THÈSES D'ORSAY

CHARLES DELORME

Modules de singularités de courbes planes

Thèses d'Orsay, 1977

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1977__0044__P0_0>

L'accès aux archives de la série « Thèses d'Orsay » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

UNIVERSITÉ PARIS SUD

NUMDAM

Thèse numérisée par la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016
et diffusée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY UNIVERSITÉ DE PARIS XI

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Charles DELORME

27638

FACULTÉ DES SCIENCES · ORSAY BIBLIOTHÈQUE MATHÉMATIQUES

Sujet : MODULES DE SINGULARITÉS DE COURBES PLANES

Soutenue le 25 Mars 1977 devant la Commission d'examen

MM.	J. Cerf	Président
	Lê Dung Trang	
	M. Demazure	
	J. Giraud	
	M. Raynaud	
	B. Teissier	

Je tiens à remercier ici M. Giraud, qui a dirigé mes recherches avec beaucoup de compréhension. Ses questions, ses encouragements, ses réprimandes aussi parfois, m'ont apporté une aide inappréciable.

Je veux aussi dire ma gratitude à M. Cerf, qui a accepté la présidence de mon jury, et m'a proposé un second sujet des plus intéressants.

Ma reconnaissance s'adresse aussi à MM. Demazure, Raynaud, Teissier qui m'ont ouvert les yeux sur maintes questions curieuses, et à M. Lê, qui a bien voulu être rapporteur de cette thèse.

Que M. Belgodère et Mme Nocton, qui m'ont autorisé à reproduire les articles parus dans le Bulletin de la Société Mathématique de France, et les Annales de l'Ecole Normale Supérieure, trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

Je voudrais enfin remercier Mme Bonnardel, qui a assuré avec beaucoup de gentillesse la frappe du manuscrit.

Introduction

Cette thèse se divise en trois parties, dont la première est inédite, et les deux autres ont déjà été publiées.

Le tout se rapporte à un même problème, celui de la classification des germes de branches de courbes singulières. Dans la première partie, l'on observe la formation d'espaces de modules, qui sont des parties constructibles d'espaces anisotropes, pourvu que certains invariants satisfassent à certaines inégalités ; Merle a montré par la suite que cette restriction peut être levée et que ce résultat s'étend aux branches d'intersection complète, non nécessairement planes. Dans le cas où la branche n'a qu'une paire de Puiseux, ces parties constructibles sont même des ouverts d'espaces projectifs anisotropes, qu'on peut expliciter.

L'apparition de ces espaces projectifs anisotropes incite à en approfondir l'étude, ce qui est l'objet de la deuxième partie, et les résultats de Merle s'appuient sur une propriété des sous-monoïdes d'intersection complète de $\mathbb{N}$, qui apparaît dans la troisième partie.

Ayant indiqué la parenté de ces trois parties, je donne quelques précisions.

Première partie : module des singularités des courbes planes.

Le problème est le suivant : décrire le quotient de l'ensemble des morphismes de $\mathbb{C}$-algèbres $f : \mathbb{C}[[x,y]] \to \mathbb{C}[[t]]$ soit le normalisé de l'image A de f , par la relation d'équivalence : les images sont des $\mathbb{C}$-algèbres isomorphes.

Il apparaît d'abord l'invariant discret Γ image de A par la valuation naturelle de $C[[t]]$; si n et m sont les deux plus petits générateurs de Γ (on écarte le cas des branches lisses où $\Gamma = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), A admet un développement de Puiseux, c'est-à-dire qu'il est isomorphe à l'anneau défini par $f(x) = t^n$ et $f(y) = t^m + a_{m+1}t^{m+1} + \ldots$; les classes d'équivalence apparaissent alors comme orbites de cet espace des développements de Puiseux par un produit semi-direct du groupe des homothéties : $x' = k^n x$, $y' = k^m y$, $t' = kt$, et du groupe des transformations $x' = x+p$, $y' = y+q$, $t' = t(1+p/x)^{1/n}$, $v(p) > n$, $v(q) > m$.

L'action infinitésimale de ce dernier groupe met en évidence l'invariant Δ, ensemble des variations de AdA rapporté à une base convenable de $\mathbb{C}((t))dt$.

J'introduis des invariants discrets w et ε, et des conditions portant sur eux, CE et CU, qui assurent l'existence et l'unicité à homothétie près de développements ultra-courts, c'est-à-dire tels que $a_i = 0$ si $i \in \Delta$ et $i \neq \nu$, où ν est l'invariant de Zariski, un élément particulier de Δ (prop. 6). Merle montre que ces conditions ne sont en fait pas nécessaires. L'ensemble des développements tels que Δ prenne une valeur donnée est une partie constructible d'un espace affine, évidemment stable par l'homothétie, le quotient est une partie constructible d'un espace projectif anisotrope (prop. 9). L'anisotropie provient de l'effet des homothéties (cf prop. 5).

Dans le cas où m et n engendrent Γ (i.e. quand A a une seule paire de Puiseux), l'étude des Γ-ensembles à deux générateurs, de rang 1 et sans torsion (lemme 10) conduit à une connaissance précise des valeurs possibles pour Δ et à une description explicite de l'ensemble des développements où ces valeurs sont prises (15). Il apparaît alors que les classes à Γ et Δ donnés forment un ouvert d'un espace projectif anisotrope que l'on peut expliciter (et qui a parfois des singularités (comme le prouve l'exemple cité).

Enfin, on peut exprimer la dimension de la partie générique de l'espace des modules des branches à une paire de Puiseux (m,n) en fonction des coefficients du développement en fraction continue de m/n, conformément à une indication de Zariski (th. 32).

Deuxième partie : espaces projectifs anisotropes.

On étudie les schémas de la forme $P = \mathrm{Proj}\, S$, où S est l'anneau des polynômes $A[X_o,\ldots,X_r]$, gradué de façon que les X_i soient homogènes de degrés les entiers positifs x_i, éventuellement différents.

Plusieurs propriétés connues dans le cas classique sont établies (où les x_i valent tous 1) sont établies, bien que le schéma ne soit pas lisse, ni les $O_P(n)$ inversibles.

Le complexe de Giraud fournit la cohomologie de P : le groupe $H^i(P,O_P(n))$ est nul, à moins que $i=0$ et $n \geqslant 0$, auquel cas il vaut S_n, ou que $i=r$ et $n \leqslant -\Sigma x_i$, auquel cas il vaut S_{-n-s}, en posant $s = \Sigma x_i$ (§3).

Des opérations de "réduction des degrés" permettent de se ramener au cas où les degrés x_i sont premiers entre eux r à r. On sait alors déterminer les ouvert où P est lisse et ceux où $O_P(n)$ est inversible (§1).

Quand les degrés sont réduits, on trouve des isomorphismes naturels : $\underline{\mathrm{Hom}}(O_P(n),O_P(m)) \xrightarrow{\sim} O_P(m-n)$. Si de plus A est noethérien, on obtient des foncteurs adjoints entre la catégorie des P-modules cohérents et celle des S-modules gradués de type fini, semblables aux foncteurs classiques (§4). En combinant cette adjonction et les résultats cohomologiques du §3, on étend aux espaces anisotropes la dualité de Serre : si V est dualisant pour A, alors $W = V \otimes^L_A O_P(-s)$ est dualisant localement et globalement pour P, i.e. on a des isomorphismes fonctoriels :

$$\mathrm{RHom}_P(-,W[-r]) \simeq \mathrm{RHom}_A(R\Gamma - ,V)$$

$$R\underline{\mathrm{Hom}}_P((R\underline{\mathrm{Hom}}_P(-,W)),W) \simeq \mathrm{id} \ .$$

Ceci donne une foison d'anneaux et schémas de Gorenstein non triviaux.

L'article traite encore quelques questions au sujet de ces espaces.

<u>Troisième partie</u> : <u>sous-monoïdes d'intersection complète de</u> $\mathbb{N}$.

Le résultat principal est une caractérisation récursive des sous-monoïdes d'intersection complète de $\mathbb{N}$ (muni de l'addition), relative à leurs générateurs finis : pour que $G \subset \mathbb{N}$ engendre un sous-monoïde $\Gamma(G)$ numérique d'intersection complète, il faut et il suffit que $1 \in G$ ou bien que G soit l'union disjointe de deux parties non vides a_1G_1 et a_2G_2, où $a_1 \in \Gamma(G_2)$ et $a_2 \in \Gamma(G_1)$ sont deux nombres premiers entre eux, et où $\Gamma(G_1)$ et $\Gamma(G_2)$ sont eux-mêmes numériques d'intersection complète (prop. 9).

Ceci peut se traduire comme suit : un sous-anneau monomial A de $\mathbb{C}[t]$ d'intersection complète dont le normalisé est $\mathbb{C}[t]$, est ou bien $\mathbb{C}[t]$, ou bien de la forme $(A_1 \otimes_C A_2)/(u_1^{a_2} \otimes 1 - 1 \otimes u_2^{a_1})$, où A_i est un sous-anneau monomial de $\mathbb{C}[u_i]$ d'intersection complète ayant $\mathbb{C}[u_i]$ pour normalisé, où a_1 et a_2 sont deux entiers > 1 et premiers entre eux. L'inclusion $A \subset C[t]$ correspond aux morphismes $u_i \mapsto t^{a_i}$. La simplicité des équations obtenues donne prise aux calculs de Merle.

La caractérisation récursive suggère un algorithme pour décider si une partie finie de $\mathbb{N}$ engendre un monoïde d'intersection complète et si oui de donner un générateur de la congruence des relations. On donne un autre algorithme plus simple à cet effet (14).

SUR LES MODULES DES SINGULARITES DES COURBES PLANES

par Charles DELORME

Introduction

On considère l'anneau local complet d'une branche analytique intègre et singulière d'une courbe plane sur $\mathbb{C}$; on peut le décrire à l'aide de développements de Puiseux.

On indique comment voir si deux tels développements décrivent des anneaux isomorphes (3) et on introduit des invariants analytiques discrets, faisant intervenir les valuations des éléments de l'anneau et de ses formes différentielles dans son normalisé (4). A partir de ces invariants, on obtient des conditions, qui lorsqu'elles sont réalisées, permettent de construire des développements ultra-courts, ayant le plus possible de coefficients nuls (6). Certaines composantes de l'espace des modules apparaissent alors comme des parties constructibles d'espaces projectifs anisotropes (8).

Quand l'anneau n'a qu'une paire de Puiseux, on peut préciser les relations entre les invariants, et les coefficients des développements de Puiseux (14 et 15). On dégage une notion de généricité (16), et on montre que l'espace des modules des anneaux génériques est un ouvert d'un espace anisotrope (18), dont on arrive à expliciter la dimension en fraction continue de la paire de Puiseux (32) ce qui répond dans ce cas à une question posée par Zariski en novembre 1973.

1 Définition des anneaux de Puiseux

Soient m et n deux entiers tels que $1 < n < m$ et n ne divise pas m. Soit $a = (a_i, i > m)$ une suite de nombres complexes, telle que le pgcd de m, n et des i tels que $a_i \neq 0$ vaut 1.

On appelle $A(m,n,a)$ le sous-anneau complet de $B = \mathbb{C}[[t]]$ engendré par $x = t^n$ et $y = t^m + \sum_{i>m} a_i t^i$.

Les anneaux ainsi obtenus sont dits de Puiseux.

2 Interprétation géométrique

L'anneau local complet d'une branche analytique intègre et singulière d'une courbe plane sur $\mathbb{C}$ est un anneau de Puiseux : il suffit de choisir un paramètre transverse x, puis une uniformisante convenable t du normalisé, puis un paramètre convenable y donnant le contact maximal. Inversement, un anneau de Puiseux définit une telle branche, dont la multiplicité est n et dont l'ordre du contact maximal est m, car B est le normalisé de $A(m,n,a)$.

3 Lemme

Deux anneaux de Puiseux $A = A(m,n,a)$ et $A' = A(m',n',a')$ sont isomorphes si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

(i) $m = m'$ et $n = n'$

(ii) il existe $\xi \in A$, $v(\xi) > n$ et $\eta \in A$, $v(\eta) > m$, et $\gamma \in \mathbb{C}$, $\gamma \neq 0$, tels que

$$t' = \gamma\, t \sqrt[n]{1 + x^{-1} \gamma^{-n} \xi}$$

$$y' = \gamma^m y + \eta = t'^m + \sum_{i>m} a'_i t'^i$$

où v est la valuation naturelle de B, et où $\sqrt[n]{1+z} = 1 + \frac{z}{n} + \ldots$ pour tout $z \in B$, $v(z) > 0$.

D'après (2), m et n ne dépendent pas du développement choisi. Un isomorphisme $A' \to A$ se prolonge de manière unique en un isomorphisme des corps de fractions et des normalisés. L'uniformisante qui sert à définir A' a pour image t' dans B, de valuation 1, ce qui permet de définir γ, et les deux générateurs de définition de A' ont pour images x' et y', qui permettent de définir ξ et η satisfaisant les conditions indiquées.

Inversement, les conditions indiquées permettent de définir un monomorphisme $A' \to A$, et c'est un isomorphisme, car x' et y' engendrent encore A comme anneau complet, puisque les conditions $v(\xi) > n$ et $v(\eta) > m$ impliquent $\eta \in (x,y)^2$ et $\xi \in (y,x^2)$, ce qui permet d'écrire x et y sous forme de séries entières en x' et y'.

Dans la suite, on ne considère plus que des changements de paramètres du type indiqué.

4 Invariants des anneaux de Puiseux

A un anneau de Puiseux $A(m,n,a) = A$, on associe les objets suivants :

Le monoïde caractéristique $\Gamma = v(A)$; les deux plus petits générateurs de Γ sont n et m; on pose $c = \inf\{u \in \Gamma, \mathbb{N} + u \subset \Gamma\}$, c est un nombre fini.

L'ensemble $\Delta = v(A + A\frac{dy}{dx})$. On voit que Γ opère par addition sur Δ, qui contient donc Γ et $\Gamma + m - n$. On pose $\nu = \inf\{u \in \Delta, u \notin \Gamma \cup \Gamma + m - n\}$ et $\delta = \inf\{u \in \Delta, \mathbb{N} + u \cup \Delta\}$. On pose aussi $\Delta' = \{u \in \Delta, u \neq \nu, m < u < \infty\}$.

La fonction $w : \Delta \to \Gamma$ définie par

$w(r) = \sup\{v(p)\}$, $p \in A$, $q \in A$, $v(q - p\frac{dy}{dx}) = r$

Le nombre $\varepsilon = \inf\{v(p)\}$, $p \in A$, $q \in A$, $v(q - p\frac{dy}{dx}) = \infty$.

On a évidemment $\delta \leqslant c$ et $\varepsilon \leqslant c$.

Montrons que ces objets sont des invariants de A, autrement dit, qu'un changement de paramètre ne les modifie pas.

C'est clair pour Γ, dont la définition est indépendante du développement choisi.

On interprète Δ à l'aide de formes différentielles. A un anneau complet R sur $\mathbb{C}$, on associe le R-module $I/I^2 = \Omega_R$, où I est le noyau de la surjection diagonale $R \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} R \longrightarrow R$ d'anneaux complets. L'injection $A \longrightarrow B$ fournit un morphisme de A-modules $\Omega_A \longrightarrow \Omega_B$. Le B-module Ω_B est libre de rang 1, de base $dt = t \otimes 1 - 1 \otimes t$, et le A-module image de Ω_A a deux générateurs, savoir $dx = n\, t^{n-1}$ et $dy = (m\, t^{m-1} + \sum_{i>m} i\, a_i\, t^{i-1})dt$. Le sous-$B$-module de Ω_B engendré par cette image est libre de base dx. On voit que Δ est l'ensemble des valuations des éléments de l'image AdA rapportés à une base du module BdA engendré par AdA dans Ω_B, ce qui ne fait pas intervenir le choix du développement.

Voyons l'invariance de w.

Si $r \in \Gamma$, alors $w(r) = \infty$. Si $r \notin \Gamma$ et $r \in \Gamma + m - n$, $w(r) = r + m - n$.

Si $r \in \Delta$ et $r \notin \Gamma \cup \Gamma + m - n$, il existe p et q dans A tels que $v(q - p\frac{dy}{dx}) = r$; alors $v(q) = v(p) + m - n < r$, et $v(p) \leqslant w(r)$, l'égalité $v(p) = w(r)$ pouvant être atteinte par un choix convenable de p et q. On regarde l'effet d'un changement de paramètres $x' = \gamma^n x + \xi$, $y' = \gamma^m y + \eta$ et $t' = \gamma t$ modulo t^2. On peut écrire $\xi = P(x,y)$, avec $P \in (X^2,Y)\mathbb{C}[[X,Y]]$ et $\eta = Q(x,y)$ avec $Q \in (X,Y)^2\mathbb{C}[[X,Y]]$. Il existe p' et q' dans A avec $v(q' - p'\frac{dy'}{dx'}) = r$ et $w'(r) = v(p')$, où w' est la fonction attachée au générateur x', y' de A. On a l'égalité, où figurent les dérivées partielles de P et Q,

$$\frac{dx'}{dx}(q' - p'\frac{dy'}{dx'}) = (q'\gamma^n + q'P'_X(x,y) - p'Q'_X(x,y)) - (p'\gamma^m - q'P'_Y(x,y) + p'Q'_Y(x,y))\frac{dy}{dx}$$

La valuation de $\frac{dx'}{dx} = \gamma^n + P'_X(x,y) + P'_Y(x,y)\frac{dy}{dx}$ est 0, car $v(\gamma^n) = 0$, et $v(P'_X(x,y)) > 0$, et $v(P'_Y(x,y)\frac{dy}{dx}) \geqslant m - n > 0$.

La valuation de $p'\gamma^m - q'P'_Y(x,y) + p'Q'_Y(x,y)$ est $v(p')$, puisque $v(p'\gamma^m) = v(p')$, $v(p'Q'_Y(x,y)) > v(p')$ et $v(q'P'_Y(x,y)) \geqslant v(q') > v(p')$.

On en tire $w(r) \geqslant v(p') = w'(r)$, et vice-versa, en utilisant le changement de paramètres inverse, donc $w(r) = w'(r)$.

On montre de la même façon que ε ne dépend pas du choix des paramètres.

Quand aux autres objets introduits, ils sont tous directement déduits de Γ et Δ, donc insensibles aux changements de paramètres.

5 Lemme

L'effet du changement de paramètres $x' = \gamma^n x$, $y' = \gamma^m y$, $t' = \gamma t$ est $a'_i = a_i \gamma^{m-i}$.

L'effet du changement de paramètres $x' = x + p$, $y' = y + q$, $t' = t\sqrt[n]{1 + x^{-1}p}$ est donné par :

$$\phi(a', t') - \phi(a,t') = q - p\frac{dy}{dx} \text{ modulo } t^{2v(p)-2n+m}$$

en posant $\phi(a,t) = t^m + \sum_{i>m} a_i t^i$.

La première partie est évidente. Pous la seconde, on notera que $t'^i = t^i + \frac{ip}{nx} t^i$ modulo $t^{2v(p)-2n+i}$

On en déduit, puisque $\phi(a,t) = y$,

$\phi(a,t') = y + \phi'_t(a,t)\frac{pt}{nx}$ modulo $t^{2v(p)-2n+m}$

$y' = y + q = \phi(a',t') = \phi(a,t') + q - p\frac{dy}{dx}$ modulo $t^{2v(p)-2n+m}$

6 Proposition

On introduit les conditions CE et CU :

CE $\forall r \in \Delta'$, $r < 2\,w(r) - 2\,n + m$

CU $\delta \leqslant 2\,\varepsilon - 2n + m$

en vue des résultats suivants :

(i) Si un anneau de Puiseux $A = A(m,n,a)$ vérifie CE, il existe une suite ultra-courte a', c'est à dire $a'_r = 0$ pour tout $r \in \Delta'$, telle que $A(m,n,a')$ soit isomorphe à A.

(ii) Si en outre A vérifie CU, cette suite ultra-courte est unique à homothétie près, c'est à dire que si a' et a'' sont deux suites ultra-courtes donnant un anneau isomorphe à A, il existe un nombre complexe $\gamma \neq 0$ tel que $a'_i = a''_i \gamma^{i-m}$ pour tout $i > m$.

D'après le lemme (5), si $r \in \Delta'$ vérifie $2w(r) - 2n + m > r$, il existe un changement de paramètres $x' = x + p$, $y' = y + q$, avec $v(p) = w(r)$, dont l'effet est d'annuler le coefficient de t^r sans changer les coefficients des t^i, $m \leqslant i < r$. On fera donc successivement des changements de paramètres convenables pour annuler les a_i, $i \in \Delta'$, $i < c$, i croissant de proche en proche. A ce moment, $\sum_{i \geqslant c} a_i t^i$ est un élément de A, qu'on peut annuler par un changement de paramètres évident, sans rien changer aux a_i, $i < c$.

Ceci prouve (i) et donne la manière de construire un développement ultra-court de A si A vérifie CE.

Supposons que a et a' sont deux développements ultra-courts de A, et que A vérifie CE et CU. Le deuxième développement se déduit du premier par un changement de paramètres : $x' = \gamma^n x + p$, $y' = \gamma^m y + q$ et $v(t' - \gamma t) \geqslant 2$. Le changement $x' = \gamma^n x$, $y' = \gamma^m y$, $t' = \gamma t$ donnant une modification homothétique, on se ramène au cas $\gamma = 1$.

Si a est ultra-court, on a $\nu = v(my - nx\frac{dy}{dx}) = \inf\{i, i > m, a_i \neq 0\}$ [1]. De la sorte on est assuré que $v(q - p\frac{dy}{dx})$ est différent de ν, ou bien infini, $v(q) > m$ et $v(p) > n$. D'après (5), on a $v(q - p\frac{dy}{dx}) \geqslant 2v(p) - 2n + m$, sinon le changement perdrait la nullité du coefficient du terme de degré

$v(q-p\frac{dy}{dx})$. On prouve au lemme (7) ci-après que $v(p) \geqslant \varepsilon$ dans ces conditions. Le changement ne modifie donc pas les a_i, $m < i < \delta \leqslant 2\varepsilon - 2n + m$, ni les a_i, $i \geqslant \delta$ qui restent nuls. Cqfd.

7 Lemme

Si A vérifie CE, l'inégalité $v(q-p\frac{dy}{dx}) \geqslant 2v(p) - 2n+m$, avec p et q dans A, implique $v(p) \geqslant \varepsilon$.

Si $v(q-p\frac{dy}{dx}) = r$ est supérieur ou égal à c, c'est gagné car alors $p\frac{dy}{dx} \in A$, donc $v(p) \geqslant \varepsilon$, par définition de ε.

Sinon, on peut trouver p' et q', avec $v(p) = v(p')$ et $v(q'-p'\frac{dy}{dx}) > r$. En effet, il existe p'' et q'', avec $v(p'')=w(r)$, et $v(q''-p''\frac{dy}{dx}) = r$ par définition de w, et on a $v(p'') > v(p)$, car $2v(p'')-2n+m > r \geqslant 2v(p)-2n+m$ d'après CE. Il suffit de prendre $p' = p + \lambda p''$ et $q' = q + \lambda q''$, où λ est un nombre complexe convenable. Bien sûr on a encore $v(q'-p'\frac{dy}{dx}) \geqslant 2v(p')-2n+m$.

En recommençant un nombre fini de fois cette construction, on se ramène au cas $r \geqslant c$ déjà traité.

8 Proposition

L'ensemble des classes d'isomorphisme des anneaux de Puiseux ayant des invariants Γ_o, Δ_o, w_o, ε_o fixés est isomorphe à un quotient d'un ensemble algébrique constructible. Si en outre les invariants vérifient CE et CU, l'ensemble des classes est lui-même naturellement en bijection avec une partie constructible d'un espace projectif anisotrope.

Tout d'abord, on sait comment $\Gamma(A(m,n,a))$ se calcule à partir des exposants caractéristiques (définis en [3] § 3). On a $\Gamma = \sum_{0 \leqslant i \leqslant g} \mathbb{N}\overline{\beta}_i$ avec $\overline{\beta}_0 = n = e_o$, $\overline{\beta}_1 = m$, $e_1 = \mathrm{pgcd}(m,n)$, $e_i = \mathrm{pgcd}(e_{i-1}, \beta_i)$ et $\overline{\beta}_i = \beta_i - \beta_{i-1} + \overline{\beta}_{i-1} e_{i-2}/e_{i-1}$ pour $1 < i \leqslant g$. [4]

La condition $\Gamma = \Gamma_o$ se traduit donc car un nombre fini de conditions $a_i = 0$ ou $a_i \neq 0$.

