

THÈSES D'ORSAY

BERNARD HELFFER

**Hypoellipticité pour des classes d'opérateurs pseudodifférentiels
à caractéristiques multiples**

Thèses d'Orsay, 1976

[<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1976__0034__P0_0>](http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1976__0034__P0_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses d'Orsay » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



NUMDAM

*Thèse numérisée par la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016
et diffusée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

ORSAY

Série A

(A)
Exemplaire inscrit
aux archives originales
du Centre de Documentation
C. N. R. S.
sous le No A.O.12.559

THESES

PRESENTEES

A L'UNIVERSITE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES MATHEMATIQUES

PAR

88.311

Bernard HELFFER



+

1ère thèse : HYPOELLIPTICITE POUR DES CLASSES D'OPERATEURS
PSEUDODIFFERENTIELS A CARACTERISTIQUES MULTIPLES.

2nde thèse : PROPOSITIONS DONNEES PAR L'UNIVERSITE

+

Soutenues le 23 Juin 1976 devant la Commission d'examen

MM. L. SCHWARTZ

Président

N. A'CAMPO

J.M. BONY

L. BOUTET DE MONVEL

C. GOULAOUIC

} Examineurs

TABLE DES MATIERES

Remerciements

Introduction

1. Sur l'hypoellipticité d'une classe d'opérateurs paraboliques dégénérés
2. Avec C. Zuily
Non hypoellipticité d'une classe d'opérateurs différentiels.
3. Avec P. Bolley et J. Camus
Sur une classe d'opérateurs partiellement hypoelliptiques.
4. Avec P. Bolley et J. Camus
Hypoellipticité partielle pour des opérateurs dégénérés non fuschiens
5. Sur une classe d'opérateurs hypoelliptiques à caractéristiques multiples
6. Invariants associés à une classe d'opérateurs pseudodifférentiels et applications à l'hypoellipticité.
7. Conditions nécessaires d'hypoellipticité.
8. Avec L. Boutet de Monvel et A. Grigis
Paramétrixes d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples.
9. Sur l'hypoellipticité des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples (Perte de $3/2$ dérivées).
10. Construction de paramétrixes pour des opérateurs pseudodifférentiels caractéristiques sur la réunion de deux cônes lisses

*
*
*

E R R A T A

Introduction, p. 4, l. 15 :

Lire $\mathcal{J}'(\mathbb{R}^n)$ au lieu de $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

Chapitre 8, p. 0 dernière ligne et p. 00 première ligne :

La phrase correcte est : P possède une telle parametrix à gauche (resp. à droite) si et seulement si, pour tout $(x, \xi) \in \Sigma$, l'opérateur différentiel $\sigma_{x, \xi}^k(P)$ est inversible à gauche dans $\mathcal{J}'(\mathbb{R}^n)$ (resp. à droite dans $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$).

p. 10 ligne 7 :

La phrase correcte est : si et seulement si a_L est inversible à gauche dans $\mathcal{J}'(\mathbb{R}^n)$ (resp. à droite dans $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$).

REMERCIEMENTS

C'est L. Schwartz qui, en soutenant ma candidature au C. N. R. S., m'a précipité dans la recherche; il m'offrait en même temps le cadre du Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique. C'est C. Goulaouic qui m'a initié aux équations aux dérivées partielles et m'a introduit dans l'équipe d'Orsay. Par l'intermédiaire du Centre de Mathématiques et de l'équipe d'Orsay, j'ai pu rencontrer tous ceux avec qui j'ai eu l'occasion de travailler par la suite : P. Bolley, L. Boutet de Monvel, J. Camus, A. Grigis, J. Sjöstrand, C. Zuily.

L'évolution de mes travaux a suivi celle de l'équipe d'Orsay et du séminaire Goulaouic-Schwartz. Les travaux de C. Zuily m'ont poussé vers l'étude des opérateurs dégénérés du second ordre, ceux de M. S. Baouendi, C. Goulaouic, P. Bolley et J. Camus vers l'univers fuchsien. Au début, j'utilise la théorie des opérateurs pseudodifférentiels avec timidité. Mon intérêt pour les équations différentielles ordinaires date d'un exposé sur un article de Y. Kannai (ce fut un investissement utile). Dans la suite, on reconnaîtra l'influence grandissante de L. Boutet de Monvel et J. Sjöstrand. Leurs conseils m'ont permis d'aborder plus franchement des problèmes de la théorie des opérateurs pseudodifférentiels.

Comme on le voit, le travail présenté ici est une concrétisation du travail d'une équipe et d'un séminaire; il n'aurait pu exister sans l'aide des membres de l'équipe d'Orsay, du Centre de Mathématiques et des participants au séminaire Goulaouic-Schwartz.

Mais cela n'étonnera personne que l'étude systématique de problèmes dégénérés ait eu des conséquences néfastes sur mon écriture. Le difficile problème de la transmission de "mes pensées profondes" a été résolu par le secrétariat du Centre qui s'est acquitté de cette tâche avec le sourire, tout en sachant me rappeler quand il le fallait les incohérences de mes notations. Je tiens en particulier à remercier C. Amouyal, C. Amozig, M. Lavallette et M. J. Lécuyer, et les secrétariats de Grenoble et Rennes qui ont assuré la frappe des articles présentés ici. Je remercie également D. Concha qui en a assuré le tirage.

Enfin, pour que cette collection de travaux devienne une thèse, il fallait qu'un rapporteur inconnu (mais bien connu) rapporte et que cinq professeurs se rassemblent un 23 Juin pour constituer un jury. Je tiens à les remercier d'avoir accepté cette tâche (en particulier N. A'Campo qui m'a fourni un singulier sujet de seconde thèse).

INTRODUCTION

Tous les articles présentés ici ont une préoccupation commune : étudier l'hypoellipticité des opérateurs pseudodifférentiels. Avant de présenter nos travaux, rappelons les différentes notions d'hypoellipticité que nous aurons à considérer.

[He1] Un opérateur pseudodifférentiel P sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est dit hypoelliptique s'il possède la propriété suivante :

$$\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega), \forall \omega \subset \Omega, Pu \in C^\infty(\omega) \Rightarrow u \in C^\infty(\omega)$$

[He2]_k On dira que P , d'ordre m , est hypoelliptique avec perte de k dérivées s'il est hypoelliptique et si :

$$\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega), \forall \omega \subset \Omega, \forall s, Pu \in H_{loc}^s(\omega) \Rightarrow u \in H_{loc}^{s+m-k}(\omega)$$

On sait que les opérateurs elliptiques sont les seuls opérateurs hypoelliptiques avec perte de 0 dérivées.

Soit S une hypersurface régulière qu'on supposera donnée dans $\mathbb{R}^n$ par $x_n=0$. On suppose que $\Omega = \Omega_{n-1} \times]-1, +1[$ où Ω_{n-1} est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$.

[He3] On dira que P est normalement hypoelliptique (relativement à S) dans Ω si :

$$\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega), \forall \omega_{n-1} \subset \Omega_{n-1}, \forall I \subset]-1, +1[, Pu \in C_{x_n}^\infty(I, \mathcal{D}'(\omega_{n-1})) \Rightarrow u \in C_{x_n}^\infty(I, \mathcal{D}'(\omega_{n-1}))$$

[He4] On dira que P est partiellement hypoelliptique (relativement à S)

si :

$$\forall u \in C_{x_n}^\infty(]-1, +1[, \mathcal{D}'(\Omega_{n-1})), \forall \omega \subset \Omega, Pu \in C^\infty(\omega) \Rightarrow u \in C^\infty(\omega)$$

Un opérateur partiellement et normalement hypoelliptique est hypoelliptique.

Enfin, on aura besoin d'une notion plus faible que [He3] de régularité normale :

[He5]] k_0 , $\forall u \in C_{x_n}^{k_0} (]-1, +1[, \mathcal{D}'(\Omega_{n-1})), \forall I \subset]-1, +1[, \forall \omega_{n-1} \subset \Omega_{n-1}$

$$Pu \in C_{x_n}^\infty(I, \mathcal{D}'(\omega_{n-1})) \Rightarrow u \in C_{x_n}^\infty(I, \mathcal{D}'(\omega_{n-1}))$$

Mon travail s'est développé selon deux axes complémentaires : donner des conditions nécessaires pour que des opérateurs possèdent la propriété [Hej] ($j=1\text{ à }5$), construire des parametrixes permettant de démontrer pour des classes d'opérateurs les propriétés He1,2 et 4.

Des conditions nécessaires sont données dans [2], [6], [7], [8], elles sont obtenues essentiellement par deux méthodes : construction explicite de solutions irrégulières [2], [7] en utilisant les équations du type de Fuchs ou en résolvant des problèmes de Cauchy, négation d'une estimation a priori [6], [8] "microlocalisée".

Des conditions suffisantes sont données dans [1], [3], [4], [5], [6], [7], [9], [10]. Si l'on excepte l'article [1], la démarche est toujours la suivante : à un opérateur pseudodifférentiel, on associe un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux opérant dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et dont l'inversibilité à gauche permet d'obtenir des résultats d'hypoellipticité. Cette idée a été exploitée tout d'abord par V.V. Grusin. Dans [3], [7], on utilise des techniques proches de celles de Grusin et des travaux de P. Bolley et J. Camus, mais on donne alternativement des démonstrations utilisant les opérateurs pseudodifférentiels à valeur vectorielle à la manière de J. Sjöstrand, L. Boutet de Monvel, R. Beals pour construire des parametrixes. De l'étude de modèles dans [1], [3], [7], j'ai évolué vers l'étude d'opérateurs pseudodifférentiels dont la dégénérescence est décrite en termes plus géométriques. Si on excepte la théorie des opérateurs pseudodifférentiels, deux outils m'auront été très utiles : la géométrie symplectique ([5], [6], [10]) et la théorie des équations différentielles ordinaires, que ce soient la théorie locale (comportement asymptotique des solutions au voisinage d'un point) [2] ou la théorie globale (théorème d'indice, existence de solutions globales) [3], [4], [7].

Précisons maintenant le contenu de chaque article.

- Dans l'article [1], on généralise des résultats de T. Matsuzawa

et l'exemple de Y. Kannai ($P = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$); On y construit des parametrixes pour des opérateurs différentiels du second ordre à coefficients complexes du type parabolique dégénéré. On retrouve ainsi dans le cas réel (et dans des cas très particuliers) des résultats de la thèse de C. Zuily. On généralise ces résultats au cas d'opérateurs d'ordre plus élevé.

- Dans l'article [2] écrit avec C. Zuily, on montre que les opérateurs du type de Fuchs introduits par M.S Baouendi et C. Goulaouic ne sont jamais hypoelliptiques, généralisant ainsi un résultat de Kannai pour les équations différentielles ordinaires. Ce résultat est utilisé dans la thèse de C. Zuily.

- M.S Baouendi et C. Goulaouic ont montré que ces opérateurs possédaient par contre la propriété [He5] et il était alors naturel de se demander sous quelles conditions des opérateurs du type de Fuchs vérifiaient [He4]. Une telle étude est menée dans [3] en collaboration avec P. Bolley et J. Camus. On y considère des classes d'opérateurs du type de Fuchs

(ex : $P = x_2 (D_{x_2}^2 + D_{x_1}^2) + \lambda D_{x_2} + \mu D_{x_1}$) généralisant les classes de

Grusin et on ramène le problème de l'étude de l'hypoellipticité partielle à l'étude du noyau dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ d'équations différentielles ordinaires à coefficients polynomiaux. Notre méthode de démonstration a été améliorée

récemment par F. Nourrigat. [3] contient également l'étude de la dimension du noyau dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de nombreux opérateurs différentiels, qui donne lieu à des applications ([4], Trèves-Gilioli, Menikoff, Yamamoto).

- Dans [7], on montre que [He4] n'est pas le privilège des Fuchsien, et on considère avec les mêmes techniques que dans [3], des opérateurs non-Fuchsien, (ex : $x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + i \frac{\partial}{\partial x_1}$), vérifiant [He4]. On montre qu'ils ne vérifient pas [He5] en utilisant un théorème de Cauchy-précisé (Bony-Schapira).

- Dans [8], on fait quelques remarques sur un théorème d'Hörmander, on montre comment ce théorème, de localisation des estimations a priori, permet de montrer la nécessité, pour avoir l'hypoellipticité maximale (He2), des conditions suffisantes apparaissant dans les travaux de Grusin et dans [4] [5].

Deux articles fondamentaux sont à la base de mes autres articles [4], [5], [6], [9], [10]. Ils démontrent tous les deux l'existence de parametrixes pour des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples : le premier est dû à J. Sjöstrand [SJ], le second à L. Boutet de Monvel [BM]. On y considère des opérateurs pseudodifférentiels réguliers d'ordre m , i.e dont le symbole complet p admet un développement

asymptotique en termes homogènes d'ordre $m-j$: $p \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_{m-j}$, qui s'annulent à l'ordre k sur un cône lisse Σ du fibré cotangent $T^*\Omega \setminus 0$, au sens suivant :

Si on désigne par $S^*\Omega$, l'ensemble des $(x, \xi) \in T^*\Omega$ tels que $|\xi|=1$, par $d_{\Sigma}(x, \xi)$ la distance pour un point (x, ξ) de $S^*\Omega$ à $\Sigma \cap S^*\Omega$, $\exists C, C' > 0$;

$$|p_{m-j}(x, \xi)| \leq C d_{\Sigma}^{k-2j}(x, \xi) \text{ pour } (x, \xi) \in S^*\Omega, 2j \leq k$$

$$|p_m(x, \xi)| \geq C' d_{\Sigma}^k(x, \xi)$$

On associe à P en tout point (x, ξ) de Σ , l'opérateur $\sigma_{x, \xi}^k(P)$ défini par :

$$\sigma_{x, \xi}^k(P) = \sum_{|\alpha+\beta|+2j=k} \frac{1}{\alpha! \beta!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^{\beta} p_{m-j}(x, \xi) y^{\alpha} D_y^{\beta}$$

qui est un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^n$, à coefficients polynomiaux, de degré total inférieur à k .

Cet opérateur n'est pas un invariant (il dépend d'un choix de coordonnées), mais son orbite (par conjugaison par le groupe métaplectique) est bien définie de manière invariante. C'est l'objet de [5] et c'est redéveloppé dans [6]. Dans [SJ], il est montré, que lorsque Σ est symplectique (ex : $D_{x_2}^2 + x_2^2 D_{x_1}^2 + \lambda D_{x_1}$), si $\sigma_{x, \xi}^k(P)$ est inversible à gauche dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

alors P est hypoelliptique avec perte de $k/2$ dérivées. Dans le cas $k=2$, [SJ] donne des conditions nécessaires et suffisantes d'inversibilité qui s'expriment à l'aide d'invariants construits à partir du Hessien du

symbole principal et du symbole sous-principal.

Dans [BM], l'auteur redémontre ces résultats en introduisant une classe d'opérateurs pseudodifférentiels contenant les opérateurs s'annulant à l'ordre k et leurs parametrixes quand elles existent. Il traite également le cas où Σ est involutif (ex : $D_{x_2}^2 + \lambda D_{x_1}$) mais le formalisme développé

dans [BM] permettra d'aborder le cas général.

Dans [4], utilisant des résultats de [3], on étudie le cas où Σ est symplectique de codimension 2, mais $k > 2$ (L. Rodino a travaillé ultérieurement dans cette direction) ; On traite complètement le cas $k=3$.

Dans sa thèse de 3ème cycle, A. Grigis [GR] traite le cas où le rang de la 2-forme symplectique restreinte à Σ est constant.

[GR] et [BM] conduisent naturellement à [6]. Cet article écrit avec L. Boutet de Monvel et A. Grigis, montre que, sans hypothèse sur Σ , P est hypoelliptique avec perte de $k/2$ dérivées si et seulement si

$\sigma_{(x,\xi)}^k(P)$ est inversible à gauche dans $\mathcal{Y}(\mathbb{R}^n)$ en tout point de Σ . Une des nouveautés de [6] est qu'il courtcircuite l'utilisation des Fourier intégraux (qui était essentielle dans [SJ]), remplaçant des problèmes de géométrie symplectique par des problèmes d'algèbre linéaire dans chaque fibre du fibré normal à Σ . L'étude faite dans [6] des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux, dépendant d'un paramètre, sera réutilisée dans [10].

Dans [9], on revient au cas symplectique, $k=2$, (ex : $D_{x_2}^2 + x_2^2 D_{x_1}^2 + \lambda D_{x_1}$)

et on suppose que la condition nécessaire et suffisante d'hypoellipticité avec perte d'une dérivée n'est pas satisfaite. On étudie $(He2)_k$ avec $3/2 \leq k < 2$ et on obtient des conditions nécessaires et suffisantes, qui s'expriment "en général" avec les mêmes invariants que précédemment. Plutôt que de raffiner simplement le travail de [SJ] plus adapté a priori pour obtenir ces résultats (ce que j'avais fait dans une première version avec l'aide de J. Sjöstrand), j'ai finalement préféré développer le calcul symbolique de [BM], en utilisant en particulier ses opérateurs d'Hermite.

A la fin de [9], on posait un problème sur la sous-ellipticité des systèmes, qu'on résoud dans un cas assez général dans [10]. Le problème est le suivant :

Soit P_1 (resp P_2) un opérateur pseudodifférentiel régulier d'ordre $1/2$ caractéristique sur Σ_1 (resp Σ_2) et vérifiant sur Σ_1 (resp Σ_2)

$$\frac{1}{i}\{P_1, \overline{P_1}\} < 0 \text{ (resp. } \frac{1}{i}\{P_2, \overline{P_2}\} < 0)$$

Soient A et B des opérateurs pseudodifférentiels réguliers d'ordre 0,

alors $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P_1 & B \\ A & P_2 \end{pmatrix}$ est-il sous elliptique avec perte d'une demi-dérivée ?

$\tilde{\mathcal{P}} = (P_1 P_2 + A)$ est-il hypoelliptique avec perte d'une dérivée ?

On répond par l'affirmative à ces deux problèmes.

LISTE DES TRAVAUX CONSTITUANT LA THESE

- [1] Sur l'hypoellipticité d'une classe d'opérateurs paraboliques dégénérés . Astérisque n°19 (1974).
- [2] Avec C. Zuily, non hypoellipticité d'une classe d'opérateurs différentiels. Astérisque n°19 (1974)
- [3] Avec P. Bolley et J. Camus. Sur une classe d'opérateurs partiellement hypoelliptiques (à paraître: Journal de Mathématiques pures et appliquées).
- [4] Sur une classe d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples (à paraître Journal de Mathématiques pures et appliquées).
- [5] Invariants associés à une classe d'o.p.d et applications à l'hypoellipticité (à paraître : Annales de l'institut Fourier)
- [6] Avec L. Boutet de Monvel et A. Grigis : Parametrixes d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples.(A paraître : Astérisque)
- [7] Avec P. Bolley et J. Camus : Hypoellipticité partielle pour des opérateurs dégénérés non Fuchsien
- [8] Conditions nécessaires d'hypoellipticité
- [9] Sur l'hypoellipticité d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples (perte 3/2)

SUR L'HYPONELLIPTICITE D'UNE CLASSE D'OPERATEURS
PARABOLIQUES DEGENERES

B. HELFFER

Nous nous proposons dans ce travail de donner des conditions suffisantes d'hypoellipticité pour des opérateurs d'ordre $2m$ (m entier) du type :

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - a_{2m}(x, t, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}) + \sum_{j=0}^{2m-1} a_j(x, t, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x})$$

où (x, t) est un point courant d'un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$ et où, pour j entier ($0 \leq j \leq 2m$), $a_j(x, t, \xi)$ désigne un polynôme homogène de la variable ξ dans $\mathbb{R}^n$, dont les coefficients sont de classe C^∞ dans $\mathcal{O}$.

Les résultats que nous démontrons généralisent ceux récemment obtenus par T. Matsuzawa [7], Y. Kannai [4] et Y. Kato [6], dont nous utilisons les méthodes.

Notons que des résultats d'hypoellipticité pour des classes voisines d'opérateurs se trouvent aussi dans [11].

Les hypothèses de base de ce travail sont les suivantes : le symbole principal de l'opérateur L vérifie une condition (inspirée par les travaux de F. Trèves [9], [10]) du type :

$$\int_{t'}^t \operatorname{Re} a_{2m}(x, s, \xi) ds \geq C(t - t')^{k+1} |\xi|^{2m}, \quad k \in \mathbb{N}$$

pour certaines valeurs de t et t' .

D'autres hypothèses assurent la prédominance de $\operatorname{Re} a_{2m}$ par rapport aux autres termes de l'opérateur.

Sous ces conditions, on montre qu'on peut construire pour l'opérateur transposé une paramétrix approchée à droite du type suivant :

$$K v(x, t) = \int_{T_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{i \langle x, \xi \rangle} K(x, \xi, t, t') \hat{v}(\xi, t') d\xi \cdot dt' ;$$

$$v(x, t) \in C_0^\infty(\mathcal{O})$$

où $K(x, \xi, t, t')$ est un symbole dont le terme principal est donné par

$$K_0(x, \xi, t, t') = e^{-\int_{t'}^t a_{2m}(x, s, \xi) ds}$$

L'hypoellipticité de l'opérateur L se déduit alors des propriétés de régularité du noyau de l'opérateur K par un procédé classique [8].

On montre par exemple l'hypoellipticité dans $\mathbb{R}^{n+1}$ de l'opérateur :

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - t^\ell (t^{2r} + |x|^{2p}) \mathcal{A}_{2m}(x, t, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x})$$

où l, r, p, m sont des entiers positifs vérifiant $p \geq m$ et où
 $\text{Re } \mathcal{R}_{2m}(x, t, \xi) \geq C |\xi|^{2m}$ pour (x, t, ξ) dans $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^n$.

Au § 1, nous énonçons le théorème principal de cet article. Ce théorème contient le théorème 1.1 de [7], le cas étudié dans [4], et les théorèmes 1 et 2 de [6].

Au § 2 on rappelle (cf. [4] et [6]) comment la démonstration de l'hypoellipticité se ramène à la construction d'une famille de paramétrix approchées pour l'opérateur transposé.

Au § 3, on construit formellement ces paramétrix en utilisant les méthodes de [7].

Aux § 4, 5, 6, on démontre les estimations qui permettent de donner un sens à la construction formelle.

*
* *
*

§ 1. ENONCE DU THEOREME ET APPLICATIONS

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert relativement compact de $\mathbb{R}^n$.

$x = (x_1, \dots, x_n)$ désigne un point courant de $\mathbb{R}^n$, t un point courant de $\mathbb{R}$.

On considère l'opérateur défini dans $\mathcal{O}$ par :

$$(1.1) \quad L = \frac{\partial}{\partial t} - a_{2m}(x, t, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}) + \sum_{j=0}^{2m-1} a_j(x, t, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x})$$

où pour j entier ($0 \leq j \leq 2m$), $a_j(x, t, \xi)$ désigne un polynôme homogène d'ordre j de la variable ξ dans $\mathbb{R}^n$ à coefficients dans $C^\infty(\mathcal{O})$.

Pour Ω et I fixés tels que $\Omega \times I$ soit contenu dans $\mathcal{O}$, on fait les hypothèses suivantes.

[H1] (cf. [10])

Il existe T_0 dans $\bar{I}$, k dans $\mathbb{N}$ et une constante C strictement positive tels que la propriété suivante soit vérifiée :

pour tout (x, t, t', ξ) dans $\Omega \times I \times I \times \mathbb{R}^n$ tel que t' appartient à l'intervalle joignant t à T_0 , on a :

$$(1.2) \quad \operatorname{Re} \left(\int_{t'}^t a_{2m}(x, s, \xi) ds \right) \geq C |t - t'|^{k+1} |\xi|^{2m}.$$

[H2]

Il existe des constantes réelles θ et τ telles que, pour tout entier j ($0 \leq j \leq 2m$), pour tout (α, β) dans $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$ vérifiant :

$$|\alpha| + |\beta| + j > 0 \quad (|\alpha| + j)\theta + (|\beta| + j)\tau \leq 1$$

il existe des constantes $C_{\alpha, \beta, j}$ telles que, pour tout (x, t, ξ) dans $\Omega \times I \times \mathbb{R}^n_\xi$ on ait :

$$(1.3) \quad \left| \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\beta \partial \xi^\alpha} a_{2m-j}(x, t, \xi) \right| \leq C_{\alpha, \beta, j} |\operatorname{Re} a_{2m}|^{1 - (|\alpha| + j)\theta - (|\beta| + j)\tau} |\xi|^{2m[(|\alpha| + j)\theta + (|\beta| + j)\tau] - |\alpha| - j}.$$

[H3]

θ et τ vérifient la condition :

$$(1.4) \quad 2m \frac{k}{k+1} (\tau + \theta) < 1$$

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 1.1 : Si L est défini dans $\mathcal{O}$ par (1.1) et si pour tout point (x, t) de $\mathcal{O}$, il existe un voisinage relativement compact de la forme $\Omega \times I$ inclus dans $\mathcal{O}$ où les hypothèses [H1], [H2], [H3] sont vérifiées, alors L est hypoelliptique dans $\mathcal{O}$.

Donnons trois applications à ce théorème

Exemple 1 (voir [7]) : On suppose $n = 1$, $I =]-1, +1[$. On considère l'opérateur défini dans $\Omega \times I$ par :

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial}{\partial x} + c(x, t)$$

et on fait les hypothèses suivantes :

(1.5) $\operatorname{Re} a(x, t) \geq 0$ dans $\Omega \times I$.

(1.6) Pour tout x dans Ω , la fonction $t \rightarrow \operatorname{Re} a(x, t)$ a seulement des zéros d'ordre pair inférieur ou égal à 2ℓ dans l'intervalle I .

(1.7)* Il existe une constante C telle que, pour tout (x, t) dans $\Omega \times I$, on ait :

$$|\operatorname{Im} a(x, t)| \leq C \operatorname{Re} a(x, t).$$

(1.8)* Il existe une constante C et un réel ε strictement positif tels que pour tout (x, t) dans $\Omega \times I$, on ait :

$$|b| + \left| \operatorname{Im} \frac{\partial a}{\partial x} \right| \leq C (\operatorname{Re} a)^{\frac{1}{2} + \varepsilon - \frac{1}{4\ell}}$$

Alors L est hypoelliptique dans $\Omega \times I$.

En effet des hypothèses (1.5) et (1.6), on déduit que [H1] est vérifiée avec $T_0 = -1$ et $k = 2\ell$. On déduit également (cf. [9]) que :

* On peut bien entendu affaiblir (1.7) et (1.8) en les supposant vraies sur tout compact K de $\Omega \times I$.

Pour tout compact K dans $\Omega \times I$, il existe une constante C strictement positive telle que, pour tout (x, t) dans K , on ait :

$$(1.9) \quad \left| \operatorname{Re} \frac{\partial a}{\partial x} \right| \leq C_K (\operatorname{Re} a(x, t))^{\frac{1}{2}}.$$

De (1.7), (1.8), (1.9), on déduit que [H2] est vérifiée avec $\theta = 0$, $\tau = \frac{1}{2} + \frac{1}{41} - \varepsilon$.

[H3] est alors vérifiée.

Cet exemple donne une très légère amélioration du théorème (1.1) de [7].

Exemple 2 (voir [4], [6]) : On garde les notations de l'exemple 1 et on considère l'opérateur défini par :

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + t a(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial}{\partial x} + c(x, t)$$

et on fait les hypothèses suivantes :

$$\left[\begin{array}{l} (1.5)' = 1.5) ; \quad (1.6)' = (1.6) ; \quad (1.7)' = (1.7) . \\ (1.8)' \text{ Il existe une constante } C \text{ telle que, pour tout } (x, t) \text{ dans } \Omega \times I, \\ \text{on ait :} \\ \left| b \right| + \left| t \operatorname{Im} \frac{\partial a}{\partial x} \right| \leq C \left| t \operatorname{Re} a \right|^{\frac{1}{2}} . \end{array} \right.$$

Alors L est hypoelliptique dans $\Omega \times I$. En effet, on vérifie que les hypothèses du théorème sont satisfaites avec $\theta = 0$, $\tau = \frac{1}{2}$, $T_0 = 0$, $k = 2\ell + 1$.

Exemple 3 : L'opérateur $L = \frac{\partial}{\partial t} + (t^2 + x^4) \frac{\partial^4}{\partial t^4}$ est hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$.

Signalons que $L = \frac{\partial}{\partial t} + (t + x)^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4}$ ne l'est pas.

Avant de commencer la démonstration du théorème, faisons quelques remarques préliminaires :

Remarque 1.1 : L'hypoellipticité étant une propriété locale, on supposera dans la suite que $\mathcal{O} = \Omega \times I$ et que L vérifie les hypothèses [H1], [H2], [H3] dans $\Omega \times I$.

Remarque 1.2 : L'opérateur ${}^tL$ transposé de L s'écrit sous la forme

$$P \equiv -{}^tL \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=0}^{2m} b_j(x, t, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x})$$

où $b_j(x, t, \xi)$ ($j = 0, \dots, 2m$) est un polynôme homogène d'ordre j de la variable ξ dans $\mathbb{R}^n$ à coefficients dans $C^\infty(\mathcal{O})$.

De plus $b_{2m} = a_{2m}$, et les $b_j(x, t, \xi)$ ($0 \leq j \leq 2m$) vérifient l'hypothèse [H2] avec les mêmes constantes θ et τ .

Remarque 1.3 : Soit L le transformé de L par le difféomorphisme $(x, t) \rightarrow (x, -t)$, alors $-L$ vérifie les hypothèses [H1], [H2], [H3].

Remarque 1.4 : De la remarque 1.3, on déduit facilement que l'on peut toujours se ramener, quitte à restreindre Ω et I , au cas où $I =]-1, +1[$ et où $T_0 = -1$ ou $T_0 = 0$, si l'on veut démontrer l'hypoellipticité de L au voisinage du point $(x, 0)$ de $\Omega \times I$. On fera cette hypothèse dans la suite.

Remarque 1.5 : On peut remplacer [H1] et [H3] par des hypothèses différentes

[H1]' (cf. [10])

Il existe T_0 dans $\bar{I}$ tel que :

pour tout (x, t, t', ξ) dans $\Omega \times I \times I \times \mathbb{R}^n$ tel que t' appartient à l'intervalle joignant t à T_0 , on a :

$$(1.2)' \quad \operatorname{Re} \int_{t'}^t a_{2m}(x, s, \xi) ds \geq 0$$

l'inégalité étant stricte lorsque t est différent de t' .

[H3]'

τ et θ doivent vérifier la condition

$$(1.4)' \quad 2m(\tau + \theta) < 1.$$

Par exemple l'opérateur

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + e^{-\frac{1}{t^2 + x^2}} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

est hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$.

§ 2. REDUCTION DU PROBLEME A LA CONSTRUCTION D'UNE FAMILLE DE PARAMETRIX

Grâce à la remarque 1.4, on a vu qu'on pouvait se ramener au cas où $I =]-1, +1[$ et où T_0 est égal à -1 ou 0 .

Nous supposons dans la suite que $T_0 = 0$, pour deux raisons :

- 1) Le cas T_0 est un peu plus délicat.
- 2) Le cas $T_0 = -1$ a été traité dans [7] dans un cadre plus restreint, mais la construction formelle des parametrix est exactement la même et seules des estimations sur des symboles seraient à vérifier. Or ce sont les mêmes que dans le cas $T_0 = 0$.

Signalons enfin que les techniques utilisées dans ce paragraphe ont été utilisées par [4] et [6] pour démontrer des résultats analogues, c'est pourquoi nous ne donnerons pas de démonstration des propositions qui suivent.

