = 0$$

qui avec $X(0) \circ \mathcal{L}(\tilde{x}) = X(0) \circ \mathcal{L}(x)^* = q^*$ et l'unicité de la solution du problème de martingale associé à A_N , donne $\mathcal{L}(\tilde{x}) = \mathcal{L}(x)^*$. □

4. Quelques résultats concernant l'échangeabilité dans un espace polonais et les $\mathcal{D}$-semi-martingales à valeurs dans $\mathbb{R}^m$

4a) Echangeabilité dans un espace polonais

Dans ce paragraphe, S désigne un espace polonais et tous les résultats et définitions que nous y énonçons se trouvent dans [Ald].

Définition Une suite $Y = (Y_1, \dots, Y_N)$ de variables aléatoires est dite N-échangeable si pour toute permutation θ de $\{1, \dots, N\}$ $\mathcal{L}(Y_1, \dots, Y_N) = \mathcal{L}(Y_{\theta(1)}, \dots, Y_{\theta(N)})$. Une suite infinie $\underset{\sim}{Y} = (Y_1, Y_2, \dots)$ est dite échangeable si pour toute permutation finie θ de $\{1, 2, \dots\}$ c'est-à-dire toute permutation θ telle que $\#\{i, \theta(i) \neq i\} < +\infty$, $\mathcal{L}(Y_1, Y_2, \dots) = \mathcal{L}(Y_{\theta(1)}, Y_{\theta(2)}, \dots)$.

Proposition. *Si* $\alpha : (\mathcal{A}, \mathcal{F}) \to (\Pi(S), \mathcal{B}(\Pi(S)))$ *est mesurable (*α *est une probabilité aléatoire), alors il est possible de construire une suite* $\underset{\sim}{\hat{Y}} = (\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \dots)$ *, telle que conditionnellement à* $\alpha = p$, $\underset{\sim}{\hat{Y}}$ *est une suite indépendante identiquement distribuée de loi* p *(i.i.d.(*p*)).*

Definition. Soit $\underset{\sim}{Y}$ une suite infinie de variables aléatoires sur S , soit α une probabilité aléatoire sur S , on dit que $\underset{\sim}{Y}$ est mélange d'i.i.d. dirigé par α si:

$$\mathcal{L}(\alpha, \underset{\sim}{Y}) = \mathcal{L}(\alpha, \underset{\sim}{\hat{Y}}) \text{ , pour } \underset{\sim}{\hat{Y}} \text{ construit plus haut.}$$

Théorème de de Finetti. *Soit* $\underset{\sim}{Y}$ *une suite infinie échangeable de variables aléatoires sur* S *, alors* $\underset{\sim}{Y}$ *est un mélange d'i.i.d.*

On définit:

$$\Lambda_N : \begin{cases} S^N & \to \quad \Pi(S) \\ (x_1,\dots,x_N) & \mapsto \quad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i} \end{cases} \qquad \Lambda : \begin{cases} S^\infty & \to \quad \Pi(S) \\ \underset{\sim}{x} & \mapsto \quad \begin{array}{l} \text{lim étroite}_{N\to\infty} \Lambda_N(x_1,\dots,x_N) \\ \delta_0 \text{, si la limite n'existe pas} \end{array} \end{cases}$$

Une conséquence du théorème de Glivenko-Cantelli est la

Proposition 4.1. *Si la suite infinie* $\underset{\sim}{Y}$ *est un mélange d'i.i.d. alors ce mélange est dirigé par* $\alpha = \Lambda(\underset{\sim}{Y})$ *et cette probabilité aléatoire dirigeante est unique presque sûrement.*

Kallenberg a démontré dans [Kal] un théorème plus général que le théorème suivant.

Théorème 4.2 ([Kal]). *Si* $\underset{\sim}{Y}^k$ *est une suite* N-*échangeable de variables aléatoires sur* S *, si* $\underset{\sim}{Y}$ *est une suite infinie de v.a. sur* S *et si* $\lim_{k\to\infty} N_k = +\infty$ *, alors:*

(4.2.1) $\forall m \geq 1, \mathcal{L}(Y_1^k, \dots, Y_m^k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathcal{L}(Y_1, \dots, Y_m)$ (étroitement dans $\Pi(S^m)$)

$\Leftrightarrow \mathcal{L}(\Lambda_{N_k}(\underset{\sim}{Y}^k)) \xrightarrow{k\to\infty} \mathcal{L}(\Lambda(\underset{\sim}{Y}))$ (étroitement dans $\Pi[\Pi(S)]$).

Remarque: Y est nécessairement échangeable.

Lemme 4.3: *Si* $\underset{\sim}{Y}$ *est* N-*échangeable alors* $\mathcal{L}(Y_1) = E[\Lambda_N(Y)]$

4b) $\mathcal{D}$-semimartingales à valeurs dans $\mathbb{R}^m$

Les résultats et définitions que nous énonçons ci-dessous se trouvent dans [JoM].

Définition. On appelle $\mathcal{D}$-semi-martingale, tout processus cadlag adapté Y, défini sur la base stochastique $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, tel qu'il existe une fonction cadlag croissante $A(t)$, un sous-espace vectoriel $\mathcal{C} \subset C(\mathbb{R}^m)$ et une application $L : \mathcal{C} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ qui ont les propriétés suivantes:

(D.1) les fonctions $\phi_i : \begin{cases} \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \phi_i(y) = y_i \end{cases}$ et $\phi_i \phi_j$; $i,j = 1, \dots, m$

appartiennent à $\mathcal{C}$

(D.2) (i) Pour tout $(y,t,\omega) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \times \Omega$, $\phi \to L(\phi,y,t,\omega)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}$ et $L(\phi,.,t,\omega) \in \mathcal{C}$

(ii) Pour tout $\phi \in \mathcal{C}$, $(y,t,\omega) \to L(\phi,y,t,\omega)$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{G}$ mesurable, où $\mathcal{G}$ est la tribu des ensembles prévisibles.

(D.3) Pour tout $\phi \in \mathcal{C}$, le processus M^ϕ défini par

$$M^\phi(t,\omega) = \phi(Y_t(\omega)) - \phi(Y_0(\omega)) - \int_0^t L(\phi, Y_{s^-}(s), s, \omega)\, dA_s$$

est une martingale localement de carré intégrable sur $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.

<u>Définition</u> . Pour tout $i,j = 1,\dots,m$, on pose

$$\tilde{b}_i(y,t,\omega) = L(\phi_i,y,t,\omega) \ ; \quad \tilde{a}_{ij}(y,t,\omega) = L(\phi_i\phi_j,y,t,\omega) - (\phi_i b_j + \phi_j b_i)(y,t,\omega)$$

$\tilde{b}$ et $\tilde{a}$ s'appellent les coefficients locaux.

<u>Proposition 4.3</u>. *Soit* $(Y_n)_{n\geq 1}$ *, une suite de* $\mathcal{D}$*-semi-martingales, chacun des* Y_n *étant défini sur son propre espace probabilisé:* $(\Omega^n, (\mathcal{F}_t^n)_{t\geq 0}, \mathcal{G}^n, \mathbb{P}^n)$. *Si tous les* Y^n *sont associés au même sous-espace* $\mathcal{C} \subset C(\mathbb{R}^m)$ *et si on appelle* L^n *(resp.* A^n *), l'application* $(\phi,y,t,\omega) \to L^n(\phi,y,t,\omega)$ *(resp. la fonction croissante) associée à* Y_n *, alors:*
Pour que $\{\mathcal{L}(Y_n),\ n \geq 1\}$ *soit une suite relativement compacte de* $\Pi[D(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)]$, *il suffit que les hypothèses* 4.3.1 *et* 4.3.2 *suivantes soient vérifiées.*

(4.3.1) *Si* $\tilde{b}^n$ *et* $\tilde{a}^n$ *désignent les coefficients locaux associés à* L^n *:*

(i) $$\sup_{n\geq 1} E \sup_{0\leq t\leq T} |b^n(Y_n(t^-),t,\cdot)| < +\infty, \ \forall T \geq 0$$

(ii) $$\sup_{n\geq 1} E \sup_{0\leq t\leq T} \operatorname{tr}|\tilde{a}^n(Y_n(t^-),t,.)| < +\infty, \forall T \geq 0$$

(4.3.2) *Il existe une fonction* $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *et une suite décroissante de nombres* $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ *, telles que:* $\lim_{t\downarrow 0} \alpha(t) = 0$, $\lim_{n\uparrow\infty} \gamma_n = 0$ *et pour tous* $0 < s < t$ *et tout* $n \geq 1$ *:*

$$A^n(t) - A^n(s) \leq \alpha(t-s) + \gamma_n \ .$$

Ce résultat n'est pas énoncé explicitement dans [JoM], mais sa démonstration est la même que celle de la proposition 2.3 de [JoM].

5. Relative compacité

5a) Un cadre général

Dans ce paragraphe S est un espace polonais et ϕ est un élément de $C(S)$ qui vérifie:

$$(5.1) \quad \inf_{x \in S} \phi(x) > 0$$

Nous utiliserons les lemmes 5.3, 5.4 et 5.5 pour obtenir le preuve de la proposition 5.2 suivante:

Proposition 5.2. *Soit* $(\alpha_N)_{N \geq 1}$ *une suite de variables aléatoires sur* $\Pi_\phi(S)$. *Pour tout* $N \geq 1$, *on pose* $\bar{\alpha}_N = \int_{\Pi_\phi(S)} P \mathcal{L}(\alpha_N)(dP)$

On définit: $\hat{\phi} : \begin{cases} \Pi_\phi(S) \to \mathbb{R} \\ P \mapsto \langle \phi, P \rangle \end{cases}$ *(il est clair que* $\inf_{P \in \Pi_\phi(S)} \hat{\phi}(P) > 0$ *)*

alors, pour que $\{\mathcal{L}(\alpha_N), N \geq 1\}$ *soit relativement compact dans* $\Pi_{\hat{\phi}}[\Pi_\phi(S)]$, *il suffit que* $(\bar{\alpha}_N)_{N \geq 1}$ *vérifie les conditions suivantes:*

(5.2.1) *Il existe* $\delta > 0$, *tel que* $\sup_{N \geq 1} \langle \phi^{1+\delta}, \bar{\alpha}_N \rangle < +\infty$

(5.2.2) *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un compact* $K_\varepsilon \subset S$, *tel que*

$$\sup_{N \geq 1} \bar{\alpha}_N(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$$

Soit $\psi : \begin{cases} \Pi_\phi(S) \to R(\psi) \subset \mathcal{M}_b^+(S) , \\ P \mapsto \phi \cdot P \end{cases}$

où $\phi \cdot P$ est défini par

$$\forall A \in \mathcal{B}(S) \ , \quad \phi \cdot P(A) = \langle 1_A \cdot \phi, P \rangle$$

et $R(\psi)$, qui est l'image de $\Pi_\phi(S)$ par ψ , est muni de la topologie trace de $\mathcal{M}_b^+(S)$.

<u>Lemme 5.3</u>. *ψ est un homéomorphisme.*

<u>preuve</u>: ψ est surjectif par définition et est injectif, puisque:
$\forall P,Q \in \Pi_\phi(S)$, $\phi \cdot P = \phi \cdot Q \Rightarrow \phi \cdot |P-Q| = 0 \Rightarrow P = Q$ (en raison de 5.1)
ψ est continu, puisque: $\forall n \geq 1$, $\forall g_1, \dots, g_n \in C_b(S)$, $\forall \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$, $\forall Q_0 \in R(\psi)$,

$$\psi^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{Q \in R(\psi), \ |\langle g_i, Q - Q_0 \rangle| < \varepsilon_i\}\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \{P \in \Pi_\phi(S), \ |\langle \phi g_i, P - \psi^{-1}(Q_0) \rangle| < \varepsilon_i$$

et: $g \in C_b(S) \Rightarrow \phi q \in C_\phi(S)$

On montre la continuité de ψ^{-1} , de manière analogue, en utilisant l'injectivité de ψ et: $f \in C_\phi(S) \Rightarrow \frac{f}{\phi} \in C_b(S)$ □

<u>Lemme 5.4</u>. *$\Pi_\phi(S)$ est un espace polonais.*

<u>preuve</u>: S est un espace polonais implique que $\mathcal{M}_b^+(S)$ est aussi un espace polonais ([Bou], §5, n° 4, proposition 10). Compte tenu du lemme 5.3, il nous reste à prouver que $R(\psi)$ est séquentiellement fermé. Supposons que:
$\forall n \geq 1$, $Q_n \in R(\psi)$ et $Q_n \underset{n\to\infty}{\to} Q$ (étroitement dans $\mathcal{M}_b^+(S)$) .

On note $P = \frac{1}{\phi} \cdot Q$, alors: $P \in \Pi_\phi(S)$ et $\psi(P) = Q$.

En effet: $\langle\phi,P\rangle = \langle 1,Q\rangle < +\infty$, et

$1 = \langle 1,\psi^{-1}(Q_n)\rangle = \langle\frac{1}{\phi}, Q_n\rangle \underset{n\to\infty}{\to} \langle\frac{1}{Q},Q\rangle = \langle 1,P\rangle$,

puisque: $5.1 \Rightarrow \frac{1}{\phi} \in C_b(S)$. Finalement, il est clair que $\psi(P) = Q$ □

Lemme 5.5. *Une partie* H *de* $\Pi_\phi(S)$ *est relativement compacte si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes:*

(5.5.1) $\sup\{\langle\phi,P\rangle \quad P \in H\} < +\infty$

(5.5.2) $\forall\varepsilon > 0$, $\exists K_\varepsilon \subset S$, K_ε compact, tel que

$$\sup\{\langle 1_{S\setminus K_\varepsilon}\phi,P\rangle,\ P \in H\} \le \varepsilon$$

preuve: Soit H une partie relativement compacte de $\Pi_\phi(S)$, alors $\psi(H)$ est relativement compacte dans $R(\psi)$, et du fait que $R(\psi)$ est fermé, $\psi(H)$ est relativement compacte dans $\mathcal{M}_b^+(S)$. Réciproquement, l'image par ψ^{-1} d'une partie $\mathcal{H}$ de $R(\psi)$, et relativement compacte dans $\mathcal{M}_b^+(S)$, est une partie relativement compacte de $\Pi_\phi(S)$. D'autre part, puisque S est polonais, les parties relativement compactes de $\mathcal{M}_b^+(S)$ sont caractérisées par le condition de Prokhorov ([Bou], §5, n°5, th. 2), on peut dont énoncer:

$\mathcal{H}$ est relativement compact dans $R(\psi)$ $\Leftrightarrow$

$((\mathcal{H} \subset R(\psi))$ et $(\sup\{\langle 1,Q\rangle , Q \in \mathcal{H}\} < +\infty$ et $(\forall\varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \subset S$, K_ε compact, t.q.: $\sup\{Q(S\setminus K_\varepsilon), Q \in \ \} \le \varepsilon))$.

On conclut, en écrivant: $Q = \phi\cdot\psi^{-1}(Q)$ □

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la proposition 5.2.

preuve de la proposition 5.2

D'après le lemme 5.5, on veut montrer:

(5.2.3) $$\sup_{N\geq 1} <\hat{\phi},\mathcal{L}(\alpha_N)> = \sup_{N\geq 1} \int_{\Pi_\phi(S)} <\phi,P> \mathcal{L}(\alpha_N)(dP) < +\infty$$

(5.2.4) $\forall \varepsilon > 0, \exists \hat{K}_\varepsilon \subset \Pi_\phi(S)$, $\hat{K}_\varepsilon$ compact, tel que:

$$\sup_{N\geq 1} < 1_{\Pi_\phi(S)\setminus\hat{K}_\varepsilon}\cdot\hat{\phi},\mathcal{L}(\alpha_N)> = \sup_{N\geq 1} \int_{\Pi_\phi(S)\setminus\hat{K}_\varepsilon} <\phi,P> \mathcal{L}(\alpha_N)(dP) \leq \varepsilon$$

Or (5.2.5 et 5.2.6) $\Rightarrow$ (5.2.3 et 5.2.4), avec:

(5.2.5) $\exists\, \delta > 0$, t. q. $$\sup_{N\geq 1} \int_{\Pi_\phi(S)} <\phi,P>^{1+\delta} (\alpha_N)(dP) < +\infty$$

(5.2.6) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \tilde{K}_\varepsilon \subset \Pi_\phi(S)$, $\tilde{K}_\varepsilon$ compact, tel que

$$\sup_{N\geq 1} \mathbb{P}(\alpha_N \not\in \tilde{K}_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

En effet: 5.2.5 $\Rightarrow$ 5.2.3 (inégalité de Hölder)

et (5.2.5 et 5.2.6) $\Rightarrow$ 5.2.4 puisque

$$\sup_{N\geq 1} < 1_{\Pi_\phi(S)\setminus\tilde{K}_\varepsilon}\cdot \hat{\phi}, \mathcal{L}(\alpha_N)> \leq \sup_{N\geq 1} [\mathbb{P}(\alpha_N \not\in \tilde{K}_\varepsilon)]^{\frac{\delta}{1+\delta}}[<\hat{\phi}^{1+\delta},\mathcal{L}(\alpha_N)>]^{\frac{1}{1+\delta}} \quad \text{(Hölder)}$$

$$\leq \varepsilon^{\frac{\delta}{1+\delta}}(\sup_{N\geq 1} <\hat{\phi}^{1+\delta},\mathcal{L}(\alpha_N)>)^{\frac{1}{1+\delta}}$$

Donc il suffit de montrer que: (5.2.1 et 5.2.2) $\Rightarrow$ (5.2.5 et 5.2.6),

5.2.1 $\Rightarrow$ 5.2.5, puisque

$$\sup_{N\geq 1} \int_{\Pi_\phi(S)} <\phi,P>^{1+\delta}\mathcal{L}(\alpha_N)(dP) \leq \sup_{N\geq 1} \int_{\Pi_\phi(S)} <\phi^{1+\delta},P>\mathcal{L}(\alpha_N)(dP) = \sup_{N\geq 1} <\phi^{1+\delta},\bar{\alpha}_N>$$