Comme une modification des a_i, $i \geqslant c$ ne change pas $A(m,n,a)$, on peut toujours supposer que $a_i = 0$ pour $i \geqslant c$ (c étant le conducteur).

On trouve ainsi un espace constructible, dont l'ensemble des classes d'anneaux de Puiseux de monoïde caractéristique Γ_o, est un quotient. Soit E cet espace; on a $E \subset \mathbb{C}^{]m,c[}$.

Pour connaître Δ, w, ε, il suffit de connaître $\Delta \cap]m,c[$, et la restriction de w à $\Delta \cap]m,c[$, et ε.

On considère l'espace produit de E par l'espace L^2 des couples (p,q) de polynômes de $\mathbb{C}[X,Y]$ dont les monômes X^iY^j à coefficient non nuls vérifient $n\,i + m\,j < c$. On considère les fonctions α et β de $E \times L^2$ dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, définies par :

$\alpha(a,p,q) = v(p(x,y))$ et $\beta(a,p,q) = v(q(x,y)-p(x,y)\frac{dy}{dx})$, où v, x, y ont la signification déjà utilisée.

Ces deux fonctions sont évidemment semi-continues supérieurement pour la topologie de Zariski. On en déduit que $\beta^{-1}(r) \cap \alpha^{-1}(s)$ est une partie constructible de $E \times L^2$, et, puisque L^2 est de présentation finie sur $\mathbb{C}$, la projection sur E d'une partie constructible de $E \times L^2$ est une partie constructible de E.

Il en ressort que la partie de E où $\Delta = \Delta_o$, $w = w_o$, $\varepsilon = \varepsilon_o$ est constructible, car elle s'interprète comme intersection de projections sur E de parties constructibles du produit $E \times L^2$.

En effet, $r \in \Delta$ s'écrit $a \in \Pi\beta^{-1}(r)$, et $s = w(r)$ s'écrit $a \in \Pi(\beta^{-1}(r) \cap \alpha^{-1}(s) \cap \complement\alpha^{-1}(\,]s,r[\,))$ et $s = \varepsilon$ s'écrit enfin $a \in \Pi(\beta^{-1}(\infty) \cap \alpha^{-1}(s) \cap \complement\alpha^{-1}([n,s[))$, où Π est la projection sur E.

La première affirmation est ainsi démontrée.

Si les invariants donnent lieu aux conditions CE et CU, on obtient une bijection entre les classes d'isomorphisme des anneaux de Puiseux dont les invariants ont les valeurs voulues, et le quotient par la relation d'homothétie de l'intersection F de la partie de E où Δ, w, ε prennent les valeurs voulues et du fermé défini par les équations $a_i = 0$, $i \in \Delta' \cap]m,c[$ en mettant en correspondance la classe de a, $a \in F$ et la classe de l'anneau $A(m,n,a)$ correspondant (tout ceci ne fait que répéter autrement la proposition 6).

On a ainsi justifié la seconde affirmation.

9 Le cas des anneaux à une seule paire de Puiseux

Dans ce qui suit, m et n sont premiers entre eux, et $1 < n < m$. Pour toute suite $(a_i, i > m)$, l'anneau $A(m,n,a)$ est de Puiseux, et son monoïde caractéristique est $\Gamma = (\mathbb{N}m + \mathbb{N}n) \cup \{\infty\}$, et on a $c = (m-1)(n-1)$.

On va préciser les valeurs possibles pour Δ, w, ε et en déduire que pour certaines valeurs de Δ, et en particulier pour la valeur générique de Δ, l'espace des classes d'anneaux est isomorphe à un ouvert d'un espace projectif anisotrope.

On écrira $A(a)$ ou seulement A au lieu de $A(m,n,a)$ si aucune confusion n'est à craindre.

On étudie d'abord les propriétés des parties de $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ sur lesquelles Γ opère par addition, à deux générateurs sur Γ.

10 Lemme

Soient p et q deux éléments de $\mathbb{Z}$ tels que $|p-q| \notin \Gamma$.

On pose $u = \inf (\Gamma+p) \cap (\Gamma+q)$ et $\bar{u} = u+c-mn$.

On définit v par $u + v = p + q + mn$ et $\bar{v} = v + c - mn$.

Les relations suivantes ont lieu :

(i) $(\Gamma + p) \cap (\Gamma + q) = (\Gamma + u) \cup (\Gamma + v)$

(ii) $(\Gamma + p) \cup (\Gamma + q) = (\Gamma + u-mn) \cap (\Gamma + v - mn)$

(iii) $\mathbb{N} + \overline{v} \subset (\Gamma + p) \cup (\Gamma + q)$

(iv) $(\mathbb{N} + \overline{u}) \cap ((\Gamma + p) \cup (\Gamma + q)) = (\Gamma + v - mn) \cap (\mathbb{N} + \overline{u})$

On peut calculer u et v à partir de p et q comme suit : si $|p-q| \notin \Gamma$, il existe un et un seul couple $(\alpha,\beta) \in]0,n[\times]0,m[$ tel que $q - p = \alpha m - \beta n$; alors u et v sont, à l'ordre près, les deux nombres $p+\alpha m$ et $q+(n-\alpha)m$.

Si r est un élément de $\mathbb{Z}$ hors de $-\Gamma \cup \Gamma$, il se met de manière unique sous la forme $\alpha m - \beta n$, avec $\alpha \in [0,n[$ et $\beta \in \mathbb{Z}$. De plus on a $\alpha \neq 0$, sinon r serait multiple de n, et $\beta > 0$, sinon r appartiendrait à $+\Gamma$, et $\beta < m$, sinon r appartiendrait à $-\Gamma$: en effet $r = \alpha m - \beta n = (\alpha-n)m-(\beta-m)n$.

Inversement, un élément $r \in \mathbb{Z}$ de la forme $\alpha m - \beta n$, avec $(\alpha,\beta) \in]0,n[\times]0,m[$ est hors de $\Gamma \cup (-\Gamma)$. S'il était égal à $\alpha' m + \beta' n$, avec α' et β' positifs ou nuls, on aurait $n(\beta'+\beta)=m(\alpha-\alpha')=kmn$, et $k \geqslant 1$ car $\beta+\beta' > 0$, et $k \leqslant 0$ car $\alpha - \alpha' < n$, ce qui est absurde. De même, on ne peut avoir α' et β' simultanément $\leqslant 0$ avec $r = \alpha' m+\beta' n=\alpha m-\beta n$.

Si donc $|p-q| \notin \Gamma$, il existe un et un seul couple $(\alpha,\beta) \in]0,n[\times]0,m[$ tel que $p+\alpha m = q+\beta n$. Alors on a aussi $p+(m-\beta)n = q+(n-\alpha)m$. Montrons que les deux nombres ainsi trouvés engendrent $(\Gamma+p) \cap (\Gamma+ q)$. Bien évidemment, ils sont dans cette intersection, et on note que leur somme est $p+q+mn$. Si r est un élément de l'intersection, on a les relations :

$$r = p+ \lambda m+ \mu n, \quad 0 \leqslant \lambda < n, \quad 0 \leqslant \mu$$

$$r = q + \lambda' m+ \mu' n, \quad 0 \leqslant \lambda' < n, \quad 0 \leqslant \mu'$$

d'où l'on tire

$q-p = \alpha m - \beta n = (\lambda - \lambda')m+(\mu - \mu')n$, avec $|\lambda - \lambda'| < n$.

Alors de deux choses l'une :

ou bien $\lambda - \lambda' = \alpha$, et donc $\mu \geqslant 0$ et $\lambda \geqslant \alpha$, donc $r \in \Gamma+p+\alpha m$

ou bien $\lambda - \lambda' = \alpha - n$, et donc $\mu' \geqslant 0$ et $\lambda' \geqslant n - \alpha$, donc $r \in \Gamma+q+(n-\alpha)m$

On a ainsi prouvé (i) et justifié le calcul de u et v. Comme $v-u = |\alpha m -(m-\beta)n| \notin \Gamma$, on peut encore appliquer (i) à u et v au lieu de p et q, ce qui donne (ii) en translatant de $-mn$ les deux membres de l'égalité obtenue.

On trouve alors (iii) et (iv) en intersectant les deux membres de (ii) avec $\mathbb{N}+\bar{v}$ et $\mathbb{N}+\bar{u}$, compte tenu des inclusions $\mathbb{N}+\bar{v} \subset \mathbb{N}+\bar{u}$, et $\mathbb{N}+\bar{u} \subset \Gamma+u-mn$ et $\mathbb{N}+\bar{v} \subset \Gamma+v-mn$.

<u>Remarque</u> : On a vu en passant qu'il existe une bijection de $]0,n[\times]0,m[$ vers le complémentaire dans $\mathbb{Z}$ de $\Gamma \cup -\Gamma$, définie par $(\alpha,\beta) \longmapsto \alpha m - \beta n$. Ceci permet de retrouver la formule du conducteur : $c = (m-1)(n-1)$ et la formule d'Apéry : le complémentaire de Γ dans $\mathbb{N}$ possède $c/2$ éléments, dans ce cas particulier.

Précisons maintenant les propriétés de Δ et ses rapports avec w et ε.

11 Notations

Soit $g_{-1} < g_0 < g_1 < \ldots < g_J$ le générateur minimal du Γ-ensemble Δ . On pose $E_i = \bigcup_{-1\leqslant j\leqslant i} (\Gamma + g_j)$, pour $-1 \leqslant i \leqslant J$. On a donc $\Delta = E_J$ et $g_i \notin E_{i-1}$, pour $0 \leqslant i \leqslant J$. On pose aussi $u_i = \inf(\Gamma + g_i) \cap E_{i-1}$ pour $0 \leqslant i \leqslant J$.

On a évidemment $g_{-1} = 0$ et $g_0 = m-n$.

On choisit des éléments ω_i de AdA, tels que $v(\omega_i) = g_i$, en particulier $\omega_0 = \frac{dy}{dx}$ et $\omega_{-1} = 1$.

On pose en outre $g_{J+1} = \infty$ et $\omega_{J+1} = 0$.

12 Lemme

Pour tout entier $\ell \in [0,J]$, on a, en posant $\bar{u}_\ell = u_\ell + c - mn$

a) il existe un nombre $c_\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $(\mathbb{N}+\bar{u}_\ell) \cap E_\ell = (\mathbb{N}+\bar{u}_\ell) \cap (\Gamma + c_\ell)$

b) il existe une relation $\omega_{\ell+1} = \sum_{-1 \leqslant j \leqslant \ell} F_{j,\ell}\, \omega_j$, où les $F_{j,\ell}$ sont des éléments de A, avec $u_\ell = v(F_{\ell,\ell}) + g_\ell = \inf\{v(F_{j,\ell}) + g_j\}$

On procède par récurrence sur ℓ de la façon suivante :

1er point : a) est vrai pour $\ell = 0$

2ème point : a) est vrai pour $\ell = i+1$ si a) et b) sont vrais pour $\ell = i$

3ème point : b) est vrai pour $\ell = i$ si a) et b) sont vrais pour tout $\ell < i$.

Si les trois points sont démontrés, le lemme est visiblement établi aussi.

Preuve du 1er point :

C'est le lemme (10), avec $p = 0$ et $q = m-n$. On a $u_0 = m = u$ et $c_0 = -n = v-mn$.

Preuve du 2ème point :

On sait, par hypothèse, que $(\mathbb{N} + u_i) \cap E_i = (\mathbb{N} + u_i) \cap (\Gamma + c_i)$, et aussi que g_{i+1} est au moins égal à u_i, donc $g_{i+1} \in (\mathbb{N} + \bar{u}_i)$. Comme $g_{i+1} \notin E_i$, on en déduit $g_{i+1} \notin (\Gamma + c_i)$. Comme de plus on a $g_{i+1} \geqslant u_i \geqslant c_i$, on peut appliquer le lemme (10) avec p et q égaux à g_{i+1} et c_i, ce qui donne $c_{i+1} = c_i + g_{i+1} - u_{i+1}$.

Preuve du 3ème point.

Elle peut se faire en 3 étapes.

FACULTÉ DES SCIENCES - ORSAY BIBLIOTHÈQUE MATHÉMATIQUES

1ère étape

On sait à priori que ω_{i+1} peut se mettre sous la forme $\sum_{-1\leqslant j\leqslant 1} f_j\omega_j$, par exemple $q - p\frac{dy}{dx}$. Montrons qu'on peut se ramener au cas où $g_j + v(f_j) \geqslant v(f_i) + g_i \geqslant u_i$ et même, si $i < J$, $v(f_i) + g_i \in (\Gamma + u_i)$. On dit alors que la décomposition de ω_{i+1} sur les ω_j, $-1 \leqslant j \leqslant i$ est améliorée.

De l'égalité $\omega_{i+1} = \sum_{-1\leqslant j\leqslant i} f_j\,\omega_j$, on tire, ou bien $i = J$ et $f_j = 0$ pour tout j, ce qui convient, ou bien l'inégalité stricte $v(\omega_{i+1}) > e(f) = \inf\{v(f_j\,\omega_j), -1\leqslant j\leqslant i\}$. Dans cette occurrence, on appelle $h(f)$ et $k(f)$ les deux plus grands indices j tels que $v(f_j)+g_j = e(f)$, avec $h < k$ (il y a certainement plusieurs valeurs de j où $v(f_j\,\omega_j)$ prend sa valeur minimale). Alors on a $v(f_k)+g_k \in E_h \subset E_{k-1}$.

En appliquant le lemme 10, on voit que, ou bien $v(f_k) + g_k \in (\Gamma + c_k + mn)$, ou bien $v(f_k) + g_k \in (\Gamma + u_k)$.

La première possibilité implique $g_{k+1} \in (\mathbb{N}+g_k+v(f_k))\cup\{\infty\} \subset E_k$, ce qui est absurde si $k \neq J$, mais convient sinon.

La deuxième possibilité convient si $k = i$. Si $k < i$, il existe une fonction $z \in A$ telle que $v(f_k + zF_{k,k}) > v(f_k)$. On a alors $\theta_{i+1} = \sum_{-1\leqslant j\leqslant i} f'_j\,\omega_j$, où $f'_j = f_j$ si $j > k+1$, et $f'_j = f_j + z\,F_{j,k}$ si $j \leqslant k$ et $f'_{k+1} = f_{k+1} - z$. On constate que, ou bien $e(f') > e(f)$, ou bien $e(f') = e(f)$ et $k(f') < k(f)$. Par conséquent, un nombre fini d'opérations semblables à celle qui fait passer de f à f' fournit une décomposition améliorée.

2ème étape

On sait à priori qu'il existe un élément θ de AdA, de valuation $v(\theta) > u_i$, tel que $\theta = \sum_{-1\leqslant j\leqslant i} \Phi_j\,\omega_j$, avec $u_i = \inf\{v(\phi_j)+g_j\} = v(\phi_i)+g_i$, par exemple $z'\omega_j + z\omega_i$, avec

$v(z) = u_i - g_i$ et $v(z') = u_i - g_j$, si $u_i \in (\Gamma + g_j)$, $j < i$. Montrons qu'on peut toujours supposer $v(\theta) \geqslant g_{i+1}$. Alors θ sera dit extrême.

Si $v(\theta) \in E_i$, il existe $\theta' = z''\omega_k + \theta$, avec $v(\theta') > v(\theta)$, et $\theta' = \sum_{-1 \leqslant j \leqslant i} \phi'_j \omega_j$, avec $\phi'_k = z'' + \phi_k$ et $\phi'_j = \phi_j$, si $j \neq k$. On constate que la condition sur les valuations est encore vérifiée. On peut recommencer jusqu'à obtenir $v(\theta) \geqslant g_{i+1}$ si $i < J$, ou $v(\theta) \geqslant c$ si $i = J$; dans ce dernier cas, une modification du même genre; portant sur Φ_{-1} permet de ramener en un coup à $v(\theta) = \infty = g_{J+1}$.

3ème étape

Il faut maintenant montrer que si θ est extrême, alors $v(\theta)$ est g_{i+1}, et que, si $i < J$ et si f est améliorée, alors $v(f_i) = u_i - g_i$. Comme fonctions $F_{j,i}$ on prendra donc les f_j si $i < J$, et on prendra les Φ_j si $i = J$.

Le cas $i = J$ est, en fait, déjà traité dans la 2ème étape.

Dans le cas $i < J$, on procède par l'absurde.

Si θ est extrême et si f est améliorée, on a $v(\theta) \geqslant g_{i+1}$ et $v(f_i) + g_i \geqslant u_i$. Supposons que l'une au moins de ces deux inégalités est stricte. Comme $v(f_i) + g_i \in (\Gamma + u_i)$, il existe $z \in A$ avec $v(f_i) + z\phi_i) > v(f_i)$. Soit $\omega'_{i+1} = \omega_{i+1} + z\theta = \sum_{-1 \leqslant j \leqslant i} f''_j \omega_j$, où $f''_j = f_j + z\phi_j$. D'après l'hypothèse à démentir, on a $v(z\theta) > v(\omega_{i+1})$ et donc $v(\omega'_{i+1})$ est encore égal à g_{i+1}. On constate aussi que $v(f''_j) + g_j \geqslant v(f_i) + g_i$. Comme $v(f''_i) > v(f_i)$, on a soit $e(f'') > e(f)$ soit $e(f'') = e(f)$, et $k(f'') < i$. En améliorant la décomposition de ω'_{i+1}, on trouvera $\omega'_{i+1} = \sum f'_j \omega_j$, avec $e(f') > e(f)$.

L'hypothèse à démentir sur θ et ω_{i+1} est encore vraie sur θ et ω'_{i+1}. On peut recommencer. Comme le nombre e croît strictement chaque fois, mais ne devrait pas dépasser g_{i+1}, on trouve une contradiction. Cqfd.

13 Remarques

Au cours de cette démonstration, on a vu que le calcul des éléments extrêmes permet en fait de trouver les générateurs g_j de Δ et de construire des éléments ω_j de valuation convenable, de proche en proche à partir de ω_0 et ω_{-1}.

On a pu observer aussi l'inégalité $g_{i+1} > u_i$, et l'égalité $c_i + u_i = m - n + \sum_{0 \leqslant j < i} (g_{j+1} - u_j)$.

On pose $s_{k+1} = \sum_{0 \leqslant j \leqslant k} (g_{j+1} - u_j)$, pour $0 \leqslant k < J$ et $s_0 = 0$.

14 Proposition

Dans le cas où il n'y a qu'une paire de Puiseux, les invariants w et ε ne dépendent que de Δ et Γ.

Explicitement, on a les formules suivantes, avec les notations déjà utilisées :

si $r \in \Gamma$, $w(r) = \infty$

si $r \in E_k$ et $r \notin E_{k-1}$, avec $0 \leqslant k \leqslant J$, $w(r) = r - s_k - m + n = r - c_k - u_k$

$\varepsilon = u_J - s_J - m + n = - c_J$

Les décompositions améliorées $\omega_{i+1} = \Sigma F_{j,i}\, \omega_j$, $0 \leqslant i \leqslant J$ vont donner des égalités $\omega_{i+1} = q_{i+1} - p_{i+1} \frac{dy}{dx}$, avec $p_{-1} = q_0 = 0$ et $q_{-1} = 1 = - p_0$, les autres p_i et q_i étant donnés par récurrence, selon la règle $p_{i+1} = \Sigma F_{j,i}\, p_j$ et $q_{i+1} = \Sigma F_{j,i}\, q_j$.

Montrons que pour $\ell \geqslant 0$, on a $v(p_{\ell+1}) = v(p_\ell) + u_\ell - g_\ell$, et que $v(p_0) = 0$. La deuxième égalité est triviale, montrons la première par récurrence : si elle est vérifiée pour $0 \leqslant i < \ell$, est-elle vraie pour $i = \ell$?

Il s'agit de voir que $v(F_{j,\ell}) + v(p_j)$ atteint son minimum une seule fois, pour $j = \ell$, car on sait que $v(F_{\ell,\ell}) = u_\ell - g_\ell$.

Pour $j = -1$, $v(F_{j,\ell})+v(p_j) = \infty$. Pour $0 \leqslant j < \ell$, on a $g_j+v(F_{j,\ell}) \geqslant g_\ell+v(F_{\ell,\ell})$, donc $v(F_{j,\ell})+v(p_j)-(v(F_{\ell,\ell})+v(p_\ell))$ est au moins égal à $v(p_j)-v(p_\ell)+g_\ell-g_j$ qui vaut, d'après l'hypothèse de récurrence, $g_\ell-g_j - \sum_{j \leqslant i < \ell} (u_i-g_i) = \sum_{j < i \leqslant \ell} g_i-u_{i-1}$, ce qui est strictement positif. Cqfd.

Ceci prouve déjà que $\varepsilon \leqslant v(p_{J+1}) = u_J-s_J+n-m = -c_J$, et que $w(g_i) \geqslant v(p_i) = g_i-s_i+n-m = -c_{i-1}$, $0 \leqslant i \leqslant J$, en posant $c_{-1} = 0$.

On en déduit $w(r) \geqslant r-s_k+n-m$ si $r \in E_k$, compte tenu de l'inégalité évidente $w(r+\gamma) \geqslant w(r)+\gamma$, si $\gamma \in \Gamma$.

Soit $\lambda = \sum_{-1 \leqslant i \leqslant J+1} f_i\omega_i$ un élément de AdA, et soit $P = \Sigma f_i p_i$. On ne modifie ni λ ni P si on change f en f', avec $f_j-f'_j = 0$ si $j > k+1$, avec $f_j-f'_j = z F_{j,k}$ si $-1 \leqslant j \leqslant k$ et $f'_{k+1}-f_{k+1} = z$.

Si $v(f_k)+g_k \in E_{k-1}$, alors ou bien $v(f_k)+g_k \in (\Gamma+u_k)$, ou bien $v(f_k)+g_k \in (\Gamma+ c_k+mn)$ et dans ce cas $v(f_k)+g_k \geqslant c_k+mn \geqslant c_J+mn > u_J$. Donc si $e(f) < u_J$ et si $e(f) = \inf\{v(f_i)+g_i\}$ est atteint plusieurs fois, l'indice le plus grand pour lequel ce minimum est atteint étant appelé $k(f)$, on peut sans changer λ ni P, trouver une décomposition f' telle que ou bien $e(f') > e(f)$, ou bien $e(f') = e(f)$ et $k(f') < k(f)$.

Si $\lambda = 0$, on peut se ramener de la sorte à $e(f) \geqslant u_J$. Alors $v(f_i)+v(p_i) \geqslant e(f)-g_i+v(p_i) = e(f)-s_i+n-m \geqslant u_J-s_J+n-m$ si $0 \leqslant i \leqslant J$, $v(f_{-1})+v(p_{-1}) = \infty > -c_J$, et $v(f_{J+1})+v(p_{J+1}) \geqslant v(p_{J+1}) = -c_J$. Ceci termine le calcul de ε.

On veut montrer maintenant la formule pour w. On la connait déjà pour $r \in E_0$. On procède encore par étapes pour les autres valeurs de r.

<u>1ère étape</u> : on se ramène au cas $r = c_{K-1} + c - 1$, $0 \leqslant K \leqslant J$.

Avec les notations du lemme 10, si on pose $\sigma = q+c-1$, alors $r \in \complement(\Gamma + q) \cap (\Gamma + p)$ implique $\sigma \in (\Gamma + r)$. En effet la condition sur

r implique $r-p = \rho m+\mu n$, avec $\rho < \alpha$ et $\mu < m-\beta$,et on a $\sigma - p = (\alpha - 1)m + (m - \beta - 1)n$. On observe encore que $\sigma \in \complement(\Gamma + q) \cap (\Gamma + p)$ et $(\mathbb{N} + 1 + \sigma) \subset (\Gamma + q)$.

On applique ceci avec $p = g_K$ et $q = c_{K-1}$. Si on démontre l'égalité cherchée pour $c_{K-1} + c - 1$, elle sera prouvée pour les autres éléments de E_K hors de E_{K-1}, compte tenu de l'inégalité $w(r+\gamma) \geqslant w(r)+\gamma$, si $\gamma \in \Gamma$.