Proposition 2.1 [4], [6] : Soit $M = \frac{\partial}{\partial t} + p(x, t, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x})$ (où $p(x, t, \xi)$ est un polynôme en ξ à coefficients dans $C^\infty(\Omega \times]-1, +1[)$) un opérateur possédant la propriété suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout ouvert } \omega \text{ contenu dans } \Omega, \text{ et tout réel } \varepsilon \text{ } (0 < \varepsilon < 1), \\ u \in \mathcal{D}'(\Omega \times]-1, +1[), Mu \in C^\infty(\omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[) \Rightarrow u \in C^\infty(\omega \times [0, \varepsilon[) \cap C^\infty(\omega \times]-\varepsilon, 0]) \end{array} \right.$$

Alors M vérifie la propriété suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout ouvert } \omega \text{ contenu dans } \Omega, \text{ et tout réel } \varepsilon \text{ } (0 < \varepsilon < 1), \\ u \in \mathcal{D}'(\Omega \times]-1, +1[), Mu \in C^\infty(\omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[) \Rightarrow u \in C^\infty(\omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[) \end{array} \right.$$

En vertu de la remarque 1.3 et de la proposition 2.1, il suffira pour démontrer l'hypoellipticité de L dans $\Omega \times I$, de montrer que la propriété suivante est vérifiée :

[P1] Pour tout ouvert ω contenu dans Ω , et tout réel ε ($0 < \varepsilon < 1$)

$$u \in \mathcal{D}'(\Omega \times]-1, +1[), Lu \in C^\infty(\omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[) \Rightarrow u \in C^\infty(\omega \times [0, \varepsilon[) \quad .$$

Montrons maintenant comment la propriété P1 se déduit de la construction d'une suite de parametrix approchées pour le transposé de L.

Considérons $P_{x,t} = -{}^tL = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=0}^{2m} b_j(x,t, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x})$ et posons :

$$U = (\Omega \times \mathbb{R}_y^n \times]-1, +1[\times [0, 1[)$$

$$W = U - \{(x, y, t, t') \in U, (x, t) = (y, t')\}$$

$$\Sigma = \{(t, t') \in I \times [0, 1[; t' < t\}$$

$$\overline{\Sigma} = \{(t, t') \in I \times [0, 1[; t' \leq t\} .$$

[P2] On peut construire deux suites de distributions sur U, $K_j(x, y, t, t')$ et $F_j(x, y, t, t')$ telles que, pour tout j dans N on ait :

(2.1)* pour tout (x, y, t, t') dans $U \setminus (\Omega \times \mathbb{R}_y^n \times \overline{\Sigma})$, on a

$$F_j(x, y, t, t') = 0$$

$$K_j(x, y, t, t') = 0 .$$

(2.2) pour tout (x, y, t, t') dans U, on

$$P_{x,t} \left(\sum_{\ell=0}^j K_{\ell}(x, y, t, t') \right) = \delta(x - y, t - t') + F_j(x, y, t, t')$$

(2.3) $K_j \in C^{\infty}(W)$

(2.4) $\forall \varphi(y, t') \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}_y^n \times]0, 1[) ; \langle K_j, \varphi \rangle_{y, t'} \in C^{\infty}(\Omega \times]-1, +1[)$

(2.5) $\forall \psi(x, t) \in C_0^{\infty}(\Omega \times]-1, +1[) ; \langle K_j, \psi \rangle_{x, t} \in C^{\infty}(\Omega \times [0, 1[)$

(2.6) Pour tout entier N positif, il existe un entier M tel que, pour tout j supérieur à M, $F_j(x, y, t, t')$ soit dans $C^N(U)$.

* On utilise abusivement la notation fonction, mais ça ne prêterait pas à confusion.

Remarque 2.1 :

(2.3), (2.4), (2.5) expriment que K_j est un noyau "très régulier" en un sens voisin de celui de [8].

(2.6) exprime que F_j est, pour j suffisamment grand, régularisant.

On démontre alors facilement la propriété suivante :

Proposition 2.2 : Si l'opérateur $-{}^tL$ vérifie la propriété [P2], alors L vérifie la propriété [P1].

Dans les paragraphes suivants, on montrera comment on peut construire les suites K_j et F_j et comment la propriété [P2] se déduit d'estimations sur des symboles.

§ 3. CONSTRUCTION FORMELLE DES DISTRIBUTIONS K_j et F_j DANS LE CAS $T_0 = 0$

Les K_j et F_j seront des noyaux distributions associés à des opérateurs du type suivant : pour v dans $C_0^\infty(\Omega \times]0, 1[)$ et (x, t) dans $\Omega \times]-1, +1[$, on pose

$$(3.1) \quad [K]v(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} K(x, \xi, t, t') \hat{v}(\xi, t') d\xi dt'$$

où

$$\hat{v}(\xi, t') = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y, \xi \rangle} v(y, t') dy.$$

Le noyau associé à K est alors défini dans u par

$$(3.2) \quad K(x, y, t, t') = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} K(x, \xi, t, t') d\xi.$$

L'idée directrice étant de construire une paramétrix de l'opérateur $P = -{}^tL$, on cherche $[K]$ de telle sorte que, pour tout v dans $C_0^\infty(\Omega \times]0, 1[)$, on ait $P[K]v = v$ dans $\Omega \times]0, 1[$.

Par un calcul formel nous avons :

$$\begin{aligned} P[K]v &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} K(x, \xi, t, t) \hat{v}(\xi, t) d\xi \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=0}^{2m} b_j(x, t, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} + \xi) \right] K(x, \xi, t, t') \hat{v}(\xi, t') d\xi dt' \end{aligned}$$

de sorte qu'on est amené à résoudre :

$$(3.3) \quad \left[\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=0}^{2m} b_j(x, t, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} + \xi) \right) K(x, \xi, t, t') = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n \times \Sigma \\ & K(x, \xi, t, t')_{t=t'} = 1 \quad \text{pour } t' \geq 0, (x, \xi) \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n \\ & K(x, \xi, t, t') = 0 \text{ pour } -1 < t < t' < 1, t' \geq 0, (x, \xi) \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n. \end{aligned} \right.$$

On va trouver K de manière approchée, en résolvant d'abord

$$(3.4) \quad \left[\begin{aligned} & L_1 K_0 \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + b_{2m}(x, t, \xi) \right) K_0(x, \xi, t, t') = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n \times \Sigma \\ & K_0(x, \xi, t, t')_{t=t'} = 1 \quad \text{pour } t' \geq 0, (x, \xi) \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n \\ & K_0(x, \xi, t, t') = 0 \text{ pour } (x, \xi) \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n; -1 < t < t' < 1; t' \geq 0. \end{aligned} \right.$$

On pose :

$$(3.5) \quad L_2 \equiv \sum_{j=0}^{2m} \sum_{\substack{\alpha \\ 0 < |\alpha| + j \leq 2m}} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{\alpha} b_{2m-j}}{\partial \xi^{\alpha}}(x, t, \xi) \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha}$$

et on résoud par récurrence pour j dans N

$$(3.6) \quad \left[\begin{aligned} & L_1 K_{j+1}(x, \xi, t, t') = - L_2 K_j(x, \xi, t, t') \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n \times \Sigma \\ & K_{j+1}(x, \xi, t, t') = 0 \text{ pour } -1 < t \leq t' < 1, t' \geq 0; (x, \xi) \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n. \end{aligned} \right.$$

On vérifie alors formellement que : pour $v(x, t)$ dans $C_0^{\infty}(\Omega \times]0, 1[)$, on a dans $\Omega \times]0, 1[$

$$P([K_0] + \dots + [K_j])v(x, t) = v(x, t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{i \langle x, \xi \rangle} L_2 K_j(x, \xi, t, t') v(\xi, t') d\xi dt'$$

On pose :

$$(3.7) \quad F_j(x, \xi, t, t') \equiv L_2 K_j(x, \xi, t, t') \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n \times]-1, +1[\times [0, 1[$$

$[F_j]$ est alors défini par (3.1) et $F_j(x, y, t, t')$ par (3.2).

On a ainsi construit formellement les suites $K_j(x, y, t, t')$ et $F_j(x, y, t, t')$ dont on va montrer maintenant qu'elles vérifient [P2].

§ 4. ETUDE DE $K_0(x, y, t, t')$

On démontre dans ce paragraphe que $K_0(x, y, t, t')$ défini par (3.4) et (3.2) vérifie les propriétés (2.3), (2.4), (2.5).

Précisons d'abord quelques notations :

$S_{\rho, \delta}^m(\Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n)$ désigne l'espace des symboles d'ordre m introduit par Hörmander [1], [3] muni de sa topologie naturelle d'espace de Fréchet (voir [3]).

On pose :

$$S^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n) = \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} S_{\rho, \delta}^m(\Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n) .$$

Pour Λ inclus dans $I \times I$ et p dans $\mathbb{N}$, on désigne par $\mathcal{E}^p(\Lambda, S_{\rho, \delta}^m(\Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n))$ l'ensemble des fonctions $K(x, \xi, t, t')$ telles que l'application $(t, t') \rightarrow K(x, \xi, t, t')$ soit de classe $\mathcal{C}^p$ de Λ dans $S_{\rho, \delta}^m(\Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n)$ et on pose

$$\mathcal{E}(\Lambda, S_{\rho, \delta}^m(\Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n)) = \bigcap_{p \geq 0} \mathcal{E}^p(\Lambda, S_{\rho, \delta}^m(\Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n)) .$$

Enfin, on utilisera les notations : $D_x = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}$, $D_{\xi} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi}$, $D_t = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t}$.

Proposition 4.1 : Pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons :

$$(4.1) \quad K_0(x, \xi, t, t') \in \mathcal{E}(\Sigma, S^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n)) \cap \bigcap_{p \geq 0} \mathcal{E}^p(\Sigma, S_{\rho, \delta}^{\varepsilon+2mp}(\Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n))$$

avec $\rho = 1 - \frac{2mk}{k+1} \cdot \theta$, $\delta = \frac{2mk}{k+1} \cdot \tau$.

(4.2) Pour tout $(\alpha, \beta, p_1, p_2)$ dans $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $2m(p_1 + p_2) < |\alpha|$, la quantité :

$$|D_t^{p_1} D_{t'}^{p_2} D_x^{\beta} D_{\xi}^{\alpha} K_0(x, \xi, t, t') (1 + |\xi|)^{-\delta|\beta| + \rho|\alpha| - 2m(p_1 + p_2) - \varepsilon}|$$

tend vers zéro uniformément dans $\Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n \times \Sigma$ lorsque t tend vers t' .

En abrégé, $\rightrightarrows$ signifiera convergence uniforme dans $\Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n \times \Sigma$.

Démonstration : D'après la remarque 1.2, on a les inégalités suivantes :

$$(4.3) \quad \operatorname{Re} \int_{t'}^t b_{2m}(x, s, \xi) ds \geq C(t - t')^{k+1} |\xi|^{2m} \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n \times \Sigma$$

$$(4.4) \quad \left[\begin{array}{l} \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n; \quad |\alpha|_{\theta} + |\beta|_{\tau} \leq 1 \\ |D_x^{\beta} D_{\xi}^{\alpha} b_{2m}(x, t, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} |\operatorname{Re} b_{2m}|^{1-|\alpha|_{\theta}-|\beta|_{\tau}} |\xi|^{2m(|\alpha|_{\theta}+|\beta|_{\tau})-|\alpha|} \\ \text{dans } \Omega \times I \times \mathbb{R}_{\xi}^n. \end{array} \right.$$

Lorsque $T_0 = 0$, k est impair et $\operatorname{Re} b_{2m}(x, t, \xi)$ est positif pour t positif. La solution $K_0(x, \xi, t, t')$ du système (3.4) s'écrit explicitement :

$$(4.5) \quad K_0(x, \xi, t, t') = \begin{cases} \exp(-\int_{t'}^t b_{2m}(x, s, \xi) ds) & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n \times \bar{\Sigma} \\ 0 & \text{pour } (x, \xi) \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n, \quad -1 < t < t' < 1, \quad t' \geq 0 \end{cases}$$

De (4.3) et (4.5), on déduit aisément que : $K_0(x, \xi, t, t') \in \mathcal{E}(\Sigma, S^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n))$. Nous allons maintenant démontrer en plusieurs étapes que :

$$(4.6) \quad K_0 \in \bigcap_{p \geq 0} \mathcal{E}^p(\bar{\Sigma}, S_{\rho, \delta}^{\varepsilon+2mp}(\Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n)) \quad .$$

i) Nous avons trivialement :

$$(4.7) \quad |K_0(x, \xi, t, t')| \leq 1 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n \times \bar{\Sigma} \quad .$$

$$(4.8) \quad |(K_0(x, \xi, t, t') - 1)(1 + |\xi|)^{-\varepsilon}| \rightarrow 0$$

lorsque t tend vers t' , ε assure en effet l'uniformité en ξ .

ii) Etudions maintenant $D_x^{\beta} D_{\xi}^{\alpha} K_0(x, \xi, t, t')$. C'est une somme de termes de la forme :

$$\prod_{j \in \mathfrak{J}} \left(\int_{t'}^t D_x^{\beta_j} D_{\xi}^{\alpha_j} b_{2m}(x, s, \xi) ds \right) e^{-\int_{t'}^t b_{2m}(x, s, \xi) ds}$$

(où $\mathfrak{J}$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$)
qu'on peut écrire de la manière suivante :

$$\prod_{j \in \mathfrak{J}} \left(\left(\int_{t'}^t D_x^{\beta_j} D_\xi^{\alpha_j} b_{2m}(x, s, \xi) ds \right) e^{-\gamma_j \int_{t'}^t b_{2m}(x, s, \xi) ds} \right)$$

avec $\gamma_j > 0$; $\sum_{j \in \mathfrak{J}} \gamma_j = 1$; $|\alpha_j| + |\beta_j| > 0$

$$\sum_{j \in \mathfrak{J}} |\alpha_j| = |\alpha| ; \quad \sum_{j \in \mathfrak{J}} |\beta_j| = |\beta| .$$

Outre (4.3) et (4.4), on utilisera dans le cas où les hypothèses de (4.4) ne sont pas vérifiées, l'inégalité suivante qui est toujours vérifiée (quitte à restreindre $\Omega \times I$).

(4.9) Pour tout (α, β) dans $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$, il existe une constante C, telle que pour tout (x, t, ξ) dans $\Omega \times [0, 1[\times \mathbb{R}^n$, on ait :

$$\left| \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\beta \partial \xi^\alpha} b_{2m} \right| \leq C |\xi|^{2m-|\alpha|} .$$

Lorsque $|\alpha_j|_\theta + |\beta_j|_\tau \leq 1$, on déduit de (4.4) que :

$$(4.10) \quad \left| \int_{t'}^t D_\xi^{\alpha_j} D_x^{\beta_j} b_{2m}(x, s, \xi) ds \right| < C \left(\int_{t'}^t |\text{Re} b_{2m}| ds \right)^{1-|\alpha_j|_\theta - |\beta_j|_\tau} \times \\ \times (t - t')^{|\alpha_j|_\theta + |\beta_j|_\tau} |\xi|^{2m\theta|\alpha_j| + 2m\tau|\beta_j| - |\alpha_j|} .$$

Lorsque $|\alpha_j|_\theta + |\beta_j|_\tau \geq 1$, on déduit de (4.9) que :

$$(4.11) \quad \left| \int_{t'}^t D_\xi^{\alpha_j} D_x^{\beta_j} b_{2m}(x, s, \xi) ds \right| < C(t - t') |\xi|^{2m - |\alpha_j|} .$$

De (4.3) et (4.11) on déduit alors que :

$$(4.12) \quad \text{Si } |\alpha_j|_\theta + |\beta_j|_\tau \leq 1$$

$$\left| \int_{t'}^t D_\xi^{\alpha_j} D_x^{\beta_j} b_{2m}(x, s, \xi) ds \right| < \\ < C \left(\int_t^{t'} |\text{Re} b_{2m}| ds \right)^{1-|\alpha_j|_\theta \cdot \frac{k}{k+1} - |\beta_j|_\tau \cdot \frac{k}{k+1}} |\xi|^{2m\theta \cdot \frac{k}{k+1} |\alpha_j| + 2m\tau \cdot \frac{k}{k+1} |\beta_j| - |\alpha_j|} .$$

$$(4.13) \quad \text{Si } |\alpha_j|_\theta + |\beta_j|_\tau \geq 1$$

$$\left| \int_{t'}^t D_\xi^{\alpha_j} D_x^{\beta_j} b_{2m}(x, s, \xi) ds \right| < C \left(\int_t^{t'} |\text{Re} b_{2m}| ds \right)^{\frac{1}{k+1}} |\xi|^{2m \frac{k}{k+1} - |\alpha_j|} .$$

Grâce à (4.12) et (4.13), on montre facilement que pour tout j dans $\mathfrak{J}$, il existe une constante C , telle que, pour tout (x, ξ, t, t') dans $\Omega \times \mathbb{R}^n_\xi \times \bar{\Sigma}$, on ait pour $|\xi| > 1$:

$$(4.14) \quad \left| e^{-\gamma_j \int_{t'}^t b_{2m}(x, s, \xi) ds} \int_{t'}^t D_\xi^{\alpha_j} D_x^{\beta_j} b_{2m}(x, s, \xi) ds \right| \leq \\ \leq C |\xi| \left(\frac{2mk\theta}{k+1} - 1 \right) |\alpha_j| + \frac{2mk\tau}{k+1} |\beta_j|$$

Vu l'expression de $D_x^\beta D_\xi^\alpha K_0(x, \xi, t, t')$, on en déduit que, pour tout (α, β) dans $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$, il existe une constante $C_{\alpha, \beta}$ telle que l'on ait dans $\Omega \times \mathbb{R}^n \times \bar{\Sigma}$:

$$(4.15) \quad |D_x^\beta D_\xi^\alpha K_0(x, \xi, t, t')| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|) \left(\frac{2mk\theta}{k+1} - 1 \right) |\alpha| + \frac{2mk\tau}{k+1} |\beta|$$

On a donc $\rho = 1 - 2m \cdot \frac{k}{k+1} \theta$, $\delta = 2m \cdot \frac{k}{k+1} \tau$.

On déduit de (4.15) que pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout (α, β) dans $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$, $|\alpha| > 0$:

$$(4.16) \quad \left| D_x^\beta D_\xi^\alpha K_0(x, \xi, t, t') \cdot (1 + |\xi|)^{-\delta} |\beta| + \rho |\alpha| - \varepsilon \right| \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \searrow t'$$

iii) On veut étudier maintenant $D_t^{p_1} D_{t'}^{p_2} D_x^\beta D_\xi^\alpha K_0(x, \xi, t, t')$. t et t' jouant un rôle symétrique, nous nous contenterons d'étudier un terme de la forme :

$$D_t^p D_x^\beta D_\xi^\alpha K_0(x, \xi, t, t')$$

C'est une somme de termes de la forme :

$$\prod_{j \in \mathfrak{J}} D_t^{p_j} \left(\left(\int_{t'}^t D_\xi^{\alpha_j} D_x^{\beta_j} b_{2m}(x, s, \xi) ds \right) e^{-\int_{t'}^t \gamma_j b_{2m}(x, s, \xi) ds} \right)$$

avec les notations de ii) et la relation $\sum_{j \in \mathfrak{J}} p_j = p$.

On étudie dans la suite, un terme du produit, qu'on note :

$$D_t^p \left[\int_{t'}^t D_\xi^\alpha D_x^\beta b_{2m}(x, s, \xi) ds \cdot e^{-\gamma \int_{t'}^t b_{2m}(x, s, \xi) ds} \right]$$

et qui est une somme de termes de la forme

$$D_t^{p_1} \left[\int_{t'}^t D_\xi^\alpha D_x^\beta b_{2m}(x, s, \xi) ds \right] \cdot (D_t^{p_2} e^{-\gamma \int_{t'}^t b_{2m}(x, s, \xi) ds})$$

avec $p_1 + p_2 = p$.

Nous distinguerons deux cas

a) $p_1 = 0$

On a alors la majoration suivante pour $|\xi| > 1$

$$\left| \int_{t'}^t D_\xi^\alpha D_x^\beta b_{2m}(x, s, \xi) ds \cdot D_t^p e^{-\gamma \int_{t'}^t b_{2m}(x, s, \xi) ds} \right| \leq \\ \leq C \left(\int_{t'}^t |D_\xi^\alpha D_x^\beta b_{2m}(x, s, \xi)| ds \right) e^{-\gamma \int_{t'}^t \operatorname{Re} b_{2m} ds} |\xi|^{2mp}$$

Il résulte alors des calculs de ii) qu'il existe une constante C, telle que, pour tout (x, ξ, t, t') dans $\Omega \times \mathbb{R}^n \times \bar{\Sigma}$ vérifiant $|\xi| > 1$, on ait :

$$(4.17) \quad \left| \int_{t'}^t D_\xi^\alpha D_x^\beta b_{2m}(x, s, \xi) ds \cdot D_t^p e^{-\gamma \int_{t'}^t b_{2m}(x, s, \xi) ds} \right| \leq \\ \leq C |\xi|^{2mp-\rho} |\alpha| + \delta |\beta|$$

b) $p_1 > 0$

Alors pour $|\xi| > 1$, on majore grossièrement :

$$D_t^{p_1} \left(\int_{t'}^t D_\xi^\alpha D_x^\beta b_{2m}(x, s, \xi) ds \right) \leq C |\xi|^{2m-|\alpha|} \leq C |\xi|^{2mp_1-\rho} |\alpha| + \delta |\beta| \\ D_t^{p_2} (e^{-\gamma \int_{t'}^t b_{2m}(x, s, \xi) ds}) \leq C |\xi|^{2mp_2}$$

On a ainsi montré que dans tous les cas on avait l'inégalité :

$$(4.18) \quad D_t^p \left[\int_{t'}^t D_\xi^\alpha D_x^\beta b_{2m}(x, s, \xi) ds \cdot e^{-\gamma \int_{t'}^t b_{2m}(x, s, \xi) ds} \right] \leq \\ \leq |\xi|^{2mp-\rho} |\alpha| + \delta |\beta|, \quad \text{pour } |\xi| > 1.$$

Les inégalités passent au produit et on en déduit qu'il existe une

constante C, telle que, pour tout (x, ξ, t, t') dans $\Omega \times \mathbb{R}_\xi^n \times \bar{\Sigma}$, on ait :

$$(4.19) \quad |D_t^{p_1} D_{t'}^{p_2} D_x^\beta D_\xi^\alpha K_o(x, \xi, t, t')| \leq C(1 + |\xi|)^{2m(p_1+p_2)-\rho} |\alpha| + \delta |\beta|$$

On démontre alors facilement (4.2).

Ceci termine la démonstration de la proposition 4.1.

Remarque 4.2 : La démonstration de la proposition précédente montre qu'on a l'estimation plus précise suivante qui sera utile ultérieurement. Pour tout réel positif c, ($c < 1$), pour tout $(\alpha, \beta, p_1, p_2)$ dans $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, il existe une constante $C_{\alpha, \beta, p_1, p_2}$ telle que l'on ait dans $\Omega \times \mathbb{R}_\xi^n \times \bar{\Sigma}$

$$(4.20) \quad |D_t^{p_1} D_{t'}^{p_2} D_x^\beta D_\xi^\alpha K_o(x, \xi, t, t')| \leq C_{\alpha, \beta, p_1, p_2} (1 + |\xi|)^{-\rho |\alpha| + \delta |\beta| + 2m(p_1+p_2)} |K_o(x, \xi, t, t')|^c$$

Remarque 4.3 : L'hypothèse que $a_{2m}(x, t, \xi)$ est un polynôme ne sert que pour montrer (4.2).

Proposition 4.4 : L'intégrale oscillante (cf. [3])

$$(4.21) \quad K_o(x, y, t, t') = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} K_o(x, \xi, t, t') d\xi$$

définit une fonction C^∞ dans W.

Démonstration :

- i) Par définition $K_o(x, y, t, t') = 0$ pour $t < t'$; $t' \geq 0$.
- ii) Si (t, t') appartient à Σ , on montre aisément la majoration :

$$(4.22) \quad |D_t^{p_1} D_{t'}^{p_2} D_x^\beta D_y^\alpha (e^{i\langle x-y, \xi \rangle} K_o(x, \xi, t, t'))| \leq C_{\alpha, \beta, p} (1 + |\xi|)^{|\alpha| + 2m(|\beta| + p_1 + p_2)} \exp(-c|\xi|^{2m(t-t')^{k+1}})$$

et de (4.22), on déduit facilement que $K_o(x, y, t, t')$ est indéfiniment différentiable dans l'ensemble : $\{(x, y, t, t') \in U, t \neq t'\}$.

- iii) Par ailleurs, si $x \neq y$ (on suppose par exemple $x_1 \neq y_1$) et (t', t)

appartient à $\overline{\Sigma}$, nous avons pour tout j dans $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} (x_1 - y_1)^j K_0(x, y, t, t') &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}_\xi^n} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right)^j e^{i\langle x-y, \xi \rangle} K_0(x, \xi, t, t') d\xi \\ &= \frac{(-1)^j}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}_\xi^n} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right)^j K_0(x, \xi, t, t') d\xi . \end{aligned}$$

Ces égalités sont à considérer comme des égalités d'intégrales oscillantes. Grâce à la proposition 4.1 et à l'estimation (4.2), on vérifie aisément que pour tout $(p_1, p_2, \beta, \alpha, j)$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$ vérifiant l'inégalité :

$$2m(p_1 + p_2) + |\beta| + |\alpha| < \rho \cdot j - 1 .$$

La quantité :

$$(4.23) \quad \left| D_t^{p_1} D_{t'}^{p_2} D_x^\beta D_y^\alpha (x-y)^j K_0(x, y, t, t') \right|$$

tend uniformément vers zéro dans $\{U \setminus \{x=y\}\}$ lorsque t tend vers t' .

$K_0(x, y, t, t')$ est donc, puisque j est arbitraire, indéfiniment différentiable dans l'ensemble $\{(x, y, t, t') \in U, x \neq y\}$.

La proposition est ainsi démontrée.

Proposition 4.5 : Pour toute fonction φ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}_y^n \times]0, 1[)$, la distribution

$$\langle K_0(x, y, t, t'), \varphi(y, t') \rangle_{y, t'} \text{ est dans } C^\infty(\Omega \times]-1, +1[) .$$

La démonstration est immédiate en utilisant le fait que pour tout N , il existe une constante C_N telle que, pour tout (ξ, t') dans $\mathbb{R}^n \times]0, 1[$, on ait :

$$|\hat{\varphi}(\xi, t')| \leq C_N (1 + |\xi|)^{-N} .$$

Proposition 4.6 : Pour toute fonction ψ dans $C_0^\infty(\Omega \times]-1, +1[)$ la distribution

$$\langle K_0(x, y, t, t'), \psi(x, t) \rangle_{x, t} \text{ est dans } C^\infty(\Omega \times [0, 1[) .$$

Démonstration : Posons $F(\xi, t, t') = \int_{\Omega} e^{i\langle x, \xi \rangle} K_0(x, \xi, t, t') \psi(x, t) dx$.

Nous utiliserons le lemme suivant [3].

Lemme : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a(x, \xi)$ un élément de $S_{\rho, \delta}^m(\Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n)$ et $v(x)$ une fonction de $C_0^{\infty}(\Omega)$, alors pour tout entier N , il existe une constante C_N , telle que l'on ait pour ξ dans $\mathbb{R}^n$:

$$(4.24) \quad \left| \int_{\Omega} e^{i\langle x, \xi \rangle} a(x, \xi) v(x) dx \right| \leq C_N (1 + |\xi|)^{m + \delta N - N}.$$

De ce lemme et de la proposition 4.1, on déduit que $F(\xi, t, t')$ appartient à $\mathcal{E}(\overline{\Sigma}, S^{-\infty}(\mathbb{R}_{\xi}^n))$. On remarque alors que :

$$\int_{\Omega \times I} K_0(x, y, t, t') \psi(x, t) dx dt = \int_{t'}^1 \int_{\mathbb{R}_{\xi}^n} e^{-i\langle y, \xi \rangle} F(\xi, t, t') d\xi dt.$$

Il est clair, sur cette expression, que $\langle K_0, \psi \rangle$ est dans $C^{\infty}(\Omega \times [0, 1[)$.

On a ainsi démontré que $K_0(x, y, t, t')$ vérifiait (2.3), (2.4), (2.5).

Remarque 4.7 : Dans cette partie, nous n'avons utilisé de l'hypothèse [H3] que les inégalités $\frac{2mk\tau}{k+1} < 1$ et $\frac{2mk\theta}{k+1} < 1$ qui correspondent aux conditions habituelles dans les classes $S_{\rho, \delta}^m$: $\delta < 1$ et $\rho > 0$.

§ 5. ETUDE DE $K_j(x, y, t, t')$ POUR $j > 0$

On démontre dans ce paragraphe que $K_j(x, y, t, t')$ défini par récurrence par (3.6) et (3.2) vérifie les propriétés (2.3), (2.4), (2.5).

Rappelons que, pour j dans $\mathbb{N}$, on définit $K_j(x, \xi, t, t')$ par :

$$(5.1) \quad K_{j+1}(x, \xi, t, t') = \begin{cases} -\int_{t'}^t K_0(x, \xi, t, s) \cdot L_2 K_j(x, \xi, s, t') ds & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n \times \overline{\Sigma} \\ 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n \times \{I \times [0, 1[\setminus \overline{\Sigma}\} \end{cases}$$

Proposition 5.1 : Il existe η ($\eta > 0$), tel que pour tout ε strictement positif, on ait, pour tout j dans $\mathbb{N}$:

$$(5.2) \quad K_j(x, \xi, t, t') \in \mathcal{E}(\Sigma, S^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n)) \cap \bigcap_{p \geq 0} \mathcal{E}^p(\overline{\Sigma}, S_{\rho, \delta}^{\varepsilon + 2mp - \eta \cdot j}(\Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n))$$

(5.3) Pour tout $(\alpha, \beta, p_1, p_2)$ dans $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $2m(p_1 + p_2) < |\alpha| + 2mj$, la quantité :

$$|D_t^{p_1} D_{t'}^{p_2} D_x^\beta D_\xi^\alpha K_j(x, \xi, t, t')| \cdot (1 + |\xi|)^{-\delta|\beta| - 2m(p_1 + p_2) + \rho|\alpha| + \eta \cdot j - \varepsilon}$$

tend uniformément vers zéro dans $\Omega \times \mathbb{R}_\xi^n \times \overline{\Sigma}$ lorsque t tend vers t' .

Remarquons que pour $j = 0$, la proposition a été démontrée au § 4. Nous procéderons en plusieurs étapes.

i) Par récurrence sur j , on démontre facilement que, pour tout $(\alpha, \beta, p_1, p_2)$ dans $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, il existe une constante $C_{\alpha, \beta, p_1, p_2, j}$, telle que l'on ait dans $\Omega \times \mathbb{R}_\xi^n \times \Sigma$:

$$(5.4) \quad |D_t^{p_1} D_{t'}^{p_2} D_x^\beta D_\xi^\alpha K_j(x, \xi, t, t')| \leq C_{p_1, p_2, \alpha, \beta, j} (1 + |\xi|)^{2m(p_1 + p_2 + |\beta| + |\alpha| + j)} \exp(-c(t - t')^{k+1} |\xi|^{2m}).$$

Ceci démontre le premier point de (5.2).

ii) Montrons que $K_j(x, \xi, t, t')$ appartient à $\mathcal{E}^0(\overline{\Sigma}, S_{\rho, \delta}^{\varepsilon - \eta \cdot j}(\Omega \times \mathbb{R}_\xi^n))$. On raisonne par récurrence sur j et on suppose donc que :

$$(5.5) \quad \exists \eta > 0; \quad |D_x^\beta D_\xi^\alpha K_j(x, \xi, t, t')| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{\varepsilon - \eta \cdot j + \delta|\beta| - \rho|\alpha|}$$

dans $\Omega \times \mathbb{R}^n \times \overline{\Sigma}$.

Nous aurons à utiliser le lemme suivant :

Lemme 5.2 : Sous l'hypothèse [H1], on a la majoration suivante : pour tout réel c , $0 < c \leq 1$ et tout réel k , $0 \leq k < 1$, il existe une constante C_k telle que l'on ait dans $\Omega \times \mathbb{R}_\xi^n \times \overline{\Sigma}$:

$$(5.6) \quad \left| \int_{t'}^t \exp(-c \int_s^t \operatorname{Re} b_{2m}(x, s', \xi) ds') ds \right| \leq C_k (1 + |\xi|)^{-\frac{2m}{k+1} \cdot k}.$$

Donnons tout d'abord une majoration de $|K_{j+1}|$. Dans l'expression de K_{j+1} (cf. (5.1) et (3.5)) n'interviennent que des termes du type suivant :

$$A_{\beta, \ell} = \int_{t'}^t \exp\left(-\int_s^t b_{2m}(x, s', \xi) ds'\right) \cdot \frac{\partial^\beta}{\partial \xi^\beta} b_{2m-\ell}(x, s, \xi) \cdot D_x^\beta K_j(x, \xi, s, t') ds$$

avec la relation $0 < |\beta| + \ell \leq 2m$.