(5.2.1 et 5.2.2) $\Rightarrow$ 5.2.6

On fixe $\varepsilon > 0$. (5.2.1 et 5.2.2) implique:

$$\sup_{N\geq 1} \langle \phi , \bar{\alpha}_N \rangle = k < +\infty \quad \text{et}$$

$$\forall j \geq 1 , \exists K_j \subset S , \quad K_j \text{ compact, t.q.}$$

$$\sup_{N\geq 1} \langle 1_{S\setminus K_j} \phi , \bar{\alpha}_N \rangle \leq \varepsilon 2^{-2j-1}$$

D'après l'inégalité de Tchebitchev:

$$\forall j, \quad N \geq 1, \quad \mathbb{P}(\langle 1_{S\setminus K_j} \phi , \alpha_N \rangle > 2^{-j}) \leq \varepsilon 2^{-j-1}$$

Donc en posant: $\mathcal{K} = \bigcap_{j\geq 1} \{P \in \Pi_\phi(S), \langle 1_{S\setminus K_j} \phi , P\rangle \leq 2^{-j}\} \cap \{P \in \Pi_\phi(S), \langle \phi , P\rangle \leq \frac{2k}{\varepsilon}\}$

on obtient:

$$N \geq 1, \quad \mathbb{P}(\alpha_N \in \mathcal{K}) \leq \sum_{j\geq 1} \mathbb{P}(\langle 1_{S\setminus K_j} \phi , \alpha_N\rangle > 2^{-j}) + \mathbb{P}(\langle \phi , \alpha_N\rangle > \frac{2k}{\varepsilon})$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\sup_{N\geq 1} \langle \phi , \bar{\alpha}_N\rangle}{k} = \varepsilon$$

on conclut en remarquant que, d'après le lemme 5.5, $\mathcal{K}$ est compact. □

<u>Remarque</u>. Pour que $\{\mathcal{L}(\alpha_N), N \geq 1\}$ soit relativement compact dans $\Pi_{\hat{\phi}}[\Pi_\phi(S)]$, il est nécessaire que les conditions suivantes soient vérifiées:

$$\sup_{N\geq 1} < \phi, \bar{\alpha}_N > < +\infty$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists K_\varepsilon \subset S$, K compact, t.q.

$$\sup_{N\geq 1} < 1_{S\setminus K_\varepsilon} \cdot \phi, \bar{\alpha}_N > \leq \varepsilon$$

C'est une conséquence immédiate du lemme 5.5. et de la continuité de l'application:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Pi_{\Phi}[\Pi_\phi(S)] & \to & \Pi_\phi(S) \\ \theta & \mapsto & \displaystyle\int_{\Pi_\phi(S)} P\ \theta(dP) \end{array} \right.$$

<u>Proposition 5.6</u> *Pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, $\underset{\sim}{Y}^k = (Y_i^k)_{1\leq i\leq N_k}$ *est une suite* N_k*-échangeable à valeurs dans* S^{N_k}, *et* $\lim_k N_k = +\infty$ *Pour que* $\{\mathcal{L}(\Lambda_{N_k}(\underset{\sim}{Y}^k)),\ k \geq 1\}$ *soit relativement compact dans* $\Pi_{\Phi}[\Pi_\phi(S)]$, *il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées:*

(5.6.1) *Il existe* $\delta > 0$, *tel que* $\sup_{k\geq 1} < \phi^{1+\delta}, \mathcal{L}(Y_1^k) > < +\infty$

(5.6.2) $\{\mathcal{L}(Y_1^k),\ k \geq 1\}$ *est tendu uniformément dans* $\Pi(S)$.

<u>preuve</u>: C'est une conséquence immédiate du lemme 4.3 et de la proposition 5.2. □

<u>lemme 5.7.</u> *On se donne* $(\phi_\ell)_{\ell\geq 1}$ *une suite d'élements de* $C(S)$ *, telle que:* $\forall \ell \geq 1, \phi_{\ell+1} \geq \phi_\ell$ *et* $\inf_{x\in S} \phi_1 > 0$. $\mathcal{P} = \bigcap_{\ell\geq 1} \Pi_{\phi_\ell}(S)$ *est muni de la topologie affaiblie par* $\bigcup_{\ell\geq 1} C_{\phi_\ell}(S)$. *Pour tout* $\ell \geq 1$ *,* $i_\ell : \mathcal{P} \to \Pi_{\phi_\ell}(S)$ *, désigne l'injection canonique*

$$\hat{\phi}_\ell : \begin{cases} \Pi_{\phi_\ell}(S) & \to \mathbb{R} , \\ P & \mapsto \langle \phi_\ell \, P \rangle \end{cases}$$

$\tilde{\phi}_\ell$ *est la restriction de* $\hat{\phi}_\ell$ *à* $\mathcal{P}$

$\tilde{\mathcal{P}} = \bigcap_{\ell\geq 1} \Pi_{\tilde{\phi}_\ell}(\mathcal{P})$ *est muni de la topologie affaiblie par* $\bigcup_{\geq 1} C_{\tilde{\phi}_\ell}(\mathcal{P})$.

Soit $(\bar{P}_n)_{n\geq 1}$ *une suite de probabilités sur* $(\mathcal{P}, \mathcal{B}(\mathcal{P}))$ *, alors*

(5.7.1) $\bar{P}_n \underset{n\to\infty}{\to} \bar{P}$ *(dans* $\tilde{\mathcal{P}}$ *)* $\Leftrightarrow \forall \ell \geq 1,\ i_\ell \circ \bar{P}_n \underset{n\to\infty}{\to} i_\ell \circ \bar{P}$ (dans $\Pi_{\hat{\phi}_\ell}[\Pi_{\phi_\ell}(S)]$)

(5.7.2) A *est relativement compact dans* $\tilde{\mathcal{P}} \Leftrightarrow \forall \ell \geq 1$ *,* $i_\ell \circ A$ *est relativement compact dans* $\Pi_{\hat{\phi}_\ell}[\Pi_{\phi_\ell}(S)]$.

<u>preuve</u>: 5.7.1 est clair.

Pour obtenir 5.7.2, il est suffisant de prendre pour A une suite de $\tilde{\mathcal{P}}$. Compte tenu de 5.7.1, la condition suffisante est évidente, et la condition nécessaire s'obtient à l'aide d'un procédé d'extraction de suite diagonale. □

b) <u>La relative compacité de $\{\bar{P}_N, N \geq 1\}$</u>

De manière à prouver la relative compacité de $\{\bar{P}_N, n \geq 1\}$ au lemme 5.10, nous allons utiliser la proposition 5.6 et le lemme 5.7, en prenant: $S = C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, $k = N_k = N \to \infty$,

$\underset{\sim}{Y}^k = x^N$, considéré comme variable aléatoire sur $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{dN}) = C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)^N$, et

$$\phi_\ell = \phi_{\ell,p} : \begin{cases} C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d) & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad 1 + \sup_{0 \le t \le \ell} |x(t)|^p \end{cases}$$

Le lemme 5.8 suivant, va nous servir à obtenir des estimations sur les moments de x_1^N , au lemme 5.9, dont nous aurons besoins pour établir 5.6.1 et 5.6.2 dans le cadre décrit précédemment.

Lemme 5.8. *On considère une suite* $(Y^n)_{n \ge 1}$ *de* $\mathcal{D}$*-semi-martingales continues à valeurs* $\mathbb{R}^m$ *, chacun des* Y^n *étant construit sur* $(\Omega^n, (\mathcal{F}_t^n)_{t \ge 0}, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n)$ *et vérifiant: Pour toute fonction* $\psi \in C^2(\mathbb{R}^m)$,

$$M_\psi^n(t,\omega^n) = \psi(Y^n(t)) - \psi(Y^n(0)) - \int_0^t [<\psi'(Y^n(s)), \tilde{b}^n(Y^n(s),s,\omega^n)>$$

$$+ \tfrac{1}{2} \operatorname{tr}(\psi''(Y^n(s))\tilde{a}^n(Y^n(s),s,\omega^n))]ds$$

$$= \int_0^t <\tilde{\sigma}^{n*}(Y^n(s),s,\omega^n)\psi'(Y^n(s)), dw^n(s)>$$

est une martingale localement de carré intégrable, où:

$$\tilde{b}^n : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \Omega^n \to \mathbb{R}^m , \tilde{\sigma}^n : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \times \Omega^n \to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), \tilde{a}^n = \tilde{\sigma}^n \tilde{\sigma}^{n*}$$

et w^n *est un mouvement brownien à valeurs* $\mathbb{R}^m$ *, construit sur* $(\Omega^n, (\mathcal{F}_t^n)_{t \ge 0}, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n)$. *S'il existe* $k_1 > 0$ *, et une suite de processus adaptés* C_t^n *, tels que:*

(5.8.1) $\quad \forall n \ge 1, \ \forall y \in \mathbb{R}^m, \forall \omega^n \in \Omega^n, \forall t > 0$,

$$< y, \tilde{b}^n(y,t,\omega^n)> + \operatorname{tr}(\tilde{a}^n(y,t,\omega^n)) \le k_1(C_t^n + |y|^2)$$

S'il existe $p \geq 4$, *et* $k_2 : t \to k_2(t)$, *tels que*

(5.8.2) $\quad \forall n \geq 1,\ \forall 0 \leq s \leq t\ ,\ E\,|C^n_s|^{\frac{p}{2}} \leq k_2(t)(1 + E(|Y^n(s)|^p))\ ,$

(5.8.3) $\quad \sup_{n\geq 1} E(|Y^n(0)|^p) < +\infty$

alors : $\forall T > 0\ ,\ \sup_{N\geq 1} E(\sup_{0\leq t\leq T} |Y^n(t)|^p) < +\infty$

preuve: Soit $\psi : \begin{cases} \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \\ y \mapsto |y|^2 \end{cases}$, alors pour tout $n \geq 1$, il existe une suite de temps d'arrêt $(\tau^n_k)_{k\geq 1}$, tendant $\mathbb{P}^n$-presque sûrement vers l'infini et telle que:

$$|Y^n(t\wedge\tau^n_k)|^2 = |Y^n_{(0)}|^2 + \int_0^{t\wedge\tau^n_k} [2 <Y^n(s),\ \tilde{b}^n(Y^n(s),s,\omega^n)> + \operatorname{tr} \tilde{a}^n(Y^n(s),s,\omega^n)]ds$$

$$+ M^n_\psi(t\wedge\tau^n_k,\omega^n)$$

où $M^n(t\wedge\tau^n_k,\omega^n) = \int_0^{t\wedge\tau^n_k} 2 <\tilde{\sigma}^{n*}(Y^n(s),s,\omega^n)(Y^n_s), dw^n(s)>$

est une martingale réelle d'espérance nulle. On note $q = \frac{p}{2}$.

$$|Y^n(t\wedge\tau^n_k)|^p \leq 3^{q-1}\{|Y^n(0)|^p + (2k_1)^q[\int_0^t (C^n_{s\wedge\tau^n_k} + |Y^n(s\wedge\tau^n_k)|^2 ds]^q + |M^n(t\wedge\tau^n_k)|^q\}$$

(5.8.4)
$$\leq 3^{q-1}\ |Y^n(0)|^p + (2k_1)^q(2t)^{q-1}(\int_0^t |C^n_{s\wedge\tau^n_k}|^q ds + \int_0^t |Y^n(s\wedge\tau^n_k)|^p ds)$$

$$+ |M^n_\psi(t\wedge\tau^n_k,\omega^n)|^q\}$$

En utilisant l'inégalité de Doob $(q > 1)$ on obtient:

$\forall o \le t \le T,$

$$E\left(\sup_{0\le v\le t} |Y^n(v\wedge\tau_k^n)|^p\right) \le C_1\, E(|Y^n_{(0)}|^p) + C_2\, E(|M^n_\psi(T\wedge\tau^n_k,\cdot)|^q) + C_3(T)\int_0^t E\left(\sup_{0\le v\le s}|Y^n(v\wedge\tau^n_k)|^p\right)ds$$

D'après le lemme de Gronwald:

$$\forall o \le t \le T\ ,\quad E\left(\sup_{0\le v\le t}|Y^n(v\wedge\tau^n_k)|^p\right) \le \left(C_1\, E(|Y^n(0)|^p) + C_2\, E(|M^n(T\wedge\tau^n_k,\cdot)|^q)\right)\exp(TC_3(T))\ .$$

Et du lemme de Fatou, en faisant $k\to\infty$, on tire:

$$\forall T\ge 0,\quad \sup_{n\ge 1} E\left(\sup_{0\le t\le T}|Y^n(t)|^p\right) \le C_4(T)\left(\sup_{N\ge 1} E(|Y^n_{(0)}|^p) + \sup_{k,n\ge 1} E(|M^n_\psi(T\wedge\tau^n_k,\cdot)|^q)\right) \tag{5.8.5}$$

Donc, il nous reste à trouver une estimation de

$$\sup_{k,n\ge 1} E(|M^n(t\wedge\tau^n_k,\cdot)|^q)$$

Posons $\xi^{n,k}(t) = M^n_\psi(t\wedge\tau^n_k,\omega^n)$. Le lemme d'Ito $(q\ge 2)$, nous donne l'existence d'une suite de $(\mathfrak{F}^n_t)_{t\ge 0}$- temps d'arrêt: $(\theta^n_\ell)_{\ell\ge 1}$, tendant $\mathbb{P}^n$-presque sûrement vers l'infini et telle que

$$|\xi^{n,k}(t\wedge\theta^n)|^q = \int_0^{t\wedge\tau_k^n\wedge\theta_\ell^n} 2q(q-1)\,|\xi^{n,k}(s)|^{q-2}\,|\sigma^{n*}(Y^n(s),s,\omega^n)\,(Y^n(s))|^2 ds + N^{n,k}(t\wedge\theta_\ell^n)$$

où $N^{n,k}(t\wedge\theta_\ell^n)$ est une martingale d'espérance nulle, donc:

$$|\xi^{n,k}(t\wedge\theta_\ell^n)|^q \le 2q(q-1)\int_0^{t\wedge\tau_k^n\wedge\theta_\ell^n} |\xi^{n,k}(s)|^{q-2} k_1 |Y^n(s)|^2 (C_s^n + |Y^n(s)|^2) ds + N^{n,k}(t\wedge\theta_\ell^n)$$

(5.8.6)

$$\le 3k_1 q(q-1)\int_0^{t\wedge\tau_k^n\wedge\theta_\ell^n} |\xi^{n,k}(s)|^{q-2}((C_s^n)^2 + |Y^n(s)|^4) ds + N^{n,k}(t\wedge\theta_\ell^n)$$

A l'aide de 5.8.4 avec $p = 4$ et du lemme de Gronwald, on a :

(5.8.7)
$$\forall t \ge 0,\quad |Y^n(t\wedge\tau_k^n)|^4 \le C_5(t)\left(|Y^n_{(0)}|^4 + \int_0^t (C^n_{s\wedge\tau_k^n})^2 ds + |\xi^{n,k}(t)|^2\right)$$

Par conséquent:

$$E|\xi^{n,k}(t\wedge\theta_\ell^n)|^q \le C_6(t)\left(1 + \sup_{n\ge1} E|Y^n_{(0)}|^4 + \sup_{n\ge1}\sup_{0\le s\le t} E(C_s^n)^2\right)\left(1 + \int_0^t E|\xi^{n,k}(s\wedge\theta_\ell^n)|^q ds\right)$$

qui à l'aide des lemmes de Gronwald et Fatou permet d'obtenir:

(5.8.8)
$$\sup_{n,k\ge1} E|\xi^{n,k}(t)|^q \le C_7\left(\sup_{n\ge1} E|Y^n_{(0)}|^4,\ \sup_{n\ge1}\sup_{0\le s\le t} E[(C_s^n)^2]\right)\exp\left(t\,C_7(\ ,\ )\right)$$

Compte tenu de 5.8.5 et 5.8.8, il nous reste à prouver:

(5.8.9)
$$\sup_{n\ge1}\sup_{0\le s\le t} E[(C_s^n)^2] < +\infty,\ \forall t \ge 0$$

En prenant $q = 2$ dans 5.8.6 et en le combinant avec 5.8.7, on obtient:

$$E(|Y^n(t\wedge\tau_k^n\wedge\theta_\ell^n)|^4) \le C_8(t)(1+E(|Y^n_{(0)}|^4)) + C_9(t)\int_0^t E(|Y^n(s\wedge\tau_k^n\wedge\theta_\ell^n)|^4)\,ds$$

Par conséquent:

$$\sup_{n\ge 1} E(|Y^n(t)|^4) \le C_{10}(t)(1+\sup_{n\ge 1}E(|Y^n_{(0)}|^4))$$

qui avec 5.8.2 nous permet d'écrire 5.8.9 :

$$\sup_{n\ge 1}\ \sup_{0\le s\le t} E[(C_s^n)^2] \le C_{11}(t)(1+\sup_{n\ge 1}E(|Y^n_{(o)}|^4)) < +\infty \qquad \square$$

Au lemme 5.9, nous allons appliquer le lemme 5.8 à la suite de processus continus à valeurs $\mathbb{R}^d$: $(x_1^N)_{N\ge 1}$, où l'on note pour tout élément y^N de $(\mathbb{R}^d)^N$ ou de $C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)^N$:

$$y^N = (y_j^N)_{1\le j\le N} \ ; \quad y_j^N \in \mathbb{R}^d \quad \text{ou} \quad C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d),$$

D'après le lemme d'Ito appliqué à une fonction $\Psi\in C^2(\mathbb{R}^{dN})$ de la forme : $\Psi(x^N) = h(x_1^N)$, $\forall x^N \in \mathbb{R}^d$, $h\in C^2(\mathbb{R}^d)$, on a $\forall h\in C^2(\mathbb{R}^d)$ $\forall t\ge 0$,

$$h(x_1^N(t)) = h(x_1^N(0)) + \int_0^t [\langle h'(x_1^N(s)),\, b[x_1^N(s),\bar{X}_N(s)]\rangle + \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(h''(x_1^N(s)\sigma\sigma^*[x_1^N(s),\bar{X}^N(s)]\,])]ds$$
$$+ \quad M_h^N(t)$$

où $M_h^N(t) = \int_0^t \langle\sigma^*[x_1^N(s),\bar{X}^N(s)]h'(x_1^N(s)),dw_1(s)\rangle$ est une martingale localement de carré intégrable.