<u>2ème étape</u> : si $v(P) > (c_{K-1} + c - 1)-s_K + n - m = c - g_K - 1$, alors $v(Q - P\frac{dy}{dx}) \in E_{K-1}$. Ceci assure en effet que $w(c_{K-1}+c-1)$ a bien la valeur souhaitée $c-g_K-1$.

Soit donc $\lambda = Q - P\frac{dy}{dx} \in AdA$. Nous allons construire de proche en proche des décompositions $\lambda = \Sigma f_i \omega_i$ avec $P = \Sigma f_i \rho_i$, et

(1) $j(f) \leqslant K$, $v(f_{j(f)}) + g_{j(f)} = v(P) + s_{j(f)} + m - n$

(2) Si $j(f) > 0$ et $j(f) > k(f)$, les inégalités $j(f) \geqslant k(f) + 1$ et $e(f) \geqslant v(f_{j(f)}) + u_{j(f)-1}$ ont lieu, l'une au moins étant stricte.

$j(f)$, $e(f)$, $k(f)$ sont le plus petit indice i tel que $f_i \neq 0$, la plus petite valuation $v(f_i)+g_i$, le plus grand indice i tel que $v(f_i) + g_i = e(f)$.

La première décomposition est $\lambda = Q - P\frac{dy}{dx}$, qui convient. Si on a une décomposition vérifiant (1) et (2), dans chacun des cas (a), (b), (c), on a la conclusion et dans le cas (d) on modifie la décomposition comme il sera dit. Comme alors $e(f)$ croit ou $k(f)$ décroit, et comme $k(f) \geqslant -1$ et $e(f) \leqslant v(\lambda)$, on ne peut faire qu'un nombre fini de modifications. Ce qui prouve bien la deuxième étape.

(a) $k(f) = K$; alors $v(\lambda) \geqslant v(f_K) + g_K = v(P) + s_K + m - n \geqslant c_{K-1} + c$, donc $v(\lambda) \in E_{K-1}$.

(b) $k(f) < K$ et $e(f)$ n'est atteint qu'une fois; alors $v(\lambda) = v(f_{k(f)}) + g_{k(f)} \in E_{k(f)} \subset E_{K-1}$

(c) $k(f) < K$ et $e(f)$ est atteint deux fois, et $e(f) \in \Gamma + mn + c_{k(f)}$, alors $v(\lambda) \geqslant e(f)$ appartient à E_{K-1}.

(d) Si aucune de ces conditions n'est vérifiée, on a $k = k(f) < K$, $e(f)$ est atteint deux fois et $e(f) \in \Gamma + u_k$. On remplace f par $f' = f + z(\omega_{k+1} - \Sigma F_{ki}\omega_i)$ (cf. 12) où $z \in A$ est choisi de façon que $v(f'_k) > v(f_k)$, donc $v(z) = v(f_k) + g_k - u_k$. On a encore $P = \Sigma f'_i p_i$. Si $k(f) = j(f)$, alors $j(f') = j(f) + 1 = k+1$ et $f'_{k+1} = z$, d'où (1) et (2), car $s_{k+1} = s_k + g_{k+1} - u_k$ et $e(f') \geqslant e(f) = u_k + v(z)$ et $v(f'_k) + g_k > u_k + v(z)$ Si $k(f) + 1 < j(f)$, on a $j(f) = j(f')$ et $f'_{j(f)} = f_{j(f)}$, donc encore (1) et (2). Enfin si $k(f) + 1 = j(f)$, on a par (2), $v(z) > v(f_{j(f)})$, donc $j(f) = j(f')$ et $v(f'_{j(f)}) = v(f_{j(f)})$, d'où encore (1) et (2).

On va maintenant donner des précisions sur les espaces signalés à la proposition 8, dans le cas où il n'y a qu'une paire de Puiseux. L'espace E est l'espace des suites $(a_i, m < i < c)$.

15 Proposition

La partie de E où Δ (et aussi w et ε) prend une valeur constante est donnée par un nombre fini de conditions $a_i = \psi_{i,\Delta}(a_j, m < j < i)$ et de conditions $a_i \neq \psi_{i,\Delta}(a_j, m < j < i)$, où $\psi_{i,\Delta}$ est une fraction rationnelle homogène dont le dénominateur est inversible sur la partie considérée.

Si Δ est tel que CE et CU sont vérifiées, l'ensemble des classes d'isomorphisme des anneaux ayant pour invariants Γ et Δ est en bijection avec un ouvert d'un espace projectif anisotrope.

On considère l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_b,T]$, où $b = c-m-1$. On le munit de la graduation où les X_i sont homogènes de degré i et où T est homogène de degré -1.

On définit les polynômes homogènes particuliers $Y = T^m(1 + \Sigma X_i T^i)$, $\Omega_{-1} = 1$ et $\Omega_0 = \frac{1}{n} T^{m-n}(m + \Sigma (m+i)X_i T^i)$ et $R(\gamma)$; si $\gamma \in [0,mn[\cap \Gamma$, il existe un unique couple $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $\gamma = \alpha m + \beta n$; alors $R(\gamma) = T^{\beta n} Y^{\alpha}$.

On définit un morphisme d'anneaux $\mathbb{C}[X,T] \to B$ $X_i \to a_{i+m}$ et $T \to t$. L'image de $P \in \mathbb{C}[X,T]$ est appelée $P(a)$.

On suppose maintenant qu'un ensemble Δ est donné, compatible avec la condition nécessaire $g_{i+1} > u_i$. On cherche pour quelles valeurs de a on a $\Delta(A(a)) = \Delta$.

On va définir des classes de polynômes homogènes :

$\mathcal{P}(i,s) \subset \mathbb{C}[X_1,\dots,X_s]$, pour $1 \leqslant i \leqslant J+1$ et $s \leqslant b$

$\mathcal{G}(i,s) \subset \mathbb{C}[X_1,\dots,X_b,T]$ pour $1 \leqslant i \leqslant J+1$ et $s \leqslant b$

On va définir des polynômes homogènes :

$\Omega_i \in \mathcal{G}(i,s_i), 1 \leqslant i \leqslant J$, avec $v(\Omega_i(a))=g_i$

$K_{i,s} \in \mathcal{P}(i,s)$, $1 \leqslant i \leqslant J+1$

$L_i \in \mathcal{P}(i,s_i)$, $-1 \leqslant i \leqslant J$, avec déjà $L_{-1} = 1$ et $L_0 = \frac{m}{n}$.

On va montrer que la relation $\Delta(A(a)) = \Delta$ est équivalente à :

$$\begin{cases} K_{\ell,s}(a) = 0 \text{ pour } 1 \leqslant \ell \leqslant J+1 \text{ et } s \in]\, s_{\ell-1}, s_\ell[\cap \bigcap (\dot{E}_{\ell-1} - h_\ell), \text{ où} \\ \text{on a posé } h_i = v(p_i)+m-n \text{ et } s_{J+1} = s_J + c_J + mn - u_J. \\ L_\ell(a) \neq 0 \text{ pour } 1 \leqslant \ell \leqslant J. \end{cases}$$

Pour cela, on procède par récurrence sur ℓ.

On sait déjà que $g_{-1} = 0 = v(\Omega_{-1}(a))$ et $g_0 = m-n = v(\Omega_0(a))$, et que L_{-1} et L_0 sont les coefficients des termes de plus bas degré en T de Ω_{-1} et Ω_0. Ceci est le point de départ de la récurrence. Pour faire avancer la récurrence, on va prouver que si on a défini les objets annoncés pour i, $0 < i < \ell \leqslant J$, si les L_i sont les coefficients des termes de plus bas degré en T des Ω_i pour $-1 \leqslant i < \ell$, si les conditions $g_i(a) = g_i$ équivalent aux conditions $K_{\ell,s}(a) = 0$, $L_i(a) \neq 0$ pour $i \in [-1,\ell[$ et s appartenant à l'ensemble indiqué, alors on peut en faire autant pour $i = \ell$.

On appelle $\mathcal{P}(\ell,s)$ la classe des polynômes homogènes de $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_s]$ de la forme UX_s+V, où $V\in\mathbb{C}[X_1,\dots,X_{s-1}]$ et où U est un produit de puissances des L_k, $k\in[-1,\ell[$ et d'une constante non nulle.

On appelle $\mathcal{S}(\ell,s)$ la classe des polynômes homogènes de $\mathbb{C}[X,T]$ dont le coefficient de T^q est nul si $q<h_\ell+s$, appartient à $\mathcal{P}(\ell,q-h_\ell)$ si $q\in[h_\ell+s,b]$, et est quelconque si $q>b$.

On forme par récurrence sur α, $s_{\ell-1}\leqslant\alpha\leqslant s$, des polynômes U_α appartenant à $\mathcal{S}(\ell,\alpha)$.

Pour $\alpha=s_{\ell-1}$, on prend $U_\alpha=R(u_{\ell-1}-g_{\ell-1})\Omega_{\ell-1}$. C'est un élément de $\mathcal{S}(\ell,s_{\ell-1})$.

Pour passer de U_α à $U_{\alpha+1}$ si $\alpha<s_\ell$, il y a deux possibilités :

Si $\beta=h_\ell+\alpha\in E_k\cap\complement E_{k-1}$, $-1\leqslant k<\ell$, on prend $U_{\alpha+1}=L_kU_\alpha-K_{\ell,\alpha}R(\beta-g_k)\Omega_k$, où $K_{\ell,\alpha}$ est le coefficient de T^β dans U_α. Il est facile de vérifier que si $U_\alpha\in\mathcal{S}(\ell,\alpha)$ alors $U_{\alpha+1}\in\mathcal{S}(\ell,\alpha+1)$.

Si $\beta\notin E_{\ell-1}$, alors $K_{\ell,\alpha}(a)$ est nul, sinon β serait $g_\ell(a)$. On prend $U_{\alpha+1}=U_\alpha-K_{\ell,\alpha}T^\beta$. C'est évidemment un élément de $\mathcal{S}(\ell,\alpha+1)$.

On arrive ainsi à U_α, avec $\alpha=s_\ell$. Si $\ell=J+1$, c'est terminé, car $s_{J+1}+h_{J+1}=c_J+mn$, donc $(\mathbb{N}+s_{J+1}+h_{J+1})\subset E_J$. Si $\ell\leqslant J$, on a $K_{\ell,\alpha}(a)\neq 0$, car alors $\beta=g_\ell(a)$. On prend donc $K_{\ell,\alpha}=L_\ell$ et $\Omega_\ell=U_\alpha$. Evidemment U_ℓ et L_ℓ satisfont les relations voulues.

On vient également de voir que si les $g_k(a)$, $-1\leqslant k<\ell$ sont égaux aux g_k donnés, pour que $g_\ell(a)$ soit bien le g_ℓ donné, il faut et il suffit que les $K_{\ell,s}(a)$, $s\in]s_{\ell-1},s_\ell[\cap\complement(E_{\ell-1}-h_\ell)$ soient nuls et, si $\ell\leqslant J$, que $L_\ell(a)$ ne soit pas nul. Cqfd.

Compte tenu de la forme particulière des polynômes $K_{\ell,s}$ et L_ℓ qui interviennent, la première affirmation est justifiée .

Soit H le complémentaire dans $\mathbb{N}$ de $(\Delta'-m)\cup\left(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant J+1}(]s_{\ell-1},s_\ell[\cap\complement(E_{\ell-1}-h_\ell))\right)$, et soit $\mathbb{P}$ le quotient

de $\mathbb{C}^H$ par l'homothétie anisotrope (c'est à dire $(b_i, i \in H)$ et $(b'_i, i \in H)$ sont homothétiques s'il existe $\gamma \in \mathbb{C}$, $\gamma \neq 0$ avec $b_i = \gamma^i b'_i$ pour tout $i \in H$)

On met naturellement en bijection les classes d'isomorphisme des anneaux de Puiseux ayant Γ et Δ comme invariants, tels que CE et CU soient vérifiées, et les classes d'homothétie des suites $(a_i, m < i < c, i \notin \Delta')$ vérifiant les relations $K_{\ell,s}(a) = 0$ et $L_\ell(a) \neq 0$ pour les valeurs convenables de ℓ et s : la bijection est obtenue en associant la classe de $(a_i, m < i < c, i \notin \Delta')$ et la classe de l'anneau $A(a)$, étant entendu que $a_i = 0$ si $i \in \Delta'$.

Compte tenu de la forme particulière des polynômes K et L intervenant, l'espace des classes d'homothétie des suites décrites est lui-même en bijection avec l'ouvert de $\mathbb{P}$ défini par $\prod_{s \in S} b_s \neq 0$, où $S = \{s_\ell, 1 \leqslant \ell \leqslant J\}$: on prend $b_s = a_{m+s}$ si $s \in H$ et $s \notin S$, on prend $b_s = a_{m+s} - \dfrac{V_i(a)}{U_i(a)}$ si $s = s_i$ et $L_i = U_i X_s + V_i$. L'ensemble S est vide si et seulement si $J = 0$, c'est à dire $\Delta = E_0$, ce qui est compatible avec CE, mais est compatible avec CU si et seulement si $2\varepsilon - 2n + m \geqslant \delta$, ce qui est ici tout calculé : $-2n-2n+m \geqslant c-n$, ou encore $(n-2)(m-2) \leqslant 3$. Ceci se produit dans 3 cas seulement : $n=2$ et m impair $\geqslant 3$, $n=3$ et $m=4$, $n=3$ et $m=5$.

Dans chacun de ces 3 cas, toutes les singularités sont isomorphes, d'anneau isomorphe à $\mathbb{C}[[t^n, t^m]] = A(m,n,0)$.

Dans les autres cas S n'est pas vide, et l'ouvert de P est un ouvert affine d'un espace projectif anisotrope (singulier parfois). C'est un espace dont la dimension est le nombre d'éléments de H, diminué de 1. (On note que H n'est pas vide, car $S \subset H$).

16 Définition

On définit un ensemble $\Delta(m,n) \subset \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sur lequel $\Gamma = (\mathbb{N}n + \mathbb{N}m) \cup \{\infty\}$

opère par addition, de la manière suivante :

on pose $g_{-1} = 0$ et $g_0 = m-n$ et $E_{-1} = \Gamma$, puis par récurrence, $u_i = \inf((\Gamma+g_i)\cap E_{i-1})$, $E_i = E_{i-1}\cup(\Gamma+g_i)$ et $g_{i+1} = \inf((\mathbb{N}+u_i)\cap E_i)$ pour $i \geqslant 0$. On appelle J le plus petit indice i tel que $\mathbb{N}+u_i \subset E_i$, ou, ce qui revient au même, tel que $g_{i+1} = \infty$. Alors $\Delta(m,n) = E_J$.

On dit que $A(m,n,a)$ est générique si son invariant $\Delta(A(m,n,a))$ est égal à $\Delta(m,n)$.

17 Lemme

Tout anneau générique vérifie CE et CU.

Si $r \in \Gamma$, alors $w(r) = \infty$, et $r < 2w(r)-2n+m$ ou $r = \infty \notin \Delta'$.

Si $r \notin \Gamma$ et $r \in (\Gamma+m-n)$ et $r > m$, alors $2w(r)-2n+m = 2r - m > r$.

Montrons que $[g_i-s_i, g_i] \subset \Delta = \Delta(m,n)$ pour $0 \leqslant i \leqslant J$. C'est vrai pour $i = 0$, car $s_0 = 0$. Si c'est vrai pour $i < J$, c'est vrai pour $i+1$, car l'addition de $u_i-g_i \in \Gamma$ donne $[u_i-s_i, u_i] \subset \Delta$, et $u_i-s_i=g_{i+1}-s_{i+1}$ et la définition de g_{i+1} "générique" donne $[u_i,g_{i+1}] \subset \Delta$.

On en déduit aisément $s_J < n$; sinon g_J-n serait dans Δ et non dans $\Gamma+g_J$, donc dans E_{J-1}, et g_J serait aussi dans E_{J-1}.

On voit aussi que $u_i-g_i \in \Gamma$ et $u_i-g_i > 0$ implique $u_i-g_i \geqslant n$, pour $0 \leqslant i \leqslant J$. Donc $g_k-s_k-m+n \geqslant nk$ si $0 \leqslant k \leqslant J$, et $u_J-s_J-m+n \geqslant n(J+1)$.

Si $r \in \Delta$, $r \notin E_0$, $r \neq \nu = g_1$, montrons que l'on a CE, c'est à dire $E = 2w(r)-2n+m-r > 0$. Soit k le plus petit entier tel que $r \in E_k$.
On a $E = r - 2s_k - m = (r-g_k)-s_k + (g_k - s_k - m + n) - n > (r - g_k) + (k-2)n$.
Si $k \geqslant 2$, on a $E > 0$, si $k = 1$, on a $0 \neq r - g_1 \in \Gamma$, donc $r - g_1 \geqslant n$, donc $E > 0$.

On voit aussi que $\mathbb{N} + u_J \subset \Delta$, donc aussi $\mathbb{N} + u_J - s_J \subset \Delta$, c'est à dire $u_J-s_J \geqslant \delta$. En outre $u_J-s_J-m \geqslant nJ$. On en tire l'inégalité :
$2\varepsilon-2n+m = 2u_J - 2s_J-m \geqslant \delta+u_J-s_J-m \geqslant \delta+nJ \geqslant \delta$, c'est à dire CU.

18 Proposition

Il existe un ouvert non vide $U \subset E$, tel que la condition $a \in U$ soit équivalente à $A(a)$ est générique (ce qui justifie l'appellation générique).

L'espace des modules des singularités génériques, c'est à dire l'espace des classes d'isomorphisme des anneaux génériques, est un ouvert affine d'un espace projectif anisotrope, dont la dimension est le nombre d'éléments du complémentaire dans $\mathbb{N}+m$ de Δ.

On applique la proposition 15. Comme les ensembles $]s_{\ell-1}, s_\ell[\cap \complement(E_{\ell-1}-h_\ell)$, $1 \leqslant \ell \leqslant J+1$ sont vides, la partie de E où Δ prend la valeur générique est donnée par $0 \neq \prod_{1 \leqslant \ell \leqslant J} L_\ell(a)$. Autrement dit, chacun des a_{s+m}, $s \in S$, doit être différent d'une valeur particulière qui se calcule à partir des a d'indice plus petit.

L'espace des modules s'obtient, d'après 8, en coupant U par le fermé $a_i = 0$ pour tout $i \in \Delta'$ et en passant au quotient par l'homothétie (où a_i est affecté du degré $i-m$). D'où la conclusion, aisément obtenue, en traitant séparément les cas particuliers $n = 2$ et m entier impair > 2, $n=3$ et $m=4$, $n = 3$ et $m=5$ déjà examinés au cours de la démonstration de (15).

On s'attache maintenant au calcul de la dimension de cet espace.

19 Définition

A un couple d'entiers $\geqslant 2$ premiers entre eux, on associe le monoïde $\Gamma_{m,n} = (\mathbb{N}m + \mathbb{N}n) \cup \{\infty\}$, la fonction $f_{m,n} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par $f_{m,n}(k) = k - \mathrm{card}([\, m,m+k[\cap \Gamma_{m,n}) - \mathrm{card}([\, n,n+k[\cap \Gamma_{m,n})$ et le nombre

$$D_{m,n} = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_{m,n}(k)$$

Evidemment $D_{m,n} = D_{n,m} \geqslant 0 = f_{m,n}(0)$ et $D_{m,n}$ est fini, car $k \geqslant c$ implique $f_{m,n}(k+1) = f_{m,n}(k) - 1$ (avec $c = (m-1)(n-1)$).

On omettra parfois la mention de m et n si aucune confusion n'est à craindre.

20 Proposition

Le nombre d'éléments du complémentaire $\Delta(m,n)$ dans $\mathbb{N}+m$ est $D_{n,m}$, pour tout couple d'entiers m,n premiers entre eux, tels que $2 \leqslant n < m$.

Soit A un anneau générique, et soit B son normalisé.

On considère des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels A, B, avec la filtration donnée par la valuation de B, c'est à dire $B_k = B\,t^k$ et $A_k = A \cap B_k$.

On a un morphisme $A \times A \to B$, de noyau R et d'image C, défini par $(p,q) \mapsto q - p\frac{dy}{dx}$. On pose $C_k = C \cap B_k$.

On a alors une suite exacte $0 \to C_m \to B_m \to Q \to 0$, où la dimension de Q est égale au cardinal du complémentaire de $\Delta(m,n)$ dans $\mathbb{N}+m$ (car $v(C) = \Delta(m,n)$ si A est générique).

On a aussi une suite exacte $0 \to R \to A_n \times A_m \to C_m \to 0$, car un élément de $A \times A$ hors de $A_n \times A_m$ donne par le morphisme un élément de C hors de C_m, sa valuation ne pouvant être que $m-n$ ou un multiple de n inférieur à m.

On en déduit des suites exactes :

$$0 \to R_k \to (A_n/A_{n+k}) \times (A_m/A_{m+k}) \to C_m/C_{m+k} \to 0$$

$$0 \to C_m/C_{m+k} \to B_m/B_{m+k} \to Q_k \to 0$$

Il est clair que les dimensions de B_m/B_{m+k}, A_m/A_{m+k} et A_n/A_{n+k} sont respectivement k, $\mathrm{card}([m,m+k[\cap \Gamma)$ et $\mathrm{card}([n,n+k[\cap \Gamma)$.

On en déduit aisément

$$f_{m,n}(k) = \dim Q_k - \dim R_k$$

Comme Q_k est isomorphe à un quotient de Q, on a $f_{m,n}(k) \leqslant \dim Q$.

Pour montrer que $D_{m,n} = \dim Q$, il suffit de prouver le lemme :

21 Lemme

Si $k = u_J - s_J - m$, alors $\dim Q_k = \dim Q$ et $\dim R_k = 0$.

On reprend les notaions définies en (11) et (13).

On a vu que $\delta \leqslant u_J - s_J$. Donc $C_{m+k} = B_{m+k}$, ce qui assure un isomorphisme entre Q et Q_k. On a bien $\dim Q = \dim Q_k$.

On remarque aussi que pour $0 \leqslant i < J$, on a $[u_J - s_J + s_i, u_J - s_J + s_{i+1}[\subset E_i$ et que $\mathbb{N} + u_J \subset E_J$. la formule de w (cf 14) montre que pour $r \geqslant u_J - s_J$, on a $w(r) \geqslant u_J - s_J - m + n$.

On en déduit que tout élément ω de C_{m+k} est de la forme $q - p\frac{dy}{dx}$, avec $q \in A_{m+k}$ et $p \in A_{n+k}$. En effet, c'est vrai si $v(\omega) \geqslant c$, car on peut prendre $q = \omega$ et $p = 0$, et si $v(\omega) < c$, il existe $p \in A_{n+k}$ et $q \in A_{m+k}$ tels que $v(\omega - q + p\frac{dy}{dx}) > v(\omega)$, par définition de w. Un nombre fini "d'approximations successives" conduit au résultat voulu.

On peut maintenant prouver que $R_k = 0$; autrement dit, que $q - p\frac{dy}{dx} \in C_{m+k}$ implique $q \in A_{m+k}$ et $p \in A_{n+k}$. En effet, si $q - p\frac{dy}{dx} \in C_{m+k}$, il existe $p' \in A_{n+k}$ et $q' \in A_{m+k}$ avec $(q - q') - (p - p')\frac{dy}{dx} = 0$, donc $v(p-p') \geqslant \varepsilon = u_J - s_J - m + n = k + n$ (14) et $v(q - q') = v(p - p') + m - n \geqslant k + m$. Les valuations de p et q vérifient bien les inégalités voulues.

Remarque :

Grâce à la symétrie de $D_{m,n}$, on pourra chercher à le calculer sans se préoccupper de savoir si $n < m$ ou si $n > m$.

22 Rappel sur les fractions continues

A une suite S de k nombres entiers positifs ou nuls, on associe un couple $\psi(S)$ d'entiers positifs ou nuls, avec les règles suivantes :

1) Si $k = 0$, alors $\psi(S) = (1,0)$

Si $k \geqslant 1$, s'écrit (p,T) et si $\psi(T) = (u,v)$, alors $\psi(S) = (pu+v,u)$.

Cette règle permet de définir ψ par récurrence sur k. Les autres règles en découlent.

2) Si $\psi(S)=(c,d)$, si $\psi(S,p)=(a,b)$ et si $\psi(T)=(u,v)$, alors $\psi(S,p,T) = (au+cv,\ bu+dv)$.