Utilisant (5.5) et [H2], on a, si $((|\beta| + \ell)\theta + \ell\tau) < 1$, l'inégalité suivante dans $\Omega \times \mathbb{R}_\xi^n \times \bar{\Sigma}$:

$$|A_{\beta, \ell}| < C(1 + |\xi|)^{\varepsilon - \eta \cdot j + \delta |\beta| - \ell - |\beta| + 2m\theta(|\beta| + \ell) + 2m\ell\tau} \times \left(\int_{t'}^t \exp\left(-\int_s^t \text{Re} b_{2m}(x, s', \xi) ds'\right) \cdot |\text{Re} b_{2m}|^{1 - (|\beta| + \ell)\theta - \ell\tau} ds\right).$$

Grâce à l'inégalité de Hölder, on déduit que, dans $\Omega \times \mathbb{R}_\xi^n \times \bar{\Sigma}$, on a :

$$|A_{\beta, \ell}| < C(1 + |\xi|)^{\varepsilon - \eta \cdot j + \delta |\beta| - \ell - |\beta| + 2m\theta(|\beta| + \ell) + 2m\ell\tau} \times \left(\int_{t'}^t \exp\left(-c \int_s^t \text{Re} b_{2m} ds\right) ds\right)^{(|\beta| + \ell)\theta + \ell\tau}$$

où c est une constante réelle ($0 < c \leq 1$) dépendant de (β, ℓ) .

Utilisant le lemme 5.2, on en déduit que, dans $\Omega \times \mathbb{R}_\xi^n \times \bar{\Sigma}$, on a :

$$(5.7) \quad |A_{\beta, \ell}| < C_k (1 + |\xi|)^{\varepsilon - \eta \cdot j + \delta |\beta| - \ell - |\beta| + 2m\theta(|\beta| + \ell) + 2m\ell\tau} \times \left(1 + |\xi|\right)^{-\frac{2m|\beta|k\theta}{k+1} - \frac{2m\ell\tau \cdot k}{k+1} - \frac{2m\ell\theta k}{k+1}}$$

Pour que la récurrence marche, il faut montrer qu'on peut trouver η indépendant de j , strictement positif tel que :

$$\frac{2mk}{k+1} \tau |\beta| - \ell - |\beta| + 2m\theta(|\beta| + \ell) + 2m\ell\tau - \frac{2m|\beta|k\theta}{k+1} - \frac{2m\ell\theta}{k+1} \cdot k - \frac{2m\ell\tau}{k+1} \cdot k \leq -\eta.$$

Du fait que k peut être choisi arbitrairement proche de 1, il suffit de vérifier l'inégalité stricte pour $k = 1$.

Cette inégalité s'écrit :

$$\left(\frac{2mk}{k+1}(\tau + \theta) - 1\right)[|\beta| + \ell] < -\eta$$

ce qui est possible, grâce à [H3]. On prend en effet η vérifiant :

$$(5.8) \quad 0 < \eta < 1 - \frac{2mk}{k+1}(\tau + \theta).$$

Lorsque $((|\beta| + \ell)\theta + \ell\tau) \geq 1$, on montre des majorations analogues en utilisant l'analogie de (4.9) pour $b_{2m-\ell}$.

On a ainsi montré que sous les hypothèses (5.5) et (5.8), on avait dans $\Omega \times \mathbb{R}_\xi^n \times \bar{\Sigma}$ la majoration suivante :

$$|K_j(x, \xi, t, t')| \leq C(1 + |\xi|)^{\varepsilon - \eta(j+1)}.$$

Etudions maintenant $D_x^\gamma D_\xi^\alpha K_{j+1}$; on voit aisément, en utilisant la remarque (4.2), que la majoration de ce terme se ramène à celle de termes du type suivant :

$$\begin{aligned} & A_{\gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \ell} = \\ & = \int_t^{t'} \exp(-c \int_s^t \operatorname{Re} b_{2m}(x, s', \xi) ds') \left| \frac{\partial^{\gamma_1}}{\partial x^{\gamma_1}} \frac{\partial^{\beta + \alpha_1}}{\partial \xi^{\beta + \alpha_1}} b_{2m-\ell} \right| \left| \frac{\partial^{\beta + \gamma_2 + \alpha_2}}{\partial x^{\beta + \gamma_2} \partial \xi^{\alpha_2}} K_j \right| ds \end{aligned}$$

avec $|\beta| + \ell > 0$, $|\gamma_1| + |\gamma_2| = |\gamma|$; $|\alpha_1| + |\alpha_2| = |\alpha|$ et c arbitrairement proche de 1 ($c < 1$).

Deux cas sont à distinguer selon que $(|\beta| + |\alpha_1| + \ell)\theta + (|\gamma_1| + \ell)\tau$ est plus petit ou plus grand que 1. On suppose dans la suite que :

$(|\beta| + |\alpha_1| + \ell)\theta + (|\gamma_1| + \ell)\tau < 1$; l'autre cas est plus facile à traiter.

Par un calcul analogue à celui fait pour la majoration de $|K_{j+1}|$, on obtient la majoration suivante dans $\Omega \times \mathbb{R}_\xi^n \times \bar{\Sigma}$:

$$(5.9) \quad \left[\begin{aligned} & |A_{\gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \ell}| \leq C(1 + |\xi|)^{\lambda + \varepsilon + \delta |\gamma| - \rho |\alpha| - j \cdot \eta} \\ & \text{avec } \lambda = (\ell + |\beta|) \left(\frac{2mk}{k+1} (\tau + \theta) - 1 \right) + (1-k) \left(\frac{2m\theta}{k+1} (|\beta| + |\alpha_1| + \ell) + \frac{2m\tau}{k+1} (\ell + |\gamma_1|) \right). \end{aligned} \right]$$

Grâce à (5.8), on peut trouver k de sorte que $\lambda \leq -\eta$.

On a ainsi montré (5.2) dans le cas $p = 0$, et la propriété (5.3) se montre alors facilement.

iii) On va montrer maintenant que $K_j(x, \xi, t, t')$ appartient à $\mathcal{E}^p(\bar{\Sigma}, S_{\rho, \delta}^{\varepsilon - \eta(j+2mp)}(\Omega \times \mathbb{R}_\xi^n))$. On raisonne par récurrence sur j , et on suppose donc qu'il existe $\eta > 0$ tel que l'on ait :

$$\begin{aligned} (5.10) \quad & |D_t^{p_1} D_{t'}^{p_2} D_x^\beta D_\xi^\alpha K_j(x, \xi, t, t')| \leq \\ & \leq C_{\alpha, \beta, p_1, p_2} (1 + |\xi|)^\delta |\beta| - \rho |\alpha| - \eta \cdot j + 2m(p_1 + p_2) + \varepsilon \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^n \times \bar{\Sigma}. \end{aligned}$$

Nous utiliserons le lemme suivant [7] :

Lemme 5.3 : Soit $f(t, t', s)$ une fonction indéfiniment différentiable dans l'ensemble : $\{(t, t', s) ; 0 \leq t' \leq s \leq t < 1\}$.

Alors nous avons dans $\bar{\Sigma}$

$$(5.11) \quad D_t^q, D_t^p \left(\int_{t'}^t f(t, t', s) ds \right) = \int_{t'}^t D_t^q, D_t^p f(t, t', s) ds \\ + D_t^q, \left(\sum_{j=1}^p \frac{p(p-1)\dots(p-j+1)}{j!} D_t^{p-j} D_s^{j-1} f(t, t', s) \right)_{s=t} \\ - \sum_{k=1}^q \frac{q(q-1)\dots(q-k+1)}{k!} D_t^{q-k} D_s^{k-1} (D_t^p f(t, t', s))_{s=t} .$$

On va étudier $D_t^p D_x^\beta D_\xi^\alpha K_{j+1}(x, \xi, t, t')$ (le cas général se ferait de manière analogue). On applique le lemme 5.3 avec :

$$f(t, t', s) = D_x^\beta D_\xi^\alpha (K_0(x, \xi, t, s) \cdot L_2 K_j(x, \xi, s, t')) .$$

D'après (5.11), on a deux termes à étudier

$$a) \int_{t'}^t D_t^p f(t, t', s) ds$$

Ce premier terme se décompose en une somme de termes du type suivant :

$$A = \int_{t'}^t (D_t^{p_1} D_x^{\beta_1} D_\xi^{\alpha_1} K_0(x, \xi, t, s)) D_x^{\beta_2} D_\xi^{\alpha_2} D_\xi^\gamma b_{2m-\ell} \cdot D_t^{p_2} D_x^{\gamma+\beta_3} D_\xi^{\alpha_3} K_j(x, \xi, s, t') ds$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} |\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3| = |\beta| \\ |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| = |\alpha| \\ |\gamma| + \ell > 0 \\ p_1 + p_2 = p . \end{cases}$$

Utilisant la remarque 4.2, on obtient la majoration :

$$|A| \leq (1 + |\xi|)^{2mp_1 - \rho |\alpha_1| + \delta |\beta_1|} \int_{t'}^t \left(|K_0(x, \xi, t, s)|^c |D_x^{\beta_2} D_\xi^{\alpha_2 + \gamma} b_{2m-\ell}| \times \right. \\ \left. \times |D_t^{p_2} D_x^{\gamma+\beta_3} D_\xi^{\alpha_3} K_j| \right) ds \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_\xi^n \times \bar{\Sigma} .$$

Grâce aux hypothèses (5.8) et (5.10) on obtient, en procédant comme pour ii) la majoration souhaitée.

b) Le second terme qui intervient est

$$\sum_{k=1}^p \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!} D_t^{p-k} D_s^{k-1} f(t, t', s) \Big|_{s=t} . \text{ On est conduit à majorer}$$

pour (t, t', s) vérifiant $0 < t' \leq s \leq t < 1$ les expressions suivantes :

$$B = D_s^{q_1} D_t^{p_1} D_x^{\beta_1} D_\xi^{\alpha_1} K_0(x, \xi, t, s) \cdot D_s^{q_2} D_x^{\beta_2} D_\xi^{\alpha_2} (D_\xi^\gamma b_{2m-\ell}) \cdot D_s^{q_3} D_x^\gamma D_t^{p_2} D_x^{\beta_3} D_\xi^{\alpha_3} K_j(x, \xi, s, t')$$

avec $q_1 + q_2 + q_3 = k - 1$

$$p_1 + p_2 = p - k$$

$$|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3| = |\beta|$$

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| = |\alpha|$$

$$|\gamma| + \ell > 0$$

$$1 \leq k \leq p .$$

Utilisant les hypothèses de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} |B| &\leq C(1+|\xi|)^{2m(p_1+q_1)+\delta|\beta_1|-\rho|\alpha_1|+2m-\ell-|\gamma|} \times \\ &\times (1+|\xi|)^{+2m(p_2+q_3)+\delta(|\beta_3|+\gamma)-\rho|\alpha_3|+\varepsilon-\eta.j} \\ |B| &\leq C(1+|\xi|)^{2m(p)+\delta|\beta|-\rho|\alpha|-\ell-|\gamma|+\delta|\gamma|+\varepsilon-\eta.j} . \end{aligned}$$

Cette majoration est en particulier vraie pour $s = t$ (C est indépendante de (t, t', s)). La récurrence marche si :

$$-\ell - |\gamma| + \delta|\gamma| \leq -\eta .$$

Or d'après (5.8), on a

$$\eta < 1 - \frac{2mk}{k+1} (\tau + \theta) \leq 1 - \delta \leq \ell + (1-\delta)|\gamma|$$

lorsque $|\gamma| + \ell > 0$.

De a) et b) on déduit que (5.10) est vrai pour $k = j+1$. On a ainsi complè-

tement démontré (5.2). Le point (5.3) s'obtient sans difficulté en examinant la démonstration de (iii). La proposition 5.1 est ainsi démontrée.

Proposition 5.4 : $K_j(x, y, t, t')$ défini dans U par (3.6) et (3.2) vérifie les propriétés (2.3), (2.4), (2.5).

On renvoie aux démonstrations des propositions 4.4, 4.5, 4.6, compte-tenu de la proposition 5.1.

§ 6. ETUDE DE $F_j(x, y, t, t')$ DANS U

Nous terminons la démonstration du théorème 1 en montrant que $F_j(x, y, t, t')$ défini dans U par (3.7) et (3.2) vérifie (2.6).

De la proposition (5.1) et de la définition de L_2 , on déduit :

Proposition 6.1 : Pour tout ε strictement positif et tout j entier, on a les propriétés suivantes :

(6.1) Pour tout (β, p_1, p_2) dans $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, il existe une constante C_{β, p_1, p_2} telle qu'on ait dans $\Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n \times \bar{\Sigma}$ l'inégalité suivante :

$$|D_t^{p_1} D_{t'}^{p_2} D_x^{\beta} F_j(x, \xi, t, t')| \leq C_{\beta, p_1, p_2} (1 + |\xi|)^{\varepsilon - \eta \cdot j + \delta |\beta| + 2m(p_1 + p_2 + 1)}.$$

(6.2) Pour tout (β, p_1, p_2) dans $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $0 \leq p_1 + p_2 < j$, la quantité

$$|D_t^{p_1} D_{t'}^{p_2} D_x^{\beta} F_j(x, \xi, t, t') \cdot (1 + |\xi|)^{-\delta |\beta| + \eta \cdot \varepsilon - 2m(p_1 + p_2 + 1)}|$$

converge uniformément vers zéro dans $\Omega \times \mathbb{R}_{\xi}^n \times \bar{\Sigma}$ lorsque t tend vers t' .

Rappelons que $F_j(x, y, t, t') = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}_{\xi}^n} e^{i \langle x-y, \xi \rangle} F_j(x, \xi, t, t') d\xi$. On

déduit de la proposition 6.1 que :

Proposition 6.2 : La suite $F_j(x, y, t, t')$ ($j \in \mathbb{N}$) vérifie (2.9). Plus précisément, pour tout j dans $\mathbb{N}$, pour tout $(\alpha, \beta, p_1, p_2)$ dans $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vérifiant $|\beta| + |\alpha| + 2m(p_1 + p_2 + 1) < \eta \cdot j - 1$, on a

$$(6.3) \quad D_t^{p_1} D_{t'}^{p_2} D_x^\beta D_y^\alpha F_j(x, y, t, t') \in C^0(U) \quad .$$

Démonstration : Evidente grâce à (6.1) et (6.2).

Remarque 6.3 : On pourrait mettre en évidence que l'hypothèse [H3] sous la forme $\delta < \rho$ n'est utilisée en fait que pour montrer que $F_j(x, y, t, t')$ vérifie (6.3). Cette condition intervenait pour les classes $\tilde{S}_{\rho, \delta}^m$ dans des circonstances analogues dans [1].

*
*
*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. Hörmander, Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations, Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math., 10 (1966), Singular Operators, 138-183.
- [2] L. Hörmander, Hypoelliptic second order differential equations, Acta Mathematica 119 (1967), 147-171.
- [3] L. Hörmander, Fourier Integral Operators, Acta Mathematica 127 (1971).
- [4] Y. Kannai, An unsolvable hypoelliptic operator, Israele J. of Math. 9, (1971), 306-165.
- [5] Y. Kato, The hypoellipticity of degenerate parabolic differential operators, J. of Functional Analysis 7 (1971), 116-131.
- [6] Y. Kato, Remarks on hypoellipticity of degenerate parabolic differential operators, Proc. of Japan Accademy, vol. 47 No 85 (1971).
- [7] T. Matsuzawa, On some degenerate parabolic equations (à paraître dans Nagoya Math. Journal).
- [8] L. Schwartz, Théorie des Distributions, Hermann (1966), 138-139.
- [9] F. Trèves, A new method of proof of the subelliptic estimates, Comm. on pure and applied Math., vol. XXIV (1971), 71-115.
- [10] F. Trèves, Concatenations of second order evolution equations applied to local solvability and hypoellipticity, Comm. on pure and applied Math., vol. XXVI No 2 (1973).
- [11] C. Zuily, Sur l'hypoellipticité des opérateurs d'ordre 2 à coefficients réels, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, t. 277, p. 529.

NON HYPOELLIPTICITE D'UNE CLASSE D'OPERATEURS DIFFERENTIELS

B. HELFFER

et

C. ZUILY

§ 0. INTRODUCTION

Récemment, M. S. Baouendi et C. Goulaouic ont introduit une classe d'opérateurs différentiels définis dans $]-T, T[\times \Omega$ ($T > 0$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$) qu'ils ont étudiée du point de vue du problème de Cauchy (voir [1] et [2]). Ils ont démontré en particulier que si l'on part d'une distribution u régulière (au sens de [2]) telle que Pu soit dans $C^\infty(]-T, T[, \mathcal{D}'(\Omega))$, (où P désigne un opérateur de la classe), alors u est dans $C^\infty(]-T, T[, \mathcal{D}'(\Omega))$; (voir [2]).

Nous nous intéressons ici à la régularité C^∞ en (x, t) , et montrons que les opérateurs de cette classe, pour lesquels la surface $t = 0$ est caractéristique, ne sont jamais hypoelliptiques.

Ce résultat généralise un fait déjà connu pour les équations différentielles ordinaires (voir [5]).

Nous tenons à remercier les professeurs M. S. Baouendi et R. Beals qui nous ont signalé que le lemme 2.1, énoncé dans une première version de ce travail, n'était pas démontré dans [5] dans le cas général où nous l'utilisons.

§ 1. PRELIMINAIRES.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et T un nombre réel positif. On pose $\mathcal{O} =]-T, T[\times \Omega$ et on considère l'opérateur différentiel

$$(1.1) \quad \rho(t, x; D_t, D_x) = t^k D_t^m + a_{m-1}(x) t^{k-1} D_t^{m-1} + \dots + a_{m-k}(x) D_t^{m-k} + \\ + \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{|\beta| \leq m-p} t^{\alpha(p, \beta)} D_t^p a_{p, \beta}(t, x) D_x^\beta,$$

où k et m sont des entiers tels que $m \geq k > 0$, $\alpha(p, \beta) = \max(0, k + p - m + 1)$, $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$ et où les coefficients $a_i(x)$, $a_{p, \beta}(t, x)$ sont respectivement dans $C^\infty(\Omega)$ et $C^\infty(\mathcal{O})$.

Cette classe d'opérateurs a été introduite et étudiée du point de vue du problème de Cauchy dans [1].

Précisons quelques notations. On posera

$$(1.2) \quad \rho_o(t, x; D_t, D_x) = t^k D_t^m + a_{m-1}(x) t^{k-1} D_t^{m-1} + \dots + a_{m-k}(x) D_t^{m-k}.$$

L'équation déterminante associée à l'opérateur ρ sera par définition :

$$(1.3) \quad f(\lambda) = \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-m+1) + a_{m-1}(x) \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-m+2) + \dots \\ + a_{m-k}(x) \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-m+k+1).$$

Les racines de ce polynôme seront notées :

$$(1.4) \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k; \lambda_{k+1} = 0, \lambda_{k+2} = 1, \dots, \lambda_m = m - k - 1.$$

Le but de ce travail est de démontrer le :

Théorème 1.1 : L'opérateur ρ défini en (1.1) n'est pas hypoelliptique dans $\mathcal{O}$.

Remarques 1.2 :

a) Le théorème 1.1 est déjà connu dans les deux cas suivants :

$$1. \quad \mathcal{O} =]-T, T[, \quad \rho = t^k D_t^m + \sum_{i=0}^k b_{m-i}(t) t^{k-i} D_t^{m-i} \quad \text{cf. [5].}$$

$$2. \quad m = 2, k = 1, a_1(0) = 0 \quad \text{cf. [6].}$$

b) M. S. Baouendi et C. Goulaouic ont montré dans [2] qu'il existe un espace de distributions E relié à l'opérateur ρ et proche des distributions usuelles tel que si $u \in E$ et $\rho u \in C^\infty(I, \mathcal{D}'(\Omega))$ alors $u \in C^\infty(I, \mathcal{D}'(\Omega))$ où $I =]-T, T[$.

§ 2. DEMONSTRATION DU THEOREME 1.1.

Pour démontrer la non-hypoellipticité de l'opérateur ρ nous utiliserons le lemme classique suivant (cf. [4], [5]).

LEMME 2.1: Soit P un opérateur différentiel à coefficients C^∞ dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Supposons qu'il existe une suite de distributions (u_n) dans $\mathcal{O}$ et $\sigma_1 \subset\subset \mathcal{O}$:

$$(1) \quad \exists i \in \mathbb{N} : u_n \notin C^i(\sigma_1) \quad \forall n$$

$$(2) \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \exists n_0(j) : \forall n \geq n_0(j) \quad \rho u_n \in C^j(\mathcal{O})$$

$$(3) \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \exists n_1(j) : \forall n \geq n_1(j) \quad u_{n+1} - u_n \in C^j(0).$$

Alors P n'est pas hypoelliptique dans $\mathcal{O}$.

Démonstration : On peut supposer les suites $\{n_0(j)\}$ et $\{n_1(j)\}$ croissantes.

Pour $j > i$ et pour les indices n tels que $n_1(j) \leq n < n_1(j+1)$ on a $u_{n+1} - u_n \in C^j(\sigma_1)$. Il existe donc $f_n \in C^\infty(\mathcal{O})$ telle que

$$(*) \quad \sup_{\substack{|\alpha| \leq j \\ x \in \sigma_1}} |D^\alpha (u_{n+1} - u_n - f_n)| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Lorsque $n < n_1(i+1)$ on posera $f_n = 0$.

D'après (*), la série $\sum_{n=n_1(i+1)}^{\infty} (u_{n+1} - u_n - f_n)$ converge dans $C^{i+1}(\sigma_1)$.

D'autre part $u_0 + \sum_{n=0}^{n_1(i+1)-1} (u_{n+1} - u_n) = u_{n_1(i+1)-1} \notin C^i(\sigma_1)$.

On en déduit que la distribution

$$u = u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - u_n - f_n)$$

n'appartient pas à $C^i(\sigma_1)$.

Nous allons montrer que $Pu \in C^N(\sigma_1)$ pour tout N . Soit m l'ordre de P . $\ell \in \mathbb{N}$ tel que : $\ell \geq n_0(N)$, $\ell \geq n_1(N+m)$. On a

$$Pu = P\{u_0 + \sum_{n=0}^{\ell-1} (u_{n+1} - u_n - f_n)\} + P\{\sum_{n=\ell}^{\infty} (u_{n+1} - u_n - f_n)\} = PV_1 + PV_2.$$

On a $V_1 = u_{\ell} + f$ où $f \in C^{\infty}(\sigma_1)$ donc $PV_1 \in C^N(\sigma_1)$ car $\ell \geq n_0(N)$.

D'autre part d'après (*) et la condition (3), $\sum_{n=\ell}^{\infty} (u_{n+1} - u_n - f_n)$ converge dans $C^{N+m}(\sigma_1)$ et donc $PV_2 \in C^N(\sigma_1)$ d'où $Pu \in C^{\infty}(\sigma_1)$.

Nous allons maintenant réduire la démonstration du théorème 1.1 à celle des deux cas suivants :

Cas 1 : Il existe un point x_0 de Ω , un voisinage V_{x_0} de ce point et une racine $\lambda(x)$ de l'équation déterminante (1.3) tels que^o :

^o On rappelle qu'un opérateur Q est dit hypoelliptique dans un ouvert $\mathcal{O}$ si, pour tout ouvert ω de $\mathcal{O}$, $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$, $Qu \in C^{\infty}(\omega)$ impliquent $u \in C^{\infty}(\omega)$.

(2.1) $x \mapsto \lambda(x)$ est C^∞ dans V_{x_0} .

(2.2) $x \mapsto \lambda(x)$ ne prend pas de valeurs entières relatives dans V_{x_0} .

(2.3) Il existe $N_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $N_0 < \operatorname{Re} \lambda(x) \leq N_0 + 1$ dans V_{x_0} .

(2.4) $\operatorname{grad} \lambda(x) \neq 0 \quad \forall x \in V_{x_0}$ ou $\operatorname{grad} \lambda(x) \equiv 0 \quad \forall x \in V_{x_0}$.

(2.5) Pour tout n dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, $f(\lambda(x) + n) \neq 0 \quad \forall x \in V_{x_0}$.

Cas 2 : Il existe $x_0 \in \Omega$, V_{x_0} voisinage de x_0 tels que :

(2.6) l'équation déterminante $f(\lambda)$ ne dépend pas de x dans V_{x_0} .

(2.7) les racines de l'équation déterminante, $f(\lambda) = 0$, sont des entiers relatifs.

En effet, il se peut tout d'abord que l'équation déterminante ne dépende pas de x dans un ouvert V de Ω . Dans ce cas les racines λ_i ($i = 1, \dots, m$) sont des nombres complexes. Si tous les λ_i sont des entiers relatifs, nous sommes dans le cas 2. Dans le cas contraire, soit λ_{i_0} la plus grande des racines non entières ; nous sommes dans le cas 1 avec $\lambda = \lambda_{i_0}$.

Si l'équation déterminante dépend effectivement de x dans Ω alors :

a) il existe un point x_1 de Ω , un voisinage V_{x_1} de ce point, un indice i_1 ($1 \leq i_1 \leq k$) tels que dans V_{x_1} on ait, pour $i = 1, 2, \dots, k$:

$$(2.8) \quad \begin{cases} \text{ou bien} & \operatorname{Re} \lambda_i(x) < \operatorname{Re} \lambda_{i_1}(x) \\ \text{ou bien} & \operatorname{Re} \lambda_i(x) \equiv \operatorname{Re} \lambda_{i_1}(x) \end{cases}.$$

b) Si λ_{i_1} n'est pas constant, il existe $x_2 \in V_{x_1}$ et V_{x_2} voisinage de x_2 dans V_{x_1} tels que $x \mapsto \lambda_{i_1}(x)$ soit C^∞ dans V_{x_2} (cf. [3]), $x \mapsto \lambda_{i_1}(x)$ n'ait pas de valeur entière et tels que (2.3) soit vraie. D'autre part $f(\lambda_{i_1}(x) + n) \neq 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in V_{x_2}$ d'après (2.8). Enfin il existe $x_0 \in V_{x_2}$, V_{x_0} voisinage de x_0 dans V_{x_2} , tels que $\operatorname{grad} \lambda_{i_1}(x) \neq 0$ pour $x \in V_{x_0}$. En effet, dans le cas contraire, pour tout y de V_{x_2} et tout

voisinage V_y de ce point, $x \mapsto \text{grad} \lambda_{i_1}(x)$ aurait un zéro dans V_y , donc $\text{grad} \lambda_{i_1}(x) \equiv 0$ dans V_{x_2} , ce qui impliquerait λ_{i_1} constant.

Ainsi dans V_{x_0} (2.1), ..., (2.5) sont vérifiés.

c) Si λ_{i_1} est constant, mais $\lambda_{i_1} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, il est facile de voir que nous sommes encore dans le cas 1.

d) Si $\lambda_{i_1} \in \mathbb{Z}$, il existe x_1, V_{x_1}, i_2 tels que

$$\begin{aligned} &\text{ou bien} && \text{Re } \lambda_{i_1} < \text{Re } \lambda_{i_2} && \forall x \in V_{x_1} \quad \forall i \neq i_1 \\ &\text{ou bien} && \text{Re } \lambda_{i_1} \equiv \text{Re } \lambda_{i_2} \end{aligned}$$

Si λ_{i_2} est non constant ou si λ_{i_2} est dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on raisonne comme en a) et b); on est dans le cas 1.

Si λ_{i_2} est dans $\mathbb{Z}$, on regarde λ_{i_3} etc...

e) Si $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_{k-1}}$ sont dans $\mathbb{Z}$, alors λ_{i_k} ne peut pas être constant, sinon $f(\lambda)$ ne dépendrait pas de x . On est donc dans le cas 1.

A. Démonstration du théorème 1.1 dans le cas 1.

Nous commençons par construire certaines distributions qui nous seront utiles dans ce paragraphe.

Soit $x \mapsto \lambda(x)$ une fonction définie dans un ouvert V de Ω satisfaisant aux conditions (2.1), (2.2) et (2.3). On pose, $Y(t)$ étant la fonction d'Heaviside :

$$(2.9) \quad \begin{cases} H(\lambda(x)) = Y(t) t^{\lambda(x)} & \text{lorsque } \text{Re } \lambda(x) > -1 \text{ pour } x \text{ dans } V. \\ H(\lambda(x)) = \frac{1}{1 + \lambda(x)} \frac{d}{dt} H(\lambda(x) + 1) & \text{lorsque } -h < \text{Re } \lambda(x) \leq -h + 1 \\ & h = 2, 3, \dots; x \in V \end{cases}$$

Il est facile de vérifier les propriétés suivantes :

$$(2.10) \quad \begin{cases} t H(\lambda(x)) = H(\lambda(x) + 1) \\ \frac{d}{dt} H(\lambda(x)) = \lambda(x) H(\lambda(x) - 1) \end{cases}$$

Supposons en outre que $\text{grad} \lambda(x) \neq 0$ dans V , donc, par exemple, que $\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \neq 0$ dans V . Pour $p \in \mathbb{N}$ on définit :

$$(2.11) \quad \begin{cases} H(\lambda(x), 0) = H(\lambda(x)) \\ H(\lambda(x), p) = \frac{1}{\partial \lambda / \partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} H(\lambda(x), p-1) \end{cases}$$

On vérifie de même les relations

$$-(2.12) \quad \begin{cases} t H(\lambda(x), p) = H(\lambda(x)+1, p) \\ \frac{d}{dt} H(\lambda(x), p) = \lambda(x) H(\lambda(x)-1, p) + p H(\lambda(x)-1, p-1) \\ \frac{\partial}{\partial x_i} H(\lambda(x), p) = \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} H(\lambda(x), p+1) \end{cases}$$

Remarquons que pour $\text{Re} \lambda(x) > -1$, on a $H(\lambda(x), p) = Y(t) (\text{Log } t)^p t^{\lambda(x)}$. Considérons maintenant un triplet $(x_0, V_{x_0}, \lambda(x))$ satisfaisant aux conditions énoncées dans le cas 1. On a la :

Proposition 2.2 :

a) Si $\text{grad} \lambda(x)$ est différent de zéro dans V_{x_0} ; pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe des fonctions $x \mapsto c_{\ell, p}^{(n)}(x)$ ($\ell = 1, \dots, n$, $p = 0, \dots, m \cdot n$) de classe C^∞ dans V_{x_0} , des fonctions $\alpha_i^n(x, t)$ ($i = 0, \dots, m(n+1)$) de classe C^∞ dans $V_{x_0} \times]-\varepsilon, +\varepsilon[$ telles que, si l'on pose :

$$(2.13) \quad \begin{cases} u_0(t, x) = H(\lambda(x)) \\ u_n(t, x) = H(\lambda(x)) + \sum_{\ell=1}^n \sum_{p=0}^{m \cdot n} c_{\ell, p}^{(n)}(x) H(\lambda(x) + \ell, p) \end{cases}$$

on a :

$$(2.14) \quad \partial^n u_n(t, x) = \sum_{i=0}^{m(n+1)} \alpha_i^n(t, x) H(\lambda(x) + n+1 - m+k, i)$$

b) Si $\text{grad} \lambda(x)$ est identiquement nul dans V_{x_0} , pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe des fonctions $c_\ell(x)$ ($\ell = 1, \dots, n$) de classe C^∞ dans V_{x_0} , une fonction $\alpha^n(x, t)$, C^∞ dans $V_{x_0} \times]-\varepsilon, +\varepsilon[$, telles que, si l'on pose :

$$(2.13)' \begin{cases} u_0(x, t) = H(\lambda) \\ u_n(x, t) = H(\lambda) + \sum_{\ell=1}^n c_\ell(x) H(\lambda + \ell) \end{cases}$$

on a

$$(2.14)' \quad \rho u_n = \alpha^n(x, t) H(\lambda + n + 1 - m + k) \quad .$$

On ne démontrera dans la suite que le cas a), le cas b) ayant une démonstration analogue.