Nous sommes donc dans les conditions d'application du lemme 5.8, avec pour tout $N \geq 1$: $(\Omega^N, (\mathcal{F}_t^N)_{t\geq 0}, \mathcal{F}^N, \mathbb{P}^N) = (\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
$Y^N = x_1^N$, $w^N = w_1$, $\tilde{b}^N(Y^N(t), t, \omega^N) = b[x_1^N(t), \bar{X}_N(t)]$ et
$\tilde{\sigma}^N(Y^N(t), t, \omega^N) = \sigma[x_1^N(t), \bar{X}_N(t)]$

<u>lemme 5.9</u>. *Sous les hypothèses* $H_{1,3,4,5,6,8}$ *(de la proposition 3.3), pour que pour tout* $T \geq 0$, $\sup_{N\geq 1} E \sup_{0\leq t\leq T} |x_N^1(t)|^p < +\infty$ $(p \geq 4)$ *il suffit que*

(5.9.1) $\quad \sup_{N\geq 1} E(|x_N^1(0)|^p) < +\infty$

<u>preuve</u>: Pour pouvoir appliquer le lemme 5.8, il reste à vérifier les conditions 5.8.1 et 5.8.2. On vérifie aisément que:
$\forall N \geq 1$, $\forall y \in \mathbb{R}^{dN}$

$$< y_1, b[y_1, \Lambda_N(y)]> \leq \; <y_1, v(y_1)> + |y_1| f_1(y_1) + \tfrac{1}{2}|y_1|^2 + \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{N} f_2(Y_j)^2$$

et

$$tr(\sigma\sigma^*[y_1, \Lambda_N(y)]) \leq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} [tr\ \sigma\sigma^*(y_1, y_j)]$$

H_5, H_6 et H_8 nous permettent de prendre: $C_t^N = 1 + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} |x_j^N(t)|^2$

dans 5.8.1. Or, $\forall t \geq 0$, $\forall p \geq 0$, $\forall N \geq 1$,

$$E(|C_t^N|^{\frac{p}{2}}) \leq C(1 + E([\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} |x_j^N(t)|^2]^{\frac{p}{2}}))$$

$$\leq C(1 + E(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} |x_j^N(t)|^p)) \qquad \text{(convexité de } x^{\frac{p}{2}})$$

$$= C(1 + E(|x_1^N(t)|)^p \qquad \text{(échangeabilité)}$$

Ce qui donne 5.8.2 □

Lemme 5.10. *Sous les hypothèses* $H_{1,3,4,5,6,8}$ *et* H_7 *, et si pour* $p \geq \max(4,r)$ *(r apparait dans l'hypothèse* H_7 *), on a*

(5.10.1) $\exists \delta > 0, \quad \sup_{N\geq 1} E\langle |\cdot|^{p+\delta}, \bar{X}_N(0)\rangle < +\infty$

alors: $\{\bar{P}_N, N \geq 1\}$ *est relativement compacte dans* $\tilde{\mathcal{P}}_p$.

preuve: Compte tenu du lemme 5.7 et de la proposition 5.6, nous devons montrer:

(5.10.2) $\exists \delta > 0, \forall T \geq 0 \ , \quad \sup_{N\geq 1} \langle (\phi_{T,p})^{1+\delta'}, \mathcal{L}(x_1^N)\rangle < +\infty$

et

(5.10.3) $\{\mathcal{L}(x_1^N), N \geq 1\}$ est tendu uniformément dans $\Pi[C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]$

or, $\sup_{N\geq 1} \langle (\phi_{T,p})^{1+\delta'}, \mathcal{L}(x_1^N)\rangle \leq C(\delta') \sup_{N\geq 1} E(\sup_{0\leq t\leq T} |x_1^N(t)|^{p+\delta' p})$

donc, en prenant $\delta' = \frac{\delta}{p}$, 5.10.2 se déduit de 5.10.1 et du lemme 5.9. Puisque $p \geq \max(4,r)$, 5.10.1 implique 4.3.1 avec $\bar{b}^N(Y_N(t^-),t,\omega^N) = b[x_1^N(t),\bar{X}^N(t)]$ et $\bar{a}^N(Y_N(t^-),t,\omega^N) = \sigma\sigma^*[x_1^N(t),\bar{X}^N(t)]$

4.3.2 est évident, puisque $A^N(t) = t \ , \ \forall N \geq 1$. Par conséquent la proposition 4.3 nous donne la tension uniforme de $\{\mathcal{L}(x_1^N), N \geq 1\}$ dans $\Pi[D(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]$. Mais (4.3.1 et 4.3.2) implique la condition d'Aldous, et de ce fait, toute valeur d'adhérence de $\{\mathcal{L}(x_1^N), N \geq 1\}$ est dans $\Pi[C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]$ (cf [JoM], lemme 3.2). On en déduit 5.10.3, par un argument classique. □

6. Identification et unicité

6.a) Identification des valeurs d'adhérence de $(\bar{P}_N)_{N\,1}$

On note $\Pi_p(\mathbb{R}^d) = \Pi_{\chi_p}(\mathbb{R}^d)$, où $\chi_p : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \to \mathbb{R}^+ , \quad p \geq 0 \\ x & \mapsto 1 + |x|^p \end{cases}$

On définit $L : C_K^2(\mathbb{R}^d) \times \Pi_1(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}^d}$, par:

$\forall \psi \in C_K^2(\mathbb{R}^d)$, $\forall \nu \in \Pi_1(\mathbb{R}^d)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$,

$$L(\psi,\nu)(x) = \langle b[x,\nu],\psi'(x)\rangle + \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(\sigma\sigma^*[x,\nu]\psi''(x))$$

Soit $\mu \in \Pi_1(\mathbb{R}^d)$, on dit que $P_\mu \in \Pi(C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d))$ est solution du problème de martingale non-linéaire: (L,μ) si:

$P_\mu(X(0) \in A) = \mu(A)$, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$\forall \psi \in C_K^2(\mathbb{R}^d)$, $\psi(X(t)) - \psi(X(0)) - \int_0^t L(\psi,X(s) \circ P_\mu)(X_s)ds$

est une P_μ-martingale.

Lemme 6.1. *Sous les hypothèses du lemme* 5.10, *si* $\mathcal{E}_\mu$ *est l'ensemble des solutions du problème de martingale non-linéaire* (L,μ), *si* $\bar{Q}$ *est une valeur d'adhérance de* $(\bar{P}_N)_{N \geq 1}$, *et si*

(6.1.1) $\bar{Q}(\{ m \in \Pi(C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)), X(0) \circ m = \mu\}) = 1$, alors $\bar{Q}(\mathcal{E}_\mu) = 1$.

preuve: On considère la fonction $F : \mathcal{P}_p \to \mathbb{R}$, définie par $\forall m \in \mathcal{P}_p$, $F(m) = \langle m,[\psi(X(t)) - \psi(X(s)) - \int_0^t L(\psi,X(u) \circ m)du]\, G \rangle$

où : $0 \le s \le t$, $\psi \in C_K^2(\mathbb{R}^d)$ et $G \in C_b[C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]$ est $\mathcal{F}_s$-mesurable comme en [Szn], nous allons montrer que: $F(m) = 0$, $\bar{Q}$-presque sûrement ce qui avec 6.1.1 démontre le lemme.

F est continue pour $p \ge 1$, puisque: $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $f(x,\cdot) \in C_{\chi_1}(\mathbb{R}^d)$, ($F$ est définie par $b(x,y) = v(x) + f(x,y)$), et:

$$\forall k \in \mathbb{N}^* , \quad \langle F(\cdot)^2 \wedge k,\bar{Q}\rangle = \lim_{N\to\infty} \langle F(\cdot)^2 \wedge k,\bar{P}_N\rangle$$

$$= \lim_{N\to\infty} [\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (\psi(x_i^N(t)) - \psi(x_i^N(s)) - \int_s^t L(\psi,\Lambda_N(x^N(u)))du)G(x_i^N)\}^2 \wedge k]$$

$$\le \varlimsup_{N\to\infty} [\frac{N-1}{N}\{(H_\psi^{N,1}(t) - H_\psi^{N,1}(s))(H_\psi^{N,2}(t) - H_\psi^{N,2}(s))G(x_1^N)G(x_2^N)\}$$

$$+ \frac{1}{N}(H_\psi^{N,1}(t) - H_\psi^{N,1}(s))^2 G(x_1^N)^2]$$

avec: $H_\psi^{N,i}(t) = \psi(x_i^N(t)) - \psi(x_i^N(0)) - \int_0^t L(\psi,\Lambda_N(x^N(s)))(x_i^N(s))ds$,

qui est une martingale localement de carré intégrable telle que:

$$\langle H_\psi^{N,i},H_\psi^{N,j}\rangle = 0 \quad \text{si} \quad i \ne j \quad \text{(processus de Meyer)},$$

et

$$\sup_{N\ge1} E[(H_\psi^{N,i}(t))^2] \le C_1(\psi,t) \sup_{N\ge1}(E \sup_{0\le s\le t} |x_i^N(s)|^2 + E\sup_{0\le s\le t} \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|x_j^N(s)|^2)$$

$$\le C_2(\psi,t)(1 + \sup_{N\ge1} E \sup_{0\le s\le t} |x_1^N(s)|^2) < +\infty$$

Par conséquent: $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\langle F(\cdot)^2 \wedge k,\bar{Q}\rangle = 0$. On conclut avec Beppo-Levi . □

6.b) <u>Unicité de le valeur d'adhérence de $(\bar{P}_N)_{N\geq 1}$</u>

<u>lemme 6.2.</u> *Sous les hypothèses* (H) *, pour tout* $\mu \in \Pi_p(\mathbb{R}^d)$*,* *avec* $p > \max(4,24)$ *,* $\mathcal{E}_\mu$ *est un singleton.*

<u>Un résultat préliminaire</u>.

$W = \{f, f \in C(\mathbb{R}^d), \|f\|_W < +\infty\}$, où

$$\|f\|_W = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{1+|x|} + \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^d \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$$

$(W, \|\cdot\|_W)$ est un espace normé. On note W' son dual et $\|\cdot\|_{W'}$ la norme de W'. Il est clair que $\Pi_1(\mathbb{R}^d) \subset W'$. D'autre part si X_1 et X_2 sont des variables aléatoires sur $\mathbb{R}^d$, telles que $E|X_1| + E|X_2| < +\infty$ alors:

(6.2.1) $\|\mathcal{L}(X_1) - \mathcal{L}(X_2)\|_{W'} \leq E|X_1 - X_2|$, en effet

$$|\langle f, \mathcal{L}(X_1) - \mathcal{L}(X_2)\rangle| = |E(f(X_1) - f(X_2))|$$

$$\leq \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} E|X_1 - X_2| \leq \|f\|_W E|X_1 - X_2|$$

<u>preuve du lemme 6.2</u>

Puisque $\{\bar{P}_N, N \geq 1\}$ est relativement compact (lemme 6.1), on a: $\mathcal{E}_\mu \neq \emptyset$. Soit $m \in \mathcal{E}_\mu$, la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} x(m)_t = \xi_0 + \int_0^t b[x(m)_s, X(s)\circ m]ds + \int_0^t \sigma[x(m)_s, X(s)\circ m]dw_s \\ \mathcal{L}(\xi_0) = \mu \end{cases}$$

existe et est unique (voir la proposition 3.1). Le problème de martingale linéaire $(L(\cdot,m),\mu)$ admet par conséquent une unique solution. Puisque $m \in \mathcal{E}_\mu$, cette solution est nécessairement m. Par conséquent, tout élément m de $\mathcal{E}_\mu$ admet une représentation trajectorielle: $x(\dot{m})$.

Soit m_1 et m_2 deux éléments de $\mathcal{E}_\mu$, et $x_1 = x(m_1)$ et $x_2 = x(m_2)$: leurs representations trajectorielles. Pour prouver le lemme il suffit de montrer:

$$(6.2.2) \quad \forall t \geq 0,\ E|x_1(t) - x_2(t)|^2 = 0 .$$

A l'aide du lemme d'Ito et du lemme de Fatou, on obtient

$$E(|x_1(t)-x_2(t)|^2) \leq 2\int_0 <x_1(s)-x_2(s), b[x_1(s),X(s)\circ m_1] - b[x_2(s),X(s)\circ m_1]>ds$$

$$+ 2\int_0^t <x_1(s)-x_2(s), b[x_2(s),X(s)\circ m_1] - b[x_2(s),X(s)\circ m_2]>ds$$

$$+ \int_0^t tr[(\sigma[x_1(s),X(s)\circ m_1] - \sigma[x_2(s),X(s)\circ m_2])$$

$$(\sigma[x_1(s),X(s)\circ m_1] - \sigma[x_2(s),X(s)\circ m_2])^*]ds$$

Ce qui, à l'aide de H_2, H_3 et H_4, donne : $\forall 0 \leq t \leq T$,

$$E(|x_1(t)-x_2(t)|^2) \leq 5K\int_0^t E(|x_1(s)-x_2(s)|^2)ds$$

$$+ K \sup_{0\leq s\leq T} \|b(x_2(s),\cdot)\|_W^2 \int_0^t \|X(s)\circ m_1 - X(s)\circ m_2\|_{W'}^2 ds$$

Or: $\sup\limits_{0\leq s\leq T} \|b(x_2(s),\cdot)\|_w^2 \leq \sup\limits_{0\leq s\leq t} E[(2K+|v(x_2(s)| + f_1(x_2(s)))^2]$

$$\leq C_1(1+\sup_{0\leq s\leq T}|x_2(s)|^{2r}) < +\infty$$

Compte tenu de 6.2.1, on a:

$E(|x_1(t) - x_2(t)|^2) \leq C_2 \int_0^t E(|x_1(s) - x_2(s)|^2)\, ds$, ce qui donne 6.2.2, avec le lemme de Gronwald. $\square$

7. Quelques résultats supplémentaires

7a) En effectuant une démonstration analogue à celle du théorème 2.2, en remplaçant la proposition 3.1 par celle énoncée à la remarque 3.2 et en obtenant directement la tension de $\{\mathcal{L}(x_1^N), N \geq 1\}$, à l'aide de la proposition 2.3 de [JoM], on obtient le théorème 7.1 suivant, où les hypothèses (H) sont renforcées, mais où les conditions initiales sont dans L^2.

Théorème 7.1. *Les hypothèses* (H) *sont vérifiées, mais:* H_2 *est renforcé par:*

$\forall x,y,z,\ |b(x,y) - b(z,y)| \leq K|x - z|$, $v = 0$ *et* $r = 1$ *dans* H_7

Si pour tout $N \geq 1$, $\mathcal{L}(x^N(0)) \in L^2(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *alors, l'équation* 2.1 *admet une unique solution trajectorielle dans* $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{dN})$.

De plus, si pour $\mu \in \Pi(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{L}(\bar{X}_N(0))_{N\to\infty} \to \delta_\mu$ dans $\Pi[\Pi(\mathbb{R}^d)]$, *et si pour* $p \geq 2$, $\sup_{N\geq 1} E\int_{\mathbb{R}^d} |x|^p[\bar{X}_N(0)](dx) < +\infty$

alors, pour tout $0 \leq q < p$, $\mathcal{L}(\bar{X}_N) \underset{\to\infty}{\to} \delta_P$ *dans* $\tilde{\mathcal{P}}_q$,

où P *est l'unique solution de* 2.2.5.

7b) La forme particulière des fonctions:

$$b : \begin{cases} \mathbb{R}^d \times \Pi(\mathbb{R}^d) & \to \quad \mathbb{R}^d \\ (x,\mu) & \mapsto \quad \langle b(x,\cdot),\mu \rangle \end{cases}$$

et

$$\sigma : \begin{cases} \mathbb{R}^d \times \Pi(\mathbb{R}^d) & \to \quad S_d \\ (x,\mu) & \mapsto \quad \langle \sigma(x,\cdot),\mu \rangle \end{cases}$$

n'intervient qu'en 3.3, 5.9 et 6.2.

On généralise immédiatement les résultats des théorèmes 2.2, 7.1, 7.2 et de la proposition 7.5, au cas où les systèmes finis de diffusions sont de la forme:

$$dx_i^N(t) = \underset{\sim}{b}\,[x_i^N(t),\bar{X}_N(t)]dt \;+\; \underset{\sim}{\sigma}[x_i^N(t,\bar{X}_N(t)]dw_i(t)$$

où $\underset{\sim}{b}[x,\mu]$ et $\underset{\sim}{\sigma}[x,\mu]$ vérifient les mêmes propriétés que celles que les hypothèses (H) induisent sur $\langle b(x,\cdot),\bar{X}_N\rangle$ et $\langle\sigma(x,\cdot),\bar{X}_N\rangle$, avec $\bar{X}_N = \mu$.

En particulier, on peut avoir

$$\underset{\sim}{b}[x,\bar{X}_N] = \int_{(\mathbb{R}^d)^n} b(x,y_1,\dots,y_n)\bar{X}_N(dy_1)\otimes\dots\otimes\bar{X}_N(dy_n)$$

et

$$\underset{\sim}{\sigma}[x,\bar{X}_N] = \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \sigma(x,y_1,\dots,y_n)\bar{X}_N(dy_1)\otimes\dots\otimes\bar{X}_N(dy_1)$$

où $b(x,y)$ et $\sigma(x,y)$ vérifient la généralisation des hypothèses (H) où l'on remplace y par $(y_1,\dots,y_n)\in(\mathbb{R}^d)^n$.