3) Si $\psi(T)=(u,v)$, alors $\psi(0,T) = (v,u)$.

On a les égalités
$$\psi(S,p,0) = \psi(S)$$
$$\psi(S,p,1) = \psi(S,p+1)$$
$$\psi(S,p,0,q,T) = \psi(S,p+q,T)$$

4) Si $\psi(S) = (c,d)$, si $\psi(S,p) = (a,b)$ et si $\psi(S,p,q) = (m,n)$, on a

$bm-an = bc-ad = (-1)^k$, où k est la longueur de S;

$m = c+qa$

$n = d+qb$

5) $\psi(S)$ est composé de deux nombres premiers entre eux, et, pour tout couple de nombres premiers entre eux, il existe une suite S dont l'image par ψ est ce couple.

6) En utilisant les règles 3) et 5) on peut mettre un couple d'entiers premiers entre eux sous la forme $\psi(S)$, où les éléments r_i de S vérifient $r_i \geqslant 1$ et $1 < i < k$. Si le couple n'a pas 1 parmi ses éléments, on peut supposer $r_k \geqslant 2$. Quitte à remplacer le couple par son symétrique, on peut supposer que k est pair (k étant la longueur de S).

Les preuves sont dans [2], chap. X.

23 Définitions

Désormais, m et n sont deux entiers positifs, premiers entre eux, et (S,p,q) une suite de longueur paire, telle que $\psi(S,p,q) = (m,n)$, avec $p \geqslant 1$. On pose $(a,b) = \psi(S,p)$ et $(c,d) = \psi(S)$. On a alors $m = qa + c$, $n = qb + d$, $bc-ad = bm-an = 1$ et $cn-dm = q$. On a $b \geqslant pd \geqslant d$ et $b \geqslant 1$, et $a \geqslant pc \geqslant c \geqslant 1$. (Le nombre c n'a rien à voir avec le conducteur $(m-1)(n-1)$.)

On définit une suite de triplets appartenant à $\mathbb{Z} \times [0,a[\times [0,b[$ par récurrence. Le premier triplet est $\theta_0 = (\lambda_0,u_0,v_0) = (0,0,0)$, et $u_{z+1} = u_z+c \bmod a$, $v_{z+1} = v_z - d \bmod b$, et λ_{z+1} est déterminé à partir de λ_z par la condition $h_z \leqslant h_{z+1} < h_z + na$, en posant $h_z = (\lambda_z a+u_z)n + v_z m$. On appelle h_z la valeur de θ_z. On peut vérifier que $h_{z+1} - h_z$ vaut q si $v \geqslant d$, vaut $q-1$ si $v < d$. Comme b et d sont premiers entre eux, la suite v_z est périodique de période b, d'image $[0,b[$, donc $h_{z+b} = h_z + n$. Il y a dans la suite des triplets de valeur arbitrairement grande.

24 Lemme

Si $h = h_z$ et $h' = h_{z+1}$, on a $[h,h'[\cap \Gamma = [h,h'[\cap [h, h+\lambda_z]$.

L'image de la suite θ est formée des (λ,u,v) tels que $(\lambda a+u)n+vm > 0$, et de θ_0.

Si la suite θ comporte le triplet (λ,u,v) de valeur h, elle comporte également les triplets suivants :

$(\lambda,u+1,v)$, de valeur $h+n$, pourvu que $u < a-1$,

$(\lambda+1,0,v)$, de valeur $h+n$, pourvu que $u = a-1$,

$(\lambda,u,v+1)$, de valeur $h+m$, pourvu que $v < b-1$,

$(\lambda+1,u,0)$, de valeur $h+m-1$, lorsque $v = b-1$.

Si $h \leqslant h+\alpha < h'$, on a $h+\alpha = a(\lambda - \alpha)n + un + vm + \alpha bm$. Si donc $0 \leqslant \alpha \leqslant \lambda$, $h+\alpha \in \Gamma$, et si $\lambda < \alpha < h'-h$, le coefficient de n est négatif, et celui de m inférieur à n, donc $h+\alpha \notin \Gamma$.

Si $0 < \alpha < h'-h$, le coefficient $(v+\alpha b)$ de m n'appartient pas à $\mathbb{N}+n+[0,b[$, et $h+\alpha$ n'est donc pas une valeur d'un triplet de θ. Si deux triplets θ_z et θ'' ont même valeur > 0, ils sont égaux si $q \neq 0$, et si $q=0$, on a $n=d$ et $m=c$, et $v-v''$ est multiple de $n=d$ (car m et n sont premiers entre eux). Si par exemple $v'' = v + \mu d$, on a $\theta_{z-\mu} = \theta''$. La seconde assertion est ainsi prouvée.

Le calcul de la valeur des triplets indiqués dans la troisième assertion est trivial, et on vient de voir que cette valeur assure qu'ils sont dans l'image de la suite θ.

25 Corollaire

La fonction $f_{m,n}$ atteint son maximum $D_{m,n}$ sur l'image de la suite des valeurs.

Si $k \leqslant k'$, on a $f(k')-f(k) = k'-k-\mathrm{card}([k+m,k'+m[\cap\Gamma) - \mathrm{card}([k+n,k'+n[\cap\Gamma)$

Soit $h \leqslant k < h'$ un encadrement d'un nombre k par les valeurs de deux triplets consécutifs.

Si $k+n \in \Gamma$, alors $[k+n,k+n[\subset \Gamma$, donc $f(k)-f(h) = -\mathrm{card}([h+m,k+m[\cap\Gamma)$

Si $k+n \notin \Gamma$, alors $[k+n,h'+n[\cap \Gamma = \emptyset$, donc $f(h')-f(k)$ est égal à $h'-k-\mathrm{card}([k+m,h'+m[\cap\Gamma) \geqslant 0$.

Ainsi si $D_{m,n} = f_{m,n}(k)$, l'une des valeurs de triplets qui encadrent k réalise aussi le maximum de $f_{m,n}$.

26 Lemme

Si $h_z < (m-1)(n-1)$, on a $f(h_{z+1})-f(h_z) = g_z$, où g_z est la fonction de λ_z, u_z, v_z donnée par le tableau suivant :

			g
$d=0$	$v=0$	$u<a-1$	$q-2\lambda-3$
		$u=a-1$	$q-2\lambda-4$
$d>0$	$v<d-1$	$u<a-1$	$q-2\lambda-1$
		$u=a-1$	$q-2\lambda-2$
	$v\geqslant d-1$	$u<a-1$	$q-2\lambda-2$
		$u=a-1$	$q-2\lambda-3$

Si $h_z \geqslant (m-1)(n-1)$, $f(h_{z+1})-f(h_z)$ et g_z sont tous deux des nombres $\leqslant 0$.

En effet, $h_{z+1}-h_z$ vaut $q+1$ ou q suivant que $v_z<d$ ou $v_z\geqslant d$. L'intersection $[h_z+n, h_{z+1}+n[\ \cap\ \Gamma$ compte λ_z+1 éléments si $u_z<a-1$ ou λ_z+2 si $u_z=a-1$, à moins que $h_{z+1}+n\geqslant mn$, auquel cas les expressions indiquées majorent $\mathrm{card}([h_z+n, h_{z+1}+n[\ \cap\ \Gamma)$. De même, $\mathrm{card}([h_z+m, h_{z+1}+m[\ \cap\ \Gamma)$ vaut au plus λ_z+1 si $v_{z+1}<b-1$, ou λ_z+2 si $v_z=b-1$, l'égalité étant assurée si $h_{z+1}+m<mn$.

On a donc bien $f(h_{z+1})-f(h_z)=g_z$ si $h_z\leqslant(m-1)(n-1)$, et pour $h_z\geqslant(m-1)(n-1)$, on a $g_z\leqslant f(h_{z+1})-f(h_z) = h_z - h_{z+1} \leqslant 0$.

27 Corollaire

$D_{m,n}$, qui est le maximum de la suite $f(h_z)$ est aussi le maximum de la suite $\sum_{0\leqslant i<z} g_i = f^*_z$.

28 Lemme

On a $f^*_{ab} = (q-1)ab - 2a - 2b + bc = bm - 2a - 2b - ab$

On sépare les cas $d=0$ et $d\neq 0$ pour la démonstration. Pour $d=0$, on a $b=c=1$, donc $v_i=0$, $u_i=i$ et $\lambda_i=0$ pour $0\leqslant i<a$. Donc $f^*_a = (a-1)(q-3)+q-4$, ce qui convient.

Pour $d > 0$, comme a et c, b et d, a et b sont premiers entre eux, $(c,-d)$ est un générateur du groupe $(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})$, donc la suite (u_i,v_i), $0 \leqslant i < ab$ a pour image $[0,a[\times [0,b[$. Comptons les λ_i égaux à -1 : ils correspondent aux (u_i,v_i) tels que $u_i n + v_i m > an$, ce qui impose $u_i \geqslant 1$ et $v_i \geqslant 1$. Si $un + vm > an$, avec $0 < u < a$ et $0 < v < b$, on a $(a-u)n + (b-v)m = 2an + 1 - un - vm \leqslant an$, et vice versa. Ceci montre qu'il y a $(a-1)(b-1)/2$ fois $\lambda_i = -1$ pour $0 \leqslant i < ab$. Les autres λ_i sont évidemment nuls.

Le tableau des valeurs de g donne donc :

$$f^*_{ab} = qab - (a-1)(d-1) - 2(d-1) - 2(a-1)(b-d+1) - 3(b-d+1) + (a-1)(b-1)$$

Toute simplification faite, on voit que $f^*_{ab} = (q-1)ab - 2a - 2b + ad + 1$. Ce qui convient aussi.

29 <u>Théorème</u>

Si m et n sont deux entiers $\geqslant 2$ premiers entre eux, si S est une suite de longueur paire, si $(m,n) = \psi(S,p,q)$, avec $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 2$ (et on sait qu'une telle suite existe, quitte à intervertir m et n), si $(a,b) = \psi(S,p)$, et si $(c,d) = \psi(S)$, on a :

si $q = 2$ et $d = 0$, $D_{m,n} = 0$

si $q = 3$ et $d = 0$, $D_{m,n} = 0$

si $q = 2$, $c = 1$, $d > 0$, $D_{m,n} = f^*_{ab} + 2$

si $q = 2$, $d = 1$, $c > 1$, $D_{m,n} = f^*_{ab} + 1$

sinon $D_{m,n} = f^*_{ab} + D_{m-2a,n-2b}$

On constate que $(m-2a,n-2b) = (\overline{m},\overline{n}) = \psi(S,p,q-2)$. On remarque que si $q > 2$ ou $d > 0$, on peut encore définir $\overline{f}*$ et $\overline{g}$ comme précédemment en vue de calculer $D_{\overline{m},\overline{n}}$. On notera que $\overline{g}_z = g_{z+ab}$, et que par conséquent $\overline{f}^*_z + f^*_{ab} = f^*_{z+ab}$.

Le cas $q = 2$, $d = 0$, qui donne $n = 2$ et $m = 2a + 1$ se traite aisément : comme $g_z \leqslant 0$ pour tout z, $f^*_0 = 0$ est le maximum de f^*.

Le cas $d=0$ et $q=3$ se traite de la même façon.

Dans les autres cas, deux éventualités apparaissent; la première est : $g_z \geqslant 0$ pour tout $z \in [0,ab[$, la seconde est : il existe z dans $[0,ab[$ avec $g_z < 0$.

La première éventualité a lieu si $d=0$ et $q \geqslant 4$, et aussi si $d > 0$ et $q \geqslant 3$. Elle implique que le maximum de f^*_i se réalise avec $i \geqslant ab$, donc $D_{m,n} = f^*_i = \bar{f}^*_{i-ab} + f^*_{ab}$, et $\bar{f}^*_{i-ab}$ réalise le maximum de $\bar{f}^*$, qui est $D_{\bar{m},\bar{n}}$.

On voit que $g_z \geqslant 0$, sauf si $u_z = a-1$, $v_z \geqslant d-1$, et $\lambda_z = 0$. De tels triplets ne peuvent être obtenus que si $(a-1)n + (d-1)m < an$, c'est à dire $(d-1)m-n = (c-1)n-m-q < 0$, ou encore $(d-2)m + (c-2)n - 2 < 0$ (cette expression est la somme des deux précédentes). Si $c \geqslant 2$ et $d \geqslant 2$, l'un des deux nombres c et d est $\geqslant 3$, car c et d sont premiers entre eux. L'expression est donc au moins $m-2$ ou au moins $n-2$, donc positive. Si donc $c \geqslant 2$ et $d \geqslant 2$, la première éventualité a lieu.

Si $c \geqslant 2$ et $d = 1$, on a $(d-1)m-n < 0$, mais $dm-n = (c-2)n+n-2 \geqslant 0$, il n'y a qu'une valeur de $z \in [0,ab[$ qui donne $g_z = -1$, les autres donnent $g_z \geqslant 0$.

Si $c = 1$ et $d \geqslant 1$, on a $(d-1)m-n = -m-2 < 0$, $dm-n = -2 < 0$, mais $(d+1)m-n \geqslant 0$. Il n'y a que deux valeurs de $z \in [0,ab[$ qui donnent $g_z = -1$, les autres donnent $g_z \geqslant 0$. (On a bien $d < b$, car $b = ad+1$ et $a \geqslant c \geqslant 1$).

Montrons que dans les deux cas, on a $g_z \leqslant 0$ si $h_z \geqslant an$. L'inégalité $h_z \geqslant an$ implique $\lambda_z \geqslant 0$. Si $\lambda_z \geqslant 1$, la question est réglée; de même si $\lambda_z = 0$ et si $u_z = a-1$ ou $v_z < d-1$. Si $u_z < a-1$, $v_z < d-1$ et $\lambda_z = 0$, on a $u_z n + v_z m + \lambda_z an < (d-1)m+(a-1)n < an$.

Montrons que dans les deux cas, si $g_z = -1$ et si $z \leqslant i < ab$, alors $g_i \leqslant 0$. Si $(d-1)m + (a-1)n \leqslant an + un + vm < an$, on a sûrement $\lambda = 0$, car $\lambda = 1$ ne donne que des valeurs $\geqslant an$ et $\lambda = -1$ ne donne que des valeurs plus petites que $(b-1)m-n = (a-1)n+1-m < (a-1)n+(d-1)m$ (car $m \geqslant 2$ et $d \geqslant 1$). Si $u = a-1$ et $v \geqslant d-1$, on a $g = -1$, et si $u < a-1$, on a $v > d-1$, et $g = 0$.

Ces valeurs de g donnent les variations de $f*$, ce qui donne la valeur du maximum de $f*$ comme on le voulait.

30 Corollaire

Avec les mêmes notations que ci-dessus, on a les formules, où $\frac{x}{y}$ est la partie entière du quotient :

si $d = 0$, $D_{n,m} = (p-1)\frac{(q-2)^2}{4} + \frac{(q-3)^2}{4}$ (on retrouve le résultat de [4])

si $d > 0$, $D_{n,m} = ab\,\frac{q^2}{4} + (bc-2a-2b)\,\frac{q}{2} + F$, où F est donné par le tableau :

			F
q impair			$D_{a+c,b+d}$
q pair	$c \geqslant 2$	$d \geqslant 2$	$D_{c,d}$
		$d = 1$	1
	$c = 1$	$d \geqslant 1$	2

On obtient ceci à partir du théorème précédent, en utilisant l'expression de $f*_{ab}$ (lemme 28) et les formules sommatoires des progressions arithmétiques.

31 Notations.

Soit $R = (e_1, e_2, \ldots, e_k)$, avec $k \geqslant 2$, $e_1 > 0$ et $e_2 > 0$, telle que $(M,N) = \psi(R)$, vérifie $N \geqslant 2$ (on a $M > N$). On définit des nombres σ_i et τ_i, $0 \leqslant i \leqslant k$ de la manière suivante :

$\sigma_k = 0$ et $\tau_k = 1$

si $0 < i \leqslant k$, $\sigma_{i-1} = \sigma_i + \tau_i e_i$, et $\tau_{i-1} = 0$ si $\tau_i = 1$ et σ_{i-1} pair, et $\tau_{i-1} = 1$ si $\tau_i = 0$ ou si σ_{i-1} impair.

32 Théorème

Avec les notations ci-dessus, on a

(i) $$4\, D_{M,N} = (M-4)(N-4) + \sigma_0 + (4-2\,\tau_1)(e_1-2) - 2\,\tau_1\,\tau_2$$

(ii) $$\frac{(M-4)(N-4)}{4} \leqslant D_{M,N} \leqslant \frac{(M-2)}{2}\,\frac{(N-2)}{2}$$

(iii) $$D_{M+N,N} - D_{M,N} = \frac{(N-2)^2}{4}$$

(iv) $D_{M+N,M} - D_{M,N}$ est donné par le tableau

	$4(D_{M+N,M} - D_{M,N})$
$\tau_1 = 0$	$M^2 - 4M + 7 - 4\,e_1$
$\tau_1 = 1$	$M^2 - 4M - 2\,e_1 + \tau_0 + 2\,\tau_2$

(v) $$\frac{(M-3)^2}{4} \leqslant D_{M+N,M} - D_{M,N} \leqslant \frac{(M-2)^2}{4}$$

Commentaire

Les formules (iii) et (iv) décrivent le comportement de D sous l'effet d'un éclatement de l'idéal maximal de A; le cas (iii) concernant le cas où la multiplicité ne change pas.

(i) La preuve se fait "par récurrence sur R".

On constate qu'une modification de R, dans les limites permises pour R, effectuée selon les règles 3) du rappel 22, ne change aucun des deux membres de l'égalité à démontrer, mais permet de se ramener au cas où le

dernier élément de R est $\geqslant 2$, en diminuant la longueur de R.

On observe aussi qu'alors le théorème 29 permet, soit de vérifier l'égalité voulue (dans les cas $R = (e_1 , 2)$, $R = (e_1 , 3)$, $R = (e_1 , e_2 , 2)$ et $R = (e_1 , 1, e_3 , 2)$), soit de se ramener au cas $\overline{R} = (e_1 , \dots , e_{k-1} , e_k-2)$, compte tenu de l'égalité (lemme 28) $4 f^*_{ab} = (m-4)(n-4) - (m-2a-4)(n-2b-4) + 2$; alors la longueur de R ne change pas, mais la somme de ses termes diminue si on remplace R par $\overline{R}$.

Comme la longueur de R et la somme de ses termes ne peuvent diminuer indéfiniment, on arrive à se ramener au bout d'un nombre fini de diminutions à l'un des cas de vérifications directe.

(iv) se déduit de (i)

(ii), (iii), (v) peuvent se déduire de (i) et (iv), mais on peut également les montrer par récurrence sur R.

Les vérifications à effectuer sont toutes obtenues au terme de calculs simples et fastidieux.

Exemple : l'espace des modules pour la paire (5,12).

Voici les valeurs possibles pour Δ , représentées par leur générateur minimal comme Γ-ensemble.

I	0,7	X	0,7,14,33
II	0,7,38	XI	0,7,14,28
III	0,7,33	XII	0,7,18
IV	0,7,28	XIII	0,7,16
V	0,7,26	XIV	0,7,14,23
VI	0,7,26,33	XV	0,7,14,21
VII	0,7,23	XVI	0,7,14,21,28
VIII	0,7,21	XVII	0,7,13
IX	0,7,14	XVIII	0,7,13,26

Voici la partition suivant les valeurs de Δ de l'espace des développements courts $(a_i = 0$ pour $i \in \Gamma \cup (\Gamma+m-n))$, telle que la proposition 15 permet de la calculer. La figure se lit comme suit : chaque sommet nommé du graphe correspond à une valeur de Δ , cette valeur est atteinte quand les fonctions nommant les arêtes au-dessous de ce sommet sont nulles, et quand les fonctions nommant les arêtes au-dessus de ce sommet et issues de lui sont non nulles. Par exemple, la partie où Δ prend la valeur XIV est définie par $a=0$, $H=0$ et $b \neq 0$, $G \neq 0$.

On pourra noter que la fermeture de la partie $\Delta = X$ rencontre sans la contenir la partie où Δ = VIII .

On a posé pour ne pas surcharger le diagramme :

$$K = 3bd + b^4 - 4c^2$$

$$H = 12c - 13b^2$$

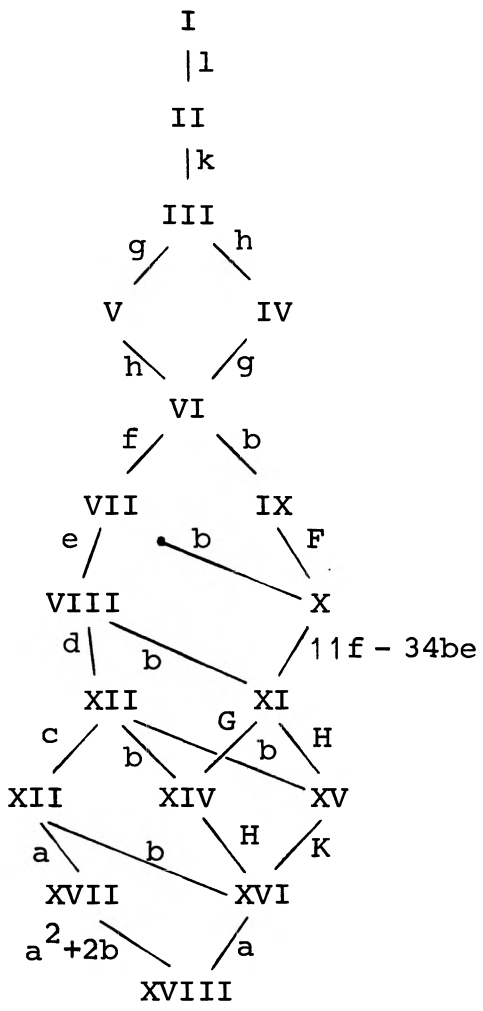
$$G = 108d - 133b^3$$

$$F = (54)^2e^2 - 1152bh + 38.96b^2g - 38(133/18)^2b^9$$

et on a écrit le développement court sous la forme :

$$x = t^{5}$$

$$y = t^{12}+at^{13}+bt^{14}+ct^{16}+dt^{18}+et^{21}+ft^{23}+gt^{26}+ht^{28}+kt^{33}+lt^{38}$$



Il s'avère que les espaces correspondant à VIII , IX et XIII sont singuliers, et tous les autres lisses.

VALEURS DE $D_{M,N}$ POUR LES PETITES VALEURS DE M ET N, CALCULÉES SUIVANT LA PROCÉDURE DU § 20, A PARTIR DE

M \ N →	5					10					15					20					25					30	
5	0																										
6	**	1																									
7	0	1	2																								
8	**	1	**	4																							
9	1	2	**	4	6																						
10	**	**	**	5	***	9																					
11	1	3	4	6	7	9	12																				
12	**	3	**	6	***	***	***	16																			
13	2	3	6	8	9	12	14	16	20																		
14	**	4	**	***	***	13	***	18	***	25																	
15	2	**	**	10	12	***	***	20	***	25	30																
16	**	5	**	10	***	15	***	22	***	28	***	36															
17	3	5	8	11	15	18	20	24	26	30	33	36	42														
18	**	5	**	12	***	***	***	25	***	32	***	***	***	49													
19	3	6	10	12	16	21	24	27	30	35	38	42	46	49	56												
20	**	**	**	14	***	21	***	28	***	37	***	***	***	53	***	64											
21	4	7	**	***	18	***	28	32	***	39	***	***	52	56	***	64	72										
22	**	7	**	16	***	24	***	***	***	41	***	51	***	59	***	69	***	81									
23	4	7	12	16	21	25	30	36	40	44	48	54	57	63	67	72	77	81	90								
24	**	8	**	17	***	***	***	36	***	45	***	***	***	66	***	76	***	***	***	100							
25	5	**	14	18	24	27	***	38	45	50	53	***	63	70	74	80	***	90	96	100	110						
26	**	9	**	18	***	30	***	40	***	***	***	61	***	73	***	83	***	95	***	106	***	121					
27	5	9	**	20	25	***	36	42	***	55	60	***	70	76	***	87	93	***	104	110	***	121	132				
28	**	9	**	***	***	33	***	44	***	55	***	66	***	79	***	92	***	***	***	115	***	128	***	144			
29	6	10	16	22	27	33	40	45	51	58	66	72	76	82	88	96	100	107	114	120	126	132	139	144	156		
30	**	**	**	22	***	***	***	47	***	60	***	***	***	85	***	98	***	***	***	124	***	***	***	***	***	169	
31	6	11	18	23	30	36	44	48	55	62	69	78	84	89	95	102	108	117	122	130	136	143	150	156	164	169	182
32	**	11	**	24	***	37	***	52	***	65	***	78	***	91	***	106	***	121	***	134	***	148	***	162	***	177	***	196
33	7	11	**	24	33	***	46	***	***	67	74	***	91	98	***	110	117	***	***	139	***	154	160	***	175	182	***	196
34	**	12	**	26	***	39	***	56	***	69	***	84	***	***	***	113	***	128	***	145	***	158	***	174	***	189	***	205
35	7	**	20	***	34	42	***	56	65	71	***	***	95	105	112	118	***	***	140	150	155	***	172	179	***	195	***	210
36	**	13	**	28	***	***	***	58	***	74	***	***	***	105	***	120	***	***	***	153	***	169	***	***	***	202	***	218
37	8	13	22	28	36	45	52	60	70	75	84	93	101	109	120	128	133	142	150	158	165	176	182	191	200	207	215	224

B I B L I O G R A P H I E

[1] O. ZARISKI. Characterization of plane algebroid curves whose module of differentials has maximum torsion. Proc. Nat. Ac. Sc. vol. 56, p. 781-786 (Sept. 1966).