Il est clair que la suite (u_n) donnée par la proposition 2.2 satisfait aux conditions du Lemme 2.1. Commençons par démontrer le :

Lemme 2.3 :

(i) Pour tout entier $n > 0$, on a :

$$(2.15) \quad \rho_0 H(\lambda(x) + n, p) = \sum_{\ell=0}^p c_\ell^p \left[\frac{\partial^\ell}{\partial \lambda^\ell} f(\lambda + n) \right] H(\lambda + n - m + k, p - \ell)$$

(ii) Pour tout entier $n \geq 0$ et tout entier $p \geq 0$, il existe des fonctions $b_{\ell, p, n}$, $\ell = 0, 1, \dots, p$, de classe C^∞ dans V_{x_0} , telles que, dans $]-\varepsilon, \varepsilon[\times V_{x_0}$ on ait :

$$(2.16) \quad \rho_0 \left(\sum_{\ell=0}^p b_{\ell, n, p}(x) H(\lambda(x) + n, \ell) \right) = H(\lambda + n - m + k, p) \quad .$$

Démonstration du lemme 2.3 :

(i) La formule (2.15) résulte facilement de la relation suivante

$$D_t^i H(\lambda(x) + n, p) = \sum_{\ell=0}^p c_\ell^p \frac{\partial^\ell}{\partial \lambda^\ell} \{ (\lambda + n) \dots (\lambda + n - i + 1) \} H(\lambda + n - i, p - \ell)$$

que l'on démontre par récurrence sur i en utilisant (2.12).

(ii) On raisonne par récurrence sur p . Pour $p = 0$, (2.16) résulte de (2.15) avec $p = 0$ et de (2.5). Supposons (ii) vraie à l'ordre p . D'après (2.15) on a :

$$\rho_0 H(\lambda(x) + n, p+1) = \sum_{\ell=1}^{p+1} a_{\ell, p, n}(x) H(\lambda + n - m + k, p+1 - \ell) + f(\lambda + n) H(\lambda + n - m + k, p+1) \quad .$$

Soit en posant $\ell - 1 = \ell'$

$$(2.18) \quad \rho_0 \left\{ \frac{1}{f(\lambda+n)} H(\lambda(x)+n, p+1) \right\} =$$

$$= H(\lambda+n-m+k, p+1) + \sum_{\ell'=0}^p a_{\ell', p, n}(x) H(\lambda+n-m+k, p-\ell') .$$

D'après l'hypothèse de récurrence, pour $\ell = 0, 1, \dots, p$, il existe des fonctions $C^\infty d_{\ell, n, p, i}(x)$ telles que :

$$\rho_0 \left(\sum_{i=0}^{p-\ell} d_{\ell, n, p, i}(x) H(\lambda(x)+n, i) \right) = H(\lambda+n-m+k, p-\ell) .$$

Il existe donc des fonctions $C^\infty e_{\ell, p, n}(x)$ telles que :

$$(2.19) \quad \rho_0 \left\{ \sum_{\ell=0}^p e_{\ell, n, p}(x) H(\lambda(x)+n, \ell) \right\} = \sum_{\ell=0}^p a_{\ell, p, n}(x) H(\lambda(x)+n-m+k, p-\ell) .$$

De (2.18) et (2.19) on tire

$$\rho_0 \left\{ \frac{1}{f(\lambda+n)} H(\lambda(x)+n, p+1) - \sum_{\ell=0}^p e_{\ell, n, p}(x) H(\lambda(x)+n, \ell) \right\} =$$

$$= H(\lambda(x)+n-m+k, p+1) .$$

C.Q.F.D.

Démonstration de la proposition 2.2 :

On va raisonner par récurrence sur n . Pour $n=0$, on a :

$$\rho H(\lambda(x)) = \rho_0 H(\lambda(x)) + (\rho - \rho_0) H(\lambda(x))$$

$$\rho_0 H(\lambda(x)) = f(\lambda(x)) H(\lambda(x)-m+k) = 0 \text{ car } \lambda \text{ est racine de } f(\lambda(x)) = 0 .$$

$$(\rho - \rho_0) H(\lambda(x)) = \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{|\beta| \leq m-p} t^{\alpha(p, \beta)} D_t^p a_{p, \beta}(t, x) D_x^\beta H(\lambda(x))$$

En utilisant les formules (2.12) on obtient

$$(\rho - \rho_0) H(\lambda(x)) =$$

$$= \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{|\beta| \leq m-p} \sum_{j=0}^{|\beta|} \sum_{\ell=0}^j b_{p, \beta, j, \ell}(t, x) H(\lambda - p + \alpha(p, \beta), j - \ell)$$

où $\alpha(p, \beta) = \text{Max}(0, k+p-m+1)$. D'autre part

$$\lambda - p + \alpha(p, \beta) \geq \lambda + k - m + 1$$

on a donc

$$(\rho - \rho_0)H(\lambda(x)) = \sum_{i=0}^m c_i(t, x) H(\lambda(x) + k - m + 1, i)$$

ce qui est précisément (2.14) avec $n = 0$.

Supposons que l'on ait construit $u_0, u_1, \dots, u_n$, on obtient u_{n+1} de la manière suivante : on résoud

$$\rho_0(u_{n+1} - u_n) = - \sum_{i=0}^{m(n+1)} \alpha_i^n(0, x) H(\lambda + n + 1 - m + k, i) .$$

D'après le lemme 2.3, ceci est possible et on a :

$$u_{n+1} = u_n + \sum_{i=0}^{m(n+1)} \sum_{\ell=0}^i c_{\ell, n, i}(x) H(\lambda(x) + n + 1, \ell)$$

ce qui montre que u_{n+1} est bien de la forme (2.13). Ensuite on a :

$$\rho u_{n+1} = \rho_0(u_{n+1} - u_n) + (\rho - \rho_0)(u_{n+1} - u_n) + \rho u_n .$$

Il est facile de voir que

$$(\rho - \rho_0)(u_{n+1} - u_n) = \sum_{i=0}^{m(n+2)} \alpha_i^{n+1}(t, x) H(\lambda(x) + n + 2 + k - m, i)$$

et que ρu_{n+1} est bien de la forme 2.14.

Remarque : Si on suppose que les coefficients de l'opérateur ρ sont analytiques en x , on peut préciser la proposition 2.2 en construisant une solution de l'équation $\rho u = 0$, comme il a été démontré dans un cas particulier dans [6].

B. Démonstration du théorème 1.1 dans le cas 2.

Nous allons, tout d'abord, comme dans le cas précédent, construire une famille de distributions. Soit λ un entier relatif et p appartenant à $\mathbb{N}$, on pose

$$(2.20) \quad \begin{cases} R(\lambda, p) = t^\lambda (\text{Log}|t|)^p \text{ lorsque } \lambda > -1 \\ R(-1, p) = \frac{1}{p+1} \cdot \frac{d}{dt} (\text{Log}|t|)^{p+1} \\ R(\lambda, p) = \frac{1}{\lambda+1} \left\{ \frac{d}{dt} R(\lambda+1, p) - p R(\lambda, p-1) \right\} . \end{cases}$$

Nous renvoyons à [5] p. 121 pour la justification de cette définition. Notons simplement que l'on a les relations

$$(2.21) \quad \begin{cases} t R(\lambda, p) = R(\lambda+1, p) \\ \frac{d}{dt} R(\lambda, p) = \lambda R(\lambda-1, p) + p R(\lambda-1, p-1) \end{cases} .$$

La démonstration qui suit s'inspire de celle de [5] et se décompose en plusieurs étapes. Soit λ_{i_0} la (ou l'une des) plus grande racine de $f(\lambda) = 0$.

(i) $\lambda_{i_0} \geq m-k$:

Lemme 2.4 : Pour tout n de $\mathbb{N}$ il existe des fonctions $\alpha_n(t, x)$ et $\beta_n(t, x)$ de classe C^∞ dans $]-\varepsilon, +\varepsilon[\times V_{x_0}$ avec $\alpha_n(x, 0) = 1$ telles que, si l'on pose

$$(2.22) \quad u_n = \alpha_n(t, x) Y(t) t^{\lambda_{i_0}}$$

on a :

$$(2.23) \quad \rho u_n = \beta_n(t, x) Y(t) t^{\lambda_{i_0} + n + k - m + 1} .$$

Démonstration : On construit la suite (u_n) par récurrence sur n . Pour $n=0$ on prend

$$u_0(t, x) = Y(t) t^{\lambda_{i_0}}$$

en remarquant que pour $\lambda_{i_0} \geq m-k$ on a :

$$\begin{aligned} \rho[Y(t) t^{\lambda_{i_0}}] &= Y(t) \rho(t^{\lambda_{i_0}}) = Y(t) \rho_0(t^{\lambda_{i_0}}) + Y(t) \{ \rho - \rho_0 \} (t^{\lambda_{i_0}}) = \\ &= Y(t) f(\lambda_{i_0}) t^{\lambda_{i_0} - m + k} + Y(t) t^{\lambda_{i_0} - m + k + 1} \beta_0(t, x) . \end{aligned}$$

Comme $f(\lambda_{i_0}) = 0$, cela prouve que ρu_0 est bien de la forme (2.23).

Supposons $u_0, u_1, \dots, u_n$ construites. Pour obtenir u_{n+1} , on commence par résoudre pour $t > 0$

$$\rho_0(v_n) = -t^{\lambda_{i_0} - m + k + n + 1} \beta_n(0, x)$$

ce qui est possible en prenant

$$v_n = - \frac{t^{\lambda_{i_0} + n + 1} \beta_n(0, x)}{f(\lambda_{i_0} + n + 1)}$$

On pose ensuite :

$$u_{n+1} = u_n + Y(t) v_n = Y(t) t^{\lambda_{i_0}} \left\{ \alpha_n - \frac{t^{n+1} \beta_n}{f(\lambda_{i_0} + n + 1)} \right\}$$

Il est alors facile de voir que ρu_{n+1} est de la forme (2.23). La suite (u_n) ainsi construite satisfait aux conditions du Lemme 2.1.

(ii) $m-k > \lambda_{i_0} \geq 0$:

Remarquons tout d'abord que dans ce cas nous avons :

$$(2.24) \quad \begin{cases} f(\lambda_{i_0}) = 0 ; & f'(\lambda_{i_0}) = 0 \\ f'(\lambda_{i_0} + \ell) \neq 0 & \ell = 1, \dots, m-k-1-\lambda_{i_0} \\ f(m-k+\ell) \neq 0 & \ell = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Proposition 2.5 : Pour tout entier $n \geq 0$ il existe des fonctions $a_n, b_n, \alpha_n, \beta_n$ de classe C^∞ dans $]-\varepsilon, \varepsilon[\times V_{x_0}$ telles que si l'on pose :

$$(2.25) \quad u_n = a_n(t, x) \cdot R(\lambda_{i_0}, 1) + t^{m-k} b_n(t, x) ,$$

alors

$$(2.26) \quad \rho u_n = \alpha_n(t, x) R(n, 1) + t^n \beta_n(t, x) .$$

Lemme 2.6 :

$$(2.27) \quad \rho_0 R(\lambda_{i_0}, 1) = 0$$

$$(2.28) \quad \rho_0 R(\lambda_{i_0} + \ell, 1) = f'(\lambda_{i_0} + \ell) t^{\lambda_{i_0} + \ell - m + k} ; \quad 0 < \ell \leq m-k-1-\lambda_{i_0}$$

$$(2.29) \quad \rho_0 R(m-k+\ell, 1) = f(m-k+\ell) R(\ell, 1) + f'(m-k+\ell) t^\ell ; \quad \ell \in \mathbb{N}$$

$$(2.30) \quad \rho_0 t^{m-k+\ell} = f(m-k+\ell) t^\ell .$$

Démonstration : (2.30) est un cas particulier de (2.24). La relation (2.29) implique (2.27) et (2.28) en utilisant (2.24). Quant à (2.29) elle se démontre en utilisant (2.21).

Démonstration de la proposition 2.5 :

On raisonne par récurrence sur n . Pour $n=0$, on écrit :

$$\rho R(\lambda_{i_0}, 1) = t^{\lambda_{i_0} - m + k + 1} \alpha(t, x) + \beta(t, x) R(0, 1)$$

où α et β sont des fonctions C^∞ dans $]-\epsilon, \epsilon[\times V_{x_0}$.

Utilisant (2.24) et (2.28) on construit facilement u_0 sous la forme :

$$u_0(t, x) = \sum_{\ell=0}^{m-k-1-\lambda_{i_0}} c_\ell(x) R(\lambda_{i_0} + \ell, 1)$$

ce qui, compte-tenu de (2.21), montre que u_0 est de la forme (2.25). On utilise ensuite le lemme 2.6.

On suppose maintenant $u_0, u_1, \dots, u_n$ construits ; pour obtenir u_{n+1} on procède la manière suivante ; on résoud

$$\rho_0(u_{n+1} - u_n) = - \{ t^n \beta_n(0, x) + R(n, 1) \alpha_n(0, x) \}$$

ce qui est possible grâce à (2.30), (2.29). Il s'en suit que (2.25) est vérifié pour u_{n+1} , ainsi que (2.26).

La démonstration se termine en utilisant le Lemme 2.1.

(iii) $\lambda_{i_0} < 0$:

Dans ce cas nous avons :

$$(2.31) \quad \begin{cases} f(\lambda_{i_0}) = 0 ; & f(\lambda_{i_0} + \ell) \neq 0 ; & 0 < \ell < -1 - \lambda_{i_0}, \ell \in \mathbb{N} \\ f(\ell) = 0, & f'(\ell) \neq 0, & 0 \leq \ell \leq m-k-1 \\ f(m-k+\ell) \neq 0, & \ell \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La démonstration dans ce cas est voisine de celle de (ii). On utilise les relations du Lemme 2.6 pour démontrer le :

Lemme 2.7 :

1. $\forall \ell \in \mathbb{N} : 0 < \ell \leq m-k-1-\lambda_{i_0}$, $\exists c_{\ell,1}, c_{\ell,2} \in \mathbb{C}$:

$$(2.32) \quad \rho_0 \{ c_{\ell,1} t^{\lambda_{i_0} + \ell} + c_{\ell,2} R(\lambda_{i_0} + \ell, 1) \} = t^{\lambda_{i_0} + \ell - m + k}$$

2. $\forall \ell \in \mathbb{N} : \ell > m-k-1-\lambda_{i_0}$, $\exists c_{\ell} \in \mathbb{C}$:

$$(2.33) \quad \rho_0 \{ c_{\ell} t^{\lambda_{i_0} + \ell} \} = t^{\lambda_{i_0} + \ell - m + k}$$

3. $\forall \ell \in \mathbb{N} : \ell > m-k-1-\lambda_{i_0}$, $\exists b_{\ell,1}, b_{\ell,2} \in \mathbb{C}$:

$$(2.34) \quad \rho_0 \{ b_{\ell,1} t^{\lambda_{i_0} + \ell} + b_{\ell,2} R(\lambda_{i_0} + \ell, 1) \} = R(\lambda_{i_0} + \ell - m + k, 1) .$$

On construit ensuite des distributions u_n de la forme :

$$(2.35) \quad u_n(t, x) = t^{\lambda_{i_0}} \alpha_n(t, x) + \text{Log}|t| \cdot \beta_n(t, x)$$

telles que :

$$(2.36) \quad \rho u_n = t^n a_n(t, x) + t^n (\text{Log}|t|) b_n(t, x) .$$

On prend u_0 sous la forme

$$u_0(t, x) = \sum_{\ell=1}^{-\lambda_{i_0}-1} c_{\ell}(x) t^{\lambda_{i_0} + \ell} + \sum_{\ell=-\lambda_{i_0}}^{m-k-1-\lambda_{i_0}} c_{\ell}(x) R(\lambda_{i_0} + \ell, 1)$$

ce qui est possible grâce à (2.32) avec ρu_0 de la forme (2.36). On termine ensuite la démonstration comme au cas (ii).

Ceci termine la démonstration du Théorème 1.1.

Remarque : Notre méthode s'applique à des opérateurs plus généraux que ceux définis en (1.1), plus précisément aux opérateurs :

$$\begin{aligned} \rho(x, t, D_x, D_t) &= t^k D_t^m + a_{m-1}(x) t^{k-1} D_t^{m-1} + \dots + a_{m-k}(x) D_t^{m-k} + \\ &+ \sum_{p=0}^{m'} \sum_{|\beta| \leq m'-p} t^{\alpha(p, \beta)} D_t^p a_{p, \beta}(t, x) D_x^{\beta} \end{aligned}$$

où k, m , et m' sont des entiers tels que $m' \geq m \geq k > 0$ et $\alpha(p, \beta) = \max(0, k + p - m + 1)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. S. Baouendi et C. Goulaouic : Cauchy problem with characteristic initial hypersurface (à paraître aux Comm. Pure and Appl. Math.).
- [2] M. S. Baouendi et C. Goulaouic : Cauchy problem with multiple characteristics in space of regular distributions (à paraître).
- [3] J. M. Bony : Axiomatiques de théorie du potentiel, Ann. Institut Fourier, vol. 17 (1967), p. 353-382.
- [4] L. Hörmander : Linear partial differential operators, Springer-Verlag 1964.
- [5] Y. Kannan : Hypoelliptic ordinary differential operators, Israel J. of Math., vol. 13, No 1-2 (1972).
- [6] C. Zuily : Hypoellipticité des opérateurs du second ordre à coefficients réels (à paraître).
- [7] B. Helffer et C. Zuily : Non-hypoellipticité d'une classe d'opérateurs différentiels, C. R. Acad. Sc. Paris (Nov. 1973).

SUR UNE CLASSE D'OPERATEURS PARTIELLEMENT HYPOELLIPTIQUES

P. BOLLEY - J. CAMUS - B. HELFFER

INTRODUCTION.

Il a été montré dans [19] que les opérateurs du type de Fuchs introduits dans [1] ne sont pas hypo-elliptiques et dans [2] qu'ils ont cependant une certaine régularité dans la direction normale.

Dans cet article, on étudie l'hypo-ellipticité partielle (i.e. : l'hypo-ellipticité à partir d'un espace de distributions C^∞ dans la direction normale) d'une classe d'opérateurs du type de Fuchs satisfaisant une certaine propriété de quasi-homogénéité. En particulier, on montre que l'hypo-ellipticité partielle se ramène à l'étude d'équations différentielles ordinaires. Cette réduction a déjà été mise en évidence pour l'étude de l'hypo-ellipticité des opérateurs introduits dans [13] ; certains de ces opérateurs étant des modèles micro-locaux d'opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques multiples définis de manière invariante sur une variété [9], [10], [25].

Soient $L(t; D_x, D_t)$ les opérateurs définis sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \{(t, x) ; t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n\}$ par :

$$L(t; D_x, D_t) \equiv \sum_{\substack{|\alpha|+j \leq m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N}}} a_{\alpha j} t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_x^\alpha D_t^j$$

où $D_x = -i \frac{\partial}{\partial x}$, $D_t = -i \frac{\partial}{\partial t}$, $m \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, $\sigma \in \mathbb{Z}$ avec $\sigma + m$ et $\sigma + \delta m \in \mathbb{N}$, et $a_{\alpha j} \in \mathbb{C}$. Leurs symboles $L(t; \xi, \tau)$ vérifient la propriété de quasi-homogénéité suivante :

$$L\left(\frac{t}{\lambda}; \lambda^\delta \xi, \lambda \tau\right) = \lambda^{-\sigma} L(t, \xi, \tau)$$

pour tous $\lambda > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{R}$. Alors, si $L(t; D_x, D_t)$ est elliptique pour $t \neq 0$, L est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^n = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; t \geq 0\}$) si et seulement si l'équation $L(t; \xi, D_t) u(t) = 0$ n'admet que la solution triviale dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$) pour tout $\xi \neq 0$ (théorèmes 1.2 et 1.4). De plus, si la variété $t=0$ n'est pas caractéristique pour l'opérateur L , on peut remplacer dans le résultat précédent "partiellement hypoelliptique" par "hypoelliptique". Ainsi :

- 1) L'opérateur $L \equiv D_t^2 + t^2 D_x^2 + \lambda D_x$ ($\sigma = -2$, $\delta=2$) est hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\lambda \neq \pm (2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$. Ce résultat a déjà été obtenu dans [13].
- 2) L'opérateur $L \equiv t D_t^2 + D_x^2 + \lambda D_t$ ($\sigma = -1$, $\delta = \frac{1}{2}$) est partiellement hypoelliptique dans $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}$ quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
- 3) L'opérateur $L \equiv t (D_t^2 + D_x^2) + \lambda D_t + \mu D_x$ ($\sigma = -1$, $\delta=1$) est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$ et est partiellement hypoelliptique dans $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}$ si et seulement si $\mu \neq \pm (2n+i\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$.
- 4) Soit l'opérateur $L \equiv t D_t^2 + t^{2k-1} D_x^2 + \lambda D_t + \mu t^{k-1} D_x$ ($\sigma = -1$, $\delta = k$; pour $k=1$, on retrouve l'exemple précédent). On suppose que $1-i\lambda \notin \mathbb{N} \setminus k\mathbb{N}$. Alors, si k est un entier impair, L est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$ et est partiellement hypoelliptique dans $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}$ si et seulement si $\mu \neq \pm ((2p+1)k+i\lambda-1)$, $p \in \mathbb{N}$. Si k est un entier pair, L est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}$ si et seulement si $\mu \neq \pm ((2p+1)k+i\lambda-1)$, $p \in \mathbb{N}$.

Plus généralement, on considère la classe d'opérateurs :

$$L \equiv \sum_{|\alpha|+j \leq m} a_{\alpha j} (t, x) t^{[\sigma+\delta|\alpha|+j]} D_x^\alpha D_t^j$$

où $[\sigma + \delta|\alpha| + j]$ désigne le plus petit entier ≥ 0 supérieur ou égal à $\sigma + \delta|\alpha| + j$.
Sous une hypothèse d'ellipticité pour $t \neq 0$, on établit une condition suffisante d'hypoellipticité partielle analogue à celle donnée pour la classe précédente (théorèmes 1.1 et 1.3).

Par exemple, l'opérateur $L \equiv t D_t^2 + t D_x D_t + i D_x^2 + \lambda D_t$ ($\sigma = -1, \delta = \frac{1}{2}$) est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}$ quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Les notations et résultats sont regroupés dans le chapitre I.

Le chapitre II qui commence par l'étude de quelques espaces de distributions est essentiellement consacré à des résultats d'indice pour des opérateurs différentiels ordinaires, résultats qui sont essentiels pour l'étude des opérateurs à plusieurs variables.

On démontre, dans le chapitre III les résultats d'hypoellipticité partielle (théorèmes 1.1, 1.2, 1.3, et 1.4). Deux méthodes sont utilisées : une première méthode basée sur des quotients différentiels à partir d'une estimation a priori et une deuxième méthode basée sur une construction d'une parametrix partielle.

L'étude des conditions suffisantes d'hypoellipticité partielle (conditions 3 et 3'), i.e. l'étude du noyau dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ d'opérateurs différentiels ordinaires, est faite dans le chapitre IV. Par un changement de variable associé à une décomposition convenable du noyau, on se ramène à utiliser les résultats de [4] ; une telle technique a déjà été introduite dans [12]. Une seconde méthode nous a été communiquée par J. Sjöstrand ; nous l'en remercions vivement. L'étude du noyau dans $\mathcal{S}$ d'opérateurs différentiels ordinaires a été abordée par d'autres procédés : citons par exemple, [28] et [25].

TABLE DES MATIERES

I. NOTATIONS ET RESULTATS.

II. PRELIMINAIRES.

II.1. Quelques espaces de distributions.

II.2. Structure locale des éléments de $C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$.

II.3. Résultats concernant certains opérateurs différentiels ordinaires.

III. DEMONSTRATION DES THEOREMES 1.1. et 1.3.

III.1. 1ère méthode : Méthode des quotients différentiels à partir d'estimations a priori.

III.2. 2ème méthode : Construction d'une parametrix partielle.

IV. ETUDE DES CONDITIONS 3 et 3'.

IV.1. Cas où $\delta = 1$.

IV.2. Cas où $\delta \neq 1$.

V. REMARQUES.

BIBLIOGRAPHIE.

I. NOTATIONS ET RESULTATS.

On considère les opérateurs généraux définis sur $I \times \Omega$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, par :

$$L \equiv \sum_{|\alpha|+j \leq m} a_{\alpha j}(t,x) t^{[\sigma+\delta|\alpha|+j]} D_x^\alpha D_t^j$$

où $t \in I$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

$$D_x^\alpha = i^{-|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad D_t = i^{-1} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \text{et où } m \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}, \delta > 0, \sigma \in \mathbb{Z} \text{ avec}$$

$\sigma + m \in \mathbb{N}$ et $\sigma + \delta m \in \mathbb{N}$, $[\sigma + \delta|\alpha| + j]$ désigne le plus petit entier ≥ 0 supérieur ou égal à $\sigma + \delta|\alpha| + j$. On suppose que les coefficients $a_{\alpha j}(t,x)$ sont indéfiniment différentiables dans $I \times \Omega$.

On suppose que l'opérateur L satisfait à la condition suivante :

Condition 1.

L'opérateur L est elliptique pour $t \neq 0$ dans $I \times \Omega$ i.e. : pour tout $(t,x) \in I \times \Omega$, $t \neq 0$, et pour tout $(\tau, \xi) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, on a :

$$\sum_{|\alpha|+j=m} a_{\alpha j}(t,x) t^{[\sigma+\delta|\alpha|+j]} \xi^\alpha \tau^j \neq 0.$$

On désigne par "partie principale" de l'opérateur L , l'opérateur L^0 défini par :

$$L^0 \equiv L^0(x; D_x, D_t) \equiv \sum_{\substack{|\alpha|+j \leq m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N}}} a_{\alpha j}(0,x) t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_x^\alpha D_t^j.$$

On supposera que cet opérateur L^0 satisfait aux conditions suivantes :

Condition 2. (*)

L'opérateur L^0 est elliptique pour $t \neq 0$ dans $I \times \Omega$ i.e. : pour tout $(t,x) \in I \times \Omega$, $t \neq 0$, et pour tout $(\tau, \xi) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, on a :

(*) La condition 2 entraîne la condition 1 dans un voisinage de $t=0$ éventuellement plus petit que $I \times \Omega$.

$$\sum_{\substack{|\alpha|+j=m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N}}} a_{\alpha j}(0, x) t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} \xi^{\alpha} \tau^j \neq 0.$$

Condition 3.

Pour tout $\omega \in \mathbb{R}^n$, $|\omega| = 1$ et pour tout $x \in \Omega$, l'équation :

$$L^0(x; \omega, D_t) u(t) = 0$$

n'admet que la solution $u = 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})^{(**)}$.

On désigne par $C^\infty(I; \mathcal{D}'(\Omega))$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur I à valeurs dans l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions sur Ω ; $C^\infty(I; \mathcal{D}'(\Omega))$ s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{D}'(I \times \Omega)$ des distributions sur $I \times \Omega$ (cf. [23]). Enfin, $C^\infty(I \times \Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur $I \times \Omega$ et à valeurs complexes.

On a alors le :

Théorème 1.1.

On suppose que l'opérateur L satisfait les conditions 1, 2 et 3. Alors, l'opérateur L est partiellement hypo-elliptique dans $I \times \Omega$, i.e. : pour tous ouverts $I' \subset I$ et $\Omega' \subset \Omega$, pour tout $u \in C^\infty(I; \mathcal{D}'(\Omega))$ tel que $Lu \in C^\infty(I' \times \Omega')$, alors $u \in C^\infty(I' \times \Omega')$.

Lorsque les coefficients $a_{\alpha j}$ de la partie principale L^0 sont constants, on a le résultat plus précis suivant :

Théorème 1.2.

On suppose que les coefficients de l'opérateur L^0 sont constants et que la condition 2 est satisfaite. Alors, L^0 est partiellement hypo-elliptique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ si et seulement si la condition 3 est satisfaite.

(**) $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ à décroissance rapide et $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ l'espace des restrictions à $\mathbb{R}_+$ des éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

La nécessité de la condition 3 se démontre comme dans [13], théorème 1.2.

On peut préciser davantage le théorème 1.1 en utilisant les résultats de régularité en t (pour une classe d'opérateurs plus générale) obtenus dans [2] (corollaire 1, proposition 3). Désignons par $\lambda_j(x)$, $j=1, \dots, m$ les racines de l'équation $F(x; \lambda) = 0$, où :

$$F(x; \lambda) \equiv \sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ \sigma+j \in \mathbb{N}}} a_{0j}(0, x) (-i)^j \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-j+1).$$

On a alors :

Corollaire 1.1.

Avec les hypothèses du théorème 1.1, soit $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $\operatorname{Re} \lambda_j(x) < \ell - 1 - \sigma$ pour tout $x \in \Omega$ et $j=1, \dots, m$. Alors, pour tous ouverts $I' \subset I$ et $\Omega' \subset \Omega$, pour tout $u \in C_{-\infty}^{\ell}(I; \mathcal{D}'(\Omega))$ tel que $Lu \in C^{\infty}(I' \times \Omega')$, alors $u \in C^{\infty}(I' \times \Omega')$.

Pour la définition de l'espace $C_{-\infty}^{\ell}(I; \mathcal{D}'(\Omega))$, on renvoie à [2]. Ce résultat peut d'ailleurs être obtenu par la même méthode que celle utilisée pour la démonstration du théorème 1.1, la régularité en la variable t s'obtenant à partir des résultats du paragraphe II.3.

Corollaire 1.2.

Avec les hypothèses du théorème 1.1, l'opérateur L^* , adjoint formel de l'opérateur L , est localement résoluble dans $I \times \Omega$.

La démonstration du corollaire 1.2. est une adaptation de la démonstration de la proposition classique suivante : le transposé d'un opérateur hypoelliptique est localement résoluble.

Maintenant, il se peut que l'opérateur L (de même que l'opérateur L^0) ne vérifie pas la condition 1, mais soit seulement elliptique pour $t > 0$. Ceci nous amène à considérer les conditions suivantes :

Condition 1' : L'opérateur L est elliptique pour $t > 0$ dans $I \times \Omega$, i.e. : pour tout $(t, x) \in I \times \Omega$, $t > 0$, et pour tout $(\tau, \xi) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, on a :

$$\sum_{|\alpha|+j=m} a_{\alpha j}(t, x) t^{[\sigma+\delta|\alpha|+j]} \xi^\alpha \tau^j \neq 0.$$

Condition 2'. (*)

L'opérateur L^0 est elliptique pour $t > 0$ dans $I \times \Omega$, i.e. : pour tout $(t, x) \in I \times \Omega$, $t > 0$, et pour tout $(\tau, \xi) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, on a :

$$\sum_{\substack{|\alpha|+j=m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N}}} a_{\alpha j}(0, x) t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} \xi^\alpha \tau^j \neq 0.$$

Condition 3' : Pour tout $\omega \in \mathbb{R}^n$, $|\omega| = 1$ et tout $x \in \Omega$, l'équation :

$$L^0(x; \omega, D_t) u(t) = 0$$

n'admet que la solution $u = 0$ dans $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+})$.

Théorème 1.3.

On suppose que l'opérateur L satisfait les conditions 1', 2' et 3'. Soit $I_+ = \{t \in I ; t \geq 0\}$. Alors, l'opérateur L est partiellement hypo-elliptique dans $I_+ \times \Omega$, i.e. pour tout sous-intervalle I' de I_+ et tout sous-ouvert Ω' de Ω , pour tout $u \in C^\infty(I_+ ; \mathcal{D}'(\Omega))$ tel que $Lu \in C^\infty(I' \times \Omega')$, alors, $u \in C^\infty(I' \times \Omega')$.

Et lorsque les coefficients $a_{\alpha j}$ de la partie principale L^0 sont constants on a le résultat plus précis suivant :

Théorème 1.4.

On suppose que les coefficients de l'opérateur L^0 sont constants et que la condition 2' est satisfaite. Alors, L^0 est partiellement hypo-elliptique dans $\overline{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}^n$, si et seulement si la condition 3' est satisfaite.

(*) La condition 2' entraîne la condition 1' dans un voisinage de $t = 0$, éventuellement plus petit que $I_+ \times \Omega$.

La nécessité de la condition 3' s'établit comme pour le théorème 1.2.

De même que pour le théorème 1.1, on pourrait préciser davantage le théorème 1.3 du point de vue de la régularité en t .

Remarque 1.1 : Lorsque la variété $t=0$ n'est pas caractéristique pour l'opérateur L , i.e. : lorsque $\sigma = -m$, on peut remplacer dans les théorèmes 1.1 et 1.2 partiellement hypo-elliptique par hypo-elliptique puisque dans ce cas, si $u \in \mathcal{D}'(I \times \Omega)$ et si $Lu \in C^\infty(I' \times \Omega')$ alors, $u \in C^\infty(I' ; \mathcal{D}'(\Omega'))$. On retrouve ainsi les résultats de [13]. En particulier, lorsque $\delta = 1$, on retrouve les opérateurs elliptiques.