7c) <u>Une généralisation des théorèmes 2.2 et 7.1</u>

<u>Théorème 7.2</u>. *Si les hypothèses du théorème* 2.2 *(resp.* 7.1 *) sont vérifiées, si* $\mathcal{L}(\bar{X}_N(0)) \underset{N\to\infty}{\to} \bar{P}_0$ *dans* $\Pi[\Pi(\mathbb{R}^d)]$,

et si pour $p \geq \max(4,2r)$ *(resp.* $p \geq 2$*)*

$$\sup_{N\geq 1} E\int_{\mathbb{R}^d} |x|^p[\bar{X}_N(0)](dx) < +\infty$$

alors

$$(7.2.1) \qquad \mathcal{L}(\bar{X}_N) \underset{N\to\infty}{\to} \bar{P} = \int_{\Pi(\mathbb{R}^d)} \delta_{P(\mu)} \bar{P}_0(d\mu) \text{ dans } \Pi\{\Pi[C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]\}$$

où $P(\mu) \in \Pi[C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]$ *est l'unique solution de* 2.2.5*, telle que* $X(0) \circ P(\mu) = \mu$. *De plus, si le support de* $\bar{P}_0$ *est fini, alors la convergence* 7.2.1 *a lieu dans* $\tilde{\mathcal{P}}_q$ *, pour tout* $0 \le q < p$.

<u>preuve</u>: Le théorème de représentation de Skorokhod nous permet de choisir $(x^N(0))_{N\ge 1}$, tel que: $\bar{X}_N(0) \underset{N\to\infty}{\overset{p.s.}{\to}} \bar{X}(0)$, avec $\mathcal{L}(\bar{X}(0)) = \bar{P}_0$.

$$\forall F \in C(\mathcal{P}_p) , < F,\mathcal{L}(\bar{X}_N) > = E(F(\bar{X}_N)) = E[E(F(\bar{X}_N) \mid \bar{X}(0))]$$

$$= \int_{\Pi(\mathbb{R}^d)} [\int_{\mathfrak{a}} F(\bar{X}_N(\xi)) \mathbb{P}(d\xi \mid \bar{X}(0) = \mu)] \bar{P}_0(d\mu)$$

Le théorème 2.2 (resp 7.1), nous donne:

$$\forall \mu \in \Pi_p(\mathbb{R}^d), \forall F \in \bigcup_{T\ge 0} C_{\tilde{\varphi}_{T,p}}(\mathcal{P}_p) ,$$

$$\int_{\mathfrak{a}} F(\bar{X}_N(\xi)) \mathbb{P}(d\xi \mid \bar{X}(0) = \mu) \underset{N\to\infty}{\to} F(P(\mu))$$

Si F est bornée ou si $\bar{P}_0$ a un support fini, la famille:

$\{\mu \to \int_{\Omega} F(\bar{X}_N(\xi))\, \mathbb{P}(d\xi \mid \bar{X}(0) = \mu),\ N \geq 1\}$ est $\bar{P}_0$-équiintégrable et:

$$<F, \mathcal{L}(\bar{X}_N)> \underset{N \to \infty}{\to} \int_{\Pi(\mathbb{R}^d)} F(P(\mu))\, \bar{P}_0(d\mu) = <F, \bar{P}> \qquad \square$$

7d) <u>Une autre formulation de la convergence étroite de $\mathcal{L}(\bar{X}_N)$</u>

On suppose que, pour tout $N \geq 1$, $(x_1^N(0), \dots, x_N^N(0))$ est N-échangeable, alors d'après le théorème 4.2:

$$\mathcal{L}(\bar{X}_N) \underset{N\to\infty}{\to} \bar{P} \quad \text{(étroitement dans } \Pi\{\Pi[C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]\})$$

équivaut à:

(7.3) $\forall m \geq 1,\ \mathcal{L}(x_1^N, \dots, x_m^N) \underset{N\to\infty}{\to} \mathcal{L}(x_1^\infty, \dots, x_m^\infty)$ (dans $\Pi[C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)^m]$)

où $(x_1^\infty, x_2^\infty, \dots)$ est le mélange d'i.i.d. dirigé par $\bar{P}$.

7e) <u>Propagation du chaos, propagation du mélange</u>

Kac a introduit dans un contexte différent du notre ([Kac]), la notion de propagation du chaos, qui est la suivante: si la condition initiale $x^N(0)$ a pour loi $\mu^{\otimes N}$, à un instant $t > 0$ cette indépendance est détruite, mais lorsque $N = +\infty$, l'indépendance se conserve tout au long de la trajectoire. Pour prouver un tel résultat, on peut montrer que:

$$(7.4)\quad \forall t > 0,\ \lim_{N \to +\infty} E(f_1(x_1^N(t)) \cdot \ldots : f_m(x_m^N(t))) = \prod_{i=1}^{m} E[f_i(x_i^\infty(t))]$$

mais l'échangeabilité (MacKean utilise dans [McK] la loi de 0-1 de Hewitt-Savage) avec le théorème de de Finetti (voir le chapitre 4), et la convergence 7.3, nous permettent d'énoncer à la proposition suivante, un résultat plus fort que 7.4 (voir aussi [Szn] pour un résultat analogue).

<u>Proposition 7.5</u> (Propagation du chaos).

On suppose que pour tout $N \geq 1$, $x^N(0)$ *est* N-*échangeable et que les hypothèses du théorème* 7.2 *sont vérifiées.*

Si $\mathcal{L}(\bar{X}_N(0)) \underset{N\to\infty}{\to} \delta_\mu$ *dans* $\Pi(\mathbb{R}^d)$

(en particulier si $(x^N(0)) = \mu^{\otimes N}$, $\forall N \geq 1$),

alors: $\forall\, m \geq 1, \mathcal{L}(x_1^N, \ldots, x_m^N) \underset{N\to\infty}{\to} P(\mu)^{\otimes m}$ *dans* $\Pi[C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)^m]$

<u>Propagation du mélange</u>

De manière plus générale, la formule 7.2.1 et le théorème de de Finetti, nous disent que si les hypothèses de 7.5 sont vérifiées et si les conditions initiales $x^N(0)$ convergent au sens 4.2.1 vers un mélange d'i.i.d. dirigé par $\bar{P}_0$, alors les trajectoires x_N convergent au sens 4.2.1 vers un mélange d'i.i.d. dirigé par

$$\bar{P} = \int_{\Pi(\mathbb{R}^d)} \delta_{P(\mu)}\, \bar{P}_0(d\mu) .$$

9) Un résultat de fluctuations

Notations. Les notations sont les mêmes qu'au chapitre 8, auxquelles nous ajoutons les suivantes. Nous prenons $d = 1$, pour simplifier. $\Omega = C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

$\mathcal{S}$ désigne l'espace des fonctions à décroissance rapide de $\mathbb{R}$

$\mathcal{S}'$ désigne son dual: l'espace des distributions tempérées.

Pour tout $N \geq 1$, $\alpha_N \geq 0$, $\beta_N \geq 0$ et tout $p \in \Pi(\Omega)$, on définit

$$U_N : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathcal{S}' \\ t \mapsto U_N(t) = \alpha_N [\bar{X}_N(\beta_N t) - p(\beta_N t)] \end{cases}$$

où $\bar{X}_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{i\ 1}^{N} \delta_{x_i^N(t)}$

$\tilde{\Omega} = C(\mathbb{R}^+, \mathcal{S}')$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. U est le processus canonique sur $\tilde{\Omega}$; $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$, $\tilde{\mathcal{F}}$: la famille de tribus canoniques

$\tilde{P}_N = \mathcal{L}(U_N) \in \Pi(\tilde{\Omega})$.

$f[x,\nu] = \langle f_x, \nu\rangle_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}$ où $y \to f_x(y) = f(x,y) \in \mathcal{S}$ et $\nu \in \mathcal{S}'$.

est l'ensemble des fonctions tests:

$$= \bigcup_{k\geq 1} \{ \tilde{\Psi} : \mathcal{S}' \to \mathbb{R},\ \tilde{\Psi}(\cdot) = \psi(\langle f_1 . \rangle, \dots , \langle f_k , . \rangle) ;$$
$$\psi \in C_K^2(\mathbb{R}^k),\ f_1, \dots , f_k \in \mathcal{S}\}$$

Lemma 9.1

Pour tout $N \geq 1$, tout $\tilde{\Psi} \in \mathcal{C}$, on définit $M_N^{\tilde{\Psi}}$ par :

$$\forall t \geq 0,\ M_N^{\tilde{\Psi}}(t) = \tilde{\Psi}(U_t) - \tilde{\Psi}(U_0) - \beta_N \int_0^t \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \Psi}{\partial y_j} (\tilde{f}(s)) (\alpha_N L^{(0)} + L^{(1)} + \alpha_N^{-1} L^{(2)}$$

$$+ \alpha_N^{-2} L^{(3)}) (\beta_N s, f_j)(U_s) ds \ - \frac{1}{2} \beta_N N^{-1} \int_0^t \sum_{j,j'=1}^{k} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_j \partial y_{j'}} (\tilde{f}(s))$$

$$\cdot (\alpha_N^2 L^{(4)} + \alpha_N L^{(5)} + L^{(6)} + \alpha_N^{-1} L^{(7)}) (\beta_N s, f_j, f_{j'}) (U_s) ds$$

avec $\tilde{f}(t) = (\langle f_j, U_t \rangle)_{1 \leq j \leq k}$

et $\forall \nu \in \mathcal{S}'$, $\forall t \geq 0$, $\forall f,g \in \mathcal{S}$:

$$L^{(0)}(t,f)(\nu) = \langle f, A^* p(t) - \frac{\partial p}{\partial t}(t) \rangle$$

$$L^{(1)}(t,f)(\nu) = \langle f' b[\cdot, p(t)], \nu \rangle + \langle \tfrac{1}{2} f'' \sigma[\cdot, p(t)]^2, \nu \rangle$$

$$+ \langle f' b[\cdot,\nu] + f'' \sigma[\cdot, p(t)] \sigma[\cdot,\nu], p(t) \rangle$$

$$L^{(2)}(t,f)(\nu) = \langle f' b[\cdot \nu] + f'' \sigma[\cdot,\nu] \sigma[\cdot, p(t)], \nu \rangle$$

$$+ \langle \tfrac{1}{2} f'' \sigma[\cdot,\nu]^2, p(t) \rangle$$

$$L^{(3)}(t,f)(\nu) = \langle \tfrac{1}{2} f'' \sigma[\cdot,\nu]^2, \nu \rangle$$

$$L^{(4)}(t,f,g)(\nu) = \langle f' g' \sigma[\cdot, p(t)]^2, p(t) \rangle$$

$$L^{(5)}(t,f,g)(\nu) = \langle f' g' \sigma[\cdot, p(t)]^2, \nu \rangle + \langle 2 f' g' \sigma[\cdot, p(t)] \sigma[\cdot,\nu], p(t) \rangle$$

$$L^{(6)}(t,f,g)(\nu) = \langle 2 f' g' \sigma[\cdot, p(t)] \sigma[\cdot,\nu], \nu \rangle + \langle f' g' \sigma[\cdot,\nu]^2, p(t) \rangle$$

$$L^{(7)}(t,f,g)(\nu) = \langle f' g' \sigma[\cdot,\nu]^2, \nu \rangle$$

Alors (9.1.1)

$$M_N^{\tilde{\Psi}}(t) = \beta_N^{\frac{1}{2}}\alpha_N N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \int_0^t \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial\Psi}{\partial y_j} (\tilde{f}_N(s)) f_j'(x_i^N(\beta_N s))\sigma[x_i^N(\beta_N s), \bar{X}_N(\beta_N s)] d\tilde{w}_i(s)$$

où $(\tilde{w}_i)_{i\geq 1}$ est une suite de browniens indépendants, dans Ω^∞, sur laquelle $(x^N(\beta_N\cdot))_{N\geq 1}$ est contruit et $\tilde{f}_N(t) = (\langle f_j, U_N(t)\rangle)_{1\leq j\leq k}$. Si de plus:

(9.1.2) les fonctions b et σ sont telles qu'elle rendent continus, les operateurs $L^{(\ell)}(t,f,g): \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, pour toutes $f,g \in \mathcal{S}$ et tout $t \geq 0$ $(0 \leq \ell \leq 7)$, alors

(9.1.3) $M_N^{\tilde{\Psi}}$ est une $\tilde{P}_N$-martingale locale.

<u>démonstration</u>:

9.1.1 est une conséquence de la formule d'Ito dans $\mathbb{R}^N$, appliquée à la fonction

$$\begin{cases} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N & \to \quad \mathbb{R} \\ (t,x_1,\ldots,x_N) & \to \quad \Psi(\langle f_j, \alpha_N(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{x_i} - p(\beta_N t))\rangle_{i\leq j\leq k}) \end{cases}$$

On définit la suite de temps d'arrêt $(\tau_n)_{n\geq 1}$ par :

(9.1.4) $$\tau_n = \bigwedge_{1\leq j,j'\leq k}\left(\bigwedge_{1\leq \ell\leq 7} \inf\{t, |L^{(\ell)}(\beta_N t, f_j, f_{j'})(U_t)| \geq n\}\right.$$

$$\left.\wedge \inf\{t, |\langle f_j, U_t\rangle| \geq n\}\right)$$

Pour tout $\omega \in \tilde{\Omega}$: $t \to \langle f_j, U_t(\omega)\rangle$ est continue, ainsi que $t \to L^{(\ell)}(\beta_N t, f_j, f_{j'})(U_t(\omega))$ (du fait de 9.1.2). Donc: $\forall \omega \in \tilde{\Omega}$, $\lim_{n\to\infty} \tau_n(\omega) = +\infty$. Il est clair que $M_N^{\tilde{\Psi}}(t \wedge \tau_n)$ est une $\tilde{P}_N$-martingale, puisque considéré comme élément de Ω^N, c'est une P_N-martingale. □

9.2 Remarques

1) Bien que

$$\{\int_0^t \sum_{j=1}^k (\tilde{f}_N(t)) f_j'(x_i^N)(\beta_N t))\sigma[x_i^N(\beta_N t), \bar{X}_N(t)]d\tilde{w}_i(t)\}_{1\le i\le N}$$

ne soit pas une famille de variables indépendantes, elles sont tout de même décorrélées. Par conséquent pour observer une fluctuation, il est nécessaire que $\beta_N^{\frac{1}{2}}\alpha_N N^{-1}$ soit de l'ordre de $N^{-\frac{1}{2}}$, lorsque $N \to \infty$. On prendra:

(9.2.1) $\beta_N^{\frac{1}{2}}\alpha_N = N^{\frac{1}{2}}$, pour obtenir la convergence des moments d'ordre 2 de $M_N^{\tilde{\Psi}}$.

2) Une suite infinie échangeable admettant des moments d'ordre 2 est correlée positivement, de sorte que l'ordre de α_N doit être inférieur ou égal à $N^{\frac{1}{2}}$. Remarquons que si cet ordre est strictement inférieur à $N^{\frac{1}{2}}$, β_N tend vers l'infini, d'après 9.2.1, ce qui signifie que le processus doit être accéléré pour pouvoir observer les fluctuations.

3) Notons aussi que le problème de la bonne normalisation en α_N n'est pas résolu de manière générale. Si on se donne une suite quelconque de variables aléatoires $(Y_i)_{1\le i\le N}$, il est possible de construire, à l'aide de permutations aléatoires, une suite échangeable $(Z_i)_{1\le i\le N}$, telle que $\sum_{i=1}^{N} Y_i = \sum_{i=1}^{N} Z_i$ (Ceci pour faire apparaitre le manque de structure de l'échangeabilité).

4) Une condition minimale pour obtenir la convergence des U_N est:

(9.2.4) $A^*p(t) = \frac{\partial p}{\partial t}(t)$, équation que vérifie la loi de x. (Voir la proposition 6.12).

5) Remarque sur l'hypothèse 9.1.2

Si $b(x,y) = v_1(x) + v_2(y)$, alors 9.1.2 permet à v_1 d'être C^∞ et d'avoir avec toutes ses dérivées une croissance polynomiale, alors que v_2 doit appartenir à $\mathcal{S}$.

6) $\forall t \ge 0$, $\forall f \in \mathcal{S}$, $\forall \nu \in \mathcal{S}'$

(9.2.6) $L^{(1)}(t,f)(\nu) = \langle C_t f, \nu \rangle$

$$C_t f(x) = f'(x)b[x,p(t)] + \frac{1}{2}f''(x)\sigma[x,p(t)]^2$$

$$+ \langle f'(z)b(z,x) + f''(z)\sigma[z,p(t)]\sigma(z,x), p(t,dz)\rangle$$

C_t est un opérateur linéaire intégro-differentiel.

C_t^* s'obtient en linéarisant A^* autour de $p(t)$.