[2] G. HARDY et E. WRIGHT. Introduction to the Theory of Numbers. Oxford University Press.

[3] O. ZARISKI. Studies in equisingularity III. Am. J. Math. 90 (1968).

[4] O. ZARISKI. Le problème des modules pour les branches planes. Cours à l'Ecole Polytechnique (1973).

[5] M. MERLE. Modules de courbes singulières. C. R. Acad. Sc. (à paraître).

Bull. Soc. math. France,
103, 1975, p. 203-223.

ESPACES PROJECTIFS ANISOTROPES

PAR

CHARLES DELORME

RÉSUMÉ. — Cet article traite des espaces projectifs attachés aux algèbres de polynômes graduées de façon inhabituelle. On y démontre des propriétés analogues à celle du cas classique : cohomologie, complexe dualisant,... en dépit de différences notables : ces espaces ne sont pas lisses, les modules associés aux modules gradués libres ne sont pas inversibles...

On donne comme application la construction de nombreux anneaux de Gorenstein non triviaux.

Introduction

Cet article présente des propriétés des espaces du type $P = \operatorname{Proj} S$, où S est une algèbre de polynômes sur un anneau A, graduée de façon que les indéterminées soient homogènes de degrés entiers positifs divers, et que les éléments de A soient de degré 0.

Le chapitre 1 indique les réductions de degré qu'on peut opérer, et décrit les anneaux de coordonnées des schémas étudiés. Dans le chapitre 2, on recherche parmi les $\mathcal{O}_P(n)$ des modules amples, très amples, ou engendrés par leurs sections globales.

Le chapitre 3 traite de la cohomologie de ces espaces. Le chapitre 4 établit une correspondance entre les S-modules gradués et les $\mathcal{O}_P$-modules cohérents, semblable à celle du cas classique, où les degrés valent tous 1.

On décrit explicitement, au chapitre 5, le complexe dualisant de P (th. 5.2 et 5.7) et la relation entre la dualité de P et la dualité de S (5.6). Là encore les résultats ressemblent à ceux du cas classique.

Justification

Les espaces projectifs anisotropes sont assez importants pour qu'on les étudie systématiquement, mais on ne donne qu'une application un peu

frappante, la construction, au paragraphe 5, de nombreux exemples non triviaux d'anneaux de Gorenstein.

A titre de curiosité, on montre au paragraphe 6 que toute courbe hyperelliptique se plonge dans un plan projectif anisotrope, et peut être décrite globalement par une seule équation quasi homogène, bien que le faisceau d'idéaux ne soit pas inversible.

1. Réduction des degrés

1.1. NOTATIONS. — Soit x une application de source finie et non vide, de but l'ensemble $\mathbf{N}^+$ des entiers > 0.

On appelle :

$I(x)$ la source de x;

$r(x)+1 = |I(x)|$ le nombre d'éléments de $I(x)$;

$s(x)$ la somme $\sum_{i \in I(x)} x(i)$;

$m(x)$ le p. p. c. m. des $x(i)$;

$d(x, J)$ le p. g. c. d. des images par x des éléments de la partie non vide J de $I(x)$:

$$J_k = I(x) - \{k\},$$

$$\varepsilon(x) = \text{p. p. c. m.}_{j \in I(x)} d(x, J_j) \qquad (\text{pour } r(x) > 0).$$

1.2. NOTATIONS. — On appelle $S_A(x)$ l'algèbre graduée $A[X_i]_{i \in I(x)}$, où X_i a le degré $x(i)$, et $P_A(x)$ le schéma Proj $(S_A(x))$. Dans ces notations, on omettra parfois A et x si aucune confusion n'est à craindre.

Si M est un S-module gradué, on appelle comme d'habitude $M(n)$ le module obtenu par décalage de la graduation, c'est-à-dire $M(n)_p = M_{n+p}$, $\mathfrak{A}\, M$ le $\mathcal{O}_P$-module associé à M, et $\mathcal{O}_P(n) = \mathfrak{A}(S(n))$, où M_n est la composante de degré n de M.

On pose :

$D_i = \text{Spec}\,(S_{(X_i)})$ pour $i \in I$;

$D_J = \bigcap_{i \in J} D_i = \text{Spec}\,(S_{(X_J)})$, où $X_J = \prod_{i \in J} X_i$ et où J est une partie non vide de $I(x)$. Si $J \subset J'$, on a $D_J \supset D_J'$.

1.3. PROPOSITION. — *Soit* $\tau(x) : I(x) \to \mathbf{N}^+$, *définie par les formules* : *si* $r(x) = 0$: $\tau(x) = 1$, *et sinon* : $\tau(x)(i) = x(i)/\text{p. p. c. m.}_{k \in J_i} d(x, J_k)$.

On a $P_A(x) = P_A(\tau(x))$, et les modules non nuls de type $\mathcal{O}_p(n)$ sur $P_A(x)$ et $P_A(\tau(x))$ sont les mêmes. Autrement dit, on peut supposer que les $r(x)+1$ degrés $x(i)$ sont premiers entre eux $r(x)$ à $r(x)$.

C'est trivial pour $r = 0$. Sinon, soit T la sous-algèbre graduée de $S(x)$ dont les éléments homogènes sont ceux de $S(x)$ de degré multiple de $\varepsilon(x)$, avec la graduation induite. Alors Proj T = Proj $(S(x))$, et T n'est autre que $A[Y_i]_{i\in I}$, où $Y_i = X_i^{d(x,J_i)/d(x,I)}$ a pour degré $\varepsilon(x)\tau(x)(i)$. Ainsi, on passe de T à $S(\tau(x))$ en divisant tous les degrés par $\varepsilon(x)$, ce qui ne change pas le schéma Proj correspondant.

Les isomorphismes correspondants

$$S(\tau(x))_n \simeq T_{n\varepsilon(x)} = S(x)_{n\varepsilon(x)}$$

fournissent des isomorphismes naturels

$$g_*(\mathcal{O}_{P(\tau(x))}(n)) \simeq \mathcal{O}_{P(x)}(n\,\varepsilon(x)),$$

où g est l'isomorphisme naturel $P(\tau(x)) \to P(x)$.

Inversement, si n n'est pas multiple de $d(x, I)$, $S(x)(n) = 0$; on ne perd donc rien en simplifiant tous les degrés par leurs p. g. c. d. $d(x, I)$. Supposons maintenant $d(x, I) = 1$. Alors $x(i)$ et $d(x, J_i)$ sont premiers entre eux; un entier n se met de façon unique sous la forme $\lambda_i\, x(i) + \mu_i\, d(x, J_i)$, $0 \leqslant \lambda_i < d(x, J_i)$. Un monôme de degré $n + k\, d(x, J_i)$ a donc toujours $X_i^{\lambda_i}$ en facteur. D'où l'égalité de T-modules gradués

$$\oplus_{\varepsilon(x)|p}(S(x)(n))_p = \oplus_{\varepsilon(x)|p}((\textstyle\prod_{i\in I} X_i^{\lambda_i})(S(x)(n-\sum_{i\in I}\lambda_i x(i))))_p.$$

Les modules $\mathcal{O}_{P(x)}(n)$ et $\mathcal{O}_{P(x)}(n-\sum_{i\in I}\lambda_i\, x(i))$ sont donc isomorphes, et le second se retrouve comme module associé au $S(\tau(x))$-module gradué $S(\tau(x))((n-\sum_{i\in I}\lambda_i\, x(i))/\varepsilon(x))$. La réduction des degrés ne perd donc pas de modules du type $\mathcal{O}_P(n)$.

1.4. DÉFINITION. — *Si L est un ensemble fini, y une application $L \to \mathbf{N}^+$, n un entier, et d un entier > 0, on appelle $A[y, n, d]$ le sous-module libre sur A de l'anneau de polynômes $A[X_k]_{k\in L}$ engendré par les monômes X^b tels que*

$$\textstyle\sum_{k\in L} b(k)\, y(k) \equiv n \bmod (d), \qquad b(k) \geqslant 0.$$

La multiplication dans $A[X_k]_{k\in L}$ donne à $A[y, 0, d]$ une structure de A-algèbre, et aux $A[y, n, d]$ une structure de $A[y, 0, d]$-module,

et fournit aussi des morphismes naturels

$$A[y, n, d] \otimes A[y, n', d] \to A[y, n+n', d],$$
$$A[y, n, d] \to \mathrm{Hom}(A[y, n', d], A[y, n+n', d]).$$

1.5. PROPOSITION. — *Soit J une partie non vide de $I(x)$.*

Soit G_J le groupe de rang $|J|-1$ formé des monômes X^c de $S_{(X_J)}$ tels que $c \mid I-J = 0$, et soit T_J un monôme de S_{X_J} de la forme X^t, avec $t \mid I-J = 0$, et $\sum_{i \in J} t(i)\, x(i) = d(x, J)$.

On a alors des isomorphismes de A-modules

$$\mathcal{O}_P(n)(D_J) \xrightarrow{\sim} A[G_J][x \mid I-J, n, d(x, J)]$$

compatibles aux structures de A-algèbres, de modules sur elles, et aux morphismes naturels.

$\mathcal{O}_P(n)(D_J)$ a une base sur A formée des monômes X^a tels que $a(i) \geqslant 0$ si $i \in I-J$ et que $\sum_{i \in I} a(i)\, x(i) = n$. Le morphisme annoncé est défini par

$$X^a \to ((\Pi_{i \in J} X_i^{a(i)})/T_J^e)(\Pi_{i \in I-J} X_i^{a(i)}),$$

où l'exposant e de T_J vaut $(\sum_{i \in J} a(i)\, x(i)/d(x, J))$. Les vérifications sont faciles.

1.6. COROLLAIRE. — *Si J est une partie non vide de I, et si n est multiple de $d(x, J)$, alors $\mathcal{O}_P(n)(D_J)$ est libre de rang 1 sur $\mathcal{O}_P(D_J)$ de base T_j^k, où $n = k.d(x, J)$.*

1.7. COROLLAIRE. — *Si J est une partie non vide de I, et si $d(x, J) = 1$, alors $\mathcal{O}_P(D_J) = A[G_J][X_i/T_J^{x(i)}]_{i \in I-J}$ est un localisé d'une algèbre de polynômes, donc D_J est lisse sur A, et $S_{X_J} = \mathcal{O}_P(D_J)[T_J, T_J^{-1}]$, donc la projection $\pi : \mathrm{Spec}(S) - \{0\} \to \mathrm{Proj}(S)$, restreinte à D_J, est isomorphe à $D_J \times \mathrm{Spec}(A[T, T^{-1}]) \to D_J$.*

1.8. *Remarques.* — D'après la réduction des degrés (proposition 1.3), les deux corollaires ci-dessus prennent effet sur un ouvert de P qui contient au moins tous les D_{J_i}.

La proposition 1.5 permet aussi de voir que si $x = \tau(x)$ et $d(x, J) \neq 1$, alors D_J n'est pas lisse, et si n n'est pas multiple de $d(x, J)$, alors $\mathcal{O}_P(n)(D_J)$ n'est pas libre sur $\mathcal{O}_P(D_J)$.

Si m est le p. p. c. m. des $x(i)$, $\mathcal{O}_P(qm)$ est inversible, et les morphismes

$$\mathcal{O}_P(qm) \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_P(n) \to \mathcal{O}_P(qm+n) \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_P(n) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_P(qm), \mathcal{O}_P(qm+n))$$

sont bijectifs pour tous les entiers q et n, comme on peut s'en assurer en regardant sur chaque D_i.

2. Faisceaux amples

On examine le comportement de $O_p(n)$ et $O_p(nm)$ pour n assez grand (2.3). Pour préciser, introduisons quelques notations.

2.1. Définitions. — On appelle $G(x)$ le rationnel défini par les formules : si $r(x) = 0$: $G(x) = -s(x)$, sinon :

$$G(x) = -s(x) + (1/r) \sum_{2 \leqslant v \leqslant r+1} \binom{r-1}{v-2}^{-1} \sum_{|J|=v} m(x \mid J),$$

où r, s, m ont le même sens qu'en (1.1).

On appelle $D\,x\,(n)$ la condition portant sur l'entier n : « si

$$\sum_{i \in I} B(i)\, x(i) = n + k\, m(x),$$

avec k entier $\geqslant 0$ et $B \in N^I$, il existe $b \in \mathbf{N}^I$ tel que $B - b \in \mathbf{N}^I$ et $\sum_{i \in I} b(i)\, x(i) = km(x)$ ». Autrement dit, tout monôme X^B de degré $n + km(x)$ est divisible par un monôme X^b de degré $km(x)$.

On appelle $F(x)$ le plus petit entier tel que $n > F(x)$ implique $Dx(n)$.

On appelle $E(x)$ le plus petit entier tel que $n > m(x)\, E(x)$, et n multiple de $m(x)$ implique $Dx(n)$ (donc $m(x)\, E(x) \leqslant F(x)$).

2.2. Proposition. — *$F(x)$ est fini, et $F(x) \leqslant G(x)$ (ce qui signifie que si $n > G(x)$, alors $Dx(n)$ est vérifiée).*

On procède par récurrence sur k et $r(x)$. C'est vrai pour $k = 0$. C'est vrai pour $r = 0$.

Si c'est vrai pour $k = 1$, avec x fixé, c'est vrai pour tout $k > 0$. On le voit en remplaçant n par $n + (k-1)\, m(x)$.

Si c'est vrai pour les $x \mid J_i$, c'est vrai pour x, avec $k = 1$.

En effet, il suffit de trouver $b \in \mathbf{N}^I$ tel qu'un des $b(i)$ soit nul. Il suffit donc qu'une des $r(x)+1$ inégalités soit satisfaite :

$$\sum_{j \in J_i} B(j)\, x(j) > G(x \mid J_i) + m(x),$$

car $m(x)$ est multiple de $m(x \mid J_i)$. Il suffit pour cela que l'inégalité suivante ait lieu :

$$r(x)\sum_{j\in I} B(j)x(j)$$
$$= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i} B(j)x(j) > \sum_{i\in I} G(x \mid J_i) + m(x)(r(x)+1).$$

Par construction de G, on a justement

$$\sum_{i\in I} G(x \mid J_i) + m(x) = r(x)\, G(x),$$

d'où la conclusion : il suffit que

$$\sum_{i\in I} B(i)x(i) > G(x) + m(x).$$

2.3. PROPOSITION.

(i) *Le module $\mathcal{O}_P(m)$ est ample.*

(ii) Si n > F, le module $\mathcal{O}_P(n)$ *est engendré par ses sections globales.*

(iii) *Si $n > 0$ et $n > E$, alors $\mathcal{O}_P(nm)$ est très ample.*

(ii) Soit $V \in S_v$, avec $v > 0$. Si $u \in \mathcal{O}_P(n)(D_V)$, u est de la forme U/V^q, avec $q > 0$, et $U \in S_{qv+n}$. Donc $u = UV^{qm-q}/V^{qm}$, avec $UV^{qm-q} \in S_{qmv+n}$. Alors UV^{qm-q} se met sous la forme $\sum U_\lambda V_\lambda$, où les U_λ sont des monômes de degré n et les V_λ des monômes de degré qmv. Or les U_λ définissent des sections globales de $\mathcal{O}_P(n)$ et les V_λ/V^{qm} sont des sections de $\mathcal{O}_P(D_V)$.

(iii) Tout monôme de S, de degré nmp, $p \in \mathbf{N}^+$, est un produit de monômes, de degré nm pour l'un, m pour les autres; en effet, comme $nm > E\,m$, on a $Dx(nm)$. Donc $\sum_{p\in\mathbf{N}} S_{nmp}$ est engendrée comme A-algèbre par S_{nm}. On applique alors EGA II ([2], 4.4.2).

(i) $\mathcal{O}_P(m)$ est inversible et $\mathcal{O}_P(mn) = \mathcal{O}_P(m)_{\otimes n}$ est très ample (1.8), ce qui suffit, selon EGA II ([2], 4.5.6).

2.4. DÉFINITIONS. — Soit $\sigma(x)$ l'injection naturelle de l'image de x dans $\mathbf{N}^+$. On a les inégalités :

$$s(x) > s(\sigma(x)) \quad \text{si } x \neq \sigma(x) \quad \text{(i. e. } x \text{ non injective)},$$
$$s(x) > s(\tau(x)) \quad \text{si } x \neq \tau(x) \quad (\tau \text{ a été defini en 1.3}).$$

On en déduit que la suite x, $\tau(x)$, $\sigma(\tau(x))$, $\tau(\sigma(\tau(x)))$, ... est stationnaire. On appelle $\rho(x)$ sa limite.

2.5. PROPOSITION. — *On a les égalités*

$$m(x) = m(\sigma(x)) \qquad \textit{et} \qquad m(x) = m(\tau(x))\,\varepsilon(x),$$

$$F(x) = F(\sigma(x)),$$
$$E(x) = E(\sigma(x)) = E(\tau(x)) = E(\rho(x)).$$

Je ne donne pas ici la preuve, qui est fastidieuse.

2.6. *Remarques.* — Si $F(\rho(x)) < m(\rho(x))$, alors $E(x) = -1$ et $O_P(m)$ est très ample. Ceci se produit si $r(\rho(x)) \leqslant 2$. C'est trivial si $r(\rho(x)) = 0$. On ne peut avoir $r(\rho(x)) = 1$. Si $r(\rho(x)) = 2$, l'image de $\rho(x)$ est formée de trois entiers distincts, premiers entre eux deux à deux. En les nommant a, b, c, on a :

$$G(\rho(x)) = (1/2)(abc+ab+ac+bc)-(a+b+c) < abc = m(\rho(x)).$$

Il peut arriver que $O_P(m)$ ne soit pas très ample, comme le prouve l'exemple :

$$x = (1, 6, 10, 15), \qquad B = (1, 4, 2, 1)$$

car X^B est alors dans S_{2m}, mais pas dans l'image de $S_m \otimes S_m$.

Si $x = \tau(x)$ et $m(x) > 1$, on a $G(x) < r(x)\, m(x) - s(x)$.

3. Cohomologie de P

Les démonstrations de ce paragraphe n'utilisent rien des résultats qui précèdent. Les notations sont celles de 1.1 et 1.2.

3.1. THÉORÈME. — *Pour $n \geqslant 0$, le A-module $H^0(P, \mathcal{O}_P(n))$ est libre sur A. et a une base formée des X^B tels que $n = \sum_{i \in I} B(i)\, x(i)$ et $0 \leqq B(i)$, le morphisme naturel $S_n \to H^0(P, \mathcal{O}_P(n))$ est bijectif.*

Pour $n < 0$, le A-module $H^r(P, \mathcal{O}_P(n))$ est libre et possède une base formée des X^B tels que $n = \sum_{i \in I} B(i)\, x(i)$ et $0 > B(i)$.

Les autres groupes de cohomologie sont nuls.

Nous donnons ici la démonstration par J. GIRAUD de ce théorème. Quitte à ordonner les $r+1$ variables X_i, on peut supposer $I = \{0, \ldots, r\}$. A partir d'un S-module gradué M, on construit un complexe augmenté $M \to M^*$ de S-modules gradués par composition des suites exactes :

$$Q^{i-1} \to M^i \to Q^i \to 0, \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant i \leqslant r,$$

avec $Q^{-1} = M$, et $Q^{i-1} \to M^i$ est le morphisme naturel de Q^{i-1} vers son localisé $M^i = Q^{i-1} \otimes_S S[X_i^{-1}]$ muni de la graduation naturelle.

FACULTÉ DES SCIENCES · ORSAY · BIBLIOTHÈQUE MATHÉMATIQUES

Ce complexe augmenté est transformé par le foncteur « faisceau associé » en un complexe de $\mathcal{O}_P$-modules :

$$0 \to \mathfrak{A} M \to \mathfrak{A} M^0 \to \ldots \to \mathfrak{A} M^r \to \mathfrak{A} Q^r \to 0.$$

On voit que $\mathfrak{A} Q^{i-1} \to \mathfrak{A} M^i$ est le morphisme d'adjonction $\mathfrak{A} Q^{i-1} \to w_{i*} w_i^* \mathfrak{A} Q^{i-1}$ pour l'immersion ouverte $w_i : D_i \to P$.

On en déduit trois choses : d'abord, $\mathfrak{A} M^i$ est acyclique pour le foncteur $\Gamma = H^0(P, .)$ car w_i et D_i sont affines; ensuite le support de $\mathfrak{A} Q^i$ est inclus dans le fermé $\bigcap_{0 \leqslant j \leqslant i} (P\text{-}D_j)$, en particulier $\mathfrak{A} Q^r = 0$; enfin $(M^i)_0 \to \Gamma \mathfrak{A} M^i$ est un isomorphisme.

Supposons maintenant que $M = S(n)$, et posons $M^{-1} = M$ et $M^{r+1} = Q^r$. Une base homogène de M^i est constituée des X^B avec $B(j) < 0$ pour $0 \leqslant j < i$ et $B(j) \geqslant 0$ pour $i < j \leqslant r$, et $B(i)$ quelconque, avec degré $(X^B) = \sum_{i \in I} B(i)\, x(i) - n$. La différentielle $d^i : M^i \to M^{i+1}$ envoie X^B sur X^B si cette fraction monomiale figure dans la base de M^{i+1}, sur 0 sinon.

Il en résulte que le complexe $0 \to M^{-1} \to M^0 \to \ldots \to M^{r+1} \to 0$ est exact, ainsi que son transformé par le foncteur $\mathfrak{A}$ qui est exact. La cohomologie de $\mathcal{O}_P(n)$ est l'homologie du complexe $\Gamma \mathfrak{A} M^0 \to \ldots \to \Gamma \mathfrak{A} M^r$, qui est aussi $M_0^0 \to \ldots \to M_0^r$, d'où la conclusion.

3.2. Proposition. — *Si V est un A-module, la cohomologie de $V \otimes_A \mathcal{O}_P(n)$ est donnée par*

$$H^p(P, V \otimes_A \mathcal{O}_P(n)) = V \otimes_A H^p(P, \mathcal{O}_P(n)).$$

On applique la construction précédente à $N = V \otimes_A S(n)$; le complexe N^* est exact, puisque c'est $V \otimes_A M^*$, où M^* est obtenu à partir de $M = S(n)$, et que M^* est plat sur A.

4. Faisceaux cohérents et modules gradués

Dans ce paragraphe, la condition $x = \tau(x)$ est supposée réalisée.

4.1. Lemme. — *Le morphisme naturel*

$$\varphi : \quad V \otimes_A O_P(n) \to \mathrm{Hom}(O_P(n'), V \otimes_A O_P(n+n'),$$

où V est un A-module, est bijectif.