D'autre part, lorsque $\sigma = -m$ et $n > 1$, la condition 3' n'est jamais satisfaite de sorte que les théorèmes 1.3 et 1.4 n'ont pas lieu.

Remarque 1.2 : Lorsque la variété $t=0$ est caractéristique pour l'opérateur L , i.e. : lorsque $\sigma > -m$, l'opérateur L n'est pas hypo-elliptique [19] de sorte que les théorèmes 1.1 et 1.2 sont optimaux. En particulier, lorsque $\delta=1$, on retrouve les résultats annoncés dans [8] pour les opérateurs étudiés dans [24], [16] et [6].

D'autre part, comme on le montrera sur un exemple au § IV, un même opérateur L peut satisfaire à la fois les conditions 1, 2, 3 et les conditions 1', 2', 3', de sorte que dans ce cas, les théorèmes 1.3 et 1.4 sont des résultats plus précis.

II. PRELIMINAIRES.

II.1. Quelques espaces de distributions.

Pour $s \in \mathbb{R}$, $H^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) ; \mathcal{F}_x u(\xi) \cdot (1+|\xi|^2)^{s/2} \in L^2(\mathbb{R}^n)\} \quad (*)$$

muni de la norme :

$$u \longmapsto \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\mathcal{F}_x u(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Pour $s \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$, $H^s(\mathbb{R}; H^r(\mathbb{R}^n))$ est l'espace :

$$H^s(\mathbb{R}; H^r(\mathbb{R}^n)) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}; H^r(\mathbb{R}^n)) ; (1+|\tau|^2)^{s/2} \mathcal{F}_t u(\tau) \in L^2(\mathbb{R}; H^r(\mathbb{R}^n))\}$$

muni de la norme :

$$u \longmapsto \|u\|_{H^s(\mathbb{R}; H^r(\mathbb{R}^n))} = \left(\int_{\mathbb{R}} \|(1+|\tau|^2)^{s/2} \mathcal{F}_t u(\tau)\|_{H^r(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \right)^{1/2}.$$

Pour $s \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$, $H^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ est l'espace :

$$H^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) ; (1+|\xi|^2 + |\tau|^2)^{s/2} (1+|\xi|^2)^{r/2} \mathcal{F}_{t,x} u(\tau, \xi) \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)\}$$

muni de la norme :

$$u \longmapsto \|u\|_{H^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2 + |\tau|^2)^s (1+|\xi|^2)^r |\mathcal{F}_{t,x} u(\tau, \xi)|^2 d\tau d\xi \right)^{1/2}.$$

(*) Etant donnés $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et E un espace de Banach, on note (cf. [23]) :

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^p; E)$ l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans E , avec

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^p) = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^p; \mathbb{C}) ;$$

$\mathcal{F}_z u(\zeta)$ est la transformée de Fourier de $u(z)$ pour $z \in \mathbb{R}^p$ et $\zeta \in \mathbb{R}^p$;

$L^2(\mathbb{R}^p; E)$ est l'espace des (classes de) fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans E et telles que $\int_{\mathbb{R}^p} \|u(z)\|_E^2 dz < +\infty$, dz étant la mesure de Lebesgue

sur $\mathbb{R}^p$, avec $L^2(\mathbb{R}^p) = L^2(\mathbb{R}^p; \mathbb{C})$.

Pour $s' < s$ et $r' < r$, $H^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ s'injecte algébriquement et topologiquement dans $H^{s',r'}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. L'opérateur D_t (resp. D_{x_i} pour $i=1, \dots, n$) est linéaire et continu de $H^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ dans $H^{s-1,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ (resp. $H^{s-1,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ et $H^{s,r-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$). L'espace $C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Pour tous $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C(s,r,\phi) > 0$ telle que pour tout $u \in H^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, on ait :

$$(2.1) \quad \|\phi u\|_{H^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \leq \sup |\phi| \cdot \|u\|_{H^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} + C(s,r,\phi) \cdot \|u\|_{H^{s,r-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)}.$$

(Si $r=0$, on peut remplacer dans le second membre $\|u\|_{H^{s,r-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)}$ par $\|u\|_{H^{s-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)}$).

En particulier, si $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ et $u \in H^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, alors : $\phi u \in H^{s,r}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. (cf. [22] pour ces propriétés). Enfin, pour $s \geq 0$, $H^s(\mathbb{R}; H^r(\mathbb{R}^n))$ s'injecte algébriquement et topologiquement dans $H^{s,r-s}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

Pour $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ et $\sigma \in \mathbb{Z}$ avec $\sigma + m \in \mathbb{N}$ et $\sigma + \delta m \in \mathbb{N}$, $W_{\sigma,\delta}^{m,p,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ est l'espace :

$$W_{\sigma,\delta}^{m,p,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n); t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_t^{h+j} u \in L^2(\mathbb{R}; H^{\frac{p-h}{\delta}+|\alpha|+q}(\mathbb{R}^n)), \\ |\alpha|+j \leq m, \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N}, 0 \leq h \leq p\}$$

muni de la norme, pour $p \geq \sigma$:

$$u \longmapsto \|u\|_{W_{\sigma,\delta}^{m,p,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{h=0}^p \sum_{\substack{\sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N} \\ |\alpha|+j \leq m}} \|t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_t^{h+j} u\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{\frac{p-h}{\delta}+|\alpha|+q}(\mathbb{R}^n))}^2 \right)^{1/2}.$$

Pour $p' \leq p$ et $q' \leq q$, $W_{\sigma,\delta}^{m,p,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ s'injecte algébriquement et topologiquement dans $W_{\sigma,\delta}^{m,p',q'}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Etant donné $u \in W_{\sigma,\delta}^{m,p,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, alors $D_{x_i} u \in W_{\sigma,\delta}^{m,p,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ pour $i=1, \dots, n$ si et seulement si $u \in W_{\sigma,\delta}^{m,p,q+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Pour $q=0$, on notera plus simplement l'espace $W_{\sigma,\delta}^{m,p,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ par $W_{\sigma,\delta}^{m,p}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

II.2. Structure locale des éléments de $C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$.

On désigne par $C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ des distributions sur $\mathbb{R}^n$ (cf. [23];

noyaux semi-réguliers en t). On donne un résultat de régularité locale de ces fonctions.

Lemme 2.1.

Etant donnés $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ et $\sigma \in \mathbb{Z}$ avec $\sigma + m \in \mathbb{N}$ et $\sigma + \delta m \in \mathbb{N}$, il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $\phi u \in W_{\sigma, \delta}^{m, p, q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

Démonstration : D'après [26], (cf. aussi [23]), pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $\phi u \in H^{m+p}(\mathbb{R}; H^r(\mathbb{R}^n))$. Posant $q = r - \frac{p}{\delta} - m$, on obtient le résultat.

II.3. Résultats concernant certains opérateurs différentiels ordinaires.

On démontre ici des résultats essentiels pour la suite concernant une classe d'opérateurs différentiels ordinaires.

Soit $L(t; D_t)$ l'opérateur différentiel ordinaire défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$L \equiv L(t; D_t) \equiv \sum_{\substack{k+j=m \\ \sigma+\delta k+j \in \mathbb{N}}} a_{kj} t^{\sigma+\delta k+j} D_t^j,$$

où $D_t = \frac{1}{i} \frac{d}{dt}$ et où $m \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \mathbb{Z}$, $\delta > 0$, $a_{kj} \in \mathbb{C}$, k et $j \in \mathbb{N}$.

On introduit la condition suivante :

(H) Pour tout $t \neq 0$, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, on a :

$$L^0(t; \tau) \equiv \sum_{\substack{k+j=m \\ \sigma+\delta k+j \in \mathbb{N}}} a_{kj} t^{\sigma+\delta k+j} \tau^j \neq 0.$$

Cette condition (H) est équivalente à dire que les deux polynômes

$$P^+(\tau) \equiv \sum_{\substack{k+j=m \\ \sigma+\delta k+j \in \mathbb{N}}} a_{kj} \tau^j \text{ et } P^-(\tau) \equiv \sum_{\substack{k+j=m \\ \sigma+\delta k+j \in \mathbb{N}}} a_{kj} (-1)^{\delta j} \tau^j \text{ ne s'annulent pas}$$

sur $\mathbb{R}$. Et, lorsque δ est un entier, cette hypothèse se réduit à la seule condition $P^+(\tau) \neq 0$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$.

On désigne par $F(\lambda) = 0$ l'équation caractéristique associée à l'opérateur L en $t = 0$ avec :

$$F(\lambda) \equiv \sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ \sigma+j \in \mathbb{N}}} a_{0j} (-i)^j \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-j+1).$$

Si l'on désigne par $L_0(t; D_t)$ l'opérateur différentiel :

$$L_0 \equiv L_0(t; D_t) \equiv \sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ \sigma+j \in \mathbb{N}}} a_{0j} t^{\sigma+j} D_t^j,$$

on obtient le polynôme caractéristique $F(\lambda)$ par la relation : $F(\lambda) \equiv t^{-\lambda-\sigma} L_0(t; D_t) t^\lambda$.

On considère pour $p \in \mathbb{N}$ l'espace de Sobolev avec poids $W_{\sigma, \delta}^{m, p}(\mathbb{R})$:

$W_{\sigma, \delta}^{m, p}(\mathbb{R}) = \{u \in H^{-\sigma}(\mathbb{R}) ; |t|^{\sigma+\delta k+j} D_t^{j+h} u \in L^2(\mathbb{R}), \sigma+\delta k+j \in \mathbb{N}, 0 \leq k+j \leq m, 0 \leq h \leq p\}$
muni de la norme canonique.

On a alors le résultat suivant :

Théorème 2.1.

On suppose que l'opérateur L satisfait la condition (H).

Soit m_+ (resp. m_-) le nombre de racines de l'équation $P^+(\tau) = 0$ (resp. $P^-(\tau) = 0$) vérifiant $\text{Im } \tau > 0$.

Soit p un entier ≥ 0 et soit r_p le nombre de racines de l'équation $F(\lambda) = 0$ vérifiant $\text{Re } \lambda > p - \frac{1}{2} - \sigma$.

On suppose qu'aucune racine de $F(\lambda) = 0$ n'est située sur la droite $\text{Re } \lambda = p - \frac{1}{2} - \sigma$.

Alors, l'opérateur L considéré comme opérateur linéaire continu de $W_{\sigma, \delta}^{m, p}(\mathbb{R})$ dans $H^p(\mathbb{R})$ est à indice et son indice est égal à $m_+ + m_- + \sigma - 2(m - r_p + \text{Min}(\sigma, p))$.

Remarque 2.1 : Lorsque δ est un entier impair (resp. pair), on a : $m_+ + m_- = m$ (resp. $m_+ = m_-$) de sorte que l'expression de l'indice se réduit à $\sigma - m + 2(r_p - \text{Min}(\sigma, p))$ (resp. $\sigma - 2(m - m_+ - r_p + \text{Min}(\sigma, p))$).

Remarque 2.2 : Lorsque $\sigma = -m$, on retrouve les résultats de [13] et lorsque $\delta = 1$, on retrouve les résultats de [4], [5].

En particulier, si p est assez grand, on obtient que l'indice de l'opérateur L , de $W_{\sigma,\delta}^{m,p}(\mathbb{R})$ dans $H^p(\mathbb{R})$, est constant et égal à $m_+ + m_- - 2m - \sigma$. Il en résulte, en désignant par $\text{Ker } L = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) ; Lu = 0\}$, que pour p assez grand, on a : $\text{Ker } L \cap W_{\sigma,\delta}^{m,p}(\mathbb{R}) \subset H^\infty(\mathbb{R})$. En fait, on a le résultat plus précis suivant :

Proposition 2.1.

Il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geq p_0$, on ait :

$$\text{Ker } L \cap W_{\sigma,\delta}^{m,p}(\mathbb{R}) \equiv \text{Ker } L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

On peut prendre pour p_0 le plus petit entier $p \geq 0$ à partir duquel $r_p = 0$.

Remarque 2.3.

Lorsque $\delta = 1$, il est facile de voir que $\text{Ker } L \cap W_{\sigma,\delta}^{m,p}(\mathbb{R}) \equiv \{0\}$ pour p assez grand de sorte que $\text{Ker } L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) \equiv \{0\}$. On retrouve ainsi le résultat de [4]. Cependant, au paragraphe IV, on montrera qu'il en est tout autrement si $\delta \neq 1$.

Quand on considère les opérateurs sur $\mathbb{R}_+$, on a des résultats du même type.

On introduit la condition (H_+) suivante :

(H_+) Pour tout $t > 0$, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, on a :

$$L^0(t; \tau) \equiv \sum_{\substack{k+j=m \\ \sigma+\delta k+j \in \mathbb{N}}} a_{kj} t^{\sigma+\delta k+j} \tau^j \neq 0.$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 2.2.

On suppose que l'opérateur L satisfait la condition (H_+) .

Soit m_+ le nombre de racines de l'équation $P^+(\tau) = 0$ vérifiant $\text{Im } \tau > 0$.

Soit p un entier ≥ 0 et soit r_p le nombre de racines de l'équation $F(\lambda) = 0$ vérifiant $\text{Re } \lambda > p - \frac{1}{2} - \sigma$.

On suppose qu'aucune racine de $F(\lambda) = 0$ n'est située sur la droite

$$\text{Re } \lambda = p - \frac{1}{2} - \sigma.$$

Alors, l'opérateur L considéré comme opérateur linéaire continu de $W_{\sigma,\delta}^{m,p}(\mathbb{R}_+)$ dans $H^p(\mathbb{R}_+)$ est à indice et son indice est égal à $m_+ - m + r_p - \text{Min}(\sigma, p)$.

L'espace $W_{\sigma,\delta}^{m,p}(\mathbb{R}_+)$ est défini de manière analogue à $W_{\sigma,\delta}^{m,p}(\mathbb{R})$.

De même que précédemment, si p est assez grand, on obtient que l'indice de l'opérateur L , de $W_{\sigma,\delta}^{m,p}(\mathbb{R}_+)$ dans $H^p(\mathbb{R}_+)$, est constant et égal à $m_+ - m - \sigma$. Il en résulte, en désignant par $\text{Ker}_+ L = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+); Lu = 0\}$, que pour p assez grand, on a : $\text{Ker}_+ L \cap W_{\sigma,\delta}^{m,p}(\mathbb{R}_+) \subset H^\infty(\mathbb{R}_+)$. En fait, on a le résultat plus précis suivant :

Proposition 2.2.

Il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geq p_0$, on ait :

$$\text{Ker}_+ L \cap W_{\sigma,\delta}^{m,p}(\mathbb{R}_+) \equiv \text{Ker}_+ L \cap \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+}).$$

On peut encore prendre pour p_0 le plus petit entier ≥ 0 à partir duquel $r_p = 0$.

En fait, le théorème 2.1 et la proposition 2.1 sont des corollaires du théorème 2.2 et de la proposition 2.2.

Pour démontrer ces résultats, on va faire une étude au voisinage de chaque point singulier, $t=0$ et $t=+\infty$, de l'opérateur L et on regroupera les différents résultats par des théorèmes généraux d'indice.

II.3.1. Etude de l'opérateur L sur $[0, T]$, $0 < T < +\infty$.

On désigne par $W_{\sigma,\delta}^{m,p}(0, T)$ l'espace

$W_{\sigma,\delta}^{m,p}(0, T) = \{u \in H^{-\sigma}(0, T); t^{\sigma+\delta k+j} D_t^{j+h} u \in L^2(0, T), \sigma+\delta k+j \in \mathbb{N}, 0 \leq k+j \leq m, 0 \leq h \leq p\}$ muni de la norme canonique.

On va établir la :

Proposition 2.3.

Soit p un entier ≥ 0 et soit r_p le nombre de racines de l'équation $F(\lambda) = 0$ vérifiant $\operatorname{Re} \lambda > p - \frac{1}{2} - \sigma$.

On suppose qu'aucune racine de $F(\lambda) = 0$ n'est située sur la droite $\operatorname{Re} \lambda = p - \frac{1}{2} - \sigma$.

Alors, l'opérateur L considéré comme opérateur linéaire continu de $W_{\sigma, \delta}^{m, p}(0, T)$ dans $H^p(0, T)$ est à indice et son indice est égal à $r_p - \min(\sigma, p)$.

Démonstration : On commence par remarquer que, grâce à l'inégalité de Hardy [17], l'espace $W_{\sigma, \delta}^{m, p}(0, T)$ coïncide avec l'espace $W_{\sigma+m}^{m+p}(0, T) = \{u \in H^{p-\sigma}(0, T) ; t^{\sigma+j} D_t^{j+h} u \in L^2(0, T), \sigma+j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq m, 0 \leq h \leq p\} = \{u \in H^{p-\sigma}(0, T) ; t^{\sigma+m} u \in H^{m+p}(0, T)\}$.

Ensuite, on procède de la façon suivante (cf. [5]) :

a) Démonstration de la proposition 2.3 pour l'opérateur $L \equiv L_0$ avec $\sigma = 0$ et pour $p=0$.

On considère le problème :

$$(I) \quad \begin{cases} L_0 u(t) = f(t) \in L^2(0, T) \\ u(t) \in W_m^m(0, T). \end{cases}$$

On fait le changement de variable $t=e^{-\tau}$ et le changement de fonctions $u(t) = e^{\tau/2} v(\tau)$, $f(t) = e^{\tau/2} g(\tau)$. Le problème (I) est équivalent au problème :

$$(II) \quad \begin{cases} (F(-i D_\tau - \frac{1}{2}) v(\tau) = g(\tau) \in L^2(-\log T, +\infty) \\ v(\tau) \in H^m(-\log T, +\infty). \end{cases}$$

Comme par hypothèse, $F(-i\xi - \frac{1}{2}) \neq 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, le problème (II), et par suite, le problème (I), admet au moins une solution. Enfin, il est clair que l'espace des solutions $v(\tau) \in H^m(-\log T, +\infty)$ telle que $F(-i D_\tau - \frac{1}{2}) v = 0$ est de dimension r_0 . Il en résulte que l'opérateur L_0 est à indice, d'indice r_0 , de $W_m^m(0, T)$ sur $L^2(0, T)$.

b) Démonstration de la proposition 2.3 pour l'opérateur $L \equiv L_0$ avec $\sigma = 0$ et pour $p \in \mathbb{N}$

On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} W_{m+p}^{m+p}(o,T) & \xrightarrow{P} & L^2(o,T) \\ \downarrow t^p & & \uparrow D_t^p \\ W_m^{m+p}(o,T) & \xrightarrow{L_0} & H^p(o,T) \end{array}$$

où P est l'opérateur défini par la relation : $P u(t) \equiv D_t^p L_0(t^p u(t))$. Par suite, l'équation caractéristique $F_p(\lambda) = 0$ en $t=0$ associé à l'opérateur P est égale à :

$$F_p(\lambda) \equiv (-i)^p (\lambda+1) \dots (\lambda+p) F(\lambda+p).$$

Il résulte de a) que P est à indice d'indice r_p .

Par ailleurs, l'opérateur de multiplication par t^p , de $W_{m+p}^{m+p}(o,T)$ dans $W_m^{m+p}(o,T)$, est à indice, d'indice $-p$ et l'opérateur de dérivation par D_t^p , de $H^p(o,T)$ dans $L^2(o,T)$, est à indice d'indice p .

On en déduit alors que, l'opérateur L_0 est à indice d'indice r_p de $W_m^{m+p}(o,T)$ dans $H^p(o,T)$.

c) Démonstration de la proposition 2.3 pour l'opérateur $L \equiv L_0$ avec $\sigma \geq -m$ et pour $p \in \mathbb{N}$

On considère les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} W_m^{m+p}(o,T) & \xrightarrow{Q} & H^p(o,T) \\ & \searrow t^{-\sigma} & \nearrow L_0 \\ & W_{\sigma+m}^{m+p}(o,T) & \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} W_{\sigma+m}^{m+p}(o,T) & \xrightarrow{L_0} & H^p(o,T) \\ & \searrow t^{\sigma} & \nearrow R \\ & W_m^{m+p}(o,T) & \end{array}$$

selon que $\sigma \leq 0$ ou $\sigma \geq 0$ avec $Q \equiv R \equiv L_0(t^{-\sigma})$.

L'équation caractéristique $F_Q(\lambda) \equiv F_R(\lambda) = 0$ en $t = 0$ associée aux opérateurs Q et R est égale à :

$$F_Q(Y) \equiv F_R(\lambda) \equiv F(\lambda - \sigma).$$

Il résulte de b) que Q et R sont à indice d'indice r_p .

Par ailleurs, l'opérateur de multiplication par $t^{-\sigma}$ (resp. t^{σ}), de $W_m^{m,p}(0,T)$ dans $W_{\sigma+m}^{m,p}(0,T)$ (resp. de $W_{\sigma+m}^{m,p}(0,T)$ dans $W_m^{m,p}(0,T)$), est à indice d'indice σ (resp. $-\text{Min}(\sigma, p)$).

L'opérateur L_0 est donc à indice, d'indice $r_p - \text{Min}(\sigma, p)$, de $W_{\sigma+m}^{m,p}(0,T)$ dans $H^p(0,T)$.

d) Démonstration de la proposition 2.3.

On peut écrire $L \equiv L_0 + S$ où

$$Su(t) \equiv \sum_{\substack{k+j \leq m, k \geq 1 \\ \sigma + \delta k + j \in \mathbb{N}}} a_{kj} t^{\sigma + \delta k + j} D_t^j u(t).$$

Il est facile de vérifier que cet opérateur S est compact de $W_{\sigma+m}^{m,p}(0,T)$ dans $H^p(0,T)$.

Par suite, on déduit de c) que l'opérateur L est à indice, d'indice $r_p - \text{Min}(\sigma, p)$, de $W_{\sigma+m}^{m,p}(0,T)$ dans $H^p(0,T)$.

II.3.2. Etude de l'opérateur L sur $[T, +\infty[$ avec $0 < T < +\infty$.

On désigne par $W_{\sigma, \delta}^{m,p}(T, +\infty)$ l'espace :

$$W_{\sigma, \delta}^{m,p}(T, +\infty) = \{u \in H^{-\sigma}(T, +\infty) ; t^{\sigma + \delta k + j} D_t^{j+h} u \in L^2(T, +\infty), \sigma + \delta k + j \in \mathbb{N}, 0 \leq k+j \leq m, 0 \leq h \leq p\}$$

muni de la norme canonique.

On va établir la :

Proposition 2.4.

On suppose que l'opérateur L satisfait à l'hypothèse (H_+) .

Soit m_+ le nombre de racines de l'équation $P^+(\tau) = 0$ vérifiant $\text{Im } \tau > 0$.

Alors, pour tout entier $p \geq 0$, l'opérateur L considéré comme opérateur linéaire continu de $W_{\sigma, \delta}^{m, p}(T, +\infty)$ dans $H^p(T, +\infty)$ est à indice et son indice est égal à m_+ .

Démonstration : On commence par établir quelques propriétés élémentaires concernant les espaces de Sobolev avec poids $W_{\sigma, \delta}^{m, p}(T, +\infty)$.

a) Quelques propriétés des espaces de Sobolev $W_{\sigma, \delta}^{m, p}(T, +\infty)$.

On désigne par $V_{\sigma, \delta}^{m, p}(T, +\infty)$ l'espace :

$V_{\sigma, \delta}^{m, p}(T, +\infty) = \{u \in H^{-\sigma}(T, +\infty) ; t^{\sigma+\delta m} D_t^h u \in L^2(T, +\infty), t^{\sigma+m} D_t^{h+m} u \in L^2(T, +\infty), 0 \leq h \leq p\}$
muni de la norme canonique.

Dans ce paragraphe, on supposera plus généralement que $\sigma+m$ et $\sigma+\delta m \in \mathbb{Z}$.

On va démontrer que l'espace $W_{\sigma, \delta}^{m, p}(T, +\infty)$ coïncide avec l'espace $V_{\sigma, \delta}^{m, p}(T, +\infty)$ qui sera plus commode à utiliser pour la suite.

Proposition 2.5.

L'application $u \mapsto t^{\sigma-\sigma'} u$ est un isomorphisme de $V_{\sigma, \delta}^{m, p}(T, +\infty)$ sur $V_{\sigma', \delta}^{m, p}(T, +\infty)$.

Démonstration : On commence par remarquer que si $u \in V_{\sigma, \delta}^{m, 0}(T, +\infty)$, alors : $t^{\sigma+j} D_t^j u \in L^2(T, +\infty)$ pour $0 \leq j \leq m$: ceci résulte de l'inégalité de Hardy.

Ainsi, si $u \in V_{\sigma, \delta}^{m, 0}(T, +\infty)$ alors $v = t^{\sigma-\sigma'} u \in V_{\sigma', \delta}^{m, 0}(T, +\infty)$ puisque

$$t^{\sigma'+m} D_t^m v = \sum_{j=0}^m a_j t^{\sigma+j} D_t^j u \in L^2(T, +\infty).$$

Si maintenant $u \in V_{\sigma, \delta}^{m, p}(T, +\infty)$, $v = t^{\sigma-\sigma'} u$ vérifie : $D_t^h v = \sum_{j=0}^h a_j t^{\sigma-\sigma'-h+j} D_t^j u$.

Or, $D_t^j u \in V_{\sigma, \delta}^{m, 0}(T, +\infty)$, par suite $t^{\sigma-\sigma'} D_t^j u \in V_{\sigma', \delta}^{m, 0}(T, +\infty)$ d'après ce qui précède.

Utilisant la remarque précédente, on a aussi $t^{\sigma-\sigma'-h+j} D_t^j u \in V_{\sigma', \delta}^{m, 0}(T, +\infty)$. Par suite, $D_t^h v \in V_{\sigma', \delta}^{m, 0}(T, +\infty)$ pour $0 \leq h \leq p$, i.e. $v \in V_{\sigma', \delta}^{m, p}(T, +\infty)$.

La réciproque s'établit de manière analogue.

Proposition 2.6.

Les espaces $W_{\sigma, \delta}^{m, p}(T, +\infty)$ et $V_{\sigma, \delta}^{m, p}(T, +\infty)$ coïncident algébriquement et topologiquement.

Démonstration : Il suffit de le vérifier pour $p=0$. Par ailleurs, il est clair que $W_{\sigma, \delta}^{m, 0}(T, +\infty)$ s'injecte continûment dans $V_{\sigma, \delta}^{m, 0}(T, +\infty)$. Par contre, l'injection de $V_{\sigma, \delta}^{m, 0}(T, +\infty)$ dans $W_{\sigma, \delta}^{m, 0}(T, +\infty)$ résulte du lemme suivant:

Lemme 2.2. (de dérivées intermédiaires).

Si $u \in V_{\sigma, \delta}^{m, 0}(T, +\infty)$, alors $t^{\sigma+\delta m+j(1-\delta)} D_t^j u \in L^2(T, +\infty)$ pour $0 \leq j \leq m$.

Démonstration : On traite d'abord le cas $\sigma + \delta m = 0$.

On fait les changements de variable $y = t^\delta$ et de fonction $w(y) = y^{\frac{1-\delta}{2\delta}} u(t)$.

Par récurrence, il est facile de vérifier que l'on a :

$$D_y^p w(y) = y^{\frac{1-\delta}{2\delta}} \left(\sum_{j=0}^p \lambda_{jp} t^{j-\delta p} D_t^j u(t) \right)$$

avec $\lambda_{pp} = \delta^{-p}$.

Si $u \in V_{-\delta m, \delta}^{m, 0}(T, +\infty)$, alors $D_y^m w \in L^2(Y, +\infty)$ avec $Y = T^\delta$ d'après la remarque faite dans la démonstration de la proposition précédente. Comme $w \in L^2(Y, +\infty)$, on en déduit que $w \in H^m(Y, +\infty)$ et donc $D_y^p w \in L^2(Y, +\infty)$ pour $0 \leq p \leq m$. Il en résulte que

$\sum_{j=0}^p \lambda_{jp} t^{j-\delta p} D_t^j u \in L^2(T, +\infty)$ pour $0 \leq p \leq m$. On en déduit facilement que

$$t^{j(1-\delta)} D_t^j u \in L^2(T, +\infty) \text{ pour } 0 \leq j \leq m.$$

On traite maintenant le cas général. D'après la proposition précédente, si $u \in V_{\sigma, \delta}^{m, 0}(T, +\infty)$, $v = t^{\sigma + \delta m} u \in V_{-\delta m, \delta}^{m, 0}(T, +\infty)$ et donc $t^{p(1-\delta)} D_t^p v \in L^2(T, +\infty)$ pour

$0 \leq p \leq m$. Comme $t^{\sigma + \delta m + j(1-\delta)} D_t^j u = \sum_{p=0}^j a_{jp} t^{p-\delta j} D_t^p v$, on en déduit que :

$$t^{\sigma + \delta m + j(1-\delta)} D_t^j u \in L^2(T, +\infty) \text{ pour } 0 \leq j \leq m.$$

Proposition 2.7.

Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout entier $p \geq 0$ et pour tout $j = 0, \dots, m-1$, l'application : $u \longmapsto t^{\sigma + \delta m + j(1-\delta) - \varepsilon} D_t^j u$ est compacte de $W_{\sigma, \delta}^{m, p}(T, +\infty)$ dans $H^p(T, +\infty)$.

Démonstration : On suppose tout d'abord $p=0$.

Soit $(u_n)_n$ une suite de $W_{\sigma, \delta}^{m, 0}(T, +\infty)$ bornée par 1. Il existe une sous-suite, encore notée $(u_n)_n$, qui converge faiblement vers u dans $W_{\sigma, \delta}^{m, 0}(T, +\infty)$ et de plus, u est de norme ≤ 1 . On a donc : $(t^{\sigma + \delta m + j(1-\delta) - \varepsilon} D_t^j u_n)_n$ converge faiblement vers $t^{\sigma + \delta m + j(1-\delta) - \varepsilon} D_t^j u$ dans $L^2(T, +\infty)$. On va montrer qu'en fait :

$$(t^{\sigma + \delta m + j(1-\delta) - \varepsilon} D_t^j u_n)_n \text{ converge fortement vers } t^{\sigma + \delta m + j(1-\delta) - \varepsilon} D_t^j u \text{ dans } L^2(T, +\infty).$$

Puisque $j \leq m-1$, la suite $(t^{\sigma + \delta m + j(1-\delta) - \varepsilon} D_t^j u_n)_n$ est bornée dans $H^1(T, R)$ pour tout R avec $T \leq R < +\infty$. Par suite, $(t^{\sigma + \delta m + j(1-\delta) - \varepsilon} D_t^j u_n)_n$ converge fortement vers $t^{\sigma + \delta m + j(1-\delta) - \varepsilon} D_t^j u$ dans $L^2(T, R)$.

Or, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout entier n , pour tout $R \geq T$, on ait :

$$\| t^{\sigma + \delta m + j(1-\delta) - \varepsilon} D_t^j u_n \|_{L^2(R, +\infty)} \leq \frac{C}{R^\varepsilon} \text{ et } \| t^{\sigma + \delta m + j(1-\delta) - \varepsilon} D_t^j u \|_{L^2(R, +\infty)} \leq \frac{C}{R^\varepsilon}.$$

On en déduit facilement que la suite $(t^{\sigma + \delta m + j(1-\delta) - \varepsilon} D_t^j u_n)_n$ converge fortement vers $t^{\sigma + \delta m + j(1-\delta) - \varepsilon} D_t^j u$ dans $L^2(T, +\infty)$.

On traite maintenant le cas général. Il suffit de prouver que, pour tout $h = 0, \dots, p$, l'application $u \longmapsto D_t^h (t^{\sigma + \delta m + j(1-\delta) - \varepsilon} D_t^j u)$ est compacte de $W_{\sigma, \delta}^{m, p}(T, +\infty)$ dans $L^2(T, +\infty)$. Or :

$$D_t^h (t^{\sigma+\delta m+j(1-\delta)-\varepsilon} D_t^j u) = \sum_{\ell=0}^h a_{\ell j} t^{\sigma+\delta m+j(1-\delta)-\varepsilon-\ell} D_t^{j+h-\ell} u.$$

L'application : $u \longmapsto v = D_t^{h-\ell} u$ de $W_{\sigma,\delta}^{m,p}(T,+\infty)$ dans $W_{\sigma,\delta}^{m,0}(T,+\infty)$

est continue, et l'application :

$$v \longmapsto t^{\sigma+\delta m+j(1-\delta)-(\varepsilon+\ell)} D_t^j v \text{ de } W_{\sigma,\delta}^{m,0}(T,+\infty) \text{ dans } L^2(T,+\infty)$$

est compacte d'après ce qui précède.