A partir de maintenant, nous étudions la convergence de U_N lorsque $\alpha_N = N^{\frac{1}{2}}$, et 9.2.1 et 9.2.4 sont vérifiés, c'est à dire

$$(9.3) \qquad U_N(t) = N^{\frac{1}{2}}(\bar{X}_N(t) - p(t)) \quad \text{où} \quad A^*p(t) = \frac{\partial p}{\partial t}(t)$$

En particulier, $p = P$ (solution de l'équation 2.2.5 du chapitre 8) convient. $\tilde{M}_N^{\Psi}(t)$ s'écrit, alors, pour tout $\tilde{\Psi} \in \mathscr{C}$

$$(9.4) \qquad \tilde{M}_N^{\Psi}(t) = \tilde{\Psi}(U_t) - \tilde{\Psi}(U_0) - \int_0^t (G_s^{(1)} + N^{-\frac{1}{2}}G_s^{(2)} + N^{-1}G_s^{(3)} + N^{-\frac{3}{2}}G^{(4)})(\tilde{\Psi})(U_s)ds,$$

où $\forall t \geq 0$, $\forall \nu \in \mathscr{S}'$

$$G_t^{(1)}\tilde{\Psi}(\nu) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \Psi}{\partial y_j}(\tilde{f})\langle C_t f_j, \nu\rangle + \frac{1}{2}\sum_{j,j'=1}^{k} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_j \partial y_{j'}}(\tilde{f})\langle f_j' f'_{j'}, \sigma[\cdot, p(t)]^2, p(t)\rangle$$

$$G_t^{(2)}\tilde{\Psi}(\nu) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \Psi}{\partial y_j}(\tilde{f})L^{(2)}(t,f_j)(\nu) + \frac{1}{2}\sum_{j,j'=1}^{k} \frac{\partial \Psi}{\partial y_j \partial y_{j'}}(\tilde{f})L^{(5)}(t,f_j,f_{j'})(\nu)$$

$$G_t^{(3)}\tilde{\Psi}(\nu) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \Psi}{\partial y_j}(\tilde{f})L^{(3)}(t,f_j)(\nu) + \frac{1}{2}\sum_{j,j'=1}^{k} \frac{\partial \Psi}{\partial y_j \partial y_{j'}}(\tilde{f})L^{(6)}(t,f_j,f_{j'})(\nu)$$

$$G_t^{(4)}\tilde{\Psi}(\nu) = \frac{1}{2}\sum_{j,j'=1}^{k} \frac{\partial \Psi}{\partial y_j \partial y_{j'}}(\tilde{f})L^{(7)}(f_j,f_{j'})(\nu)$$

<u>Ce que nous allons faire</u>

Nous allons supposer que:

(9.5) pour tout k-uplet $\phi = (f_1, \dots, f_k)$ de $\mathscr{S}^k$, la loi de $(\langle f_j, U_N\rangle)_{1\leq j\leq k}$: P_N^{ϕ}, tend étroitement vers une probabilité $P^{\phi} \in \Pi\ (C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^k))$. Le théorème 9.6 suivant, dû à J.P. Fouque, nous permet d'énoncer que $\{\tilde{P}_N\}_{N\geq 1}$ est relativement compact dans $\Pi(C(\mathbb{R}^+,\mathcal{S}'))$.

Théorème 9.6:

Soit $\{p_N\}_{N\geq 1}$ une suite de probabilités sur $C(\mathbb{R}^+,\mathcal{S}')$. (U_N de loi : p_N). $\{U_N\}_{N\geq 1}$ converge en loi si et seulement si:

(9.6.1) $\forall f \in \mathcal{S}$, $\{\mathcal{L}(<f,U_N>)\}_{N\geq 1}$ est tendu dans $\Pi(C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}))$

(9.6.2) $\forall k \geq 1$, $\forall t_1,\dots,t_k \geq 0$, $\forall f_1,\dots,f_k \in \mathcal{S}$

$(<f_1,U_N(t_1)>,\dots,<f_k,U_N(t_k)>) \underset{N\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}}$ variable aléatoire de $\mathbb{R}^k$.

démonstration: voir [Fou]. □

Une probabilité $\tilde{Q}$ de $\Pi(\tilde{\Omega})$ est définie par $\{Q^\phi\}_{\phi\in\bigcup_{k\geq 1}\mathcal{S}^k}$, où $Q^\phi = (<f_1,U>,\dots,<f_k,U>) \circ \tilde{Q}$, par conséquent $\{P^\phi\}_{\phi\in\bigcup_{k\geq 1}\mathcal{S}^k}$ définit au plus une probabilité sur $\tilde{\Omega}$: $\tilde{P}$. (L'hypothèse de relative compacité 9.5 nous donne l'existence de $\tilde{P}$). L'identification de $\tilde{P}$ à l'aide de $\{P^\phi\}_\phi$ est par conséquent immédiate.

Dans ce qui suit, nous montrons que les valeurs d'adherence de $\{\tilde{P}_N\}_{N\geq 1}$ (si elles existent) sont solution d'une problème des martingales (9.9.1) qui admet une unique solution, que nous caractérisons (9.9.3,4,5). L'unicité s'obtient simplement, et nous donnons des hypothèses supplémentaires sous lesquelles il y a existence d'une solution de ce problème des martingales. Soit $P_N^{\phi,n} = (<f_1,U(.\wedge\tau_n^{\phi})>,\dots,<f_k,U(.\wedge\tau_n^{\phi})>) \circ \tilde{P}_N$, où τ_n^{ϕ} est défini en 9.1.4. On montre facilement la proposition:

Proposition 9.7

Pour tout $n \geq 1$, toute valeur d'adhérence $Q^{\phi,n}$ de $\{P_N^{\phi,n}\}_{N\geq 1}$ est solution du problème des martingales suivant:

(9.7.1) Pour tout $\Psi \in C_k^2(\mathbb{R}^k)$,

$$\tilde{\Psi}(U_t)-\tilde{\Psi}(U_0) - \int_0^{t\wedge\tau_n^{\phi}} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial\Psi}{\partial y_j}(\tilde{f}(s))<C_s f_j,U_s>ds$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_n^{\phi}} \sum_{j,j'=1}^{k} \frac{\partial^2\Psi}{\partial y_j\partial y_{j'}}(\tilde{f}(s))(D_s f_j,D_s f_{j'})_{p(s)}ds$$

est une $Q^{\phi,n}$-martingale.

On a noté $\tilde{\psi} = \psi(<f_1,\cdot>,\dots, <f_k,\cdot>)$, $\tilde{f}(t) = (<f_j,U_t>)_{1\leq j\leq k}$, $D_t f = \sigma[\cdot,p(t)]f'$ et $(\cdot,\cdot)_{p(t)}$ est le produit scalaire de $L^2(p(t))$.

<u>Existence et unicité de la loi limite</u>

Notations $\|\cdot\|$ et $(\cdot,\cdot)$ désignent la norme et le produit scalaire de L^2. Si q est une probabilité sur $\mathbb{R}$, $\|\cdot\|_q$ et $(\cdot,\cdot)_q$ désignent la norme et le produit scalaire de $L^2(q) = \{f, \int |f|^2 dq < \infty\}$.

$\|\cdot\|^1$ désigne la norme de H^1 où $H^1 = \{f \in L^2;\ f',xf \in L^2\}$ et $\forall f \in H^1$, $(\|f\|^1)^2 + \|f\|^2 + \|f'\|^2 + \|xf\|$.

$$\forall t \geq 0 , \quad D_t : \begin{cases} \mathcal{S} \to \mathcal{S} \\ f \to \sigma[\cdot,p(t)]f' \end{cases}$$

<u>Hypothèses sur $(C_t)_{t\geq 0}$ et $t \to p(t)$</u>

(9.8.1) Il existe une semi-groupe généralisé d'opérateurs linéaires de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ dont la famille de générateurs est $(C_t)_{t\geq 0}$. On le note $(T_s^{\,t})_{0\leq s\leq t}$.

(9.8.2) $\forall\, 0 \leq u \leq v \leq t$, $\forall f \in \mathcal{S}, \forall \nu \in \mathcal{S}'$

$$<(T_u^{\,t} - T_v^{\,t})f,\nu> \underset{v\downarrow u}{\to} <-C_u T_u^{\,t} f,\nu>$$

(9.8.3) $\forall t \geq 0$, $\forall 0 \leq u,v \leq t$, $\forall f \in \mathcal{S}$, $(u,v) \to \|D_u T_v^{\,t} f\|_{p(u)}$ est continu.

Nous supposons en outre qu'il existe une probabilité sur $\mathbb{R}$: q, telle que les hypothèses suivantes soient vérifiées:

(9.8.4) $q \ll$ lebesgues; $q(x) = \frac{dq}{dx} > 0$, $(x \in \mathbb{R})$;
$\sup_x q(x) = \hat{q} < \infty$.

(9.8.5) $\forall t \geq 0$, $p(t) \ll q$ et $\sup_{0 \leq s \leq t} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{dp(t)}{dq}(x) = \hat{p}_t < \infty$.

(9.8.6) $\forall 0 \leq u \leq v \leq t$, $\exists K_t \in \mathbb{R}$, $\forall f \in \mathcal{S}$, $\|T_u{}^v f\|^1 \leq K_t \|f\|^1$

(9.8.7) $\forall t \geq 0$, $\forall f \in \mathcal{S}$, $\sup_{0 \leq u \leq t} \|C_u f\|^1 \leq \gamma(t)\|f\|^1$

Hypothèses sur b et σ

(9.8.8) $\sup_{x,y} |\sigma(x,y)| = \hat{\sigma} < \infty$.

(9.8.9) b et σ vérifient 9.1.2.

Proposition 9.9

On suppose que les hypothèses 9.8.1, 2, 3 sont vérifiées. Soit Q une probabilité sur $\tilde{\Omega}$ telle que, pour tout $n \geq 1$ et tout $\tilde{\Psi} \in \mathcal{C}$:

$$(9.9.1) \quad \tilde{\Psi}(U_{t\wedge\tau_n^\phi}) - \tilde{\Psi}(U_0) - \int_0^{t\wedge\tau_n^\phi} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial\Psi}{\partial y_j}(\tilde{f}(s)) < C_s f_j, U_s > ds$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^{t\wedge\tau_n^\phi} \sum_{j,j'=1}^{k} \frac{\partial^2\Psi}{\partial y_j \partial y_{j'}}(\tilde{f}(s))(D_s f_j, D_s f_{j'})_{P(s)} ds$$

est une Q-martingale.

Si on pose $V_t = U_t - \int_0^t C_s^* U_s ds$, alors

$$(9.9.2)\quad \tilde{\Psi}(V_t) - \tilde{\Psi}(V_0) - \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{j,j'=1}^{k} \frac{\partial^2\Psi}{\partial y_j \partial y_{j'}}(\bar{f}(s))(D_s f_j, D_s f_{j'})_{p(s)} ds$$

où $\bar{f}(t) = (\langle f_j, V_t\rangle)_{1\leq j\leq k}$, est une Q-martingale. De plus:

$$(9.9.3)\quad \forall t \geq 0\ ,\ \forall f \in \mathcal{S},\ \langle f,U_t\rangle \overset{\mathcal{L}}{=} \langle f,U_0\rangle + \int_0^t \|D_s T_s^{\,t} f\|_{p(s)} dw^f(s);$$

w^f-brownien.

$$(9.9.4)\quad \forall t_1,t_2 \geq 0,\ \forall f_1,f_2 \in \mathcal{S},\quad \mathrm{cov}(\langle f_1,U_{t_1}-U_0\rangle, \langle f_2,U_{t_2}-U_0\rangle)$$

$$\int_0^{t_1\wedge t_2} (D_s T_s^{\,t_1} f_1, D_s T_s^{\,t_2} f_2)_{p(s)} ds$$

(9.9.5) $U_t - (T_0^{\,t})^* U_0$ vérifie 9.9.1 si et seulement si U_t la vérifie.

<u>démonstration</u>: A quelques modifications près, nous suivons [HSt], th. 1.4. On montre facilement à partir de 9.9.1 que:

$$\forall n \geq 1\ ,\quad \tilde{\Psi}(V_{t\wedge\tau_n^\phi}) - \tilde{\Psi}(V_0) - \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_n^\phi} \sum_{j,j'=1}^{k} \frac{\partial^2\Psi}{\partial y_j \partial y_{j'}}(\bar{f}(s))(D_s f_j, D_s f_{j'})_{p(s)} ds$$

est une Q-martingale. Il est alors possible de faire tendre $n \to +\infty$ puisque: $(D_s f_j, D_s f_{j'})_{p(s)}$ n'est pas aléatoire, et on obtient 9.9.2. Donc:

$\forall\theta \in \mathbb{R}\ ,\forall 0 \leq s \leq t\ ,\quad X_f^s(t) \equiv \exp[i\theta \langle f,V_t - V_s\rangle + \frac{\theta^2}{2}\int_s^t \|D_u f\|_{p(u)}^2 du]$ est une Q-martingale.

On va montrer que:

$$(9.9.6) \quad \forall\theta \in \mathbb{R},\ \forall 0 \le t \le T\ ,\quad Y_f^T(t) = \exp[i\theta < T_t^T, U_t - U_0> + \frac{\theta^2}{2}\int_0^t \|D_u T_u^T f\|^2_{p(u)} du]$$

est une Q-martingale. Compte tenu de 9.8.2 et 9.8.3, on montre que:

$$\forall 0 \le t_1 \le t_2 \le T,\quad \frac{Y_f^T(t_2)}{Y_f^T(t_1)} = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=0}^{m-1} X^{\sigma_{m,k}}_{T^T_{\sigma_{m,k}}(f)}(\sigma_{m,k+1})$$

où $\sigma_{m,k} = t_1 + \frac{k}{m}(t_2 - t_1)$

Cette convergence étant bornée, elle est aussi dans $L^1(Q)$ et:

$$\forall H \in \tilde{\mathcal{F}}_{t_1},\quad E_Q[1_H \cdot \frac{Y_f^T(t_2)}{Y_f^T(t_1)}] = \lim_{m\to\infty} E_Q[1_h \prod_{k=0}^{m-1} X^{\sigma_{m,k}}_{T^T_{\sigma_{m,k}}(f)}(\sigma_{m,k+1})]$$

or, du fait que $X_f^s(t)$ est une martingale:

$$E_Q[1_H \prod_{k=0}^{m-1} X^{\sigma_{m,k}}_{T^T_{\sigma_{m,k}}(f)}(\sigma_{m,k+1})] = 1 \text{ , ce qui prouve 9.9.6.}$$

On en déduit aisément 9.9.3, en regardant $Y_f^t(t)$. 9.9.4 est une conséquence de 9.9.3, et 9.9.5 est un calcul de martingales. □

<u>Corollaire 9.10</u>.

sous les hypothèses 9.8.1, 2, 3, le problème des martingales 9.9.1 admet au plus une solution.

<u>démonstration</u>:

L'argument est gaussien, c'est une conséquence de 9.9.3.□

Remarque 9.11

Du fait de 9.9.5, il suffit de prouver l'existence de Q , telle que $Q(U_0 = 0) = 1$.

Corollaire 9.12:

Si Q vérifie 9.9.1, si les hypothèses 9.8.1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sont vérifiées et si $Q(U_0 = 0) = 1$, alors pour tout $T \geq 0$ et toute $f \in \mathcal{S}$:

$$(9.12.1) \quad E_Q \left[{}_{0 \le t \le T} \langle f, U_t \rangle^2 \right] \leq 8\hat{\sigma}^2 (1+T^3)(1+K_T^2) \hat{p}_t [(\|f'\|_q)^2 + \sup_{0 \le t \le T} (\hat{q} \|C_t f\|^1)^2]$$

$$< +\infty$$

En particulier

$$(9.12.2) \quad \forall \tilde{\Psi} \in \mathcal{C},\ \tilde{\Psi}(U_t) - \int_0^t \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \Psi}{\partial y_j} (\tilde{f}(s)) \langle C_s f_j, U_s \rangle \, ds$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{j,j'=1}^{k} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_j \partial y_{j'}} (\tilde{f}(s)) (D_s f_j, D_s f_{j'})_{p(s)} \, ds$$

est une Q-martingale.

Démonstration: Nous suivons de près [HSt] , corollaire 1.7.

Comme en 9.9, on pose $V_t = U_t - \int_0^t C_s^* U_s ds$. On considère 9.9.2 avec $\tilde{\Psi}(\cdot) = \Psi(\langle f, \cdot \rangle)$. 9.9.2 est encore vrai avec $\Psi(x) = x$ et $\Psi(x) = x^2$. (Voir par exemple [Pri], proposition 17, Ch. 1).

Donc $\langle f,V_t\rangle$ et $\langle f,V_t\rangle^2 - \int_0^t \|D_s f\|^2_{p(s)}\, ds$ sont des Q-martingales.
L'inégalité de Doob donne:

$$E_Q\,[\sup_{0\le t\le T} \langle f,V_t\rangle^2] \le 4E_Q(\langle f,V_t\rangle^2) = 4\int_0^T \|D_s f\|^2_{p(s)}\,ds, \quad \text{donc:}$$

$$E_Q\,[\sup_{0\le t\le T} \langle f,U_t\rangle^2] \le 2TE_Q\left(\int_0^T \langle C_s f,U_s\rangle^2 ds\right) + 8\int_0^T \|D_s f\|^2_{p(s)}\,ds,$$

mais d'après 9.9.3:

$$E_Q\left(\int_0^T \langle C_s f,U_s\rangle^2 ds\right) = \int_0^T ds \int_0^s du\, \|D_u T_u{}^s C_s f\|^2_{p(u)}\, du$$

$$\text{Or: } \|D_u T_u^s C_s f\|^2_{p(u)} = \langle T_u{}^s C_s f)'^2\, \sigma[\cdot,p(u)]^2, p(u)\rangle$$

$$\le \hat{\sigma}^2\, \hat{p}_s\,(\|(T_u{}^s C_s f)'\|_q)^2$$

$$\le \hat{\sigma}^2\, \hat{p}_T\, K_T^2\, \hat{q}^2 \sup_{0\le t\le T} (\|C_t f\|^1)^2 < +\infty$$

$$(\forall 0 \le v \le s \le T)$$

et $\|D_s f\|^2_{p(s)} \le \hat{\sigma}^2 \hat{p}_T (\|f'\|_q)^2 \le \hat{\sigma}^2 \hat{p}_T \hat{q}^2 (\|f\|^1)^2$, ce qui donne 9.12.1. 9.12.2 s'obtient en appliquant 9.12.1 à $C_s f$ et en réutilisant 9.8.7 . □

Nous définissons maintenant la suite de probabilités $Q^{(n)}$, destinée à approcher Q , où Q vérifie les hypothèses du corollaire 9.12.

$\{h_k\}_{k\geq 0}$ désigne les fonctions de Hermite (voir l'appendice A1).