On pose pour simplifier $R = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_P(n'), V \otimes_A \mathcal{O}_P(n+n'))$. On écarte le cas trivial $r = 0$. Soit $j \in I$. Posons $C_j = \bigcup_{i \in J_j} D_{J_i}$ (notations 1.1

et 1.2); C_j est l'ouvert de P, où X_j est inversible et où au plus un des X_i n'est pas inversible. On a les inclusions $D_{J_i} \subset C_j \subset D_j$ pour $i \neq j$. On a donc un diagramme commutatif, où les flèches horizontales sont des morphismes de restriction :

$$\begin{tikzcd} V \otimes \mathcal{O}_P(n)(D_j) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi(D_j)"] & V \otimes \mathcal{O}_P(n)(C_j) \arrow[d, "\varphi(C_j)"] & \\ R(D_j) \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & R(C_j) \arrow[r] & R(D_I) \end{tikzcd}$$

Sur un ouvert D_{J_i}, $\mathcal{O}_P(n)(D_{J_i})$ est libre sur $\mathcal{O}_P(D_{J_i})$, et a une base X^B, avec $B(i) = 0$ (car $d(x, J_i) = 1$). De même, $\mathcal{O}_P(n')(D_{J_i})$ a une base $X^{B'}$, avec $B'(i) = 0$. On a

$$\varphi(D_{J_i})(v \otimes X^B)(X^{B'}) = v \otimes X^{B+B'},$$

et $X^{B+B'}$ est encore une base de $\mathcal{O}_P(n+n')(D_{J_i})$. Ceci prouve que $\varphi(D_{J_i})$ est bijectif.

On en tire évidemment que $\varphi(C_j)$ est bijectif. Pqur montrer que $\varphi(D_j)$ est bijectif, il suffit de vérifier que :

(*a*) La flèche du haut est bijective;

(*b*) La longue flèche du bas est injective.

(*a*) $V \otimes \mathcal{O}_P(n)(D_j) \to V \otimes \mathcal{O}_P(n)(C_j)$ est bijectif, car la base de $\mathcal{O}_P(n)(D_j)$ sur A, formée de monômes de degré n dans S_{X_j} est l'intersection des bases monomiales des $\mathcal{O}_P(n)(D_{J_i})$, dont la réunion est une partie de la base monomiale de $\mathcal{O}_P(n)(D_I)$, donc $V \otimes \mathcal{O}_P(n)(D_j)$ est bien le produit fibré des $V \otimes \mathcal{O}_P(n)(D_{J_i})$ sur $V \otimes \mathcal{O}_P(n)(D_I)$ de même que $V \otimes \mathcal{O}_P(n)(C_j)$, car $V \otimes \mathcal{O}_P(n)$ est un faisceau.

(*b*) $V \otimes \mathcal{O}_P(n+n')(D_j) \to V \otimes \mathcal{O}_P(n+n')(D_I)$ est injectif, car la base monomiale de $\mathcal{O}_P(n+n')(D_j)$ sur A est une partie de la base monomiale de $\mathcal{O}_P(n+n')(D_I)$. D'où la conclusion, car D_j et D_I sont affines.

4.2. Proposition. — *Pour tout $\mathcal{O}_P$-module quasi cohérent N, on pose*

$$\Gamma_n N = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_P(-n), N) \qquad \textit{et} \qquad \Gamma_+ N = \oplus_{n>0} \Gamma_n N.$$

Le foncteur Γ_+ ainsi défini est un adjoint à droite du foncteur $\mathfrak{A}_+$, restriction de $\mathfrak{A}$ à la catégorie des S-modules gradués dont les composantes de degré $\leqslant 0$ sont nulles.

Pour le prouver, on va définir les deux morphismes d'adjonction $\alpha : \mathrm{id} \to \Gamma_+ \mathfrak{A}_+$ et $\beta : \mathfrak{A}_+ \Gamma_+ \to \mathrm{id}$.

Si U est un élément de M_n, où M est un S-module gradué, $\alpha(M)(U)$ est l'homomorphisme global $\mathcal{O}_P(-n) \to \mathfrak{A} M$ qui à $W/V^a \in \mathcal{O}_P(-n)(D_V)$ fait correspondre $WU/V^a \in \mathfrak{A} M(D_V)$, où W et V sont deux éléments homogènes de S dont les degrés w et v vérifient $w = av - n$ et $v > 0$.

Si W est un morphisme global de $\mathcal{O}_P(-n)$ vers un $\mathcal{O}_P$-module quasi cohérent N, et si $V \in S_n$, $\beta(N)(D_V)$ envoie $W/V \in (\mathfrak{A}_+ \Gamma_+ N)(D_V)$ sur $W(1/V) \in N(D_V)$.

Il est aisé de vérifier les deux identités habituelles :

$$(1_{\Gamma+} \star \beta) \circ (\alpha \star 1_{\Gamma+}) = 1_{\Gamma+},$$
$$(\beta \star 1_{\mathfrak{A}+}) \circ (1_{\mathfrak{A}+} \star \alpha) = 1_{\mathfrak{A}+}$$

([1], I.7, prop. 7 et 8).

4.3. Proposition. — *Si N est un $\mathcal{O}_P$-module quasi cohérent, $\beta(N)$ est un isomorphisme.*

Ce morphisme est injectif : si $W(1/V) = 0$, c'est que W est nul sur D_V, car $1/V$ est une base du $\mathcal{O}_P(D_V)$-module $\mathcal{O}_P(-n)(D_V)$, où n est le degré de V. Il en résulte que W/V est nul.

Ce morphisme est surjectif : une section de N sur D_V est de la forme $U/V^{qm(E+2)}$, avec $U \in \Gamma_{qm(E+2)}N$, car $\mathcal{O}_P(m(E+2))$ est très ample (2.3), en vertu de EGA II ([2], 2.7.5).

Dans ce qui suit, l'anneau A est supposé noethérien.

4.4. Lemme. — *Les $\mathcal{O}_P(n)$ sont cohérents.*

D'après 2.3, $\mathcal{O}_P(n+qm)$ est engendré par ses sections globales pour q assez grand, et ces sections globales forment un A-module de type fini, selon 3.1. D'après 2.3, $\mathcal{O}_P(m)$ est ample, donc $\mathcal{O}_P(n)$ est localement isomorphe à $\mathcal{O}_P(n+qm)$ (1.8), donc localement de type fini.

4.5. Corollaire. — *Si M est un S-module gradué de type fini, $\mathfrak{A} M$ est un $\mathcal{O}_P$-module cohérent.*

4.6. Proposition. — *Si N est un $\mathcal{O}_P$-module cohérent, $\Gamma_+ N$ est un S-module gradué de type fini, et réciproquement.*

Considérons la sous-algèbre graduée S' de S, dont les éléments homogènes sont les éléments homogènes de S de degré multiple de $m(x)$ (qui est le p. p. c. m. des $x(i)$), munie de la graduation induite. Alors $P' = \mathrm{Proj}(S')$ est égal à P, et on a $\mathcal{O}_P(qm) = \mathcal{O}_{P'}(qm)$, qui est ample

si $q > 0$. Si N est cohérent, $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_P(-n), N)$ est cohérent. Comme $\mathcal{O}_P(m) = \mathcal{O}_{P'}(m)$ est ample, on a

$$\Gamma_{mg+n} N = \Gamma_{mg}(\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_P(-n), N)).$$

Par conséquent, $\Gamma_+ N = \bigoplus_{0<n\leqslant m} (\bigoplus_{g\geqslant 0} \Gamma_{mg+n} N)$ est somme directe de m modules gradués de type fini sur S', donc est de type fini sur S' et *a fortiori* sur S. La réciproque a été vue en 4.5.

4.7. *Remarque.* — Si on ne fait pas l'hypothèse $\tau(x) = x$, c'est-à-dire « les $x(i)$ sont $r(x)$ à $r(x)$ premiers entre eux », le lemme 1 tombe en défaut, car le morphisme naturel n'est plus toujours celui qui décrit l'isomorphisme entre les modules $V \otimes \mathcal{O}_P(n)$ et $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_P(n'), V \otimes \mathcal{O}_P(n+n'))$.

4.8. *Exemple.* — Cet exemple a pour but de montrer que « tout ne se passe pas comme dans le cas classique ». Soit $x = (1.1.2)$, soit k un corps. Posons $S = S_k(x)$ et $P = P_k(x)$. Soit M le S-module gradué $S/(X_0, X_1)$.

L'anneau de coordonnées de $\mathcal{O}_P(D_2)$ est isomorphe à

$$B = k[u, v, w]/uw - v^2.$$

Il n'est donc pas régulier (comme on l'avait prévu en 1.8). Le module $\mathcal{O}_P(1)(D_2)$ est isomorphe à $Bu + Bv$ (ou $Bv + Bw$), et n'est donc pas inversible.

Le $\mathcal{O}_P$-module $\mathfrak{A} M$ est nul sur D_0 et D_1, et $M(D_2)$ est isomorphe à $B/(uB + vB + wB) \cong k$.

Le morphisme naturel $\mathcal{O}_P(1) \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_P(1) \to \mathcal{O}_P(2)$ ne donne pas un isomorphisme comme dans le cas classique, mais a un noyau et un conoyau isomorphes à $\mathfrak{A} M$.

On peut vérifier aussi que $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_P(-1), M)$, isomorphe à $(\mathfrak{A} M)^2$ n'est pas isomorphe à $\mathfrak{A}(M(1))$, qui est nul.

Enfin, on peut noter que $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_P(1), \mathcal{O}_P(1))$ est isomorphe à $\mathfrak{A} M$ pour tout $i > 0$.

5. Dualité

Dans ce paragraphe, on a $x = \tau(x)$, et A est noethérien.

5.1. Préliminaires. — DP est la catégorie dérivée de la catégorie des $\mathcal{O}_P$-modules cohérents, $D^- P$, $D^+ P$, $D^b P$ sont ses sous-catégories formées des classes de complexes limités en degrés positifs, en degrés négatifs, des

deux côtés, respectivement. De même DA est la catégorie dérivée de la catégorie des A-modules de type fini, etc.

A un complexe F^* de $D^+ A$, on fait correspondre le complexe G^* de $D^+ P$ défini par $G^* = F^* \otimes_A^L \mathcal{O}_P(-s)[r]$, le symbole $[r]$ exprimant un décalage des degrés : $G^p = F^{p+r} \otimes_A \mathcal{O}_P(-s)$, car $\mathcal{O}_P(-s)$ est plat sur A.

On dira que F^* est injectivement borné s'il est quasi isomorphe à un complexe de A-modules injectifs, nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

On dira que F^* est dualisant s'il est injectivement borné et si on a un isomorphisme fonctoriel sur DA :

$$\mathrm{id} \to R\,\mathrm{Hom}(R\,\mathrm{Hom}(.,F^*),F^*).$$

5.2. THÉORÈME (*dualité globale*). — *Le foncteur $R\Gamma$ donne lieu à un isomorphisme de foncteurs contravariants de $D^- P$ vers DA, qui se prolonge à DP si F^* est injectivement borné,*

$$R\,\mathrm{Hom}(M^*, G^*) \to R\,\mathrm{Hom}_A(R\Gamma M^*, F^*).$$

Si Ψ est le foncteur $\mathrm{Hom}(H^r(P,.),F^*)$, on a un isomorphisme sur $D^- P$: $R\Psi \to R\,\mathrm{Hom}_A(LH^r(P,.),F^*)$. Les modules $\mathcal{O}_P(n)$, avec $n < 0$, sont acycliques pour le foncteur exact à droite $H^r(P,.)$, et $H^r(P,\mathcal{O}_P(n))$ est libre sur A, donc acyclique pour $\mathrm{Hom}(.\,,F^*)$ (3.1). Comme tout $\mathcal{O}_P$-module cohérent a une résolution à gauche par des sommes de modules du type $\mathcal{O}_P(n)$, on a l'existence de $R\Psi$, et l'isomorphisme annoncé sur $D^- P$ ([3], I.5.4).

Si de plus F^* est injectivement borné, les foncteurs $LH^r(P,.)$ et $R\,\mathrm{Hom}(.,F^*)$ sont bornés, par conséquent $R\Psi$ est borné aussi et se prolonge à DP, ainsi que l'isomorphisme

$$R\Psi \to R\,\mathrm{Hom}(LH^r(P,.),F^*)$$

([3], I.5.4 et I.7.1).

Le foncteur $H^r(P,.)$ fournit un morphisme :

$$\theta : \quad \mathrm{Hom}_P(N, G^*) \to \mathrm{Hom}_A(H^r(P,N), H^r(P,G^*)).$$

On va voir que θ est un isomorphisme si $N = \mathcal{O}_P(n)$.

C'est trivial si $r = 0$.

Dans le cas général, on sait d'après 4.1 et 3.2, appliqués au complexe F^* au lieu du module V (ce qui est permis grâce à la platitude des $\mathcal{O}_P(n)$ et

des $H^r(\mathcal{O}_P(n))$ sur A) que

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_P(n),\ G^*) = F^* \otimes_A \mathcal{O}_P(-s-n)[r],$$
$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_P(n),\ G^*) = F^* \otimes_A \Gamma\, \mathcal{O}_P(-s-n)[r],$$
$$H^r(P,\ G^*) = F^* \otimes_A H^r(P,\ \mathcal{O}_P(-s))[r] = F^*[r].$$

L'image par θ d'un élément $v \otimes X^B$, avec $v \in F^m$,

$$\textstyle\sum_{i \in I} B(i)\, x(i) = -n-s,$$

et $B(i) \geqslant 0$ pour $i \in I$, envoie X^D, avec $\sum_{i \in I} D(i)\, x(i) = n$ et $D(i) < 0$ pour $i \in I$, sur $v \otimes X^{B+D}$ si $(B+D)(i) = -1$ pour $i \in I$, sur 0 sinon. D'où la conclusion.

Comme tout $\mathcal{O}_P$-module cohérent a une résolution par les sommes de $\mathcal{O}_P(n)$, cet isomorphisme se prolonge en un isomorphisme sur DP si F^* est injectivement borné, sur $D^- P$ sinon :

$$R\,\mathrm{Hom}(M^*,\ G^*) \to R\Psi(M^*)[r].$$

En composant cet isomorphisme avec celui déjà vu et l'isomorphisme dû au décalage $LH^r(P, .) = R\Gamma(.)[r]$, on obtient l'isomorphisme annoncé.

5.3. *Remarque.* — Si F^* est composé de A-modules de type fini, il en va de même pour $R\,\mathrm{Hom}(M^*, G^*)$.

5.4. Proposition. — *Si V est un A-module, et si $W = \mathcal{O}_P(-s) \otimes V$, on a $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_P(-n),\ W) = 0$ pour tout $p > 0$ et tout $n \in Z$.*

La question est locale sur P, on peut donc supposer $n > 0$, quitte à remplacer $\mathcal{O}_P(-n)$ par $\mathcal{O}_P(-n-qm)$, qui lui est localement isomorphe.

On va procéder par récurrence sur r.

C'est trivial si $r = 0$.

C'est vrai si $r = 1$, la condition $x = \tau(x)$ imposant alors $x(i) = 1$ pour $i \in I$; $\mathcal{O}_P(-n)$ est donc localement libre sur tout P dans ce cas.

Supposons donc que la proposition est vraie pour $r = m \geqslant 1$, et voyons si elle l'est encore pour $r = m+1$. Soit J une partie à deux éléments de I (qui en a $m+2$). Appelons I' le quotient de I par la relation d'équivalence qui confond les deux éléments de J et sépare tout le reste de I. Soit x' la fonction de I' dans N^+, définie par $x'(\{J\}) = d(x, J)$ et

$$x'(\{i\}) = x(i)/d(x, I-J)$$

pour $i \in I-J$.

Si $x = \tau(x)$, les nombres $d(x, J)$ et $d(x, I-J)$ sont premiers entre eux, et on a aussi $x' = \tau(x')$.

On pose enfin $A[G_J] = A'$ et $V' = V \otimes_A A'$.

On a alors une suite d'égalités (*cf.* 1.5) :

$$\begin{aligned} W(D_J) &= V' \otimes_A A'[x \mid I-J, -s(x), d(x, J)] \\ &= V \otimes_A A'[x \mid I-J, -s(x \mid I-J), d(x, J)] \\ &= V \otimes_A A'[x' \mid I'-\{J\}, -s(x' \mid I'-\{J\}), x'(\{J\})] \\ &= V' \otimes_{A'} A'[x' \mid I'-\{J\}, -s(x'), d(x', \{\{J\}\})] \\ &= V' \otimes_{A'} \mathcal{O}_{P_{A'}(x')}(-s(x'))(D_{\{J\}}) = W'(D_{\{J\}}). \end{aligned}$$

De même, pour tout n, en prenant un nombre n' tel que $n'\, d(x, I-J) = n$ modulo $d(x, J)$, on a

$$\mathcal{O}_{P_A(x)}(-n)(D_J) = \mathcal{O}_{P_{A'}(x')}(-n')(D_{\{J\}}).$$

Comme D_J et $D_{\{J\}}$ sont affines, on en tire que

$$Z^p(D_J) = Ext^p(\mathcal{O}_{P_A(x)}(-n), W)(D_J)$$

est égal à

$$Ext^p(\mathcal{O}_{P_{A'}(x')}(-n'), W')(D_{\{J\}}),$$

nul par la propriété appliquée à I', x', n', etc.

La réunion des ouverts D_J, où J parcourt l'ensemble des parties à deux éléments de I, a pour complémentaire le fermé réunion des $r+1$ fermés isomorphes à Spec A définis par les idéaux $(X_j)_{j \in J_k}$, où k parcourt I.

Les modules Z^p, $p > 0$, étant cohérents et nuls sur les D_J, $|J| \geqslant 2$, ont pour support un schéma fini sur A. Ils sont donc acycliques pour Γ, ainsi que Z^0, qui est isomorphe à $V \otimes_A \mathcal{O}_P(n-s)$, avec $n > 0$. L'isomorphisme bien connu $R\,\mathrm{Hom}(., W) \to R\,\Gamma\, R\,\mathrm{Hom}(., W)$ montre que les A-modules $\Gamma(Z^p)$ sont isomorphes aux $\mathrm{Ext}^p(\mathcal{O}_P(-n), W)$, qui sont nuls pour $p > 0$, en vertu du théorème 5.2. On en déduit que les Z^p eux-mêmes sont nuls pour $p > 0$.

C. Q. F. D.

5.5. Corollaire. — *$\mathcal{O}_P(n)$ est acyclique pour* Hom $(., G^*)$, *i. e.*

$$R\,\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_P(-n), G^*) = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_P(-n), G^*),$$

5.6. PROPOSITION. — *Si E^* est le complexe de S-modules gradués $F^* \otimes_A^L S(-s) = F^* \otimes_A S(-s)$ le morphisme naturel, où M est un S-module gradué de type fini et où* Hom (M, E^*) *est muni de sa graduation naturelle*

$$\varphi : \mathfrak{A}\,\mathrm{Hom}(M, E^*) \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{A}\,M, \mathfrak{A}\,E^*)$$

est un isomorphisme, et se prolonge en isomorphisme sur la catégorie DS dérivée de la catégorie des S-modules gradués de type fini.

$$\mathfrak{A}\,R\,\mathrm{Hom}(M^*, E^*) \to R\,\mathrm{Hom}(\mathfrak{A}\,M^*, \mathfrak{A}\,E^*).$$

Soit $\Phi = \mathfrak{A}\,\mathrm{Hom}(., E^*)$. On a deux isomorphismes naturels définis sur DS :

$$R\Phi \to \mathfrak{A}\,R\,\mathrm{Hom}(., E^*),$$
$$R\Phi \to R\,\mathrm{Hom}(\mathfrak{A}\,., \mathfrak{A}\,E^*).$$

Pour le premier, on notera que $R\,\mathrm{Hom}(., E^*)$ est borné, donc il suffit de considérer $D^-\,S$. Tout complexe de $D^-\,S$ est quasi isomorphe à un complexe de $D^-\,S$ dont les objets sont des sommes finies de $S(n)$. Ces modules sont acycliques pour Hom $(., E^*)$, et leurs images par ce foncteur sont acycliques pour $\mathfrak{A}$ qui est exact.

Pour le second, on constate que les gradués libres sont acycliques pour $\mathfrak{A}$, et leurs images par ce foncteur sont acycliques pour Hom $(., \mathfrak{A}\,E^*)$, selon 5.5, et φ est un isomorphisme pour les gradués libres (d'après 4.1, applicable à F^* pour des raisons de platitude sur A).

En composant ces deux isomorphismes, on obtient les isomorphismes annoncés.

5.7. THÉORÈME (*dualité locale*). — *Si F^* est dualisant pour A, G^* est dualisant pour P.*

Si F^* est dualisant pour A, alors Spec A est de dimension finie ([3], V.7.2). Donc P est aussi de dimension finie.

Si F^* est dualisant pour A, F^* est aussi ponctuellement dualisant pour A (évident, par restriction aux spectres des anneaux locaux de Spec A).

Une caractérisation des complexes ponctuellement dualisants est donnée par (HARTSHORNE [3], V.3.4) : pour tout point fermé ξ de Spec A, $R\,\mathrm{Hom}_A(k(\xi), F^*)$ est quasi isomorphe à $k(\xi)\,[d(\xi)]$, pour un certain entier $d(\xi)$.

Soit η un point fermé de P, et soit $\xi = \rho(\eta)$ le point fermé de Spec A qui est son image par le morphisme naturel $P \xrightarrow{\rho}$ Spec A. Le O_P-module

cohérent $k(\eta)$, concentré en η, a pour image directe un $k(\xi)$-espace vectoriel de dimension finie, soit L.

En appliquant le théorème 5.2, on trouve

$$R\,\mathrm{Hom}(k(\eta),\ G^*) \cong R\,\mathrm{Hom}(L, F^*) \cong L[d(\xi)]$$

car les $R^i\,\Gamma\,k(x)$ sont nuls pour $i \neq 0$.

Comme le support de $k(\eta)$ est de dimension 0, on en tire que l'homologie de $R\,\mathrm{Hom}(k(\eta), G^*)$ est isomorphe en degré $d(\xi)$ à $k(\eta)$, à 0 ailleurs. Autrement dit, G^* est ponctuellement dualisant pour P.

D'après HARTSHORNE ([3], V.8.2), ceci (et le fait que P soit de dimension finie) implique que G^* est dualisant.

5.8. CONSTRUCTION D'ANNEAUX DE GORENSTEIN. — Le théorème 5.7, joint à la proposition 1.5 et au corollaire 1.6, donne les deux résultats suivants :

Si A est un anneau de Gorenstein, si $x = \tau(x)$, et si $s(x)$ est multiple de $m(x)$, alors $P_A(x)$ est un schéma de Gorenstein.

Si A est un anneau de Gorenstein, si $y_1, y_2, \ldots, y_r, d$ sont $r+1$ nombres premiers entre eux r à r, et si d divise la somme des y_i, l'anneau $A[y, 0, d]$ est de Gorenstein, y désignant l'application $\{1, \ldots, r\} \to \mathbf{N}$ définie par $i \mapsto y_i$.

5.9. PROPOSITION. — *Si A est un anneau de Gorenstein, si un quotient gradué R de S a une résolution graduée libre sur S (avec $S^0 = S$) :*

$$0 \to S^p \to S^{p-1} \to \ldots \to S^0 \to R \to 0,$$

si R est plat de dimension $1+r-p$ sur A, si S^p est de la forme $S(-k)$, (alors $\mathrm{Ext}^p_S(R, S(-s))$ est isomorphe à $R(k-s)$ et dualisant pour R), en posant $Q = \mathrm{Proj}\,R$, le complexe $\mathcal{O}_Q(k-s)[r-p]$ est dualisant localement et globalement pour Q.

En particulier, si $k-s$ est multiple de $d(x, J)$, $\mathcal{O}_Q(D_J)$ est un anneau de Gorenstein, et si $k-s$ est multiple de m, Q est un schéma de Gorenstein.

C'est là une application de 5.6.

5.10. *Exemples.* — Si k est un corps, $P_k(1, 6, 14, 21)$ est un schéma de Gorenstein de dimension 3 (car $s = m = 42$), $k[(3, 5, 6), 0, 7]$ est un

anneau de Gorenstein à 13 générateurs, de dimension 3, le schéma

$$\mathrm{Proj}(k[X, Y, Z, T, U]/(X^2 - YZ, XZ - YT, Z^2 - XT, UZ, UT)),$$

où les degrés de X, Y, Z, T, U, valent respectivement 3, 4, 2, 1, 3, est un schéma de Gorenstein de dimension 1, etc.