Finalement :

$$u \longmapsto D_t^h (t^{\sigma+\delta m+j(1-\delta)-\varepsilon} D_t^j u) \text{ est compacte de } W_{\sigma,\delta}^{m,p}(T,+\infty) \text{ dans } L^2(T,+\infty).$$

b) Démonstration de la proposition 2.4 pour $p=0$.

On effectue les changements de variable $y = t^\delta$ et de fonction

$$w(y) = y^{\frac{\sigma}{\delta} + m + \frac{1-\delta}{2\delta}} u(t). \text{ On obtient alors la relation :}$$

$$P w(y) \equiv \sum_{\substack{k+j=m \\ \sigma+\delta k+j \in \mathbb{N}}} a_{kj} \delta^j D_y^j w(y) \equiv y^{\frac{1-\delta}{2\delta}} L^1 u(t)$$

$$\text{avec } L^1 \equiv L^1(t; D_t) \equiv L(t; D_t) + \sum_{\substack{k+j=m \\ \sigma+\delta k+j \in \mathbb{N}}} \sum_{p=0}^{j-1} a_{kj} \lambda_{jp} t^{\sigma+\delta(m-j)+p} D_t^p + \sum_{\substack{k+j < m \\ \sigma+\delta k+j \in \mathbb{N}}} a_{kj} t^{\sigma+\delta k+j} D_t^j,$$

les λ_{jp} étant des constantes convenables.

Il résulte de l'hypothèse (H_+) que l'opérateur P est linéaire continu-surjectif de $H^m(Y,+\infty)$ sur $L^2(Y,+\infty)$ avec $Y = T^\delta$. De plus, le noyau de P dans $H^m(Y,+\infty)$ est de dimension m_+ .

D'autre part, la correspondance $u \longmapsto w$ est un isomorphisme de $W_{\sigma,\delta}^{m,0}(T,+\infty)$ sur $H^m(Y,+\infty)$. Par suite, l'opérateur L^1 est un opérateur à indice, d'indice m_+ , de $W_{\sigma,\delta}^{m,0}(T,+\infty)$ sur $L^2(T,+\infty)$.

Appliquant la proposition 2.7, on en déduit que l'opérateur L est à indice, d'indice m_+ , de $W_{\sigma,\delta}^{m,0}(T,+\infty)$ dans $L^2(T,+\infty)$.

c) Démonstration de la proposition 2.4 pour $p \in \mathbb{N}$.

On commence par démontrer que l'opérateur L^1 est à indice, d'indice m_+ , de $W_{\sigma, \delta}^{m, p}(T, +\infty)$ sur $H^p(T, +\infty)$ pour tout entier $p \geq 0$. Pour $p = 0$, cela résulte de b). Ensuite, on raisonne par récurrence sur p . Supposons le résultat acquis pour p et montrons-le pour $p+1$.

Soient $f \in H^{p+1}(T, +\infty)$ et $u \in W_{\sigma, \delta}^{m, p}(T, +\infty)$ tels que $L^1 u = f$. On doit montrer que $u \in W_{\sigma, \delta}^{m, p+1}(T, +\infty)$. Calculant $D_t^{p+1} L^1 u$, on vérifie grâce au lemme de dérivées intermédiaires que $L^1(D_t^{p+1} u) \in L^2(T, +\infty)$. Par ailleurs, puisque $u \in W_{\sigma, \delta}^{m, p}(T, +\infty)$, $D_t^{p+1} u \in L^2(T, +\infty)$. Enfin, reprenant le changement de variable $y = t^\delta$, on vérifie facilement que le noyau de l'opérateur L^1 dans $L^2(T, +\infty)$ appartient à $\mathcal{L}([T, \infty[)$. Par suite, on déduit de b) que $D_t^{p+1} u \in W_{\sigma, \delta}^{m, 0}(T, +\infty)$, i.e. : $u \in W_{\sigma, \delta}^{m, p+1}(T, +\infty)$.

Utilisant la proposition 2.7, on en déduit que l'opérateur L est à indice, d'indice m_+ , de $W_{\sigma, \delta}^{m, p}(T, +\infty)$ dans $H^p(T, +\infty)$.

On peut compléter le résultat de la proposition 2.4 par :

Proposition 2.8.

On suppose que l'opérateur L satisfait à l'hypothèse (H_+) . Si $u \in L^2(T, +\infty)$ et si $Lu = 0$, alors $u \in \mathcal{L}([T, +\infty[)$.

Démonstration : Ce résultat est trivial si $L \equiv L^1$ d'après ce qui précède, (grâce au changement de variable $y = t^\delta$). Il suffit ensuite de considérer l'opérateur L comme une perturbation de l'opérateur L^1 (voir par exemple [4], proposition 3.3).

II.3.3. Démonstration du théorème 2.2 et de la proposition 2.2.

Soit R_T l'application qui, à une distribution u sur $\mathbb{R}_+$, associe le couple $(u|_{(0, T)}, u|_{(T, +\infty)})$ des restriction à $(0, T)$ et à $(T, +\infty)$ de u .

On considère le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 W_{\sigma,\delta}^{m,p}(0,T) \times W_{\sigma,\delta}^{m,p}(T,+\infty) & \xrightarrow{L_T} & H^p(0,T) \times H^p(T,+\infty) \\
 \uparrow R_T & & \uparrow R_T \\
 W_{\sigma,\delta}^{m,p}(\mathbb{R}_+) & \xrightarrow{L} & H^p(\mathbb{R}_+)
 \end{array}$$

où L_T est l'application : $(u,v) \longmapsto (Lu,Lv)$ pour $(u,v) \in W_{\sigma,\delta}^{m,p}(0,T) \times W_{\sigma,\delta}^{m,p}(T,+\infty)$.

L'opérateur R_T est à indice, d'indice $-(m+p)$, de $W_{\sigma,\delta}^{m,p}(\mathbb{R}_+)$ dans $W_{\sigma,\delta}^{m,p}(0,T) \times W_{\sigma,\delta}^{m,p}(T,+\infty)$; de même, R_T est à indice, d'indice $-p$, de $H^p(\mathbb{R}_+)$ dans $H^p(0,T) \times H^p(T,+\infty)$.

Des proposition 2.3 et 2.4, il résulte que l'opérateur L_T est à indice, d'indice $m_+ + r_p - \text{Min}(\sigma, p)$. Il en résulte que l'opérateur L est à indice, d'indice $m_+ - m + r_p - \text{Min}(\sigma, p)$, de $W_{\sigma,\delta}^{m,p}(\mathbb{R}_+)$ dans $H^p(\mathbb{R}_+)$.

Enfin, la proposition 2.2 résulte de ce théorème 2.2 et de la proposition 2.8.

II.3.4. Démonstration du théorème 2.1 et de la proposition 2.1.

La démonstration est analogue à celle de II.3.3.

III. DEMONSTRATION DES THEOREMES 1.1 et 1.3.

On se limitera à démontrer le théorème 1.1 ; la démonstration du théorème 1.3 étant analogue.

III.1. 1ère méthode : Méthode des quotients différentiels à partir d'estimations a priori.

III.1.1. Une estimation a priori.

Proposition 3.1.

Pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe un entier $p_0 \geq 0$ tel que pour tout entier $p \geq p_0$ et pour tout $q \in \mathbb{R}$, il existe deux constantes $C_{pq} > 0$ et $\varepsilon_p > 0$ telles que si $u \in W_{\sigma, \delta}^{m, p, q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } u \subset \{(t, x) \in I \times \Omega ; \|(t, x) - (0, x_0)\| < \varepsilon_p\}$ on ait :

$$\|u\|_{W_{\sigma, \delta}^{m, p, q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \leq C_{p, q} \left\{ \sum_{h=0}^p \|D_t^h Lu\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{\frac{p-h}{\delta} + q}(\mathbb{R}^n))} + \|u\|_{W_{\sigma, \delta}^{m, p, q-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \right\}.$$

Démonstration : On décompose l'opérateur L de la manière suivante :

$$L = L^0(x_0 ; D_x, D_t) + L^1 + L^2 + L^3$$

$$\text{avec } L^1 \equiv \sum_{\substack{|\alpha|+j \leq m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N}}} [a_{\alpha j}(t, x) - a_{\alpha j}(0, x_0)] t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_x^\alpha D_t^j ;$$

$$L^2 \equiv \sum_{\substack{|\alpha|+j \leq m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j < 0}} a_{\alpha j}(t, x) D_x^\alpha D_t^j ;$$

$$L^3 \equiv \sum_{\substack{|\alpha|+j \leq m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j > 0 \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \notin \mathbb{N}}} a_{\alpha j}(t, x) t^{[\sigma+\delta|\alpha|+j]} D_x^\alpha D_t^j .$$

a) Démonstration de la proposition 3.1 pour l'opérateur $L \equiv L^0$:

Par transformation de Fourier, par rapport à la variété tangentielle x dans $\mathbb{R}^n$, on associe à l'opérateur $L^0(x_0 ; D_x, D_t)$ l'opérateur différentiel ordinaire $L^0(x_0, \xi ; D_t)$ dépendant du paramètre $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$L^0(x_0, \xi; D_t) \equiv \sum_{\substack{|\alpha|+j \leq m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N}}} a_{\alpha j}(0, x_0) t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} \xi^\alpha D_t^j.$$

Appliquant le théorème 2.1 (la condition 3 du chapitre I étant supposée satisfaite), il existe un entier $p_0 \geq 0$ tel que pour tout $p \geq p_0$ et tout $\omega \in \mathbb{R}^n$, $|\omega| = 1$, l'opérateur $L^0(x_0; \omega; D_t)$ soit un isomorphisme de l'espace $W_{\sigma, \delta}^{m, p}(\mathbb{R})$ sur un sous-espace fermé de l'espace $H^p(\mathbb{R})$ (ce qui implique $p_0 \geq \sigma$). Par conséquent, pour $p \geq p_0$, il existe une constante $C_p > 0$ telle que pour tout $\omega \in \mathbb{R}^n$, $|\omega| = 1$, pour tout $v(s) \in W_{\sigma, \delta}^{m, p}(\mathbb{R})$ on ait :

$$(3.1) \quad \sum_{h=0}^p \sum_{\substack{|\alpha|+j \leq m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N}}} \|s^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_s^{j+h} v\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C_p \cdot \sum_{h=0}^p \|D_s^h L^0(x_0; \omega, D_s) v\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Pour $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ et $u(t) \in W_{\sigma, \delta}^{m, p}(\mathbb{R})$ on pose : $u(t) = v(s)$ avec $s = t|\xi|^{\frac{1}{\delta}}$. Il en résulte l'inégalité :

$$\sum_{h=0}^p \sum_{\substack{|\alpha|+j \leq m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N}}} |\xi|^{2(|\alpha| - \frac{h}{\delta})} \|t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_t^{j+h} u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C_p \cdot \sum_{h=0}^p |\xi|^{-\frac{2h}{\delta}} \|D_t^h L^0(x_0; \xi, D_t) u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Appliquant cette inégalité à $\hat{u}(t, \xi)$, transformée de Fourier partielle par rapport à x de $u \in W_{\sigma, \delta}^{m, p, q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{h=0}^p \sum_{\substack{|\alpha|+j \leq m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N}}} |\xi|^{2(|\alpha| + \frac{p-h}{\delta} + q)} \|t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_t^{j+h} \hat{u}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ & \leq C_p \cdot \sum_{h=0}^p |\xi|^{2(\frac{p-h}{\delta} + q)} \|D_t^h L^0(x_0; \xi, D_t) \hat{u}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

Pour $|\xi| \geq 1$, on en déduit que l'on a :

$$(3.2) \quad \begin{aligned} & \sum_{h=0}^p \sum_{\substack{|\alpha|+j \leq m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N}}} (1+|\xi|^2)^{|\alpha| + \frac{p-h}{\delta} + q} \|t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_t^{j+h} \hat{u}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ & \leq C_p \cdot \sum_{h=0}^p (1+|\xi|^2)^{\frac{p-h}{\delta} + q} \|D_t^h L^0(x_0; \xi, D_t) \hat{u}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \end{aligned}$$

avec une nouvelle constante C_p .

Pour $|\xi| \leq 1$, on obtient l'inégalité (3.1) avec $s=t$, $v=\hat{u}(t, \xi)$ et $\omega = \omega_0$ fixé, on obtient donc :

$$\sum_{h=0}^p \sum_{\substack{|\alpha|+j \leq m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N}}} \|t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_t^{j+h} \hat{u}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C_p \left\{ \sum_{h=0}^p \|D_t^h L^0(x_0; \xi, D_t) \hat{u}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right. \\ \left. + \sum_{h=0}^p \sum_{\substack{|\alpha|+j \leq m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N} \\ |\alpha| \geq 1}} \|D_t^h [t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} (\xi^\alpha - \omega_0^\alpha) D_t^j \hat{u}(t, \xi)]\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right\}$$

Or, pour tout $|\xi| \leq 1$, on a :

$$\sum_{h=0}^p \sum_{\substack{|\alpha|+j \leq m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N} \\ |\alpha| \geq 1}} \|D_t^h [t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} (\xi^\alpha - \omega_0^\alpha) D_t^j \hat{u}(t, \xi)]\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ \leq C \sum_{h=0}^p \sum_{\substack{|\alpha|+j \leq m \\ |\alpha| \geq 1 \\ 0 \leq \ell \leq h \\ \sigma+\delta|\alpha|+j-h+\ell \in \mathbb{N}}} \|t^{\sigma+\delta|\alpha|+j-h+\ell} D_t^{j+\ell} \hat{u}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

Par conséquent, si $u(t, x) = 0$ pour $|t| \geq T$, on obtient une majoration par :

$$C \cdot \left\{ \sum_{\substack{\text{Max}(0, -\sigma+p) \leq j \leq m+p \\ |\alpha| \geq 1, 0 \leq h \leq p}} T^{2(p-h+\delta|\alpha|)} \|t^{\sigma-p+j} D_t^j \hat{u}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \right. \\ \left. \sum_{0 \leq j \leq \text{Max}(0, -\sigma+p)-1} \|D_t^j \hat{u}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right\}$$

Par suite, il existe $T = \varepsilon_p > 0$ tel que pour tout $u \in W_{\sigma, \delta}^{m, p, q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ avec $u(t, x) = 0$ pour $|t| \geq \varepsilon_p$ et pour tout $|\xi| \leq 1$, on ait :

$$(3.3) \quad \sum_{h=0}^p \sum_{\substack{|\alpha|+j \leq m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N}}} (1+|\xi|^2)^{(|\alpha| + \frac{p-h}{\delta} + q)} \|t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_t^{j+h} \hat{u}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ \leq C \cdot \left\{ \sum_{h=0}^p (1+|\xi|^2)^{\frac{p-h}{\delta} + q} \|D_t^h L^0(x_0; \xi, D_t) \hat{u}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right. \\ \left. + \sum_{0 \leq j \leq \text{Max}(0, -\sigma+p)-1} (1+|\xi|^2)^{q-1} \|D_t^j \hat{u}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right\}.$$

Regroupant les inégalités (3.2) et (3.3), et en intégrant par rapport à $\xi \in \mathbb{R}^n$, on en déduit qu'il existe une constante $\varepsilon_p > 0$ telle que pour tout $u \in W_{\sigma, \delta}^{m, p, q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ avec $u(t, x) = 0$ pour $|t| \geq \varepsilon_p$, on ait :

$$\sum_{h=0}^p \sum_{\substack{|\alpha|+j \leq m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N}}} \|t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_t^{j+h} u\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{\frac{p-h}{\delta}+|\alpha|+q}(\mathbb{R}^n))} \\ \leq C \left\{ \sum_{h=0}^p \|D_t^h(Lu)\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{\frac{p-h}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n))} + \sum_{0 \leq j \leq \text{Max}(0, -\sigma+p)-1} \|D_t^j u\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{q-1}(\mathbb{R}^n))} \right\}$$

Enfin, utilisant l'inégalité de Hardy, il est facile de vérifier que

l'on a pour $u \in W_{\sigma, \delta}^{m, p, q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ avec $u(t, x) = 0$ pour $|t| \geq \varepsilon_p$:

$$\|D_t^j u\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{q-1}(\mathbb{R}^n))} \leq C \|t^{\sigma+m} D_t^{m+p} u\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{q-1}(\mathbb{R}^n))} \leq C \|u\|_{W_{\sigma, \delta}^{m, p, q-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)}$$

pour $0 \leq j \leq \text{Max}(0, -\sigma+p)-1$. Ceci achève la démonstration de la proposition 3.1 pour l'opérateur L^0 .

b) Démonstration de la proposition 3.1 pour l'opérateur $L \equiv L^0 + L^1$.

Il suffit d'estimer la somme :

$$\sum_{h=0}^p \sum_{\substack{|\alpha|+j \leq m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N}}} \|D_t^h [(a_{\alpha j}(t, x) - a_{\alpha j}(0, x_0)) t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_t^j D_x^\alpha u]\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{\frac{p-h}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n))}.$$

Pour $u \in W_{\sigma, \delta}^{m, p, q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ avec $\text{Supp } u$ contenu dans la boule de centre $(0, x_0)$ et de rayon ε_p , il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|D_t^h [(a_{\alpha j}(t, x) - a_{\alpha j}(0, x_0)) t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_t^j D_x^\alpha u]\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{\frac{p-h}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n))} \leq \\ \| (a_{\alpha j}(t, x) - a_{\alpha j}(0, x_0)) D_t^h (t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_t^j D_x^\alpha u) \|_{L^2(\mathbb{R}; H^{\frac{p-h}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n))} + \\ C \sum_{\ell=0}^{h-1} \|D_t^\ell (t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_t^j u)\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{|\alpha|+\frac{p-h}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n))}.$$

Or, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que :

$$\sum_{\ell=0}^{h-1} \|D_t^\ell (t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_t^j u)\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{|\alpha|+\frac{p-h}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n))} \leq \varepsilon \|D_t^h (t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_t^j u)\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{|\alpha|+\frac{p-h}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n))} \\ + C_\varepsilon \|t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_t^j u\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{|\alpha|+\frac{p-h}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n))}.$$

Par ailleurs, il existe $C > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} & \| (a_{\alpha j}(t, x) - a_{\alpha j}(0, x_0)) D_t^h (t^{\sigma+\delta} |\alpha| + j D_t^j D_x^\alpha u) \| \\ & \qquad \qquad \qquad L^2(\mathbb{R}; H^{\frac{p-h}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n)) \leq \\ & \sup_{\|(t,x)-(0,x_0)\| < \epsilon_p} |a_{\alpha j}(t,x) - a_{\alpha j}(0,x_0)| \| D_t^h (t^{\sigma+\delta} |\alpha| + j D_t^j u) \| \\ & \qquad \qquad \qquad L^2(\mathbb{R}; H^{|\alpha| + \frac{p-h}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n)) + \\ & C. \| D_t^h (t^{\sigma+\delta} |\alpha| + j D_t^j u) \| \\ & \qquad \qquad \qquad L^2(\mathbb{R}; H^{|\alpha| + \frac{p-h}{\delta}+q-1}(\mathbb{R}^n)) \end{aligned}$$

De plus, utilisant l'inégalité de Hardy, il vient :

$$\begin{aligned} & \| D_t^h (t^{\sigma+\delta} |\alpha| + j D_t^j u) \| \\ & \qquad \qquad \qquad L^2(\mathbb{R}; H^{|\alpha| + \frac{p-h}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n)) \leq \\ & C. \| t^{\sigma+\delta} |\alpha| + j D_t^{j+h} u \| \\ & \qquad \qquad \qquad L^2(\mathbb{R}; H^{|\alpha| + \frac{p-h}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \| D_t^h (t^{\sigma+\delta} |\alpha| + j D_t^j u) \| \\ & \qquad \qquad \qquad L^2(\mathbb{R}; H^{|\alpha| + \frac{p-h}{\delta}+q-1}(\mathbb{R}^n)) \leq \\ & C. \| t^{\sigma+\delta} |\alpha| + j D_t^{j+h} u \| \\ & \qquad \qquad \qquad L^2(\mathbb{R}; H^{|\alpha| + \frac{p-h}{\delta}+q-1}(\mathbb{R}^n)) \end{aligned}$$

Finalement, on obtient pour ϵ_p assez petit :

$$\begin{aligned} \| u \|_{W_{\sigma,\delta}^{m,p,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} & \leq C \left\{ \sum_{h=0}^p \| D_t^h (L^0 + L^1) u \|_{L^2(\mathbb{R}; H^{\frac{p-h}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n))} + \| u \|_{W_{\sigma,\delta}^{m,p,q-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} + \right. \\ & \left. \sum_{h=1}^p \sum_{|\alpha|+j \leq m} \| t^{\sigma+\delta} |\alpha| + j D_t^j u \|_{L^2(\mathbb{R}; H^{|\alpha| + \frac{p-h}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n))} \right\}. \end{aligned}$$

Or, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $C_\epsilon > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} & \| t^{\sigma+\delta} |\alpha| + j D_t^j u \|_{L^2(\mathbb{R}; H^{|\alpha| + \frac{p-h}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n))} \leq \epsilon \| t^{\sigma+\delta} |\alpha| + j D_t^j u \|_{L^2(\mathbb{R}; H^{|\alpha| + \frac{p}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n))} \\ & \qquad \qquad \qquad + C_\epsilon \| t^{\sigma+\delta} |\alpha| + j D_t^j u \|_{L^2(\mathbb{R}; H^{|\alpha| + \frac{p}{\delta}+q-1}(\mathbb{R}^n))} \end{aligned}$$

pour $h=1, \dots, p$. On en déduit facilement la proposition 3.1 pour l'opérateur $L^0 + L^1$.

c) Démonstration de la proposition 3.1 pour l'opérateur $L \equiv L^0 + L^1 + L^2$.

Il suffit d'établir l'estimation suivante : pour tout entier $p \geq 0$, pour tout $q \in \mathbb{R}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ telle que pour tout $u \in W_{\sigma, \delta}^{m, p, q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ on ait :

$$(3.4) \quad \sum_{h=0}^p \|D_t^h(L^2 u)\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{\frac{p-h}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n))} \leq \varepsilon \cdot \|u\|_{W_{\sigma, \delta}^{m, p, q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} + C_\varepsilon \cdot \|u\|_{W_{\sigma, \delta}^{m, p, q-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)}.$$

Pour cela, on rappelle qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in W_{\sigma, \delta}^{m, 0}(\mathbb{R})$ et $0 \leq j \leq -\sigma-1$, on ait :

$$\|D_t^j u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C \left\{ \|t^{\sigma+m} D_t^m u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|t^{\sigma+\delta m} u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right\}.$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $u \in W_{\sigma, \delta}^{m, 0}(\mathbb{R})$ et $0 \leq j \leq -\sigma-1$,

on a :

$$\|D_t^j u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C \cdot \left\{ \varepsilon \|t^{\sigma+m} D_t^m u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \varepsilon^{\frac{\sigma+\delta m+j}{\sigma+j}} \|t^{\sigma+\delta m} u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right\}.$$

On doit estimer des termes de la forme :

$$\|D_t^{j+\ell} u\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{|\alpha|+\frac{p-h}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n))}$$

pour $0 \leq \ell \leq h$, $\sigma + \delta|\alpha| + j < 0$ et $u \in W_{\sigma, \delta}^{m, p, q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

On applique l'inégalité précédente à la fonction $D_t^\ell \hat{u}(t, \xi)$ pour $\xi \in \mathbb{R}^n$, on multiplie les deux membres par :

$$(1+|\xi|)^{2|\alpha|+\frac{p-h}{\delta}+q}, \text{ on choisit } \varepsilon' = \varepsilon' (1+|\xi|)^{2\frac{h-\ell}{\delta}-|\alpha|},$$

puis on intègre par rapport à $\xi \in \mathbb{R}^n$; ce qui donne :

$$\|D_t^{j+\ell} u\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{|\alpha|+\frac{p-h}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n))}^2 \leq C \cdot \left\{ \varepsilon' \|t^{\sigma+m} D_t^{m+\ell} u\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{\frac{p-\ell}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n))}^2 + C_\varepsilon \|t^{\sigma+\delta m} D_t^\ell u\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{m+\frac{p-\ell}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n))}^2 \right\}.$$

On en déduit l'inégalité (3.4).

d) Démonstration de la proposition 3.1 pour l'opérateur $L \equiv L^0 + L^1 + L^2 + L^3$.

Il suffit d'établir l'estimation suivante : pour tout entier $p \geq 0$, pour tout $q \in \mathbb{R}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des constantes $C_{pq\varepsilon} > 0$ et $T_{p\varepsilon} > 0$ telles que pour tout $u \in W_{\sigma,\delta}^{m,p,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ avec $u(t,x) = 0$ pour $|t| \geq T_{p\varepsilon}$, on ait :

$$(3.5) \quad \sum_{h=0}^p \|D_t^h(L^3 u)\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{\frac{p-h}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n))} \leq \varepsilon \cdot \|u\|_{W_{\sigma,\delta}^{m,p,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} + C_{pq\varepsilon} \cdot \|u\|_{W_{\sigma,\delta}^{m,p,q-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)}.$$

Pour cela, on rappelle qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in W_{\sigma,\delta}^{m,p}(\mathbb{R})$, $0 \leq \ell \leq h \leq p$ et $\sigma + \delta|\alpha| + j - \ell \geq 0$, on a :

$$\|t^{\sigma+\delta|\alpha|+j-\ell} D_t^{h+j-\ell} u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C \cdot \left\{ \|t^{\sigma+m} D_t^{m+h} u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|t^{\sigma+\delta m} D_t^h u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right\}.$$

On doit estimer des termes de la forme :

$$\|t^{[\sigma+\delta|\alpha|+j]-\ell} D_t^{h+j-\ell} u\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{|\alpha|+\frac{p-h}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n))}$$

pour $0 \leq \ell \leq h \leq p$, $\sigma+\delta|\alpha|+j > 0$, $\sigma+\delta|\alpha|+j \notin \mathbb{N}$ et $0 \leq \ell \leq \text{Min}(h; [\sigma + \delta|\alpha|+j])$.

On applique l'inégalité précédente à la fonction $\hat{u}(\frac{t}{(1+|\xi|^2)^{1/2\delta}}, \xi)$, on effectue le changement de variable $y = \frac{t}{(1+|\xi|^2)^{1/2\delta}}$, on multiplie les deux membres par $(1+|\xi|^2)^{\frac{p-\sigma}{\varepsilon}+q}$, puis on intègre par rapport à $\xi \in \mathbb{R}^n$, ce qui donne :

$$\|t^{\sigma+\delta|\alpha|+j-\ell} D_t^{h+j-\ell} u\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{|\alpha|+\frac{p-h}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n))} \leq C \cdot \|u\|_{W_{\sigma,\delta}^{m,p,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)}.$$

Ainsi, lorsque $\sigma + \delta|\alpha| + j - \ell > 0$, on en déduit facilement l'inégalité

$$(3.5) \text{ pour le terme } \|t^{[\sigma+\delta|\alpha|+j]-\ell} D_t^{h+j-\ell} u\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{|\alpha|+\frac{p-h}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n))}$$

Il reste à étudier le cas $\ell = [\sigma + \delta|\alpha| + j]$. Pour cela, on procède comme ci-dessus en partant cette fois de l'inégalité :

$$\|D_t^{h+j-\ell} u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C \cdot \left\{ \|t^{\sigma+m} D_t^{m+h} u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|t^{\sigma+\delta m} D_t^h u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right\}$$

pour $u \in W_{\sigma, \delta}^{m, p}(\mathbb{R})$, $0 \leq \ell \leq h \leq p$ et $0 \leq h+j-\ell \leq -\sigma+h$.

On en déduit pour $h+j-\ell \geq 0$ avec $\ell = [\sigma+\delta|\alpha|+j]$ l'inégalité :

$$(3.6) \quad \|D_t^{h+j-\ell} u\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{\frac{p-h-j+\ell-\sigma}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n))} \leq C \cdot \|u\|_{W_{\sigma, \delta}^{m, p, q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)}.$$

Or, puisque $\ell = [\sigma+\delta|\alpha|+j]$ et $\sigma+\delta|\alpha|+j \notin \mathbb{N}$, on a : $\frac{p-h-j+\ell-\sigma}{\delta} > \frac{p-h}{\delta} + |\alpha|$. Par suite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ telle que pour tout $u \in W_{\sigma, \delta}^{m, p, q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, on ait :

$$\|D_t^{h+j-\ell} u\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{|\alpha| + \frac{p-h}{\delta} + q}(\mathbb{R}^n))} \leq \varepsilon \cdot \|u\|_{W_{\sigma, \delta}^{m, p, q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} + C_\varepsilon \cdot \|D_t^{h+j-\ell} u\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{\frac{p-h-j+\ell-\sigma}{\delta}+q-1}(\mathbb{R}^n))}$$

et compte-tenu de (3.6) dans laquelle on remplace q par $q-1$, on obtient l'inégalité

$$\|D_t^{h+j-\ell} u\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{|\alpha| + \frac{p-h}{\delta} + q}(\mathbb{R}^n))} \leq \varepsilon \cdot \|u\|_{W_{\sigma, \delta}^{m, p, q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} + C_\varepsilon \cdot \|u\|_{W_{\sigma, \delta}^{m, p, q-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)}.$$

Ceci achève la démonstration de (3.5). La proposition 3.1 est démontrée.

III.1.2. Régularité partielle.

On conserve les notations de la proposition 3.1.

Proposition 3.2.

Si $u \in W_{\sigma, \delta}^{m, p, q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } u \subset \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n ; \|(t, x) - (0, x_0)\| < \varepsilon_p\}$ et si $D_t^h(Lu) \in L^2(\mathbb{R}; H^{\frac{p-h}{\delta}+q+1}(\mathbb{R}^n))$ pour $0 \leq h \leq p$, alors $u \in W_{\sigma, \delta}^{m, p, q+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

Démonstration : On utilise la méthode des quotients différentiels par rapport à la variable x . Pour $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $i=1, \dots, n$, on pose :

$$\begin{aligned} \tau_{ih} v(t, x) &= v(t; x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) \\ \rho_{ih} v(t, x) &= \frac{1}{h} (\tau_{ih} v(t, x) - v(t, x)). \end{aligned}$$

On a :

$$L(\rho_{ih}u) = \rho_{ih}(Lu) + \sum_{|\alpha|+j \leq m} \rho_{ih}(a_{\alpha j})(t,x) t^{[\sigma+\delta|\alpha|+j]} D_t^j D_x^\alpha (\tau_{ih} u(t,x)).$$

On applique la proposition 3.1 à la fonction $\rho_{ih}u$, pour $u \in W_{\sigma,\delta}^{m,p,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } u \subset \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n ; \|(t,x) - (0,x_0)\| < \varepsilon_p\}$ et h suffisamment petit :

$$\|\rho_{ih}u\|_{W_{\sigma,\delta}^{m,p,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \leq C_{p,q} \cdot \left\{ \sum_{h=0}^p \|D_t^h L(\rho_{ih}u)\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{\frac{p-h}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n))} + \|\rho_{ih}u\|_{W_{\sigma,\delta}^{m,p,q-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \right\}.$$

D'après l'expression de $L(\rho_{ih}u)$, il vient donc :

$$\|\rho_{ih}u\|_{W_{\sigma,\delta}^{m,p,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \leq C_{p,q} \cdot \left\{ \sum_{h=0}^p \|D_t^h \rho_{ih}(Lu)\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{\frac{p-h}{\delta}+q}(\mathbb{R}^n))} + \|u\|_{W_{\sigma,\delta}^{m,p,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} + \|\rho_{ih}u\|_{W_{\sigma,\delta}^{m,p,q-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \right\}.$$

Par suite, il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\|\rho_{ih}u\|_{W_{\sigma,\delta}^{m,p,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \leq C \cdot \left\{ \sum_{h=0}^p \|D_t^h Lu\|_{L^2(\mathbb{R}; H^{\frac{p-h}{\delta}+q+1}(\mathbb{R}^n))} + \|u\|_{W_{\sigma,\delta}^{m,p,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)} \right\}.$$

On en déduit que $D_{x_i} u \in W_{\sigma,\delta}^{m,p,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, et ceci pour $i=1, \dots, n$.