On définit : $\forall n \geq 1$, $\Pi_n : \begin{cases} \mathcal{S} \to \mathcal{S} \\ f \to \sum\limits_{i\leq n} (f,h_i)h_i \end{cases}$

On pose $b_{i,m}(t) = (C_t h_i, h_m)$, $a_{i,m}(t) = \sum\limits_{\ell\leq n} (D_t h_i, h_\ell)_{p(t)}$. $(D_t h_m, h_\ell)_{p(t)}$ et $L_t^{(n)} = \sum\limits_{i\leq n} (\sum\limits_{m\leq n} b_{i,m}(t) y_m) \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{1}{2} \sum\limits_{i,m\leq n} a_{i,m}(t) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_m}$. $(L_t^{(n)})_{t\geq 0}$ est le générateur d'une diffusion sur Ω^{n+1} et il existe une unique probability $P^{(n)}$ sur Ω^{n+1} telle que $P^{(n)}(y(0) = 0) = 1$, qui soit solution du problême des martingales $PM((L_t^{(n)})_{t\geq 0}, C_k^2(\mathbb{R}^{n+1}))$, puisque $P^{(n)}$ est la solution d'une e.d.s. dont les coefficients vérifient l'hypothèse usuelle pour obtenir l'existence et l'unité de la solution .

$\bar{\nu}$ est la variable aléatoire sur $\tilde{\Omega}$ définit par:

$$\forall t \geq 0 \ , \ \forall f \in \mathcal{S} \ , \ \langle f, \bar{\nu}_t\rangle = \sum_{i=n} (f,h_i) y_i(t) \ , \text{ où } \mathcal{L}(y) = P^{(n)} .$$

$\hat{\Psi}$ est un élément de $C^2(\mathbb{R}^{n+1})$ définit par:

$\forall y \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\hat{\Psi}(y) = \Psi(\tilde{\nu})$ où $\Psi \in C_k^2(\mathbb{R}^k)$; $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{S}$ et $\tilde{\nu} = (\sum\limits_{i=n} (f_j,h_i) y_i)_{1\leq j\leq k}$.

Alors

$$L^{(n)}(t,\hat{\Psi})(y) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial\Psi}{\partial z_j}(\tilde{\nu}) \sum_{i\leq n}(f_j,h_i) \sum_{m\leq n} b_{i,m}(t)y_m$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{j,j'=1}^{k} \frac{\partial^2\Psi}{\partial z_j \partial z_{j'}}(\tilde{\nu}) \sum_{i,m\leq n} a_{i,m}(t)(f_j,h_i)(f_{j'},h_m)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial\Psi}{\partial z_j}(\tilde{\nu}(t))<C_t^{(n)}f_j,\bar{\nu}_t> + \frac{1}{2}\sum_{j,j'=1}^{k} \frac{\partial^2\Psi}{\partial z_j\partial z_{j'}}(\tilde{\nu}(t))(D_t^{(n)}f_j,D_t^{(n)}f_{j'})_{p(t)}$$

où $C_t^{(n)} = \Pi_n C_t \Pi_n$ et $D_t^{(n)} = \Pi_n D_t \Pi_n$

Si $Q^{(n)}$ est la loi de $\bar{\nu}$, alors: $Q^{(n)}(U_0 = 0) = 1$ et

$$\forall\tilde{\Psi}\in\mathcal{C},\ \tilde{\Psi}(U_t) - \int_0^t \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial\Psi}{\partial y_j}(\tilde{f}(s)) <C_s^{(n)}f_j,U_s>ds$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{j,j'=1}^{k} \frac{\partial^2\Psi}{\partial z_j\partial z_{j'}}(\tilde{f}(s))(D_s^{(n)}f_j,D_s^{(n)}f_{j'})_{p(s)}ds$$

est une $Q^{(n)}$-martingale.

Nous appelons 9.13.1, 2, 3, 6, 7 l'équivalent des hypothèses 9.8.1, 2, 3, 6, 7 pour $C^{(n)}$ et $D^{(n)}$. Nous vérifions ces propriétés pour $C^{(n)}$ et $D^{(n)}$:

-9.13.1 $(C_t^{(n)})_{t\geq 0}$ engendre le semi-groupe généralisé, uniformément continu : ${}^{(n)}T_s^t = \exp(\int_0^t \Pi_n C_s du) \circ \Pi_n$, puisque $\Pi_n C_u$ est de rang fini.

-9.13.2 et 9.13.3 s'en déduisent

-9.13.7 est impliqué par 9.8.7 puisque

$$\|(\Pi_n C_t \Pi_n f)'\|_q \leq \hat{q}\|(\Pi_n C_t \Pi_n f)'\| \leq \hat{q}\|C_t \Pi_n f\|^1 < \infty$$

-9.13.6 s'énonce: $\forall 0 \leq u \leq v \leq t$, $\exists K_t^{(n)}$, $\forall f \in$,
$\|{}^{(n)}T_u{}^v f\|^1 \leq K_t^{(n)} \| f\|^1$, et se vérifie avec $K_t^{(n)}$ =
$\exp(t \sup_{0\leq s\leq t} |\Pi_n C_s \Pi_n|^1)$, où $|\cdot|^1$ est la norme des endomorphismes
de H^1 . Mais cette estimation est insuffisante et nous
faisons l'hypothèse d'équicontinuité:

(9.14.1) $\forall 0 \leq u \leq v \leq t$, $\exists K_t^\infty$, $\forall n \geq 1$, $\forall f \in \mathcal{S}$, $\|{}^{(n)}T_u{}^v f\|^1 \leq K_t^\infty \|f\|^1$.

Lemme 9.14

Si les hypothèses 9.8.1, 4, 5, 7, 8 et 9.14.1 sont vérifiées,
$\{Q^{(n)}\}_{n\geq 1}$ est relativement compact dans $\Pi(\tilde{\Omega})$.

démonstration: Nous utilisons le théorème 9.6.

En appliquant 9.9.3 on obtient:

$\forall 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$, $\forall f \in \mathcal{S}$

$$E_{Q^{(n)}}[(\langle f,U_{t_2}\rangle - \langle f,U_{t_1}\rangle)^4]$$

$$= E_{Q^{(n)}}[(\int_0^{t_2} \|D_s^{(n)}T_s{}^{t_2} f\|_{p(s)} dw^f(s) - \int_0^{t_1} \|D_s^{(n)}T_s{}^{t_1} f\|_{p(s)} dw^f(s))^4]$$

$$<f,U_{t_2} - U_{t_1}> = \int_0^{t_1} (\|D_s^{(n)} T_s^{t_2} f\|_{p(s)} - \|D_s^{(n)} T_s^{t_1} f\|_{p(s)})\, dw^f(s)$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \|D_s^{(n)} T_s^{t_2} f\|_{p(s)}\, dw^f(s)$$

$$E_{Q^{(n)}}[(\int_0^{t_1} (\|D_s^{(n)} T_s^{t_2} f\|_{p(s)} - \|D_s^{(n)} T_s^{t_1} f\|_{p(s)})\, dw^f(s))^4]$$

$$\leq T^2 \hat{p}_T^{\,2} \hat{q}^2 \sup_{0\leq s\leq T} (\|{}^{(n)}T_s^{t_2} f - {}^{(n)}T_s^{t_1} f\|^1)^4$$

or $\|{}^{(n)}T_s^{t_2} f - {}^{(n)}T_s^{t_1} f\|^1 = \|\int_{t_1}^{t_2} C_u^{(n)} T^u f\, du\|^1$

$$\leq (t_2 - t_1) \sup_{0\leq u,s\leq T} \|C_u^{(n)} T_s^u f\|^1$$

$$\leq (t_2 - t_1)\gamma(T) K_T^\infty \|f\|^1$$

et $E_{Q^{(n)}}[(\int_{t_1}^{t_2} \|D_s^{(n)} T_s^{t_2} f\|_{p(s)}\, dw^f(s))^4] \leq (K_T^\infty \hat{p}_T \hat{q})^4 (\|f\|^1)^4 (t_2 - t_1)^2$

Ce qui démontre 9.6.1, puisque

$$\sup_{n\geq 1} E_{Q^{(n)}}[(<f,U_{t_2}> - <f,U_{t_1}>)^4] \leq C^{te}\, (t_2 - t_1)^2$$

Pour obtenir 9.6.2, il suffit d'avoir l'estimation:

(9.14.2) $\forall T \geq 0$, $\forall f \in \mathcal{S}$, $\sup_{n\geq 1} E_{Q^{(n)}}(\sup_{0\leq t\leq T} <f,U_t>^2) < +\infty$

En effet:

$$Q^{(n)}\left[\bigcup_{j=1}^{k}\{|<f_j,U_{t_j}>|\geq K\}\right] \leq \sum_{j=1}^{k} Q^{(n)}\{|<f_j,U_{t_j}>|\geq K\}$$

$$\leq \frac{1}{K^2}\sum_{j=1}^{k}\sup_{n\geq 1} E_{Q^{(n)}}\left[\sup_{0\leq t\leq T} <f_j,U_t>^2\right]$$

(si $T \geq \max\{t_j,\ 1\leq j\leq k\}$) .

Mais 9.14.2 est une conséquence immédiate de 9.12.1 et du 9.14.1 (nous sommes en mesure d'appliquer le corollaire 9.12). □

<u>Lemme 9.15</u>

Si les hypothèses 9.8.1, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.14.1 sont vérifiées, toute valeur d'adhérence, Q^∞, de $\{Q^{(n)}\}_{n\geq 1}$ est solution du problème des martingales 9.12.2, avec $Q^\infty(U_0 = 0) = 1$.

<u>démonstration</u>:

Soit $Q^{(n')}$ une suite entraite de $\{Q^{(n)}\}_{n\geq 1}$ qui converge vers Q^∞ .

$$Q^\infty(U_0 = 0) \geq \overline{\lim_{n'\to\infty}}\ Q^{(n')}(U_0 = 0) = 1$$

Pour tout $\tilde{\Psi} \in \mathcal{C}$ et tout $t \geq 0$, on note:

$$N^{(n)}(t) = \tilde{\Psi}(U_t) - \int_0^t \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial\Psi}{\partial y_j}(\tilde{f}(s)) < C_s^{(n)} f_j,U_s >ds$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{j,j'=1}^{k} \frac{\partial^2\Psi}{\partial y_j\partial y_{j'}}(\tilde{f}(s))\,(D_s^{(n)} f_j,D_s^{(n)} f_{j'})_{p(s)}ds$$

et $N^{\infty}(t)$: l'expression correspondante lorsque $C^{(n)}$ et $D^{(n)}$ sont remplacés par C et D .

$\forall \tilde{\Psi} \in \mathcal{T}$, $\forall t \geq 0$, $\forall n \geq 1$

$$N^{(n)}(t) = N^{\infty}(t) + \int_0^t \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \Psi}{\partial y_j}(\tilde{f}(s)) < (C_s - C_s^{(n)})f_j, U_s> ds$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{j,j'=1}^{k} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_j \partial y_{j'}}(\tilde{f}(s))[(D_s f_j, D_s f_{j'})_{p(s)} - (D_s^{(n)} f_j, D_s^{(n)} f_{j'})_{p(s)}]ds$$

Or:

$$\forall f \in \Psi \text{ , } \forall t \geq 0 \text{ , } \sup_{0 \leq s \leq t} \|(D_s - D_s^{(n)})f\|_{p(s)} \leq \hat{p}_t \; \hat{q} \; \hat{\sigma} \|f' - \Pi_n(\Pi_n f)'\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

De même:

$$E_{Q^{(n)}}(<(C_s - C_s^{(n)})f, U_s>^2) \leq \hat{\sigma}^2 K_s^2 \; \hat{p}_t^2 \; \hat{q}^2 \; \gamma(t)^2 (\|(C_s - C_s^{(n)})f\|^1)^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Donc, $\forall 0 \leq u \leq t$, $\forall F \in C_b(\tilde{\Omega})$, F: $\tilde{\mathcal{F}}_u$-mesurable

$$\lim_{n'\to\infty} E_{Q^{(n')}}(F \cdot N^{(n')}(t)) = \lim_{n'\to\infty} E_{Q^{(n')}}(F \cdot N^{\infty}(t))$$

mais $N^{\infty}(t)$ est continu en ω et $E_{Q^{\infty}}[\sup_{0 \leq s \leq t} <f, U_s>^2] \leq$

$$\sup_{n'} E_{Q^{(n')}}[\sup_{0\le s\le t} \langle f,U_s\rangle^2] < +\infty \quad \text{et} \quad E_{Q^\infty}(F\cdot N^\infty(t)) =$$

$$\lim_{n'\to\infty} E_{Q^{(n')}}(FN^{(n')}(t)) = \lim_{n'\to\infty} E_{Q^{(n')}}(FN^{(n')}(u)) = E_{Q^\infty}(F\cdot N^\infty(u)).\square$$

Finalement, nous avons montré que sous les hypothèses 9.8.1, 2, ..., 9, et 9.14.1, il existe une unique probabilité $\tilde{P}$ sur $\tilde{\Omega}$ telle que pour tout $n \ge 1$ $P_{|\mathcal{F}_{\tau_n}} = Q^n$ où Q^n est une solution de problème des martingales 9.7.1. Ce qui nous permet d'enoncer le

<u>Théorème 9.16</u>.

Sous les hypothèses 9.8.1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 9.14.1, le problème des martingales sur $C(\mathbb{R}^+, \ ')$, associé au générateur $(G_t^{(1)})_{t\ge 0}$, où: $\forall\tilde{\Psi} \in \mathcal{C}, \forall \nu \in \mathcal{S}'$

$$G_t^{(1)}\tilde{\Psi}(\nu) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial\Psi}{\partial y_j}(\tilde{f}) \langle C_t f_j,\nu\rangle + \frac{1}{2}\sum_{j,j'=1}^{k} \frac{\partial^2\Psi}{\partial y_j \partial y_{j'}}(\tilde{f})\langle f_j' f_{j'}' \sigma[\cdot,p(t)]^2,p(t)\rangle$$

admet une unique solution. De plus:

$$\forall t \ge 0 , \forall f \in \mathcal{S}, \quad \langle f,U_t\rangle \overset{\mathcal{L}}{=} \langle f,U_0\rangle + \int_0^t \| D_s T_s{}^t f\|_{p(s)} \, dw^f(s) \ ;$$

w^f-brownien.

$$\forall t_1,t_2 \ge 0 , \forall f_1,f_2 \in \mathcal{S}, \ \mathrm{cov}(\langle f_1,U_{t_1} - U_0\rangle, \langle f_2,U_{t_2} - U_0\rangle)$$
$$= \int_0^{t_1\wedge t_2} (D_s T_s{}^t f_1, D_s T_s{}^t f_2)_{p(s)} ds$$

Appendice : Deux simulations du modèle d'Ising sur le tore

Le modèle d'Ising sur le tore

L'ensemble S des sites où se situent les aimants est

$$S = \left(\mathbb{Z} / N\,\mathbb{Z} \right)^2 \quad \text{avec} \quad N \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

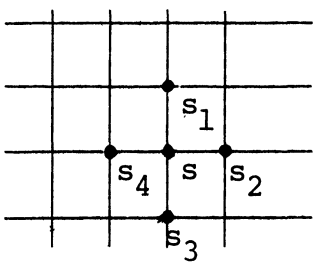
En chacun des points s de S, vit une variable aléatoire: σ_s, susceptible de prendre les valeurs -1 et $+1$, c'est le spin en s. L'ensemble des configurations est donc: $E = \{-1, 1\}^S$.

On note $\sigma_s(i)$ le spin en s dans la configuration i $(i \in E)$.
Le système à l'équilibre est décrit par la mesure de Gibbs Π:

$$d\Pi(i) = \frac{1}{Z} \exp\Big(J \frac{1}{2} \sum_{\substack{s \in S \\ s' \in S \\ |s-s'|=1}} \sigma_s(i)\sigma_{s'}(i)\Big) \underset{s \in S}{\blacksquare} \sigma_s \circ \Big[\frac{1}{2}(\sigma_{-1} + \sigma_{+1})\Big](i) \;;\; i \in E$$

où $J = \tilde{J}\beta$ avec $\beta = \frac{1}{kT}$ et $\tilde{J}$: une constante d'interaction.

$|s - s'| = 1$ signifie que $s' \in \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$



On note $n_s(i)$ le nombre de plus proches voisins de s, de spin différent de $\sigma_s(i)$, soit:

$$n_s(i) = \frac{1}{2} \sum_{\{s',|s-s'|=1\}} |\sigma_s(i) - \sigma_{s'}(i)|$$

On appelle (i) l'ensemble des états qu'on obtient à partir de i en retournant un spin en un seul site. Si $j \in (i)$, $s_{i,j}$ est le site où le spin est retourné.

$$\Pi_i \equiv \exp\Big(\frac{J}{2} \sum_{\substack{s\in S \\ s'\in S \\ |s-s'|=1}} \sigma_s(i)\sigma_{s'}(i)\Big) = \exp\Big(\frac{J}{2} \sum_{s\in S} ((4 - n_s(i)) - n_s(i))\Big)$$

$$= \exp(2J)\exp\Big(-J \sum_{s\in S} n_s(i)\Big) \text{ , donc:}$$

(A2.1): $\forall i \in S$, $\forall j \in S$, $\forall j \in \mathcal{V}(i) \Rightarrow$

$$\frac{\Pi_j}{\Pi_i} = \frac{\exp(-J\, n_{s_{i,j}}(i))}{\exp(-J\, n_{s_{i,j}}(j))} \equiv \alpha_{i,j}$$

<u>Pourquoi une simulation?</u>

En général, on n'a pas moyen d'atteindre la fonction de partition Z qui nécessiterait le calcul et la somme de 2^{N^2} termes (si $N = 10$, $2^{N^2} \cong 10^{30}$) . C'est pourquoi on ne pourra calculer des moyennes $<X,\Pi>$ ($<x>$ pour les physiciens) que par les biais d'une simulation. Plus exactement, on n'aura que des estimations de ces moyennes.