5.11. PROPOSITION. — *Pour tout espace du type $P_A(x)$, il existe un A-schéma Q recouvert par des ouverts affines isomorphes au spectre de l'anneau de polynômes à $r(x)$ variables sur A (donc Q est lisse sur A) et un morphisme birationnel et projectif de A-schémas $f : Q \to P_A(x)$ avec $f_* \mathcal{O}_Q = \mathcal{O}_P$ et $R^i f_* \mathcal{O}_Q = 0$ pour $i \neq 0$.*

Nous ne donnons pas ici de démonstration, la méthode utilisée étant la même que celle de [4] (chap. I, § 2 et 3).

5.12. *Remarque.* — Dans [4] (I.3), il est montré aussi que $F^* \otimes_A \Omega_{Q/A}$ est acyclique pour f_*; ce qui permet de dire que $Rf_*(F^* \otimes_A \Omega_{Q/A}[r])$ est dualisant localement et globalement pour $P_A(x)$, si F^* est dualisant pour A.

On arrive ainsi à une autre description du complexe dualisant.

6. Courbes « presque planes »

6.1. LEMME. — *Si A est factoriel, et si $P = P_A(x)$, un sous-schéma fermé Q de P, purement de codimension 1 sans composante immergée, est défini par une seule équation homogène.*

Ecartons le cas trivial $r = 0$, qui donne $P = \mathrm{Spec}(A)$.

L'ouvert U de P qui est la réunion des D_{J_i}, $i \in I(x)$, contient tous les points de P de hauteur 1, donc tous les points maximaux de Q. En outre, la projection $\pi : \mathrm{Spec}(S) - \{0\} \to P$ est lisse au-dessus de cet ouvert et localement triviale au-dessus de U (1.7).

Le sous-schéma fermé $\pi^{-1} Q$ de $\mathrm{Spec}(S) - \{0\}$ a pour adhérence schématique dans $\mathrm{Spec}(S)$ un fermé qui coïncide avec lui hors de l'origine. L'idéal J qui décrit ce fermé est gradué, donc son p. g. c. d. F, qui existe puisque S est factoriel, est homogène. Le sous-schéma fermé $\mathrm{Spec}(S/F) - \{0\}$ de $\mathrm{Spec}(S) - \{0\}$ coïncide avec $\pi^{-1} Q$ en les points de hauteur 1 de $\mathrm{Spec}(S) - \{0\}$, donc aux points maximaux de $\pi^{-1} Q$.

Son image par π est le sous-schéma fermé $\mathrm{Proj}(S/F)$ de P, qui est inclus dans Q, car $J \subset F.S$, et qui coïncide avec Q en ses points maximaux,

donc partout, puisque Q n'a pas de composante immergée. Donc $Q = \text{Proj}\,(S/F)$.

6.2. PROPOSITION. — *Si k est un corps parfait, toute courbe hyperelliptique lisse sur k admet une immersion régulière dans un schéma du type $P_k(x)$ avec $r(x) = 2$; autrement dit, une telle courbe est « presque plane ».*

Pour que la courbe tracée sur P d'équation F soit lisse, il suffit que le schéma Spec S/F soit régulier en dehors de l'origine, les anneaux localisés de S/F par des éléments de degré positif étant alors normaux, ainsi que leurs composantes de degré 0, qui ont la dimension 1 et sont les anneaux de coordonnées de Proj (S/F).

Les trois variables définissant S sont appelées X, Y, Z, et on choisit déjà $x = y = 1$ pour le degré des deux premières, et on pose $u = Y/X$ et $v = Z/X^z$, où z est le degré de Z.

Une courbe hyperelliptique sur k est caractérisée par le fait que son corps de fonctions K ne contient pas d'élément algébrique de degré 2 sur k, mais a un sous-corps $L = k(u)$ transcendant sur k, tel que $[K : L] = 2$. Soit $v \in K$ tel que $L(v) = K$.

Il s'agit de trouver z et v de façon que la relation de dépendance de v sur L soit de la forme $F(1, u, v) = 0$, où F est homogène dans S et n'a de zéro commun avec ses dérivées qu'en l'origine de Spec (S).

On peut toujours supposer v entier sur $k[u]$, quitte à le multiplier par un polynôme en u convenable. La relation est alors du type

$$v^2 + A(u)\,v + B(u) = 0 = f(u, v),$$

où A et B sont deux polynômes à coefficients dans k.

Si la caractéristique de k n'est pas 2, on peut supposer que A est nul, quitte à remplacer v par $2v + A(u)$. Si P est le polynôme de plus haut degré parmi ceux dont le carré divise B, on peut remplacer v par $v/P(u)$, et se ramener ainsi au cas où B n'a pas de facteur carré. Puisque k est parfait, B et sa dérivée n'ont pas de zéro commun.

Si le degré b de B est pair, on choisit $z = b/2$. La relation s'écrit alors $F = Z^2 + D(X, Y)$, avec $D(1, u) = B(u)$. D et ses dérivées ne s'annulent ensemble que si $X = Y = 0$, ce qui convient.

Si b est impair, on prend $z = (b+1)/2$. La relation s'écrit

$$F = Z^2 + XD(X, Y),$$

où D n'a pas de zéro commun avec ses dérivées hors de l'origine, et ne contient pas X en facteur. Ce qui convient aussi.

Si la caractéristique de k est 2, si $f(u, v) = v^2 + A(u)\,v + B(u)$ et ses dérivées par rapport à u et v ne s'annulent pas ensemble, les degrés a et b de A et B vérifiant de surcroît $2a \geqslant b$ ou b impair, le plongement est possible.

Si $2a \geqslant b$, on choisit $z = a$, et si b est impair et supérieur à $2a$, on choisit $z = (b+1)/2$. Dans les deux cas, F s'écrit $Z^2 + C(X, Y)\,Z + D(X, Y) = 0$, mais l'hypothèse sur f et ses dérivées implique que F et ses dérivées ne s'annulent ensemble que si $X = 0$; donc $Y = Z = 0$, à cause des termes de plus haut degré en Y de C et D et leurs dérivées.

Tout se ramène à modifier v de façon que sa relation de dépendance intégrale sur L soit de la forme indiquée.

Si la forme n'est pas bonne, on va opérer une modification de v qui fait décroître strictement la quantité $\sup(2a, b)$. Au bout d'un nombre fini de ces modifications, la forme f sera donc convenable.

On rappelle qu'un polynôme à une variable sur un corps parfait de caractéristique 2 est toujours de la forme $C(X) = X\,C'(X) + C^{\circ}(X)$, où C' et C° sont deux carrés, C' n'étant autre que la dérivée de C par rapport à X, et C° la partie paire de C.

(i) Si $b > 2a$ et b pair, on remplace v par $v + \sqrt{B^{\circ}}$.

(ii) Si $f = v^2 + Av + B$ et ses dérivées A et $A'v + B'$ ont un zéro commun, c'est que A et $A'^2 B + B'^2$ ont un p. g. c. d. non nul. Soit U un facteur *premier* de A et $A'^2 B + B'^2$.

Si U divise A', U^2 divise A et A' qui est un carré, donc divise B'. Soit T le reste de la division de $\sqrt{B^{\circ}}$ par U. On peut alors remplacer v par $(v + T)/U$.

Si U ne divise pas A', de $A'^2 B + B'^2 = 0 \bmod U$, on en tire que B est congru modulo U au carré d'un polynôme T de degré inférieur à celui de U. Alors on peut remplacer v par $(v + T)/U$.

7.3. Exemple de courbe qui n'est pas presque plane. — On se propose de construire une courbe lisse, non hyperelliptique, de genre 5, dont le plongement canonique, qui est lisse, n'est contenu dans aucune quadrique de rang $\leqslant 3$.

Montrons qu'une telle courbe n'est pas presque plane.

Si F est l'équation dans $P = \mathrm{P}_k(x)$, avec $r(x) = 2$, d'une courbe Q lisse de genre 5, le cobord de la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_P(-d) \xrightarrow{F} \mathcal{O}_P \to \mathcal{O}_A \to 0$$

envoie bijectivement $H^1(Q, \mathcal{O}_Q)$ dans $H^2(P, \mathcal{O}_P(-d))$, d étant le degré de F. Une base de $H^1(Q, \mathcal{O}_Q)$ est donc formée des classes des monômes X^a, avec $\sum_{0 \leqslant i \leqslant 2} a(i)\, x(i) = -d$, et $a(i) < 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant 2$. Les a de ce type sont au nombre de 5. Parmi eux, il y en a certainement 3, soient a^0, a', a'', avec $2a' = a^0 + a''$. Ceci correspond à une équation du type $X^0 X'' - X'^2 = 0$ dans le plongement canonique, donc à une quadrique de rang 3 qui contient l'image de Q.

Considérons l'espace projectif ordinaire R de dimension 4 sur un corps k de caractéristique 3, i. e. $R = \mathrm{Proj}(k[X, Y, Z, T, U])$, et son sous-schéma Q défini par l'idéal qu'engendrent les trois polynômes homogènes du second degré :

$$X^2 + Y^2 + ZU, \tag{1}$$

$$Z^2 + T^2 + XU, \tag{2}$$

$$XY + ZT + U^2. \tag{3}$$

La matrice des dérivées partielles

$$\begin{bmatrix} 2X & 2Y & U & O & Z \\ U & 0 & 2Z & 2T & X \\ Y & X & Z & Z & 2U \end{bmatrix}$$

a parmi ses mineurs

$$YZ^2 + 2\,YT^2 + 2\,UTX, \tag{4}$$

$$TX^2 + 2\,TY^2 + 2\,UYZ. \tag{5}$$

Pour montrer que Q est une courbe lisse, il n'y a qu'à s'assurer que le schéma défini par l'annulation de 1, 2, 3, 4 et 5 est vide. Ceci veut dire en effet que la matrice des dérivées partielles est de rang 3 sur tout le schéma Q.

On utilise la combinaison linéaire des polynômes (1) à (5), dont les coefficients sont respectivement T, Y, 0, 2, 2 qui vaut $(Y+T)(2\,TY + UX + UZ)$. Le reste du calcul est simple et ennuyeux. Q est donc une intersection complète dans R, et le cobord itéré de la résolution de Koszul sur R correspondante met en bijection $H^1(Q, \mathcal{O}_Q)$ et $H^4(R, \mathcal{O}_R(-6))$, qui est le dual

de $H^0(R, \mathcal{O}_R(1)) = H^0(Q, \mathcal{O}_Q(1))$. Ceci montre que Q est de genre 5 et que les équations 1 à 3 définissent le plongement canonique de Q.

Reste à voir que parmi les hypersurfaces de degré 2 de R, qui contiennent Q, aucune n'est de rang $\leqslant 3$. Ces hypersurfaces sont dans la famille projective de rang 2 engendrée par les hypersurfaces correspondant à (1), (2), (3) (car Q est intersection complète dans R). La matrice associée à une combinaison linéaire de 1, 2, 3 est :

$$\begin{bmatrix} 2a & c & 0 & 0 & b \\ c & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b & c & a \\ 0 & 0 & c & 2b & 0 \\ b & 0 & a & 0 & 2c \end{bmatrix}$$

On y trouve des mineurs d'ordre 4 :

$$\begin{array}{llll} (1,1) & a(c(b^2-c^2)-a^2b), & (4,4) & (a^2-c^2)(bc-a^2)-ab^3, \\ (2,2) & (b^2-c^2)(ac-b^2)-a^3b, & (5,5) & (a^2-c^2)(b^2-c^2) \\ (3,3) & b(c(a^2-c^2)-b^2a), & (2,4) & -c^2ab, \end{array}$$

qui ne peuvent être nuls simultanément que si a, b, c sont tous trois nuls.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GABRIEL (P.). — Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. math. France*, t. 90, 1962, p. 323-448 (*Thèse Sc. math. Paris*, 1961).

[2] GROTHENDIECK (A.). — *Éléments de géométrie algébrique* [EGA], II : *Étude globale de quelques classes de morphismes.* — Paris, Presses universitaires de France, 1966 (*Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications mathématiques*, 8).

[3] HARTSHORNE (R.). — *Residues and duality.* — Berlin, Springer-Verlag, 1966 (*Lecture Notes in Mathematics*, 20).

[4] KEMPF (G.), KUNDSEN (F.), MUMFORD (D.) and SAINT-DONAT (B.). — *Toroidal embeddings, I.* — Berlin, Springer-Verlag, 1973 (*Lecture Notes in Mathematics*, 339).

(Texte reçu le 1er juillet 1974.)

Charles DELORME,
33, boulevard Dubreuil,
91400 Orsay.

Bull. Soc. math. France,
103, 1975, p. 510.

ERRATUM

ESPACES PROJECTIFS ANISOTROPES

PAR

CHARLES DELORME

Rectifications à l'article paru dans *Bull. Soc. Math. France,* 103, 1975, p. 203-223.

Par suite d'une erreur typographique, la plupart des symboles *Hom* et *Ext*, représentant des faisceaux d'homomorphismes et d'extensions, ont été imprimés en caractères romains.

Il y a donc lieu de lire *Hom* et *Ext* au lieu de Hom et Ext aux endroits suivants :

- p. 207, ligne 2;
- p. 210, lignes 29 et 31;
- p. 213, lignes 1, 3, 10, 24 et 26;
- p. 215, lignes 2 et 19;
- p. 216, lignes 28 et 29;
- p. 217, lignes 12 et 19.

Pour la même raison, dans des formules qui comportaient simultanément des Hom et des *Hom*, il faut lire :

- p. 216, ligne 24 : $R\,\mathrm{Hom}\,(., W') \to R\,\Gamma\, R\,\mathit{Hom}\,(., W')$;
- p. 217, ligne 5 : $\varphi : \mathfrak{A}\,\mathrm{Hom}\,(M, E^*) \to \mathit{Hom}\,(\mathfrak{A}\,M, \mathfrak{A}\,E^*)$;
- p. 217, ligne 8 : $\mathfrak{A}\,R\,\mathrm{Hom}\,(M^*, E^*) \to R\,\mathit{Hom}\,(\mathfrak{A}\,M^*, \mathfrak{A}\,E^*)$.

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 9, 1976, p. 145 à 154.

SOUS-MONOÏDES D'INTERSECTION COMPLÈTE DE N

PAR CHARLES DELORME

On donne une caractérisation récursive des monoïdes d'intersection complète inclus dans N, qui permet de les construire aisément avec leurs générateurs minimaux. On donne aussi un algorithme permettant de décider si une partie de N engendre un monoïde d'intersection complète. Un des intérêts de ces monoïdes est qu'on peut les réaliser avec un point P d'une courbe lisse X comme ensemble des ordres des pôles en P des fonctions méromorphes sur X et régulières hors de P (Pinkham [2]).

1. Définitions

Soit Γ un sous-monoïde de N, autre que $\{0\}$.

On considère l'algèbre $A = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} K t^{\alpha} \subset K[t]$, où K est un corps. Si a est le p. g. c. d. de Γ, alors $\overline{A} = K[t^{a}]$ est le normalisé de A et le conducteur de A est $\overline{A}\, t^{c}$, où c est le plus petit entier tel que $c + N a \subset \Gamma$. C'est pourquoi on dit que c est le *conducteur* de Γ. Si $a = 1$, on dit que Γ est *numérique*.

On dit que Γ est d'*intersection complète* quand A est d'intersection complète, ce qui ne dépend pas de K (Herzog [1], 1.13) : si G est un générateur de Γ, de cardinal fini g, cela signifie que la congruence attachée à la surjection naturelle de monoïdes $N^{G} \to \Gamma$ admet un générateur à $g-1$ éléments.

2. Motivations géométriques

Voici deux occurrences de ces monoïdes :

A un point P d'une courbe lisse et propre X, on attache le monoïde des ordres des pôles en P des fonctions méromorphes sur X régulières hors de P. Pinkham ([2], 14.2) indique que tout monoïde numérique d'intersection complète Γ peut être obtenu de cette manière à partir d'une courbe. Le genre de celle-ci est $c/2$, où c est le conducteur de Γ car Γ est symétrique (Kunz [3]).

Pour qu'un sous-anneau complet de dimension 1 de K [[t]] soit d'intersection complète (autrement dit, pour qu'une branche de courbe analytique géométriquement intègre soit d'intersection complète), il suffit que le monoïde des valuations soit d'intersection complète. Cette condition n'est pas nécessaire, comme le montre un exemple de Herzog et Kunz ([4], p. 40-41).

3. Notations

Soit G une partie finie et non vide de N, ne contenant pas 0; on appelle g le cardinal de G.

Si L est une partie non vide de G, on note Γ (L) le sous-monoïde de N engendré par L, et A (L) désigne l'algèbre $\bigoplus_{\alpha \in \Gamma(L)} K\, t^{\alpha}$. L'anneau de polynômes dont les indéterminées sont les T_x, $x \in L$ est noté K (L). On gradue A (L) et K (L) en attribuant à t le degré 1 et à T_x le degré x. On a alors un morphisme surjectif d'anneaux gradués K (L) $\rightarrow$ A (L) qui à T_x fait correspondre t^x. Le noyau de ce morphisme est l'idéal homogène I (L), qui est engendré par les différences de monômes unitaires de même degré (Herzog [1], 1.4).

On a des inclusions naturelles graduées A (L) $\subset$ A (G), K (L) $\subset$ K (G), ...

Enfin A_+ (L) et K_+ (L) sont des idéaux gradués maximaux de A (L) et K (L).

4. Suites distinguées

Une suite distinguée ($\mathscr{P}$, $\mathscr{Z}$) sur G est formée d'une suite $\mathscr{P}$ de partitions de G en parties non vides, soit $\mathscr{P} = (P_i,\ 1 \leqq i \leqq g)$ et d'une suite $\mathscr{Z}$ d'éléments de K (G), soit $\mathscr{Z} = (Z_i,\ 2 \leqq i \leqq g)$ telles que :

(★) pour $i \geqq 2$, la partition P_{i-1} se déduit de P_i en supprimant deux éléments distincts L_i et L'_i de P_i et en les remplaçant par leur réunion.

(★★) Z_i est différence de deux monômes unitaires $X_i \in K(L_i)$ et $X'_i \in K(L'_i)$ de même degré > 0.

5. Remarques

La condition (★) implique que P_i a i éléments, que $P_1 = G$, que P_g est la partition de G en ses parties à 1 élément.

Les polynômes Z_i appartiennent à I ($L_i \cup L'_i$), donc à I (G).

Si $g = 1$, on a tout simplement $\mathscr{P} = (P_1)$ et $\mathscr{Z} = \emptyset$.

Si $g \geqq 2$, une suite distinguée sur G induit naturellement des suites distinguées sur L_2 et L'_2.

6. Lemme. — *Pour que* Γ (G) *soit d'intersection complète, il faut et il suffit qu'il existe une suite distinguée* ($\mathscr{P}$, $\mathscr{Z}$) *sur* G *telle que* I (G) *soit engendré par* $\mathscr{Z}$.

La condition est évidemment suffisante, car $\mathscr{Z}$ comporte $g-1$ éléments.

Si $\Gamma(G)$ est d'intersection complète, un générateur à $g-1$ éléments de la congruence attachée à $N^G \to \Gamma(G)$ fournit un générateur à $g-1$ éléments de $I(G)$, de la forme $(Y_j - Y'_j,\ 2 \leqq j \leqq g)$, où Y_j et Y'_j sont deux monômes unitaires de même degré, évidemment > 0, car ces éléments de $I(G)$ ne sont pas nuls.

Nous allons construire $(\mathscr{P}, \mathscr{Z})$ de proche en proche. Supposons qu'on ait déjà construit les P_i, $k \leqq i \leqq g$, vérifiant (★), et les Z_i, $k < i \leqq g$, vérifiant (★★) et $Z_i = Y_i - Y'_i$.

C'est trivial pour $k = g$: on prend $P_g = \{\{x\}, x \in G\}$. Si on arrive à $k = 1$, le lemme est démontré. On suppose donc $k > 1$, et on essaye de diminuer k.

Soit S le produit tensoriel sur K : $\bigotimes_{B \in P_k} A(B)$. On a un morphisme surjectif d'anneaux gradués $\varphi : K(G) \to S$ en composant l'isomorphisme naturel $K(G) \to \bigotimes_{B \in P_k} K(B)$ et le produit tensoriel des surjections $K(B) \to A(B)$. L'image de $I(G)$ par φ est appelée J. Les images $\varphi(Z_i)$, $k < i \leqq g$ sont nulles, donc J est engendré par les $\varphi(Y_i - Y'_i)$, $2 \leqq i \leqq k$.

Soit B un élément de P_k. On trouve dans J l'élément $\varphi(T^x_y - T^y_x)$, avec $x \in B$ et $y \in G$, $y \notin B$. Donc J n'est pas inclus dans l'idéal engendré par les $A_+(B')$, $B' \in P_k$, $B' \neq B$. Donc il existe au moins un u, $2 \leqq u \leqq k$, tel que $\varphi(Y_u)$ ou $\varphi(Y'_u)$ soit dans $A(B)$. Comme P_k a k éléments et comme u ne peut prendre que $k-1$ valeurs, il existe un v, $2 \leqq v \leqq k$, et deux éléments distincts B et B' de P_k tels que $Y_v \in K(B)$ et $Y'_v \in K(B')$. Quitte à modifier la numérotation des $Y_j - Y'_j$, $2 \leqq j \leqq k$, on peut supposer $v = k$. Ce qui permet de construire P_{k-1} suivant (★) en prenant $L_k = B$ et $L'_k = B'$, et $Z_k = Y_k - Y'_k$, ce qui vérifie (★★), et la construction a progressé d'un cran.

7. Lemme. — *Soit* $(\mathscr{P}, \mathscr{Z})$ *une suite distinguée sur* G, *avec* $g \geqq 2$. *On pose* $b = p.g.c.d.\ L_2$, $b' = p.g.c.d.\ L'_2$, $p = p.p.c.m.\ (b, b')$; *on appelle* r *le degré de* Z_2. *On a les propriétés suivantes :*

(i) *si* F *et* F' *sont des générateurs minimaux de* $I(L_2)$ *et* $I(L'_2)$, *alors* F, F', Z_2 *est un générateur minimal de* $(I(L_2), I(L'_2), Z_2)$;

(ii) *pour que* $I(L_2)$, $I(L'_2)$, Z_2 *engendre* $I(G)$, *il faut et il suffit que* $r = p$.

Preuve de (i). — Si on a une relation $\Sigma \lambda_f f + \Sigma \lambda_{f'} f' + \nu Z_2 = 0$, homogène, dans $K(G)$, comme Z_2 est non nul dans l'anneau intègre $A(L_2) \otimes A(L'_2)$ identifié au quotient $K(G)/(I(L_2), I(L'_2))$, le coefficient ν de Z_2 est nul dans $A(L_2) \otimes A(L'_2)$, donc s'écrit $\Sigma \mu_f f + \Sigma \mu_{f'} f'$ dans $K(G)$. La relation devient

$$\Sigma(\lambda_f + Z_2 \mu_f) f + \Sigma(\lambda_{f'} + Z_2 \mu_{f'}) f' = 0.$$

En calculant modulo $(K_+(L'_2))$, et en identifiant le quotient $K(G)/(K_+(L'_2))$ à $K(L_2)$, on obtient $0 = \Sigma(\bar{\lambda}_f + X_2 \bar{\mu}_f) f$. La minimalité de F donne $\lambda_f + X_2 \bar{\mu}_f \in K_+(L_2)$, donc $\lambda_f \in (K_+(L_2), K_+(L'_2)) = K_+(G)$. De même, les coefficients des f' sont dans $K_+(G)$. Enfin le coefficient de Z_2 est dans $(I(L_2), I(L'_2)) \subset K_+(G)$. Ce qui prouve la minimalité de F, F', Z_2.

Preuve de (ii). — Supposons que $p = r$. On sait que $I(G)$ est engendré par les $Y_1 Y'_1 - Y_2 Y'_2$, où Y_1 et Y_2 sont des monômes unitaires de $K(L_2)$, et Y'_1 et Y'_2 sont des

monômes unitaires de $K(L'_2)$, dont les degrés vérifient $y_1+y'_1 = y_2+y'_2$. On en déduit $y_1-y_2 = y'_2-y'_1 = mp$, où m est entier. On peut, quitte à remplacer l'élément de $I(G)$ par son opposé, se ramener à $m \geqq 0$. On a alors une égalité :

$$Y_1 Y'_1 - Y_2 Y'_2 = Y'_1 (Y_1 X_2^m Y_2) + Y_2 (Y'_1 X_2'^m - Y'_2) + Y'_1 Y_2 (X_2^m - X_2'^m),$$

où

$$Z_2 = X_2 - X'_2.$$

Bien sûr, on a $Y_1 - X_2^m Y_2 \in I(L_2)$, $Y'_1 X_2'^m Y'_2 \in I(L'_2)$ et $X_2^m - X_2'^m$ est multiple de Z_2. Ceci démontre la partie il suffit.