Finalement, $u \in W_{\sigma,\delta}^{m,p,q+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, ce qui achève la démonstration.

III.1.3. Démonstration du théorème 1.1.

Soit $u \in C^\infty(I; \mathcal{D}'(\Omega))$ tel que $Lu \in C^\infty(I' \times \Omega')$ et soit $(t_0, x_0) \in I' \times \Omega'$.

On doit montrer que u est indéfiniment dérivable au point (t_0, x_0) .

Pour $t_0 \neq 0$, le résultat est classique puisque l'opérateur L est elliptique en tout point (t,x) pour lequel $t \neq 0$.

Si $t_0 = 0$, soit V un voisinage ouvert du point $(0, x_0)$ avec $V \subseteq I' \times \Omega'$ et soit $\phi \in \mathcal{D}(I' \times \Omega')$ avec $\phi = 1$ sur V . D'après le lemme 2.1, pour tout entier $p \geq 0$, il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $\phi u \in W_{\sigma, \delta}^{m, p, q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. En particulier, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(V)$, $\varphi u = \varphi \phi u \in W_{\sigma, \delta}^{m, p, q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Choisissons $p \geq p_0$ où p_0 est l'entier associé au point x_0 comme dans la proposition 3.1, et $\varphi \in \mathcal{D}(V)$ de la forme $\varphi(t, x) = \varphi_1(t) \varphi_2(x)$ avec $\text{supp } \varphi \subset \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n ; \|(t, x) - (0, x_0)\| < \varepsilon_p\}$.

On vérifie alors que :

$$D_t^h L(\varphi u) \in L^2(\mathbb{R}; H_{\delta}^{\frac{p-h}{\delta} + q + 1}(\mathbb{R}^n)) \text{ pour } 0 \leq h \leq p. \text{ Il en résulte que :}$$

$\varphi u \in W_{\sigma, \delta}^{m, p, q+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Itérant le raisonnement, on en déduit que $\varphi u \in W_{\sigma, \delta}^{m, p, q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ pour tout q .

Enfin, comme $\bigcap_{\substack{p \geq p_0 \\ q \in \mathbb{R}}} W_{\sigma, \delta}^{m, p, q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, on en déduit que u est

indéfiniment dérivable au point $(0, x_0)$.

III.2. 2ème méthode : Construction d'une parametrix partielle.

Nous utilisons ici les techniques de [15] dans la présentation de [25].

III.2.1. Opérateurs pseudo-différentiels à valeurs vectorielles.

Cette notion d'opérateurs pseudo-différentiels à valeurs vectorielles a déjà été utilisée dans [15], [25], [27]. Soient deux espaces de Hilbert complexes F_1 , F_2 et $\mathcal{L}(F_1, F_2)$ l'espace des opérateurs continus de F_1 dans F_2 .

Etant donné un ouvert Ω , on définit l'espace des symboles $S^m(\Omega \times \mathbb{R}^n; F_1, F_2)$ comme l'espace des fonctions $p(x, \xi)$ indéfiniment dérivables sur $\Omega \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathcal{L}(F_1, F_2)$ telles que : pour tout compact K de Ω , pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$, il existe une constante $C_{K, \alpha, \beta} > 0$ telle que, pour tout $x \in K$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on ait :

$$\|D_x^\beta D_\xi^\alpha p(x, \xi)\|_{\mathcal{L}(F_1, F_2)} \leq C_{K, \alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m - |\alpha|}.$$

On définit alors $L^m(\Omega ; F_1, F_2)$ comme l'espace des opérateurs pseudo-différentiels dont le symbole est dans S^m ; l'opérateur P de symbole $p(x, \xi)$ est défini, pour $u \in C_0^\infty(\Omega ; F_1)$, par :

$$Pu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i \langle x, \xi \rangle} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi$$

et on a : $Pu \in C^\infty(\Omega ; F_2)$.

Dans [25], on a utilisé sur F_1 et F_2 des normes qui dépendent de ξ . Il se trouve en effet que, comme nous le verrons après sur des exemples, les normes dépendant de ξ s'introduisent très naturellement sur les espaces de Hilbert considérés. On note F_i^ξ , l'espace F_i , muni de la norme dépendant de ξ pour $i=1,2$.

On définit alors de manière naturelle les symboles $p(x, \xi)$ dans $S^m(\Omega \times \mathbb{R}^n ; F_1^\xi, F_2^\xi)$. Pour que les théorèmes classiques soient vrais (continuité dans H^s , composition), il faut imposer des conditions de "continuité" en ξ , que nous ne préciserons pas ici, et la condition suivante : il existe des constantes $C_0, C_1 > 0$, $(N_0, N_1) \in \mathbb{R}^2$ telles que, pour tout $v \in F_i$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on ait :

$$C_0 (1+|\xi|)^{N_0} \|v\|_{F_i^0} \leq \|v\|_{F_i^\xi} \leq C_1 \cdot (1+|\xi|)^{N_1} \|v\|_{F_i^0}$$

pour $i=1,2$.

III.2.2. Normes dépendant d'un paramètre sur $H^p(\mathbb{R})$ et $W_{\sigma, \delta}^{m, p}(\mathbb{R})$.

On considère sur l'espace $W_{\sigma, \delta}^{m, p}(\mathbb{R})$, pour $p \geq \sigma$ et $p \geq 0$, le produit scalaire suivant : pour $u, v \in W_{\sigma, \delta}^{m, p}(\mathbb{R})$ et pour $\xi \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$(u, v)_{m, p, \sigma, \delta, \xi} = \sum_{\substack{|\alpha|+j \leq m \\ h+l \leq p}} \left[(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{\delta}} [(\sigma+\delta|\alpha|+j-l)^+ - j-h-\sigma+p] \right. \\ \left. (|t|^{(\sigma+\delta|\alpha|+j-l)^+} D_t^{j+h} u, |t|^{(\sigma+\delta|\alpha|+j-l)^+} D_t^{j+h} v)_{L^2(\mathbb{R})} \right],$$

$$\|u\|_{m, p, \sigma, \delta, \xi} = \sqrt{(u, u)_{m, p, \sigma, \delta, \xi}},$$

où pour tout nombre réel A , $(A)^+ = \sup(0, A)$.

De même, pour $u, v \in H^p(\mathbb{R})$, on pose :

$$(u, v)_{p, \delta, \xi} = \sum_{h=0}^p (1+|\xi|^2)^{\frac{p-h}{\delta}} (D_t^h u, D_t^h v)_{L^2(\mathbb{R})},$$

$$\|u\|_{p, \delta, \xi} = \sqrt{(u, u)_{p, \delta, \xi}}.$$

Pour $|\xi| = 0$, on obtient des normes équivalentes aux normes des espaces $W_{\sigma, \delta}^{m, p}(\mathbb{R})$ et $H^p(\mathbb{R})$ respectivement. De plus, il existe des constantes $C_0, C_1 > 0$ telles que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, pour tout $u \in H^p(\mathbb{R})$ et tout $v \in W_{\sigma, \delta}^{m, p}(\mathbb{R})$, on ait :

$$C_0 \cdot \|u\|_{p, \delta, 0} \leq \|u\|_{p, \delta, \xi} \leq C_1 \cdot (1+|\xi|^2)^{\frac{p}{2\delta}} \|u\|_{p, \delta, 0}$$

et

$$C_0 \cdot \|v\|_{m, p, \sigma, \delta, 0} \leq \|v\|_{m, p, \sigma, \delta, \xi} \leq C_1 \cdot (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}(m + \frac{p}{\delta})} \|v\|_{m, p, \sigma, \delta, 0}.$$

On utilisera dans la suite la propriété suivante :

Proposition 3.3.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe $C_\alpha > 0$ telle que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, pour tout $u, v \in H^p(\mathbb{R})$ (resp. $W_{\sigma, \delta}^{m, p}(\mathbb{R})$), on ait :

$$|D_\xi^\alpha ((u, v)_{p, \delta, \xi})| \leq C_\alpha (1+|\xi|^2)^{-\frac{|\alpha|}{2}} \|u\|_{p, \delta, \xi} \|v\|_{p, \delta, \xi}$$

$$\text{(resp. } |D_\xi^\alpha ((u, v)_{m, p, \sigma, \delta, \xi})| \leq C_\alpha (1+|\xi|^2)^{-\frac{|\alpha|}{2}} \|u\|_{m, p, \sigma, \delta, \xi} \cdot \|v\|_{m, p, \sigma, \delta, \xi}).$$

Démonstration : elle est immédiate.

III.2.3. Remarques préliminaires.

On ne s'intéresse aux propriétés de l'opérateur L que dans un voisinage de $t=0$ (arbitrairement petit) puisque L est supposé elliptique pour $t \neq 0$. On va alors montrer que L , convenablement modifié en dehors d'un voisinage de $t=0$, peut être considéré comme un opérateur pseudo-différentiel dans $L^0(\Omega; W_{\sigma, \delta}^{m, p, \xi}(\mathbb{R}))$,

$H^{p,\xi}(\mathbb{R})$) qui admet, pour p assez grand, une paramétrix dans $L^0(\Omega; H^{p,\xi}(\mathbb{R}), W_{\sigma,\delta}^{m,p,\xi}(\mathbb{R}))$.

Comme au paragraphe III.1.1, on décompose L sous la forme $L = L^0 + L^1 + L^2 + L^3$.

On suppose, par commodité, que l'intervalle I est $I =]-1, +1[$ et on choisit

$\varphi(t) \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\varphi(t) = 1$ si $t \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Enfin, pour $\varepsilon > 0$, on pose :

$$L^\varepsilon(x, t; D_x, D_t) \equiv L^\varepsilon = L^0 + \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) L^1 + \varphi(t) L^2 + \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) L^3.$$

Pour $|t| < \frac{\varepsilon}{2}$, on a : $L^\varepsilon \equiv L$.

On a alors :

Proposition 3.4.

Etant donné un entier $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq \sigma$, pour tout ε avec $0 \leq \varepsilon \leq 1$, on a :

$$L^\varepsilon(x, t; \xi, D_t) \in S^0(\Omega \times \mathbb{R}^n; W_{\sigma,\delta}^{m,p,\xi}(\mathbb{R}), H^{p,\xi}(\mathbb{R})).$$

Proposition 3.5.

On suppose Ω relativement compact. Il existe un entier $p_0 \geq 0$ tel que pour tout entier $p \geq p_0$, il existe $\varepsilon > 0$, $A > 0$, $C_p > 0$ tels que, pour tout $x \in \Omega$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ avec $|\xi| \geq A$, pour tout $u \in W_{\sigma,\delta}^{m,p}(\mathbb{R})$, on ait :

$$\|u\|_{m,p,\sigma,\delta,\xi} \leq C_p \|L^\varepsilon(x; t; \xi, D_t)u\|_{p,\delta,\xi}.$$

La démonstration de la proposition 3.4 est immédiate ; par contre, la démonstration de la proposition 3.5 sera faite en plusieurs étapes comme dans le cas de la proposition 3.1. Nous nous limiterons à donner les idées essentielles de chaque étape.

a) Démonstration de la proposition 3.5 pour l'opérateur L^0 .

Cela résulte trivialement du § III.1.1, a). En effet, il résulte facilement de l'inégalité (3.2) qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ (avec $p_0 \geq \sigma$) tel que pour tout entier $p \geq p_0$, il existe $C_p > 0$ telle que pour tout $x \in \Omega$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| \geq 1$, pour tout $u \in W_{\sigma,\delta}^{m,p}(\mathbb{R})$, on ait :

$$(3.7) \quad \|u\|_{m,p,\sigma,\delta,\xi} \leq C_p \cdot \|L^0(x; \xi, D_t)u\|_{p,\delta,\xi}.$$

b) Démonstration de la proposition 3.5 pour l'opérateur $L^0 + \varphi(\frac{t}{\varepsilon}) L^1$.

D'après a), il suffit d'établir que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq \sigma$, pour tout $\eta > 0$, il existe $\varepsilon_1 > 0$, $A_1 > 0$ tels que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, pour tout $x \in \Omega$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ avec $|\xi| \geq \frac{A_1}{\varepsilon^{p\delta}} \geq 1$, pour tout $u \in W_{\sigma,\delta}^{m,p}(\mathbb{R})$, on ait :

$$(3.8) \quad \left\| \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) L^1(x; t; \xi, D_t)u \right\|_{p,\delta,\xi} \leq \eta \cdot \|u\|_{m,p,\sigma,\delta,\xi}.$$

En revenant à l'expression de L^1 , on démontre facilement que pour $p \geq \sigma$, $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ avec $|\xi| \geq 1$, il existe $C_p > 0$ telle que :

$$\left\| \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) L^1(x, t; \xi, D_t)u \right\|_{p,\delta,\xi} \leq C_p \cdot \varepsilon \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^{p|\xi|^{1/\delta}}}\right) \cdot \|u\|_{m,p,\sigma,\delta,\xi}.$$

On en déduit l'inégalité (3.8).

c) Démonstration de la proposition 3.5 pour l'opérateur $L^0 + \varphi(\frac{t}{\varepsilon}) L^1 + \varphi(t) L^2$.

Il suffit de montrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq \sigma$, pour tout $\eta > 0$, il existe $A_2 > 0$ tel que pour tout $x \in \Omega$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ avec $|\xi| \geq A_2$, pour tout $u \in W_{\sigma,\delta}^{m,p}(\mathbb{R})$ on ait :

$$(3.9) \quad \left\| \varphi(t) L^2(x, t; \xi, D_t)u \right\|_{p,\delta,\xi} \leq \eta \cdot \|u\|_{m,p,\sigma,\delta,\xi}.$$

On obtient facilement pour $|\xi| \geq 1$, l'inégalité :

$$\left\| \varphi(t) L^2(x, t; \xi, D_t)u \right\|_{p,\delta,\xi} \leq C_p \cdot |\xi|^{-\frac{\theta}{\delta}} \cdot \|u\|_{m,p,\sigma,\delta,\xi}$$

où $\theta = - \max_{\substack{|\alpha|+j \leq m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j < 0}} (\sigma + \delta|\alpha| + j)$. D'où l'inégalité (3.9).

d) Démonstration de la proposition 3.5 pour l'opérateur $L^\varepsilon = L^0 + \varphi(\frac{t}{\varepsilon}) L^1 + \varphi(t) L^2 + \varphi(\frac{t}{\varepsilon}) L^3$.

On montre que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq \sigma$, pour tout $\eta > 0$, il existe $\varepsilon_3 > 0$, $A_3 > 0$ tels que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_3$, pour tout $x \in \Omega$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ avec $|\xi| \geq \frac{A_3}{\varepsilon^{p\delta}} \geq 1$, pour tout $u \in W_{\sigma,\delta}^{m,p}(\mathbb{R})$, on ait :

$$(3.10) \quad \left\| \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) L^3(x, t; \varepsilon, D_t) u \right\|_{p, \delta, \varepsilon} \leq \eta \|u\|_{m, p, \sigma, \delta, \varepsilon}.$$

Evaluant chaque terme de $\varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) L^3(x, t; \varepsilon, D_t) u$, on obtient :

$$\left\| \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) L^3(x, t; \varepsilon, D_t) u \right\|_{p, \delta, \varepsilon} \leq C \cdot (\varepsilon^\theta + |\varepsilon|^{-\frac{\theta}{\delta}} + \frac{1}{\varepsilon^p |\varepsilon|^{1/\delta}}) \cdot \|u\|_{m, p, \sigma, \delta, \varepsilon}$$

où $\theta = \min_{\substack{\sigma + \delta|\alpha| + j > 0 \\ \sigma + \delta|\alpha| + j \notin \mathbb{N}}} ([\sigma + \delta|\alpha| + j] - (\sigma + \delta|\alpha| + j))$. On en déduit facilement (3.10).

Enfin, la proposition 3.5 résulte des inégalités (3.7).....(3.10).

III.2.4. Construction d'une paramétrix partielle.

On va construire une paramétrix partielle pour l'opérateur L^ε . Pour la commodité, on notera : $L^\varepsilon(x, t; \varepsilon, D_t) \equiv L(x, \varepsilon)$, ε étant fixé en fonction de p comme dans la proposition 3.5 ; $F_1^\varepsilon = W_{\sigma, \delta}^{m, p, \varepsilon}(\mathbb{R})$, $F_2^\varepsilon = H^{p, \varepsilon}(\mathbb{R})$.

On a donc un opérateur $L^\varepsilon(x, t; \varepsilon, D_t)$ dont le symbole $L(x, \varepsilon)$ appartient à $S^0(\Omega \times \mathbb{R}^n; F_1^\varepsilon, F_2^\varepsilon)$ et tel qu'il existe $C > 0$, $A > 0$ tels que pour tout $x \in \Omega$, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, avec $|\varepsilon| \geq A$, pour tout $u \in F_1^\varepsilon$, on ait :

$$\|u\|_{F_1^\varepsilon} \leq C \cdot \|L(x, \varepsilon)u\|_{F_2^\varepsilon}.$$

Il n'est pas difficile de montrer que l'hypoellipticité partielle résulterait d'un théorème de [15], et l'existence d'une paramétrix partielle résulterait d'un théorème de [3]. Mais nous préférons construire dans ce cas particulier une paramétrix partielle afin d'obtenir la régularité maximale. L'idée suivie est celle de [3], mais on doit tenir compte de la dépendance en ε des normes.

On définit $L^*(x, \varepsilon)$ par : pour tout $u \in F_2$, pour tout $v \in F_1$:

$$(L^*(x, \varepsilon) u, v)_{F_1^\varepsilon} = (u, L(x, \varepsilon) v)_{F_2^\varepsilon}.$$

Proposition 3.6.

On a :

$$(i) \quad L^*(x, \xi) \in S^0(\Omega \times \mathbb{R}^n; F_2^\xi, F_1^\xi),$$

$$(ii) \quad L^*(x, \xi) \circ L(x, \xi) \in S^0(\Omega \times \mathbb{R}^n; F_1^\xi, F_1^\xi),$$

(iii) $L^*(x, \xi) \circ L(x, \xi)$ est, pour $|\xi| \geq A$, un isomorphisme de F_1 sur F_1 et on a :

il existe $C > 0$, $A > 0$ tels que pour tout $x \in \Omega$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ avec

$|\xi| \geq A$, pour tout $u \in F_1^\xi$, on ait :

$$\|u\|_{F_1^\xi} \leq C. \|L^*(x, \xi) \circ L(x, \xi)u\|_{F_1^\xi}.$$

Démonstration : Le point (iii) est immédiat ; le point (ii) se déduit facilement de (i). Montrons donc le point (i). De l'identité :

$$(L^*(x, \xi)u, L^*(x, \xi)u)_{F_1^\xi} = (u, L(x, \xi) \circ L^*(x, \xi)u)_{F_2^\xi}$$

on déduit l'inégalité :

$$\|L^*(x, \xi)u\|_{F_1^\xi} \leq C. \|u\|_{F_2^\xi}.$$

Ensuite, en raisonnant par récurrence et en utilisant les propriétés de $L(x, \xi)$ et la proposition 3.3, on obtient aisément (i).

On peut maintenant construire une paramétrix partielle pour $L^E(x, t; D_x, D_t)$.

Il résulte des points (ii) et (iii) de cette proposition 3.6 que l'on peut construire un inverse $R(x, \xi)$ tel que pour $|\xi| \geq A$:

$$R(x, \xi) \circ L^*(x, \xi) \circ L(x, \xi) = I$$

$$L^*(x, \xi) \circ L(x, \xi) \circ R(x, \xi) = I$$

et pour tout $u \in F_1$,

$$\|R(x, \xi)u\|_{F_1^\xi} \leq C. \|u\|_{F_1^\xi}.$$

Il résulte alors de ces relations que $R(x, \xi)$, convenablement modifié pour $|\xi| < A$ est un symbole dans $S^0(\Omega \times \mathbb{R}^n; F_2^\xi, F_1^\xi)$.

On construit alors classiquement un opérateur pseudo-différentiel $R^p(x; D)$ dont le symbole est dans $S^0(\Omega \times \mathbb{R}^n; F_2^\xi, F_1^\xi)$ avec pour symbole principal $R(x, \xi) \circ L^*(x, \xi)$ et tel que :

- $R^p(x; D) \circ L^\varepsilon(x, t; D_x, D_t) = I + S^p(x; D)$;
- $R^p(x; D)$ est continu de $H_{\text{comp}}^s(\Omega; F_2^\varepsilon)$ dans $H_{\text{loc}}^s(\Omega; F_1^\varepsilon)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$;
- $S^p(x; D)$ est un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole est dans $S^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^n; F_1^\varepsilon, F_1^\varepsilon)$ et donc $S^p(x; D)$ est continu de $H_{\text{comp}}^s(\Omega; F_1^\varepsilon)$ dans $H_{\text{loc}}^t(\Omega; F_1^\varepsilon)$ pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$.

Une telle paramétrix partielle, qui dépend de p , va permettre de démontrer le théorème 1.1.

III.2.5. Démonstration du théorème 1.1.

On se donne p entier avec $p \geq p_0$ et $\varepsilon > 0$. Comme dans la proposition 3.5.

Soit $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{D}'(\overline{\Omega}))$; d'après le lemme 2.1, $u \in H^t(\Omega; W_{\sigma, \delta}^{m, p, \varepsilon}(\mathbb{R}))$ pour un t convenable. Par ailleurs, $L^\varepsilon u$ est dans $H_{\text{loc}}^s(\Omega; H^{p, \varepsilon}(\mathbb{R}))$ pour tout $s \in \mathbb{R}$; on déduit de III.2.4 que $u \in H_{\text{loc}}^s(\Omega; W_{\sigma, \delta}^{m, p, \varepsilon}(\mathbb{R}))$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Ceci étant valable pour tout entier $p \geq p_0$, le théorème 1.1 est démontré.

IV. ETUDE DES CONDITIONS 3 ET 3'.

On commence par étudier le cas $\delta = 1$ qui, dans cette étude, joue un rôle particulier.

IV. Cas où $\delta = 1$.

D'une manière générale, les opérateurs L pour lesquels $\delta = 1$ et satisfaisant les conditions 1 et 2 sont partiellement hypoelliptiques dans $I \times \Omega$; en d'autres termes, la condition 3 est toujours satisfaite, ceci résulte de la remarque 2.3. En particulier, lorsque $\sigma = -m$, les opérateurs L sont les opérateurs elliptiques et on retrouve le fait qu'ils sont hypoelliptiques (cf. remarque 1.1).

Par contre, pour de tels opérateurs, la condition 3' n'est pas toujours satisfaite. Par exemple, l'opérateur $Lu \equiv (D_t^2 + D_x^2) \{tu\} + \lambda D_t u + \mu D_x u$ est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$, par contre, utilisant le :

Lemme 4.1.

Soit $\mathcal{L} \equiv s P^2(D_s) + P^1(D_s)$ où $P^i(D_s)$ pour $i = 1, 2$ est un polynôme différentiel de degré i à coefficients constants complexes ; on suppose que le coefficient de D_s^2 dans $P^2(D_s)$ est égal à 1 et que le polynôme $P^2(\tau)$ admet deux racines τ_+ et τ_- avec $\text{Im } \tau_+ > 0$ et $\text{Im } \tau_- < 0$.

Alors : $\text{Ker } \mathcal{L} \cap \mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+) = \{0\}$ si et seulement si la condition

(C) suivante n'est pas satisfaite :

(C) Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que : $P^1(\tau_+) = i p (\tau_+ - \tau_-)$.

(Ce lemme est une conséquence immédiate du théorème 2.1, § III de [4]).

Cet opérateur $Lu \equiv (D_t^2 + D_x^2) \{tu\} + \lambda D_t u + \mu D_x u$ est partiellement hypoelliptique dans $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}$ si et seulement si $\mu \neq \pm (2p + i\lambda)$, p entier ≥ 1 .

IV.2. Cas où $\delta \neq 1$.

Lorsque $\delta \neq 1$, on va donner deux méthodes qui, par un changement de variable, ramènent au cas $\delta = 1$.

IV.2.1. 1ère méthode : Dans ce paragraphe, nous allons appliquer une méthode assez simple pour répondre aux conditions 3 et 3' ; celle-ci permet en particulier de retrouver des résultats déjà connus [12], [13].

La méthode consiste à trouver d'abord une décomposition du noyau de l'opérateur L dans $\mathcal{S}$ puis, par un changement de variable, de se ramener au cas $\delta = 1$ et plus précisément, à utiliser la condition (C) du lemme 4.1. Signalons que cette idée de décomposition a déjà été utilisée (différemment) dans [12].

a) Etude des conditions 3 et 3' pour le cas des opérateurs d'ordre 2.

On va étudier le noyau dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ des opérateurs L à une variable, de la forme :

$$Lu(t) \equiv a_{02} t^{\sigma+2} D_{t^2}^2 u + a_{01} t^{\sigma+1} D_t u + a_{00} t^{\sigma} u + a_{11} t^{\sigma+\delta+1} D_t u + a_{10} t^{\sigma+\delta} u + a_{20} t^{\sigma+2\delta} u$$

où $\sigma \in \mathbb{Z}$ avec $\sigma \geq -2$, $\delta > 0$ avec $\sigma + 2\delta \in \mathbb{N}$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$ avec $a_{02} = 1$ et $a_{ij} = 0$ si $\sigma + \delta i + j \notin \mathbb{N}$.

On supposera que le polynôme $P(\tau) \equiv a_{02} \tau^2 + a_{11} \tau + a_{20}$ admet deux racines τ_+ et τ_- avec $\text{Im } \tau_+ > 0$ et $\text{Im } \tau_- < 0$.

L'équation caractéristique $F(\lambda) = 0$ associée à L en $t=0$ s'écrit :

$$F(\lambda) \equiv -a_{02} \lambda(\lambda-1) - i a_{01} \lambda + a_{00} = 0.$$

La condition $\sigma + 2\delta \in \mathbb{N}$ impose à δ d'être de la forme : ou bien $\delta = k$ entier > 0 , ou bien $\delta = \frac{2k+1}{2}$ avec k entier ≥ 0 . On commence par étudier le cas $\delta = k$ entier > 0 .

Soit $u(t) \in \text{Ker } L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R})$; l'opérateur L n'admettant que le point $t=0$ comme point singulier à distance finie et étant du type de Fuchs en $t=0$, on en

déduit que $u(t)$ est analytique, soit $u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^n$. Reportant ce développement dans l'équation $Lu = 0$, on obtient les relations :

$$(4.1) \quad \begin{cases} 0 \leq n \leq k-1 & : F(n) \cdot u_n = 0 \\ k \leq n \leq 2k-1 & : F(n) \cdot u_n + [i a_{11}(n-k) + a_{10}] u_{n-k} = 0 \\ 2k \leq n & : F(n) \cdot u_n + [-i a_{11}(n-k) + a_{10}] u_{n-k} + a_{20} \cdot u_{n-2k} = 0. \end{cases}$$

La résolution de ce système est donc liée aux racines entières éventuelles de l'équation caractéristique $F(\lambda) = 0$.

Proposition 4.1.

On suppose $\delta = k$ entier ≥ 1 .

(i) Si $F(\lambda) = 0$ n'a pas de racine entière ≥ 0 (ce qui impose $\sigma \geq 0$), alors :

$$\text{Ker } L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{0\} ;$$

(ii) Si $F(\lambda) = 0$ admet une seule racine entière ≥ 0 , soit m , ou bien deux racines entières ≥ 0 dont la différence est un multiple de k , m étant la plus petite (ce qui impose $\sigma \geq -1$ si $\delta = k > 1$), alors :

1) si k est impair : $\text{Ker } L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{0\} ;$

2) si k est pair : $\text{Ker } L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{0\}$ si et seulement si :

$$(i a_{02}(1-k) + a_{01} - 2im a_{02}) \tau_+ + a_{10} - im a_{11} \neq i p k (\tau_+ - \tau_-) \text{ pour } p \in \mathbb{N} ;$$

(iii) Si $F(\lambda) = 0$ admet deux racines entières ≥ 0 , soient m et n ; si m et n sont de parités différentes et si k est pair, alors : $\text{Ker } L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{0\}$ si et seulement si :

$$(i a_{02}(1-k) + a_{01} - 2im a_{02}) \tau_+ + a_{10} - im a_{11} \neq i p k (\tau_+ - \tau_-)$$

et

$$(i a_{02}(1-k) + a_{01} - 2in a_{02}) \tau_+ + a_{10} - in a_{11} \neq i p k (\tau_+ - \tau_-) \text{ pour } p \in \mathbb{N}.$$

Démonstration :

(i) Il résulte des relations (4.1) que si $u \in \text{Ker } L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $u \equiv 0$.

(ii) Des relations (4.1), on déduit que si $u \in \text{Ker } L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors $u(t)$ est de la forme : $u(t) = t^m v(t^k)$, où v est une fonction analytique. On pose $s = t^k$; puisque $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $v(s) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si k est impair et $v \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ si k est pair, et $Lu(t) = 0$ équivaut à $\mathcal{L}_m v(s) = 0$ avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m v \equiv & s [a_{02} k^2 D_s^2 + a_{11} k D_s + a_{20}] v \\ & + [(-ia_{02} k(k-1) + a_{01}k - 2im k a_{02}) D_s + (a_{10} - im a_{11})] v. \end{aligned}$$

Ainsi, si k est impair, $t \longrightarrow s = t^k$ opère de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et puisque $\mathcal{L}_m$ est un opérateur différentiel pour lequel $\delta = 1$, il résulte de la remarque 2.3 que $v \equiv 0$ et donc $u \equiv 0$.

Si maintenant k est pair, $t \longrightarrow s = t^k$ opère de $\mathbb{R}$ sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ et on applique la condition (C) du lemme 4.1.

(iii) Des relations (4.1), on déduit que si $u \in \text{Ker } L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $u(t)$ est de la forme : $u(t) = t^m v(t^k) + t^n w(t^k)$, où v et w sont des fonctions analytiques.

De plus, si k est pair, il est facile de vérifier que si $u(t) \in \text{Ker } L$, alors $u(-t) \in \text{Ker } L$. Par suite, m et n étant de parités différentes, on a : $u(t) = t^m v(t^k)$ ou bien $u(t) = t^n w(t^k)$.

On procède alors comme pour (ii).

Remarque 4.1. On verra dans la seconde méthode, § IV.2.2., comment on peut répondre à certains cas exclus dans la proposition 4.1.

Application : Soit L l'opérateur

$$Lu \equiv a_{02} t^{\sigma+2} D_t^2 u + a_{01} t^{\sigma+1} D_t u + a_{00} t^{\sigma} u + a_{11} t^{\sigma+k+1} D_x D_t u + a_{10} t^{\sigma+k} D_x u + a_{20} t^{\sigma+2k} D_x^2 u$$

où $\sigma \in \mathbb{Z}$ avec $\sigma \geq -2$, k entier ≥ 1 , $a_{ij} \in \mathbb{C}$ avec $a_{02} = 1$ et $a_{ij} = 0$ si $\sigma + \delta i + j \notin \mathbb{N}$.

On suppose que le polynôme $P(\tau) \equiv a_{02} \tau^2 + a_{11} \tau + a_{20}$ admet deux racines τ_+ et τ_- avec $\text{Im } \tau_+ > 0$ et $\text{Im } \tau_- < 0$.

On note $F(\lambda) = 0$ l'équation caractéristique en $t=0$ associée à L , i.e. :

$$F(\lambda) \equiv -a_{02} \lambda(\lambda-1) - ia_{01} \lambda + a_{00} = 0.$$

Il résulte alors de la proposition 4.1 et du théorème 1.2 que l'on a :

- (i) Si $F(\lambda) = 0$ n'a pas de racine entière ≥ 0 , alors L est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$;
- (ii) Si $F(\lambda) = 0$ admet une seule racine entière ≥ 0 , soit m , ou bien deux racines entières ≥ 0 dont la différence est un multiple de k , m étant la plus petite, alors :

- 1) si k est impair, L est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$;
- 2) si k est pair, L est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$ si et

seulement si :

$$(i a_{02}(1-k) + a_{01} - 2im a_{02}) \tau_+ + a_{10} - im a_{11} \neq ipk (\tau_+ - \tau_-)$$

et

$$(i a_{02}(1-k) + a_{01} - 2im a_{02}) \tau_- + a_{10} - im a_{11} \neq -ipk (\tau_+ - \tau_-)$$

pour $p \in \mathbb{N}$;

- (iii) Si $F(\lambda) = 0$ admet deux racines entières ≥ 0 , soient m et n ; si m et n sont de parités différentes et si k est pair, alors L est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si :

$$(i a_{02}(1-k) + a_{01} - 2im a_{02}) \tau_+ + a_{10} - im a_{11} \neq ipk (\tau_+ - \tau_-)$$

$$(i a_{02}(1-k) + a_{01} - 2im a_{02}) \tau_- + a_{10} - im a_{11} \neq -ipk (\tau_+ - \tau_-)$$

$$(i a_{02}(1-k) + a_{01} - 2in a_{02}) \tau_+ + a_{10} - in a_{11} \neq ipk (\tau_+ - \tau_-)$$

$$(i a_{02}(1-k) + a_{01} - 2in a_{02}) \tau_- + a_{10} - in a_{11} \neq -ipk (\tau_+ - \tau_-)$$

pour $p \in \mathbb{N}$.