Description des simulations

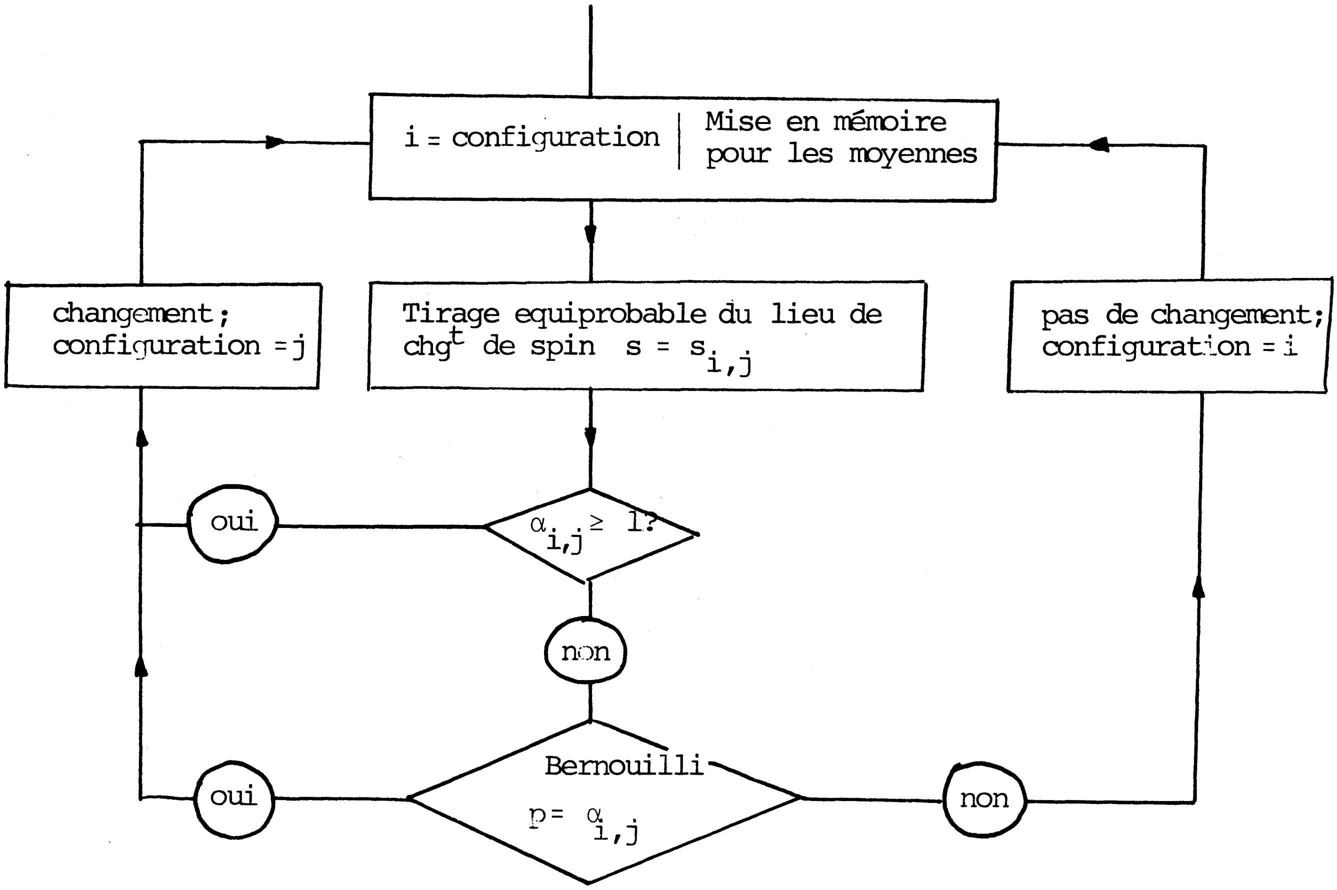
Les deux simulations utilisent de façon fondamentale le théorème ergodique (dont les hypothèses sont aisément vérifiées), à savoir:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X_t(\omega)\,dt = <x>,$$

presque sûrement en ω , où ω est un évènement aléatoire qui dans notre cas se "représente" par les différentes valeurs que prend le système au cours du temps. Du fait que la simulation ne dure qu'un temps fini la valeur obtenue pour $< >$ n'est qu'approchée, (indépendamment des erreurs de troncature), c'est là qu'intervient le problème de l'estimation de l'intervalle de confiance.

Les paramètres des lois régissant les phénomènes aléatoires des simulations sont construits à partir de la probabilité d'équilibre Π. Pour se persuader que les simulations sont correctes il suffit de vérifier que la probabilité invariante du processus joué dans une simulation est bien Π. La 1^{ere} simulation est construite en temps réel, c'est à dire qu'on regarde l'état du système à toutes le unités de temps, la 2^{eme} en temps "événementiel", c'est à dire qu'on ne regarde le système qu'aux instants de saut.

La première simulation



La simulation est celle d'une chaîne de Markov en temps discret dont les probabilités de transitions sont données par la matrice:

$$P : \begin{cases} P_{ij} = \frac{1}{N^2} \inf(1, \alpha_{i,j}) & \text{si} \quad j \in \mathcal{P}(i) \\ P_{ii} = 1 - \sum\limits_{j \neq i} P_{ij} & \\ P_{ik} = 0 \quad \text{si} \quad k \notin \mathcal{P}(i) & \end{cases}$$

où $\alpha_{i,j}$ est défini en (A2.1)

$$\sum_{j\neq i} P_{ij} = \sum_{j\in\ (i)} P_{ij} = \frac{1}{N^2} \sum_{j\in\ (i)} \inf(1, \frac{\Pi_j}{\Pi_i})$$

Montrons que Π est la probabilité invariante de la chaîne.

1) La chaîne est clairement irréductible récurrente, donc la probabilité invariante est unique.

2) Reste à vérifier $\Pi\, P = \Pi$ (Π vecteur horizontal)

$$<\Pi, P_j> = \sum_{i\in\ (j)} \frac{1}{N^2} \inf\, (\Pi_i, \Pi_j) + \Pi_j (1 - \sum_{k\neq j} P_{jk})$$

En effet l'ensemble des états qui mènent à j est (j) , et comme $\Pi_j \sum_{k\neq j} P_{jk} = \sum_{i\in\ (j)} \frac{1}{N^2} \inf\, (\Pi_i, \Pi_j)$, il est clair que

$<\Pi,\ P_{.j}> = \Pi_j$.

<u>La deuxième simulation</u> (avec la dynamique de Glauber)

La loi du temps de retournement d'un spin en un lieu $s \in S$ est une loi exponentielle de paramètre $\lambda_{s,i}$ où i est la configuration actuelle - le problème est de calculer les $\lambda_{s,i}$ pour que le processus de saut associé ait une probabilité invariante égale à Π. Calculons pour cela le générateur infinitésimal du processus.

$Q_{i,j}$ est la probabilité de sauter de i en j, λ_i le paramètre de la loi exponentielle d'attente en i. $q = (q_{ij})$ est le générateur. Par construction $j \notin \mathcal{P}(i) \Rightarrow Q_{ij} = 0$

Par hypothèse $Q_{ii} = 0$ (ce n,est pas une restriction).

le temps d'attente en i est: $\inf\limits_{s \in S}$ (tps de retournement en s, dans i), donc $\lambda_i = \sum\limits_{s \in S} \lambda_{s,i}$

$$Q_{ij} = \frac{\lambda_{s_{i,j};i}}{\sum\limits_{s \in S} \lambda_{s,i}} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \text{si } i \neq j & q_{ij} = \lambda_i Q_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } j \notin \mathcal{P}(i) \\ \lambda_{s_{ij},i} \end{cases} \\ \\ & q_{ii} = \sum\limits_{j \in \mathcal{P}(i)} q_{ij} \end{cases}$$

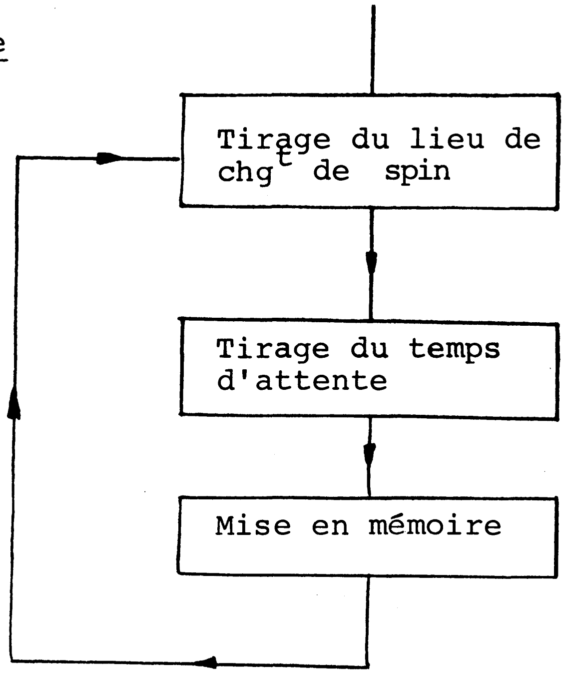
On calcule $\lambda_{s_{i,j}) i}$ à l'aide des conditions de balance détaillées:

$$\forall i,j \quad \Pi_i q_{ij} = \Pi_j q_{ji} \quad \text{donc} \quad \frac{\lambda_{s_{i,j};i}}{\lambda_{s_{j,i};j}} = \frac{\Pi_j}{\Pi_i} = \frac{\exp(+Jn^i_{s_{k,j}})}{\exp(+Jn^j_{s_{i,j}})}$$

Il suffit donc de prendre: $\lambda_{s,i} = \exp(Jn^i_s)$

<u>Remarque</u>: Un tel processus est réversible.

Organigramme



La loi du lieu de changement de spin est une loi discrète sur S de paramètres: $\left(\frac{\lambda_{s,i}}{\sum_{s'\in S}\lambda_{s',i}}\right)_{s\in S}$

(conditionnellement au fait que la configuration actuelle est i).

La loi d'attente en i est une loi exponentielle de paramètre $\lambda_i = \sum_{s\in S}\lambda_{s,i}$ où $\lambda_{s,i} = \exp(J^{n_s^i})$ avec : n_s^i nombre de voisins différents de s , dans la configuration i .

Comparisons des simulations

Bien que les critères de comparison soient difficiles à définir, il semble que pour les grand réseaux (N > 20) la premiere simulation soit plus rapide que la seconde. Toutefois pour les petits, la seconde est plus performante. Elle a, de plus, l'avantage de correspondre à une évolution physiquement acceptable, alors que la première introduit un désordre temporel, l'évolution globale de celle-ci est toutefois satisfaisante.

Quelques résultats numériques (Avec la seconde simulation uniquement).

La théorie prévoit un phénomène de "transition" de phase quand le réseau est infini, c'est à dire qu'à basse température et compte tenu de la condition initiale le système évoluera presque sûrement vers une aimentation particulière, ou sa complémentaire, tandis que passée une température critique, indépendemment de la condition initiale le système évoluera vers une aimantation correspondant à 50% de spins +1, en absence de champ magnétique extérieur. Le phénomène se traduit lorsque le réseau est fini, pour le passage d'un bassin d'attraction à l'autre. Ceci est mis en évidence avec $N = 10$, et n'est pas apparu, du fait de la rareté de l'évènement avec $N = 20$.

La première série ($N = 20$) fait apparaitre la "stabilisation" de l'équilibre métastable d'aimantation = 50%. Elle correspond à plus de 40,000 boucles de l'organigramme.

La seconde serie ($N = 10$) fait apparaitre le phénomène de transition de phase. Remarque: J décroit en $\frac{1}{T}$, si T est la température. Sur les graphiques suivants, l'aimantation instantanée est représentée par:

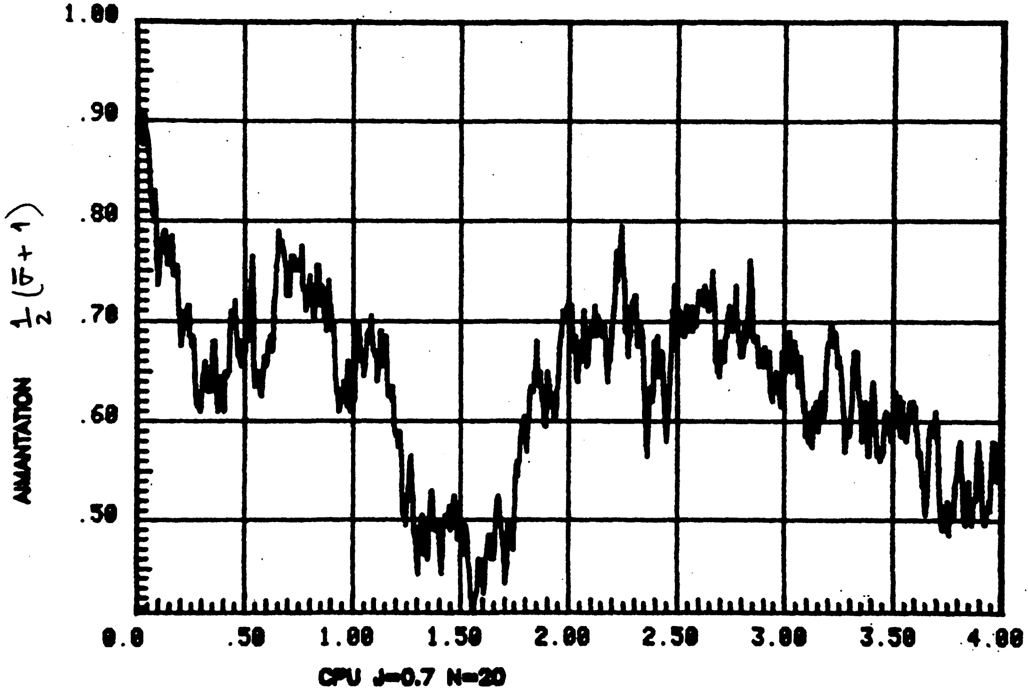
$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\#(S)} \sum_{s \in S} \sigma_s$$

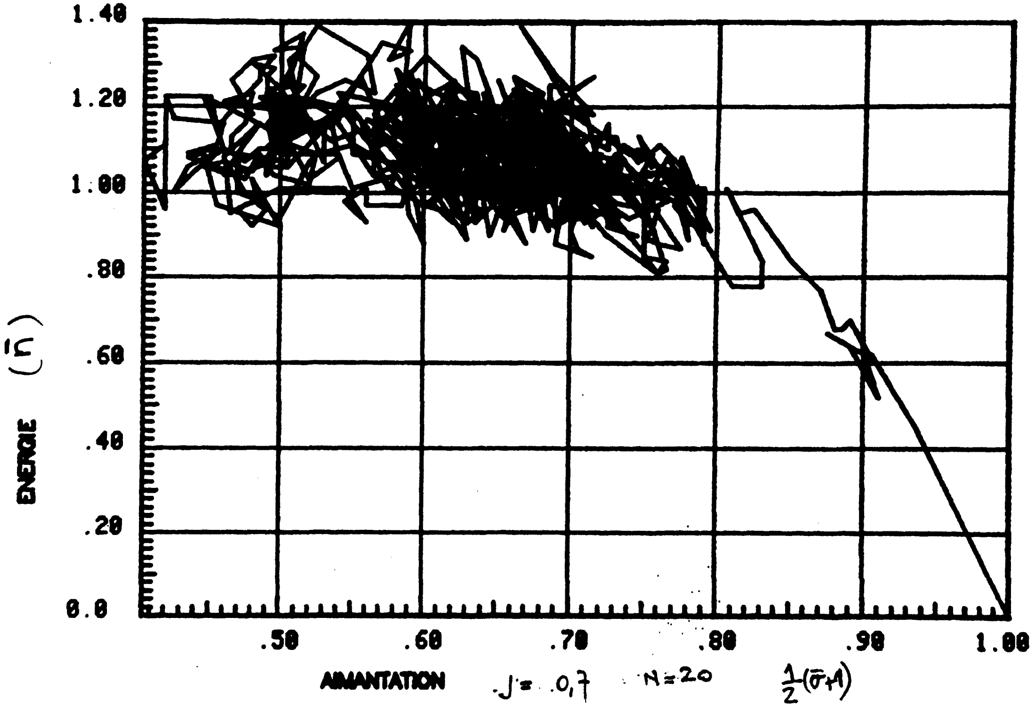
et l'énérgie instantanée par:

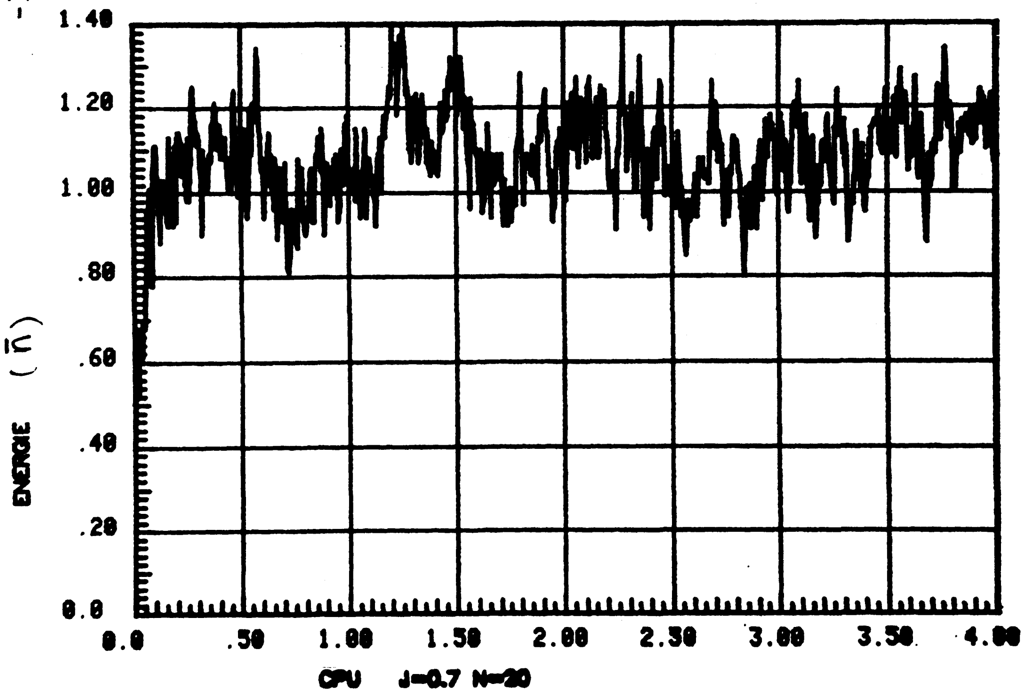
$$\bar{n} = \frac{1}{\#(S)} \sum_{s \in S} n_s$$