Supposons maintenant $r > p$ (il est évident que r est un multiple positif de p). Comme $\Gamma(L_2)$ et $\Gamma(L'_2)$ se confondent avec $N\,b$ et $N\,b'$ à partir d'un certain rang, leur intersection se confond avec $N\,p$ au-delà de ce rang. Il existe donc dans cette intersection un nombre q non multiple de r. On pourra trouver deux monômes unitaires de degré q, l'un dans $K(L_2)$, l'autre dans $K(L'_2)$. Leur différence est dans $I(G)$, mais n'est pas nulle dans $(A(L_2) \otimes A(L'_2))/(Z_2)$, où elle vaut $t^q \otimes 1 - 1 \otimes t^q$ modulo $t^r \otimes 1 - 1 \otimes t^r$. Ceci prouve la partie il faut.

8. Lemme. — *Soit* $(\mathscr{P}, \mathscr{Z})$ *une suite distinguée sur* G. *Pour que* $\mathscr{Z}$ *engendre* $I(G)$, *il faut et il suffit que la condition* (★★★) *suivante soit réalisée :*

(★★★) *pour tout* i, $2 \leqq i \leqq g$, *le degré de* Z_i *est le p. p. c. m. des p. g. c. d. de* L_i *et* L'_i.

Ce lemme se démontre par récurrence sur g. Il est trivial pour $g = 1$. Pour $g \geqq 2$, le lemme 7 qui précède permet de ramener la question sur G et $(\mathscr{P}, \mathscr{Z})$ aux questions correspondantes sur L_2 et L'_2 et les suites distinguées induites par $(\mathscr{P}, \mathscr{Z})$ (rem. 5). En effet, de (ii), on tire que Z_2 doit avoir pour degré le p. p. c. m. des p. g. c. d. de L_2 et L'_2, grâce à (i), on voit que $I(L_2)$ et $I(L'_2)$ doivent être engendrés par les éléments Z_i, $2 < i \leqq g$, qui sont soit dans $I(L_2)$ soit dans $I(L'_2)$, pour que $\mathscr{Z}$ engendre $I(G)$. Remarquons qu'alors $\Gamma(L_2)$ et $\Gamma(L'_2)$ sont d'intersection complète. Inversement, l'utilisation de (ii) montre que la condition (★★★) est suffisante.

9. Proposition. — *Soit* G *le générateur minimal d'un sous-monoïde* $\Gamma(G)$ *de* N. *Pour que* $\Gamma(G)$ *soit numérique et d'intersection complète, il fait et il suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisée :*

$G = \{1\}$ (*auquel cas* $\Gamma(G) = N$);

G *est l'union disjointe de deux de ses parties non vides, de la forme* $a_1 G_1$ *et* $a_2 G_2$, *où* a_1 *et* a_2 *sont premiers entre eux, où* G_1 *et* G_2 *sont les générateurs minimaux de deux monoïdes numériques d'intersection complète, avec les conditions* $a_1 \in \Gamma(G_2)$ *et* $a_1 \notin G_2$, $a_2 \in \Gamma(G_1)$ *et* $a_2 \notin G_1$.

Pour démontrer cette proposition, on utilise une suite distinguée sur G vérifiant (★★★), ce qui montre que la condition est nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, on se servira encore du lemme 7 (ii).

Dans le cas où G a 3 éléments, on retrouve la proposition 3 de Watanabe [5], dont la démonstration est obtenue par des méthodes semblables. On peut généraliser également le lemme 1 de Watanabe [5] comme suit :

10. PROPOSITION. — *Soient* Γ_1 *et* Γ_2 *deux monoïdes numériques, engendrés par* G_1 *et* G_2. *Soient* a_1 *et* a_2 *deux nombres non nuls et premiers entre eux, tels que* $a_1 \in \Gamma_2$ *et* $a_2 \in \Gamma_1$. *On considère le monoïde (visiblement numérique)* $\Gamma = a_1 \Gamma_1 + a_2 \Gamma_2$:

(i) *le conducteur de* Γ *est* $c = a_1 c_1 + a_2 c_2 + (a_1 - 1)(a_2 - 1)$, *où* c_1 *et* c_2 *sont les conducteurs de* Γ_1 *et* Γ_2;

(ii) *si les générateurs minimaux* G_1 *et* G_2 *de* Γ_1 *et* Γ_2 *comportent* g_1 *et* g_2 *éléments, celui de* Γ *en a* $g_1 + g_2$ *ou* $g_1 + g_2 - 1$;

(iii) *pour que* Γ *soit symétrique, il faut et il suffit que* Γ_1 *et* Γ_2 *le soient;*

(iv) *pour que* Γ *soit d'intersection complète, il faut et il suffit que* Γ_1 *et* Γ_2 *le soient.*

Preuve de (i). — On sait que $(a_1 - 1)(a_2 - 1)$ est le conducteur de $a_1 N + a_2 N$. Donc $a_1 c_1 + a_2 c_2 + (a_1 - 1)(a_2 - 1) + N \subset a_1 c_1 + a_1 N + a_2 c_2 + a_2 N \subset a_1 \Gamma_1 + a_2 \Gamma_2 = \Gamma$; l'expression proposée majore donc c. Si $a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_1 a_2 - a_1 - a_2$ appartenait à Γ, cela s'écrirait $a_1 b_1 + a_2 b_2$, avec $b_1 \in \Gamma_1$ et $b_2 \in \Gamma_2$, on aurait pour des raisons de congruence modulo a_1 et a_2, les égalités $b_1 = c_1 - 1 + a_2 u_2$ et $b_2 = c_2 - 1 + a_1 u_1$, u_1 et u_2 entiers, de somme 1, et tous deux > 0 (car $a_1 \in \Gamma_2$ et $a_2 \in \Gamma_1$), ce qui est impossible. L'expression proposée est bien le conducteur de Γ.

Preuve de (ii). — Il suffit de remarquer que seul $a_1 a_2$, s'il appartient à $a_1 G_1 \cup a_2 G_2$, est susceptible de se décomposer. On peut d'ailleurs préciser le générateur minimal de Γ, soit G, et son nombre d'éléments :

si $a_1 a_2 \in a_1 G_1 \cap a_2 G_2$, alors $G = a_1 G_1 \cup a_2 G_2$ a $g_1 + g_2 - 1$ éléments;

si $a_1 a_2 \notin a_1 G_1 \cup a_2 G_2$, alors $G = a_1 G_1 \cup a_2 G_2$ a $g_1 + g_2$ éléments;

si $a_1 a_2$ appartient à un seul des ensembles $a_1 G_1$, $a_2 G_2$, alors G est $a_1 G_1 \cup a_2 G_2$ privé de $a_1 a_2$ et possède $g_1 + g_2 - 1$ éléments.

Preuve de (iii). — Supposons d'abord que Γ_1 et Γ_2 sont symétriques. Soit $u_1 a_1 + u_2 a_2$ un nombre hors de Γ. On peut en modifiant la décomposition de ce nombre se ramener au cas où u_1 est hors de Γ_1, mais $u_1 + a_2 \in \Gamma_1$. Alors $u_2 - a_1 \notin \Gamma_2$. Alors

$$c - 1 - u_1 a_1 - u_2 a_2 = a_1 (c_1 - 1 - u_1) + a_2 (c_2 - 1 - u_2 + a_1) \in \Gamma;$$

donc Γ est symétrique.

Inversement, si Γ est symétrique, soit u un nombre hors de Γ_1. Alors $a_1 u \notin \Gamma$, et $c - 1 - a_1 u$ appartient à Γ et se met sous la forme $a_1 b_1 + a_2 b_2$, avec $b_1 \in \Gamma_1$ et $b_2 \in \Gamma_2$. On a aussi $b_1 = c_1 - 1 - u + v a_2$ et $b_2 = c_2 - 1 + a_1 - v a_1$, donc v est $\leqq 0$, et $c_1 - 1 - u = b_1 - v a_2 \in \Gamma_1$; donc Γ_1 est symétrique. De même pour Γ_2.

Preuve de (iv). — Nous introduisons une modification mineure aux concepts déjà utilisés; au lieu de prendre pour G une partie finie de N^+, nous considérons que G est l'ensemble d'indices d'une famille finie d'éléments de N^+ (i. e. de nombres entiers strictement positifs).

Si les valeurs des éléments de la famille sont toutes distinctes, on retrouve ce qu'on a fait jusqu'ici en identifiant l'ensemble des indices et l'ensemble des valeurs. Il y a lieu de modifier quelques détails de notations, mais les notions et les propriétés décrites dans les paragraphes 4 à 8 sont inchangées.

Pour prouver (iv), on pourra utiliser une suite distinguée sur l'union disjointe $a_1 G_1 \uplus a_2 G_2 = G'$, telle que $L_2 = a_1 G_1$, $L'_2 = a_2 G_2$, et que Z_2 soit de degré $a_1 a_2$ (il est clair que de telles suites existent). L'utilisation du lemme 7 assure l'équivalence souhaitée : si les générateurs minimaux de $I(L_2)$ et $I(L'_2)$ ont h et h' éléments, avec bien sûr $h \geqq g_1 - 1$ et $h' \geqq g_2 - 1$, celui de $I(G')$ en a $h+h'+1$. Les relations $h+h'+1 = g_1+g_2$ d'une part, ($h = g_1 - 1$ et $h' = g_2 - 1$) d'autre part sont manifestement équivalentes.

C. Q. F. D.

11. Remarques

Ceci permet de construire des monoïdes d'intersection complète, et leur générateur minimal, mais mieux, cela permet de les construire tous en raison de la caractérisation récursive que constitue la proposition 9.

En outre, on trouve une expression du conducteur pour un monoïde Γ d'intersection complète par une application itérée de 10, (i), qui est :

$$c = \text{p.g.c.d.}\,\Gamma - (\text{somme des éléments de G}) + (\text{somme des degrés des } Z_i,\ 2 \leqq i \leqq g),$$

où G est une partie de N^+ engendrant Γ, et où les Z_i proviennent d'une suite distinguée sur G qui vérifie (★★★). Cette formule se trouve déjà dans [4], 5 10; Herzog et Kunz donnent un résultat plus fort : on a toujours $c \leqq M$, l'égalité ne pouvant être réalisée que si Γ est d'intersection complète, où M est le minimum de la somme des degrés de $n-1$ éléments de $I(G)$ homogènes et linéairement indépendants modulo $I(G)\,K_+(G)$, corrigé par la somme et le p. g. c. d. des éléments de G comme ci-dessus.

12. Définition

Si B est une partie non vide de G, différente de G, on appelle $E(B)$ le plus petit élément positif strictement du monoïde $\Gamma(B) \cap \Gamma(\bar{B})$, où $\bar{B}$ est le complémentaire de B dans G.

13. Lemme. — *Soit* G *une partie finie de* N^+, *engendrant* $\Gamma(G)$ *d'intersection complète, soit* $(\mathscr{P}, \mathscr{Z})$ *une suite distinguée sur* G *vérifiant* (★★★), *et soit* k *un entier*, $2 \leqq g \leqq k$.

Alors il existe deux éléments distincts B *et* B′ *de* P_k, *tels que* $E(B) = E(B')$. *De plus, si* X *et* X′ *sont deux monômes unitaires, de degré* $E(B)$, *l'un dans* $K(B)$, *l'autre dans* $K(B')$, *il existe une suite distinguée vérifiant* (★★★), *soit* $(\mathscr{P}', \mathscr{Z}')$, *avec* $Z'_i = Z_i$ *et* $P'_i = P_i$ *pour* $k < i \leqq g$, *avec* $P'_k = P_k$ *et* $Z'_k = X - X'$.

Considérons un élément B_0 de P_k. Il existe un plus petit indice j tel que $B_0 \in P_j$. Dans P_{j-1}, il y a un élément B_1, réunion de B_0 et d'un autre élément C_0 de P_j. Au signe près, Z_j est égal à $R_0 - S_0 = W_0$, où $R_0 \in K(B_0)$ et $S_0 \in K(C_0)$. Ensuite, si $B_1 \neq G$,

il existe un plus petit indice j' tel que $B_1 \in P_{j'}$. Dans $P_{j'-1}$, on trouve $B_2 = B_1 \cup C_1$, et $Z_{j'}$ est au signe près $W_1 = R_1 Q_{0,1} - S_1$, où $R_1 \in K(B_0)$, $Q_{0,1} \in K(C_0)$ et $S_1 \in K(C_1)$. Et ainsi de suite jusqu'à $B_{n+1} = G$, et Z_2 est au signe près

$$W_n = R_n R_{0,n} Q_{1,n} \dots Q_{n-1,n} - S_n,$$

avec $S_n \in K(C_n)$, $R_n \in K(B_0)$ et $Q_{i,n} \in K(C_n)$, tous monômes unitaires.

On peut noter que G est la réunion disjointe de $B_0, C_0, \dots, C_n$. On peut aussi voir, en appliquant le lemme 7 à $B_{i+1} = B_i \cup C_i$ et W_i, que $D = I(G)/K_+(G)\, I(G)$ est somme directe des images des $I(C_i)$, de l'image de $I(B_0)$, des sous-espaces de D engendrés par les images de W_i.

Soient X et X' deux monômes unitaires de même degré, avec $X \in K(B_0)$ et $X' = UV_0 \dots V_n$, où $U \in K(B_0)$ et $V_i \in K(C_i)$, tous monômes unitaires. A cause de (★★★), le degré de V_n est multiple de celui de S_n, soit $v_n = e_n s_n$ l'égalité de degrés correspondante. On décompose alors $X - X'$ en la somme de trois termes de même degré :

$$X - U R_n^{e_n} V_0 Q_{0,n}^{e_n} \dots V_{n-1} Q_{n-1,n}^{e_n} \in I(B_n),$$

$$U V_0 \dots V_{n-1} ((R_n Q_{0,n} \dots Q_{n-1,n})^{e_n} - S_n^{e_n}) \in (W_n),$$

$$U V_0 \dots V_{n-1} (S_n^{e_n} - V_n) \in I(C_n).$$

Dans la décomposition de l'image de $X - X'$ dans D, le coefficient de W_n est nul, sauf si $e_n = 1$ et $x = s_n$, auquel cas ce coefficient est 1.

Le degré de $V_{n-1} Q_{n-1,n}^{e_n}$ est multiple de celui de S_{n-1}, en vertu de (★★★). On recommence la même opération. On finit par arriver sur un élément de $I(B_0)$, savoir :

$$X - U R_n^{e_n} R_{n-1}^{e_{n-1}} \dots R_0^{e_0} = X - X' \text{ modulo } (W_0, \dots, W_n, I(C_0), \dots, I(C_n)).$$

Les égalités de degrés ayant servi entretemps sont :

$$x = u + v_0 + \dots + v_n, \tag{1}$$

$$v_i + \sum_{i<j\leqq n} e_j q_{i,j} = e_i s_i = e_i (r_i + \sum_{0\leqq j<i} q_{j,i}), \qquad 0 \leqq i \leqq n, \tag{2}$$

$$x = u + e_0 r_0 + \dots + e_n r_n. \tag{3}$$

Voyons maintenant comment se traduit le fait que $x = E(B_0)$ et $u = 0$ [autrement dit, $X' \in K(\overline{B}_0)$]. Comme $x > 0$, l'un des e_i est > 0. Soit p le plus petit indice tel que $e_p \neq 0$. En utilisant la ligne (2) pour $0 \leqq i < p$, on observe que $q_{i,p} = 0$ pour $0 \leqq i < p$. Donc $W_p = R_p - S_p$. On en déduit $E(B_0) \leqq r_p = s_p$, donc $E(B_0) = s_p$ et $e_p = 1$.

Ceci montre déjà que pour chaque $B \in P_k$, le degré $E(B)$ est égal au degré d'un des Z_i, $2 \leqq i \leqq k$. Il y a donc deux éléments distincts B et B' de P_k, tels que $E(B) = E(B')$, puisque E associe aux k éléments de P_k au plus $k-1$ nombres.

Soit donc $X-X'$ une différence de deux monômes de degré $E(B)$, avec $X \in K(B)$ et $X' \in K(B')$. La décomposition de $X-X'$, obtenue en prenant $B_0 = B$ est de la forme :

$$X-X' = W_p \text{ modulo } (I(B_0), I(C_p), \ldots, I(C_n), W_{p+1}, \ldots, W_n),$$

si p est défini comme précédemment.

Les Z_i, $2 \leqq i \leqq g$, engendrent $I(G)$ (lemme 8). On obtient un nouveau générateur de $I(G)$ en remplaçant par $X-X'$ celui des Z_i qui est égal au signe près à W_p (son indice j vérifie $2 \leqq j \leqq k$). Comme ce générateur est encore formé de différences de monômes unitaires de même degré, on peut user de la construction de suites distinguées exposée au lemme 6 pour fabriquer $(\mathscr{P}', \mathscr{Z}')$, avec $P_i = P'_i$ pour $k \leqq i \leqq g$, avec $Z_i = Z'_i$ pour $k < i \leqq g$ et avec $Z_k = X-X'$.

Cette nouvelle suite distinguée vérifie (★★★) d'après le lemme 8. En particulier, $E(B)$ est le p. p. c. m. des p. g. c. d. de B et B'.

14. Description d'un algorithme

Soit G une partie finie et non vide de N, ne contenant pas 0. Pour savoir si $\Gamma(G)$ est d'intersection complète, on tente de construire une certaine suite distinguée de proche est en proche.

On part évidemment de P_g, partition de G en ses parties à 1 élément. Si on arrive à P_k, $k \geqq 2$, on calcule les $E(B)$, $B \in P_k$. S'ils sont tous distincts, le monoïde n'est pas d'intersection complète. Si deux éléments distincts B et B' de P_k vérifient $E(B) = E(B')$, on compare $E(B)$ et le p. p. c. m. des p. g .c. d. de B et de B'. S'ils sont distincts, le monoïde n'est pas d'intersection complète. S'ils sont égaux, on prend $L_k = B$ et $L'_k = B'$, et on définit P_{k-1} avec (★); on choisit Z_k différence de deux monômes unitaires de degré $E(B)$, l'un dans $K(B)$, l'autre dans $K(B')$. Ce qui fait progresser la construction d'un cran. Si on arrive ainsi à $k = 1$, le monoïde est d'intersection complète.

Justification de l'algorithme. — Si on arrive à $k = 1$, on a construit une suite distinguée vérifiant (★★★), donc un générateur de $I(G)$ ayant $g - 1$ éléments. Par la même occasion, on dispose d'une évaluation du conducteur de $\Gamma(G)$.

Inversement, si $\Gamma(G)$ est d'intersection complète, à chaque pas il existe une suite distinguée vérifiant (★★★), dont on connaît les termes P_i, $k \leqq i \leqq g$ et Z_i, $k < i \leqq g$: le lemme 12 montre qu'il existe une autre suite distinguée vérifiant (★★★), dont la partie connue comporte un terme de plus, et se déduit de la partie connue de la précédente comme il est dit dans l'algorithme. Ceci explique pourquoi les observations formulées dans l'algorithme permettent, le cas échéant, de nier que $\Gamma(G)$ soit d'intersection complète.

Le lemme 13 et l'algorithme restent valides si G est l'ensemble d'indices d'une famille finie d'éléments N non nuls.

15. Exemples

Les monoïdes, appelés « libres » dans [6], parmi lesquels figurent les monoïdes de valuation des branches analytiques de courbes planes, [1], 2.1, Remark, sont d'intersection complète. Ils se caractérisent par le fait qu'une des suites distinguées sur un générateur G, vérifiant (★★★), est telle que L_g et les L'_i, $2 \leqq i \leqq g$ sont les parties à un élément de G. Watanabe ([5], Remark 1) donne un exemple montrant que les monoïdes d'intersection complète ne sont pas tous de cette sorte.

$G = \{5, 6, 7, 8\}$. On a $E(\{5\}) = 15$, $E(\{6\}) = 12$, $E(\{7\}) = 14$, $E(\{8\}) = 16$. Le monoïde $\Gamma(G)$ n'est pas d'intersection complète car les $E(B)$, $B \in P_4$ sont distincts deux à deux.

$G = \{4, 5, 6, 7\}$. On a $E(\{4\}) = E(\{6\}) = 12$, $E(\{4, 6\}) = E(\{5\}) = 10$, mais $E(\{4, 5, 6\}) = E(\{7\}) = 14$ n'est pas égal à 7, qui est le p. p. c. m. de 7 et de $1 =$ p. g. c. d. $(\{4, 5, 6\})$. Le monoïde $\Gamma(G)$ n'est donc pas d'intersection complète.

$G = \{10, 14, 15, 21\}$. On a $E(\{10\}) = E(\{15\}) = 30$, $E(\{14\}) = E(\{21\}) = 42$, $E(\{10, 15\}) = E(\{14, 21\}) = 35$. Le monoïde est d'intersection complète, son conducteur est $1-(10+14+15+21)+(30+42+35) = 48$. Une suite distinguée vérifiant (★★★) est :

$$\begin{aligned} P_4 &= \{\{10\}, \{14\}, \{15\}, \{21\}\}, & Z_4 &= T_{10}^3 - T_{15}^2, \\ P_3 &= \{\{10, 15\}, \{14\}, \{21\}\}, & Z_3 &= T_{14}^3 - T_{21}^2, \\ P_2 &= \{\{10, 15\}, \{14, 21\}\}, & Z_2 &= T_{10}^2 T_{15} - T_{14} T_{21}. \\ P_1 &= \{G\}, \end{aligned}$$

Ces exemples illustrent le fonctionnement de l'algorithme. On aurait pu aussi user de la proposition 9 pour voir que $\Gamma(\{4, 5, 6, 7\})$ et $\Gamma(\{5, 6, 7, 8\})$ ne sont pas d'intersection complète.

On peut insérer $G = \{10, 14, 15, 21\}$ dans la formation d'exemples plus compliqués, selon la proposition 10 :

$$29\,\Gamma(G) + 31\,\Gamma(G) = \Gamma(\{290, 310, 406, 434, 435, 465, 609, 651\})$$

est d'intersection complète, son conducteur est $48.29+48.31+28.30 = 3720$:

$$20\,\Gamma(G) + 21\,\Gamma(G) = \Gamma(\{200, 210, 280, 294, 300, 315, 441\})$$

est d'intersection complète, son conducteur est 2348 :

$$14\,\Gamma(G) + 15\,\Gamma(G) = \Gamma(\{140, 150, 196, 210, 225, 294, 315\})$$

est d'intersection complète, son conducteur est 1574.

Pour terminer, je tiens à remercier le référé, dont les remarques m'ont permis d'améliorer cet article et de mieux le situer par rapport aux travaux déjà existants.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. HERZOG, *Generators and Relations of Abelian Semigroups and Semigroup Rings* (*Manuscripta Math.*, vol. 3, 1970, p. 175-193).

[2] H. PINKHAM, *Deformations of Algebraic Varieties with G_m Action* (*Astérisque*, vol. 20, Société Mathétique de France, Paris, 1974).

[3] E. KUNZ, *The Value semigroup of a one-dimensional Gorenstein ring*. (*Proc. A.M.S.*, vol. 25, 1970, p. 748-751).

[4] J. HERZOG und E. KUNZ, *Die Wertehalbgruppe eines lokalen Rings der Dimension* 1, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, 2. Abh., 1971, Springer Verlag.

[5] K. WATANABE, *Some Examples of One-Dimensional Gorenstein Domains* (*Nagoya Math. J.*, vol. 49, 1973, p. 101-109).

[6] J. BERTIN et P. CARBONNE, *Sur la structure des semi-groupes d'entiers et applications aux branches* (*C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 280, série A, 1975, p. 1745-1748).

(Manuscrit reçu le 15 septembre 1975,
révisé le 25 novembre 1975.)

CHARLES DELORME,
U.E.R. de Mathématiques,
Bât. 425,
91405 *Orsay*.

FACULTÉ DES SCIENCES ORSAY BIBLIOTHÈQUE MATHÉMATIQUES