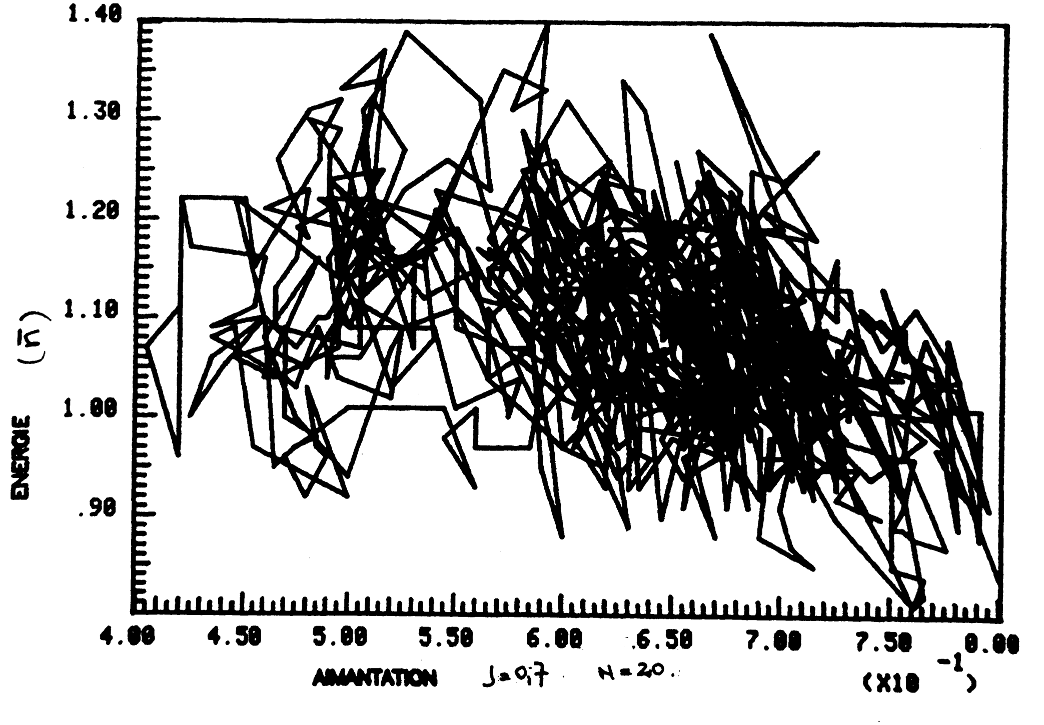
où $\#(S) = 2^{N^2}$

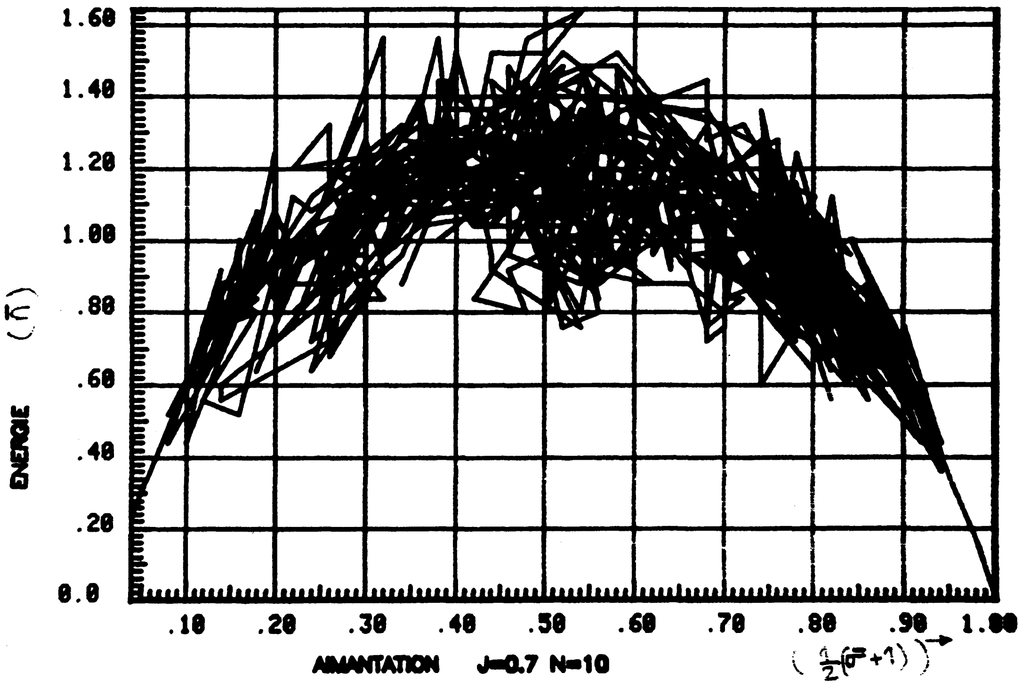
-174-

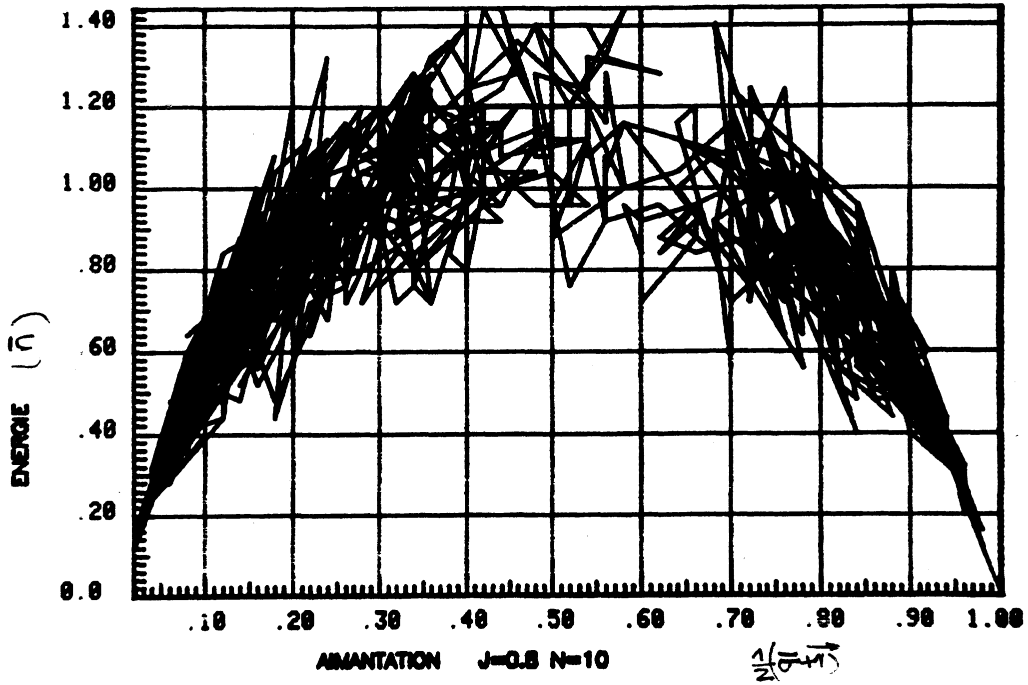

AIMANTATION $\frac{1}{2}(\bar{\sigma}+1)$
CPU J=0.7 N=20

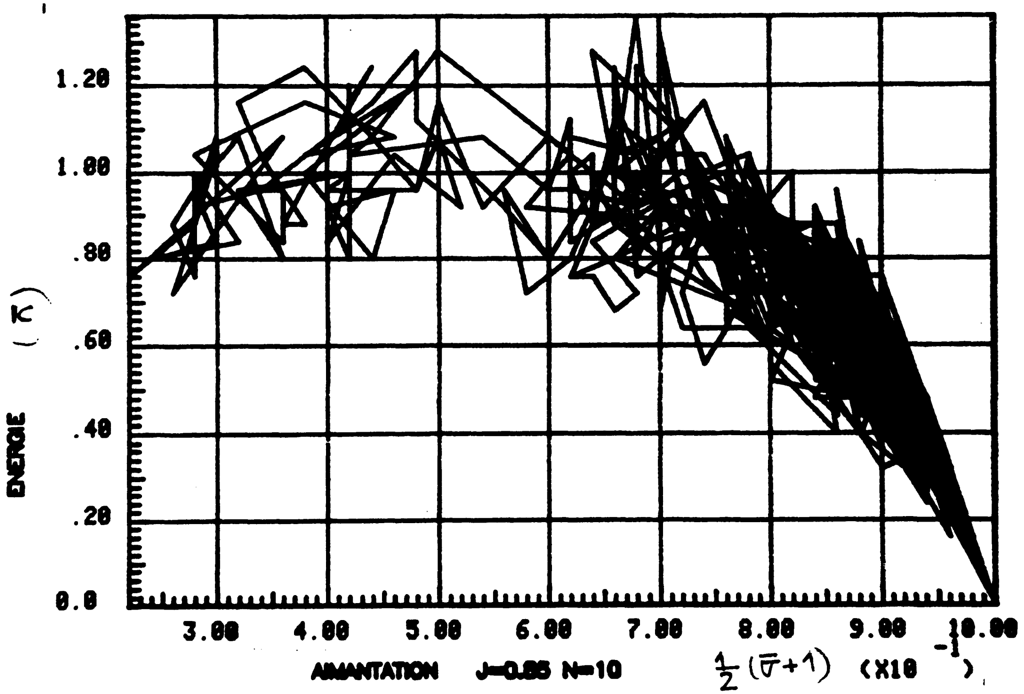

ENERGIE $(\bar{n})$
AIMANTATION J = 0,7 N=20 $\frac{1}{2}(\bar{\sigma}+1)$

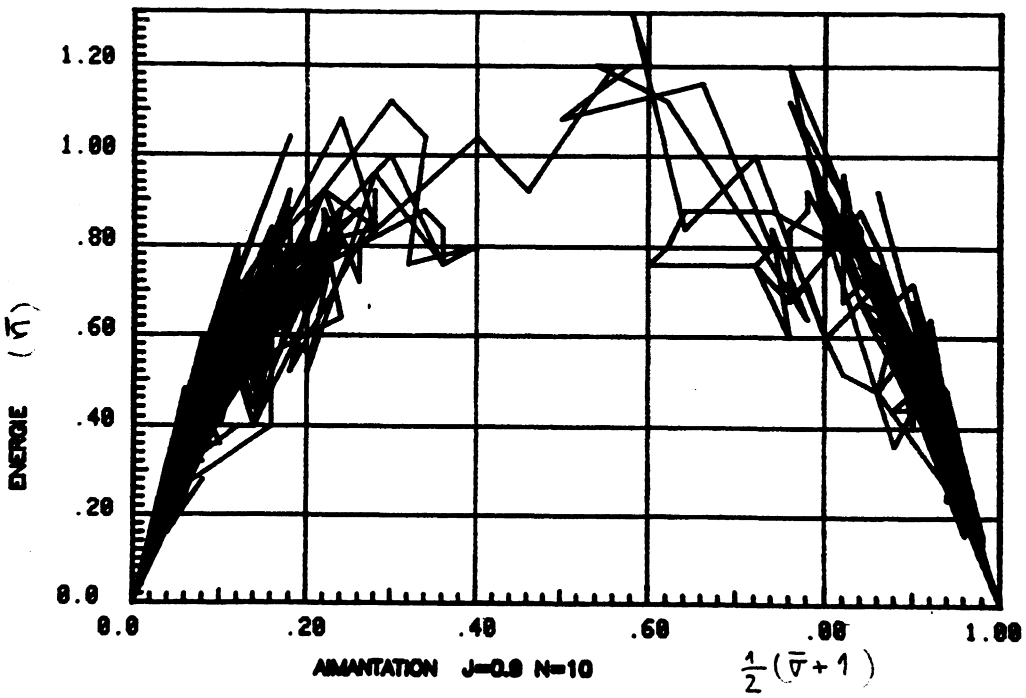

ENERGIE $(\bar{n})$
CPU J=0.7 N=20


ENERGIE $(\bar{n})$
AIMANTATION J=0,7 N=20
(X10 $^{-1}$)


ENERGIE ($\bar{\pi}$)
1.60
1.40
1.20
1.00
.80
.60
.40
.20
0.0
.10 .20 .30 .40 .50 .60 .70 .80 .90 1.00
AIMANTATION J=0.7 N=10
($\frac{1}{2}(\bar{\sigma}+1)$)


ENERGIE ($\bar{\pi}$)
1.40
1.20
1.00
.80
.60
.40
.20
0.0
.10 .20 .30 .40 .50 .60 .70 .80 .90 1.00
AIMANTATION J=0.8 N=10
$\frac{1}{2}(\bar{\sigma}+1)$


ENERGIE ($\bar{\pi}$)
1.20
1.00
.80
.60
.40
.20
0.0
3.00 4.00 5.00 6.00 7.00 8.00 9.00 10.00
AIMANTATION J=0.85 N=10
$\frac{1}{2}(\bar{\sigma}+1)$ (X10 $^{-1}$)


ENERGIE ($\bar{\pi}$)
1.20
1.00
.80
.60
.40
.20
0.0
0.0 .20 .40 .60 .80 1.00
AIMANTATION J=0.9 N=10
$\frac{1}{2}(\bar{\sigma}+1)$

Références

[Ald] D.J. Aldous. Exchangeability and related topics. Ecole d'été de Saint-Flour. 1983 (à paraitre dans LNM)

[Aze] R. Azencott (1980) Grandes Déviations et Applications Statistiques. Lecture Notes in Math. 774. Springer-Verlag.

[Bou] N. Bourbaki. Intégration. Chapitre 9. Hermann, Paris, 1969.

[Bre] J. Bretagnolle. Formule de Chernoff pour les lois empiriques de variables à valeurs dans des espaces généraux. Grandes déviations et applications statistiques. Astérisque 68.

[Dac] J. Dacunha-Castelle. Formule de Chernoff pour une suite de variables réelles. Grandes déviations et applications statistiques. Astérisque 68.

[Daw] D.A. Dawson (1983) Critical dynamics and fluctuations for a mean-field model of cooperative behavior. Journal of statistical physics. Vol. 31, no. 1.

[Dob] R.L. Dobrushin (1968) The problem of uniqueness of a Gibbsian Random Field and the problem of phase transitions. Functional Analysis and its applications. 2 (pp. 302-312).

[Dyn] E.B. Dynkin (1967) Markov Processes I. Springer-Verlag.

[Dzw] R.C. Desai & R. Zwanzig (1978) Statistical mechanics of a nonlinear stochastic model. Journal of statistical physics. Vol. 19, no. 1.

[EN1] R.S. Ellis & C.M. Newman (1978) Limit theorems for sums of dependent random variables occurring in statistical mechanics. Z.W.v.G. 44, 117-139.

[EN2] R.S. Ellis & C.M. Newman (1978) Necessary and sufficient conditions for the G.H.S. inequality with applications to analysis and probability. Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 237, March 1978.

[Fou] J.P. Fouque (1983) La convergence en loi pour les processus à valeurs dans un espace nucléaire (à paraitre).

[Gro] L. Gross (1980) Thermodynamics, statistical mechanics and random fields. Lecture Notes in Mathematics 929. Springer-Verlag.

[GSk] I.I. Gihmann & A.V. Skorohod (1972) Stochastic differential equations. Springer-Verlag.

[HSt] R.A. Holley & D.W. Stroock (1978) Generalized Ornstein-Uhlenbeck processes and infinite particle branching brownian motions. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 14, 741-788.

[JoM] A. Joffe & M. Métivier (1984) Weak convergence of sequences of semimartingales with applications to multiple branching processes (à paraître)

[Kac] M. Kac (1958) Probability and related topics in the physical sciences (New York: Interscience, 1958).

[Kal] O. Kallenberg (1973) Canonical representations and convergence criteria for processes with interchangeable increments. Z.W.v.G. 27, pp. 23-36.

[MK1] H.P. McKean (1966) A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equation. Proc. N.A.S. uSA. 56 pp. 1907-1911.

[MK2] H.P. McKean (1967) Propagation of chaos for a class of nonlinear parabolic equations. Lecture series in differential equations. Vol. 7, 41-57, Catholic University, Washington D.C.

[Nev] J. Neveu (1957) Théorie des semi-groupes de Markov. Thèse d'état. University of California. Publications in Statistics.

[Oel] K. Oelschläger (1984) A martingale approach to the law of large numbers for weakly interacting stochastic processes. The Annals of Probability. Vol. 12, no. 2, pp. 458-479.

[Pri] P. Priouret (1973) Processus de diffusion et équations différentielles stochastiques. Lecture Notes in Mathematics. 390. Springer-Verlag.

[Roc] R.T. Rockafellar (1970) Convex Analysis. Princeton University Press.

[Spi] F. Spitzer (1973) INtroduction aux processus de Markov à paramètres dans $\mathbb{Z}_\nu$. Lecture Notes in Mathematics. 390. Springer-Verlag.

[Stv] D.W. Strook & S.R.S.Varadhan (1979). Multidimensional diffusion processes. Springer-Verlag.

[Szn] A.S. Sznitman (1983) An example of non-linear diffusion process with normal reflecting boundary conditions and some related limit theorems (à paraitre).

[TaH] H. Tanaka & M. Hitouda (1981) Central limit theorem for a simple diffusion model of interacting particles. Hiroshima Math. Journal. 11, 415-423.

[Tan] H. Tanaka (1982) Limit theorems for certain diffusion processes with interaction, preprint.

[Yor] M. Yor (1974) Existence et unicité de diffusions à valeurs dans un espace de Hilbert. Annales de l'IHP, Section B, Vol. X, no. 1, p 55-88.

[Yos] K. Yosida (1965) Functional Analysis. Springer-Verlag.