Remarque 4.2 : On retrouve en particulier les résultats de [12], [13].

Remarque 4.3 : On traiterait de manière analogue la condition 3' en remarquant que si $u \in \text{Ker } L \cap \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, alors u est la restriction à $\mathbb{R}_+$ d'un élément $U \in \text{Ker } L \cap C^\infty(\mathbb{R})$

et par suite, les calculs faits précédemment sont encore valables ; le changement de variable $s=t^k$ étant à prendre de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et on applique alors le lemme 4.1.

Par exemple, soit L l'opérateur :

$$L \equiv t D_t^2 + t^{2k-1} D_x^2 + \lambda D_t + \mu t^{k-1} D_x .$$

On suppose que $1-i\lambda \notin \mathbb{N} \setminus k.\mathbb{N}$. Alors, si k est un entier impair, L est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$, par contre, L est partiellement hypoelliptique dans $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}$, si et seulement si $\mu \neq \pm ((2p+1)k + i\lambda - 1)$, p entier ≥ 0 . Si k est un entier pair, L est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}$, si et seulement si $\mu \neq \pm ((2p+1)k + i\lambda - 1)$, p entier ≥ 0 .

On étudie maintenant le cas $\delta = \frac{2k+1}{2}$ avec k entier ≥ 0 .

Proposition 4.2.

On suppose $\delta = \frac{2k+1}{2}$ avec k entier ≥ 0 .

- (i) Si $k=0$, alors $\text{Ker } L \cap \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+) = \{0\}$;
- (ii) Si $F(\lambda) = 0$ n'a pas de racine entière ≥ 0 (ce qui impose $\sigma \geq 0$), alors :
 $\text{Ker } L \cap \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+) = \{0\}$;
- (iii) Si $F(\lambda) = 0$ admet une seule racine entière ≥ 0 , ou bien deux racines entières ≥ 0 dont la différence est un multiple de $2k+1$ (ce qui impose $\sigma \geq -1$, si $k > 0$), alors :
 $\text{Ker } L \cap \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+) = \{0\}$.

Remarque 4.4 : Il est clair que dans les conditions (i), (ii) et (iii) de cette proposition 4.2, on a aussi $\text{Ker } L \cap \mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{0\}$ puisque si $u \in \text{Ker } L \cap \mathcal{D}(\mathbb{R})$ alors u est analytique sur $\mathbb{R}$ et $u|_{\mathbb{R}_+} \in \text{Ker } L \cap \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Démonstration : On effectue le changement de variable $s \longmapsto t = s^2 : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ et on pose $u(t) = v(s)$. Si $u \in \text{Ker } L \cap \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, alors $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L} v(s) = 0$ avec

$$\mathcal{L} v \equiv s^2 \left[\frac{a_{02}}{4} D_s^2 + a_{20} \right] v + s \left[\left(i \frac{a_{02}}{4} + \frac{a_{01}}{2} \right) D_s \right] v + [a_{00}] v .$$

Comme $\mathcal{L}$ est un opérateur différentiel pour lequel $\delta = 1$, on en déduit que $v \equiv 0$ et donc $u \equiv 0$.

(ii) Reprenant la remarque 4.3, on déduit que si $u \in \text{Ker } L \cap \mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+)$ alors $u = U|_{\bar{\mathbb{R}}_+}$ avec U analytique et $LU = 0$. On vérifie facilement que si $F(\lambda) = 0$ n'a pas de racine entière ≥ 0 , alors $U \equiv 0$ et donc $u \equiv 0$.

(iii) Reprenant toujours la remarque 4.3, on déduit que si $u \in \text{Ker } L \cap \mathcal{S}(\bar{\mathbb{R}}_+)$, alors $u(t)$ est de la forme $u(t) = t^m v(t^{2k+1})$ pour un certain entier $m \geq 0$ tel que $F(m) = 0$ et où v est une fonction analytique. Comme en (i), on effectue le changement de variable $s \longrightarrow t = s^{\frac{2}{2k+1}}$ et on vérifie que $v \in \text{Ker } \mathcal{L}_m \cap \mathcal{S}(\mathbb{R})$ où :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m v \equiv & s \left[a_{02} \left(\frac{2k+1}{2} \right)^2 D_s^2 + a_{20} \right] v \\ & + \left[(-i a_{02} \left(\frac{2k+1}{2} \right) \left(\frac{2k-1}{2} \right) + a_{01} \frac{2k+1}{2} - im (2k+1) a_{02} \right] D_s v \end{aligned}$$

Il en résulte que $v \equiv 0$ et donc $u \equiv 0$.

Application :

- 1) L'opérateur $L \equiv tD_t^2 + tD_x D_t + i D_x^2 + \lambda D_t$ est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}$ quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
- 2) L'opérateur $L \equiv tD_t^2 + \lambda D_t + D_x^2$ est partiellement hypoelliptique dans $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}$ quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

b) Etude de la condition 3 pour certains opérateurs différentiels d'ordre ≥ 2 :

On va étudier le noyau dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ des opérateurs différentiels L de la forme :

$$L \equiv \prod_{p=1}^n (D_t - i a_p t) (D_t - i b t) + \sum_{\ell=1}^{\left[\frac{n+1}{2} \right]} \lambda_\ell \prod_{p=1}^{n+1-2\ell} (D_t - i c_p^\ell t)$$

où a_p, b, λ_ℓ et c_p^ℓ sont des nombres complexes avec $\text{Re } a_p < 0$ pour $p=1, \dots, n$ et $\text{Re } b > 0$ et où $\left[\frac{n+1}{2} \right]$ désigne la partie entière de $\frac{n+1}{2}$.

Des applications seront détaillées dans [18].

On va démontrer la :

Proposition 4.3.

Posons $\lambda_L = \lambda_1 \cdot \frac{\prod_{p=1}^{n-1} (c_p^1 - b)}{\prod_{p=1}^n (a_p - b)}$. Alors, si $\lambda_L \notin \mathbb{N}$, on a : $\text{Ker } L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{0\}$.

Lorsque $n=1$, cette condition $\lambda_L \notin \mathbb{N}$ est nécessaire et suffisante comme on l'a vu dans la proposition 4.1 (iii) ; ce résultat est bien connu [12], [13].

Démonstration : Le principe de la démonstration est le même que celui suivi pour la proposition 4.1 (iii). En effet, dans ce cas, $\delta = 2$, donc, si $u(t) \in \text{Ker } L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors $u(t) = v(t^2)$ ou bien $u(t) = tw(t^2)$ où v et w sont deux fonctions analytiques.

On effectue le changement de variable $s = t^2$; ceci nous amène à étudier le noyau dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$ de deux opérateurs $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}_1$ avec :

pour $n = 2k+1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 v &\equiv s^{k+1} \prod_{p=1}^{2k+1} (2D_s - ia_p) (2D_s - ib)v + \lambda_1 \cdot s^k \prod_{p=1}^{2k} (2D_s - ic_p^1)v \\ &\quad + s^k P_0^{2k}(D_s) (2D_s - ib)v + \sum_{\ell=1}^k s^{k-\ell} P_\ell^{2k+1-\ell}(D_s)v ; \\ \mathcal{L}_1 w &\equiv s^{k+1} \prod_{p=1}^{2k+1} (2D_s - ia_p) (2D_s - ib)w - is^k \prod_{p=1}^{2k+1} (2D_s - ia_p)w + \lambda_1 \cdot s^k \prod_{p=1}^{2k} (2D_s - ic_p^1)w \\ &\quad + s^k Q_0^{2k}(D_s) (2D_s - ib)w + \sum_{\ell=1}^k s^{k-\ell} P_\ell^{2k+1-\ell}(D_s)w ; \end{aligned}$$

et pour $n = 2k$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 v &\equiv s^k \prod_{p=1}^{2k} (2D_s - ia_p) (2D_s - ib)v + \lambda_1 \cdot s^{k-1} \prod_{p=1}^{2k-1} (2D_s - ic_p^1)v \\ &\quad + s^{k-1} R_0^{2k-1}(D_s) (2D_s - ib)v + \sum_{\ell=1}^k s^{k-1-\ell} R_\ell^{2k-\ell}(D_s)v ; \\ \mathcal{L}_1 w &\equiv s^{k+1} \prod_{p=1}^{2k} (2D_s - ia_p) (2D_s - ib)w - is^k \prod_{p=1}^{2k} (2D_s - ia_p)w + \lambda_1 \cdot s^k \prod_{p=1}^{2k-1} (2D_s - ic_p^1)w \\ &\quad + s^k S_0^{2k-1}(D_s) (2D_s - ib)w + \sum_{\ell=1}^k s^{k-\ell} S_\ell^{2k-\ell}(D_s)w , \end{aligned}$$

où P_i^j , Q_i^j , R_i^j et S_i^j sont des polynômes différentiels d'ordre $\leq j$ à coefficients constants.

Pour étudier le noyau de ces opérateurs dans $\mathcal{J}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, on procède comme pour le lemme 4.1 (théorème 2.1, § III et proposition 2.1, § II de [4]). On en déduit facilement la proposition 4.3.

Dans le cas particulier où $n=2$, on peut donner une réponse complète à l'existence d'un noyau de L dans $\mathcal{J}(\mathbb{R})$. Plus précisément, on a :

Proposition 4.4.

Soit L l'opérateur :

$$L \equiv (D_t - i a_1 t) (D_t - i a_2 t) (D_t - i b t) + \lambda (D_t - i c t)$$

avec $\operatorname{Re} a_1 < 0$, $\operatorname{Re} a_2 < 0$ et $\operatorname{Re} b > 0$.

Soit $\ell_L = \lambda \frac{c - b}{(a_1 - b)(a_2 - b)}$. Alors

- (i) si $\ell_L \notin \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker} L \cap \mathcal{J}(\mathbb{R}) = \{0\}$;
- (ii) si ℓ_L est un entier pair, $\operatorname{Ker} L \cap \mathcal{J}(\mathbb{R})$ est de dimension 1 ;
- (iii) si $\ell_L = 2n+1$ est un entier impair, on a : $\operatorname{Ker} L \cap \mathcal{J}(\mathbb{R}) = \{0\}$ si et seulement si $\lambda \neq (2n+1-2p)(a_2-b) + 2p(a_1-b)$, $p=0, \dots, n$.

Démonstration : (i) résulte de la proposition 4.3.

(ii) si ℓ_L est un entier pair, on vérifie facilement (lemme 4.1) que

$\operatorname{Ker} \mathcal{L}_0 \cap \mathcal{J}(\overline{\mathbb{R}}_+) \neq \{0\}$ et donc $\operatorname{Ker} L \cap \mathcal{J}(\mathbb{R}) \neq \{0\}$; comme $\operatorname{Ker} L \cap \mathcal{J}(\mathbb{R})$ est de dimension au plus 1 (cf. démonstration de la proposition 2.4), on a donc : $\dim (\operatorname{Ker} L \cap \mathcal{J}(\mathbb{R})) = 1$.

(iii) si $\ell_L = 2n+1$ est un entier impair, alors on a : $\operatorname{Ker} \mathcal{L}_0 \cap \mathcal{J}(\overline{\mathbb{R}}_+) = \{0\}$: on doit donc faire une étude complète du noyau dans $\mathcal{J}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ de l'opérateur $\mathcal{L}_1$. Ici, $\mathcal{L}_1$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \equiv & s^2(2D_s - ia_1)(2D_s - ia_2)(2D_s - ib) + \lambda.s(2D_s - ic) - is(2D_s - ia_1)(2D_s - ia_2) \\ & - 3is(2D_s - ia_2)(2D_s - ib) - 2is(2D_s - ia_1)(2D_s - ib) - 2(2D_s - ib) - (2D_s - ia_2) - i\lambda. \end{aligned}$$

Utilisant les résultats de [4] (théorème 3.1, remarque 3.4 et proposition 2.1, § II), on est amené à chercher le nombre de solutions $\hat{w}$ de $\hat{\mathcal{L}}_1^* \hat{w} = 0$ linéairement indépendantes et holomorphes au voisinage du point singulier $\tau = -i \frac{\bar{b}}{2}$, où $\hat{\mathcal{L}}_1^*$ désigne le transformé de Fourier de $\mathcal{L}_1^*$, opérateur adjoint formel de l'opérateur $\mathcal{L}_1$.

L'équation indicielle $\phi_0(\lambda) = 0$ de l'opérateur $\hat{\mathcal{L}}_1^*$ en $\tau = -i \frac{\bar{b}}{2}$ admet pour racines 0 et $n+1$. Par suite, $\hat{\mathcal{L}}_1^* \hat{w} = 0$ admet une solution holomorphe au voisinage de $\tau = -i \frac{\bar{b}}{2}$ de la forme $\hat{w}_1(\tau) = (\tau + i \frac{\bar{b}}{2})^{n+1} f_1(\tau + i \frac{\bar{b}}{2})$, où $f_1(\zeta)$ est une fonction holomorphe au voisinage de $\zeta = 0$ avec $f_1(0) \neq 0$. Résolvant formellement l'équation $\hat{\mathcal{L}}_1^* \hat{w} = 0$ avec $\hat{w}(\tau) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(\tau + i \frac{\bar{b}}{2})^n$, on obtient le système :

$$(I) \quad \begin{cases} (0) & \phi_0(0) w_0 = 0 \\ (1) & \phi_0(1) w_1 + \phi_1(0) w_0 = 0 \\ (p) & \phi_0(p) w_p + \phi_1(p-1) w_{p-1} + \phi_2(p-2) w_{p-2} = 0, p \geq 2 \end{cases}$$

où ϕ_1 et ϕ_2 sont deux fonctions convenables.

Comme $\phi_0(0) = \phi_0(n+1) = 0$, on en déduit que l'équation $\hat{\mathcal{L}}_1^* \hat{w} = 0$ admettra deux solutions linéairement indépendantes et holomorphes au voisinage de $\tau = -i \frac{\bar{b}}{2}$ si et seulement si on peut trouver une solution de la forme $w_2(\tau) = f_2(\tau + i \frac{\bar{b}}{2})$, où $f_2(\zeta)$ est une fonction holomorphe au voisinage de $\zeta = 0$ avec $f_2(0) \neq 0$. D'après le système (I), ceci est équivalent à dire que le système linéaire homogène en $w_0, \dots, w_n$:

$$(II) \quad \begin{cases} (1) & \phi_0(1) w_1 + \phi_1(0) w_0 = 0 \\ (p) & \phi_0(p) w_p + \phi_1(p-1) w_{p-1} + \phi_2(p-2) w_{p-2} = 0, p \leq n+1 \end{cases}$$

admet une solution non nulle. On vérifie alors que les valeurs de λ qui annulent le déterminant du système (II) sont exactement les nombres $(2n+1-2p)(a_2-b)+2p(a_1-b)$ pour $p = 0, \dots, n$.

La proposition 4.4 est ainsi complètement démontrée.

IV.2.2. 2ème méthode : Dans ce paragraphe, nous allons exposer une autre méthode pour répondre aux conditions 3 et 3'. Celle-ci nous a été communiquée par J. Sjöstrand. En particulier, elle permet de répondre à certains cas exclus dans la proposition 4.1 (iii).

On se limitera à traiter l'exemple suivant :

$$Lu(t) \equiv D_t^2 u + \lambda tu + t^4 u.$$

Ici, $\sigma = -2$ et $\delta = 3$.

On effectue le changement de variable $s = \frac{t^3}{3}$ et on pose $v(s) = u(t)$, $s^{1/3} = (\text{sgn } s) |s|^{1/3}$ et $s^{k/3} = (s^{1/3})^k$ pour tout entier k . On a alors, $u(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ équivaut à dire que $v \in \tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R})$ espace des fonctions C^∞ de $s^{1/3}$ qui appartiennent à $\mathcal{L}$ pour $|s|$ grand. On vérifie ensuite que $Lu(t) = 0$ équivaut à $\mathcal{L}v(s) = 0$ dans $\mathcal{L}'(\mathbb{R})$ avec :

$$\mathcal{L}v \equiv 3s D_s^2 v - 2i D_s v + 3s v + \lambda v.$$

Pour résoudre $\mathcal{L}v = 0$, on utilise la transformation de Fourier ; ceci nous amène à estimer la transformée de Fourier $\hat{v}$ de v :

Lemme 4.2.

Soit $v \in \tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R})$. Alors la transformée de Fourier $\hat{v}$ de v admet un développement asymptotique de la forme :

$$(4.2) \quad \hat{v}(\tau) \sim |\tau|^{-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin 3\mathbb{N}}}^{+\infty} C_j \cdot \tau^{-j/3}, \quad |\tau| \longrightarrow +\infty$$

avec les mêmes constantes C_j pour $\tau \longrightarrow +\infty$ et pour $\tau \longrightarrow -\infty$.

Démonstration : La transformée de Fourier de $s^{j/3}$, pour $j \in \mathbb{N}$ est égale à $\alpha_j \cdot |\tau|^{-1} \tau^{-j/3}$ pour $\tau \neq 0$ avec $\alpha_j \neq 0$ si et seulement si $j \notin 3\mathbb{N}$. Ainsi, si

$\hat{v}(\tau)$ est la transformée de Fourier de $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, le développement (4.2) correspond au développement de Taylor de $v(s)$:

$$v(s) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} c_j' \cdot s^{j/3}, \quad s \rightarrow 0.$$

On doit donc résoudre l'équation :

$$-3(1+\tau^2) D_\tau \hat{v} + (4i\tau + \lambda) \hat{v} = 0$$

Donc $\hat{v}(\tau) = c \cdot (1+\tau^2)^{-2/3} \cdot e^{i\lambda/3 \operatorname{Arctg} \tau}$. Ainsi, une condition nécessaire pour obtenir une solution non triviale $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est que

$$e^{i\lambda/3 \operatorname{Arctg}(+\infty)} = -e^{i\lambda/3 \operatorname{Arctg}(-\infty)}, \quad \text{i.e. : } \lambda = 3+6k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Par ailleurs, cette condition $\lambda = 3+6k, k \in \mathbb{Z}$ est aussi suffisante. En effet, si $\lambda = 3+6k, k \in \mathbb{Z}$, $\hat{v}(\tau) = (1+\tau^2)^{-2/3} e^{i\lambda/3 \operatorname{Arctg} \tau}$ correspond à une solution $u(t) \neq 0$ de $\operatorname{Ker} L \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

On a donc démontré la :

Proposition 4.5.

Soit $L \equiv D_t^2 + t^4 + \lambda t$. Alors, $\operatorname{Ker} L \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}) = \{0\}$ si et seulement si $\lambda \neq 3+6k, k \in \mathbb{Z}$.

Application : Soit $L \equiv D_t^2 + t^4 D_x^2 + \lambda t D_x$. Il résulte de la proposition 4.5 que L est hypoelliptique dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\lambda \neq 3+6k, k \in \mathbb{Z}$.

V. REMARQUES.

Remarque 5.1 : Les résultats du chapitre I peuvent être étendus à une classe d'opérateurs plus générale : celle des opérateurs quasi-elliptiques dégénérés du type de Fuchs dont la partie principale est quasi-homogène, i.e. en conservant les notations du chapitre I, les opérateurs de la forme :

$$L_p \equiv \sum_{\substack{n \\ \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{p_i} + j \leq m}} a_{\alpha j}(t, x) t^{[\sigma+\delta|\alpha|+j]} D_x^\alpha D_t^j$$

où $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ avec $p_i \geq 1$ pour $i=1, \dots, n$.

Les conditions 1, 2 et 3 sont à remplacer par les conditions suivantes :

Condition 1_p : L'opérateur L_p est quasi-elliptique pour $t \neq 0$ dans $I \times \Omega$, i.e. :

pour tout $(t, x) \in I \times \Omega$, $t \neq 0$, et pour tout $(\tau, \xi) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, on a :

$$\sum_{\substack{n \\ \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{p_i} + j = m}} a_{\alpha j}(t, x) t^{[\sigma+\delta|\alpha|+j]} \xi^\alpha \tau^j \neq 0.$$

Désignons par L_p^0 "la partie principale" de L_p , c'est-à-dire :

$$L_p^0 \equiv L_p^0(x; D_x, D_t) \equiv \sum_{\substack{n \\ \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{p_i} + j \leq m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N}}} a_{\alpha j}(0, x) t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D_x^\alpha D_t^j.$$

On pose :

Condition 2_p : L'opérateur L_p^0 est quasi-elliptique pour $t \neq 0$ dans $I \times \Omega$, i.e. :

pour tout $(t, x) \in I \times \Omega$, $t \neq 0$, et pour tout $(\tau, \xi) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, on a :

$$\sum_{\substack{n \\ \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{p_i} + j = m \\ \sigma+\delta|\alpha|+j \in \mathbb{N}}} a_{\alpha j}(0, x) t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} \xi^\alpha \tau^j \neq 0.$$

Condition 3_p : Pour tout $\omega \in \mathbb{R}^n$, $|\omega|_p = \sum_{i=1}^n |\omega_i|^{2p_i} = 1$ et pour tout $x \in \Omega$,

l'équation :

$$L_p^0(x; \omega, D_t) u(t) = 0$$

n'admet que la solution $u = 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

On a alors :

Théorème 5.1.

On suppose que l'opérateur L_p satisfait les conditions 1_p , 2_p et 3_p . Alors, l'opérateur L_p est partiellement hypoelliptique dans $I \times \Omega$.

De plus, lorsque $\sigma = -m$, on peut remplacer dans ce théorème 5.1 partiellement hypoelliptique par hypoelliptique.

Ainsi, par exemple, l'opérateur $\frac{d}{dt} + t \Delta_x$ est hypoelliptique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tandis que $\frac{d}{dt} - t \Delta_x$ ne l'est pas. On retrouve ainsi des résultats de [21].

De même, les opérateurs $t \frac{d}{dt} + \lambda \pm t^3 \Delta_x$ sont partiellement hypoelliptiques dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

En modifiant de manière analogue les conditions $1'$, $2'$ et $3'$, on obtiendra un théorème d'hypoellipticité partielle dans $I_+ \times \Omega$ pour l'opérateur L_p .

Remarque 5.2 : Une autre extension des résultats du chapitre I peut être faite en remplaçant, dans la définition de l'opérateur L , $\delta|\alpha|$ par $\sum_{i=1}^n \delta_i \alpha_i$ où $(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $\delta_i > 0$ et $\sigma + \delta_i m \in \mathbb{N}$ pour $i=1, \dots, n$.

Par exemple, l'opérateur $D_t^2 + D_x^2 + t^2 D_y^2$ est hypoelliptique dans $\mathbb{R}^3$. Ce résultat est bien connu [20].

De même, l'opérateur $t(D_t^2 + D_x^2) + i D_y^2$ est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R}^3$.

Evidemment, cette généralisation est aussi valable pour les opérateurs L_p introduits dans la remarque 5.1.

Remarque 5.3 :

Il est clair que la méthode du chapitre III, § III.1.1, permet de traiter, comme dans le cas $\delta = 1$ [6], les problèmes aux limites généraux pour les opérateurs L .

Remarque 5.4 :

Comme dans le cas $\delta = 1$ [7], à partir des estimations a priori obtenues pour les opérateurs L (III.1.1), on peut déduire des résultats d'hypo-analyticité et de régularité Gevrey pour les opérateurs L . Ceci sera détaillé ailleurs.

Remarque 5.5 :

Pour la construction d'une paramétrix partielle, on peut considérer dans la définition des opérateurs L des opérateurs pseudo-différentiels en x d'ordre convenable.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAOUENDI (M.S.) et GOULAOUIC (C.) : "Cauchy problems with characteristic initial hypersurface". Comm. Pure Appl. Math. Vol. XXVI, n° 4, (1973), 455-473.
- [2] BAOUENDI (M.S) et GOULAOUIC (C.) : "Cauchy problems with multiplie characteristics in spaces of regular distributions". Uspehi, Vol. XXIX, 2 (176), (1974), 70-76.
- [3] BEALS (R.) : "Spatially in homogeneous pseudo-differential operators II, III ". A paraitre.
- [4] BOLLEY (P.) et CAMUS (J.) : "Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à une variable". J. Math. pures et appl., t. 51, (1972), 429-463.
- [5] BOLLEY (P.) et CAMUS (J.) : "Etude d'une classe de système d'opérateurs elliptiques et dégénérés". Publications des Séminaires de Mathématiques de l'Université de Rennes, Séminaire d'Analyse Fonctionnelle, Année 1973.
- [6] BOLLEY (P.) et CAMUS (J.) : "Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables". Bull. Soc. Math. France, Mémoire 34, (1973), 55-140.
- [7] BOLLEY (P.) et CAMUS (J.) : "Hypoellipticité partielle et hypoanalyticité d'une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés" (A paraître dans Astérisque).
- [8] BOLLEY (P.), CAMUS (J.) et HELFFER (B.) : "Hypoellipticité partielle d'une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés". C.R. Acad. Sci. Paris, t. 278, (1974), 775-778.
- [9] BOUTET DE MONVEL (L.) : "Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators (à paraître).

- [10] BOUTET DE MONVEL (L.) et TREVES (F.) : "On a class of pseudo-differential operators with double characteristics". *Inventiones math.* 24, (1974), 1-34.
- [11] GILIOLI (A.) : "A class of second order evolution equations with double characteristics. Thesis." Rutgers University (1974).
- [12] GILIOLI (A.) et TREVES (F.) : "An example in the solvability theory of linear partial differential equations". (A paraître dans *Amer. J. of Math.*).
- [13] GRUŠIN (V.V.) : "On a class of hypoelliptic operators". *Math. Sbornik* 83, (125), (1970), 456-473 (*Math. U.S.S.R. Sbornik* 12, (1970), 458-476).
- [14] GRUŠIN (V.V.) : "On a class of hypoelliptic pseudodifferential operators degenerate on a submanifold". *Math. Sbornik* 84, (126), (1971), 111-134, (*Math. U.S.S.R. Sbornik* 13, (1971), 155-185).
- [15] GRUŠIN (V.V.) : "Hypoelliptic differential equations and pseudodifferential operators with operator valued symbols". *Mat. Sbornik* 88, (130), (1972), 504-521, (*Math. U.S.S.R. Sbornik* 17, (1972), 497-514).
- [16] GRUŠIN (V.V.) et VIŠIK (M.I.) : "Boundary value problems for elliptic equations degenerate on the boundary of a domain". *Mat. Sbornik* 80, (122), (1969), 455-491, (*Math. U.S.S.R. Sbornik* 9, (1969), 423-454).
- [17] HARDY (G.G.), LITTLEWOOD (D.E.) et POLYA (G.) : "Inequalities". Cambridge University Press, 1967.
- [18] HELFFER (B.) : "Sur une classe d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples". (en préparation).
- [19] HELFFER (B.) et ZUILY (C.) : "Non hypoellipticité des opérateurs du type de Fuchs". *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 277, (1973), 1061-1064.
- [20] HORMANDER (L.) : "Hypoelliptic second order differential equations". *Acta Math. Uppsala*, t. 119 (1967), 147-171.

- [21] KANNAÏ (Y.) : "An unsolvable hypoelliptic operator". J. Anal. Math. Israël 9, (1971), 308-315.
- [22] PEETRE (J.) : "An other approach to elliptic boundary problems". Comm. Pure Appl. Math. Vol. XIV, (1961), 711-731.
- [23] SCHWARTZ (L.) : "Distributions à valeurs vectorielles I, II", Ann. Inst. Fourier 7, (1957), 1-141 ; 8, (1958), 1-209.
- [24] SHIMAKURA (N.) : "Problèmes aux limites généraux du type elliptique dégénéré". J. Math. Kyoto Univ., Vol. 9, n° 2, (1969), 275-335.
- [25] SJOSTRAND (J.) : "Parametrix for pseudodifferential operators with multiple characteristics". Arkiv för Mat. Vol. 12, n° 1, (1974), 85-130.
- [26] TREVES (F.) : "Linear partial differential equations with constant coefficients". Gordon and Breach, New-York, 1966.
- [27] TREVES (F.) : "A new method of proof of the subelliptic estimates". Comm. Pure Appl. Math. Vol. XXIV, (1973), 71-115.
- [28] TREVES (F.) : "Concatenations of second order evolution equations applied to local solvability and hypoellipticity". Comm. Pure Appl. Math. Vol. XXVI, (1973), 201-250.

HYPOELLIPTICITE PARTIELLE POUR DES OPERATEURS
DEGENERES NON-FUSCHIENS

P. BOLLEY - J. CAMUS - B. HELFFER

Introduction .

Dans [1] on étudie l'hypoellipticité partielle (ie: l'hypoellipticité à partir d'un espace de distributions C^∞ dans la direction normale) d'une classe d'opérateurs du type de Fuchs quasi-homogènes. Ce sont des opérateurs dont la partie principale, en un certain sens, est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \{(t, x); t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n\}$ par :

$$L(t; D_t, D_x) = \sum_{\substack{j + |\alpha| \leq m \\ \sigma + \delta |\alpha| + j \in \mathbb{N}}} a_{j\alpha} t^{\sigma + j + \delta |\alpha|} D_t^j D_x^\alpha$$

où $m \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, $\sigma \in \mathbb{Z}$ avec $\sigma + m \in \mathbb{N}$ et $\sigma + \delta m \in \mathbb{N}$ et $a_{j\alpha} \in \mathbb{C}$; cette partie principale vérifie donc la propriété de quasi homogénéité

$$L(\lambda^{-1}t; \lambda\tau, \lambda^\delta \xi) = \lambda^{-\sigma} L(t; \tau, \xi)$$

pour tous $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $t \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$. Alors si $L(t; D_t, D_x)$ est elliptique pour

$t \neq 0$, L est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^n =$

$\{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, t \geq 0\}$ si et seulement si l'équation $L(t; D_t, D_x) u(t) = 0$ n'admet que la solution triviale dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$) pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

On considère dans cet article des opérateurs du type précédent pour lesquels $\delta = 0$ (qui ne sont plus alors du type de Fuchs) c'est-à-dire définis sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ par :

$$L(t; D_t, D_x) = \sum_{j + |\alpha| \leq m} a_{j\alpha} t^{\sigma + j} D_t^j D_x^\alpha.$$

Si l'opérateur $L(t; D_t, D_x)$ est elliptique pour $t \neq 0$, L est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et dans $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^n$.

Ainsi par exemple les opérateurs $t D_t + i D_x + \lambda$ et $t^2 D_t^2 + D_x^2 + \lambda t D_t + \mu D_x + \nu$ sont partiellement hypoelliptiques dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et dans $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}$ quels que soient λ, μ, ν dans $\mathbb{C}$.

Plus généralement on considère la classe d'opérateurs

$$L = \sum_{j+|\alpha| \leq m} a_{j\alpha}(t,x) t^{q+[\alpha j]} D_t^j D_x^\alpha$$

où $q \in \mathbb{R}$ avec $q \geq 1$ et $qm \in \mathbb{N}$; $[\alpha j]$ désigne le plus petit entier supérieur ou égal à αj . Sous une hypothèse d'ellipticité pour $t \neq 0$ (resp. $t > 0$), on démontre que l'opérateur L est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^n$).

Ainsi par exemple l'opérateur $t^3 D_t^2 + t^2 D_t D_x + i D_x^2 + \lambda t^2 D_t + \mu D_x + \nu$ est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et dans $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}$ quels que soient λ, μ, ν dans $\mathbb{C}$.

Les notations et résultats sont regroupés dans le chapitre I.

Le chapitre II qui commence par l'étude de quelques espaces de distributions est essentiellement consacré à des résultats pour des opérateurs différentiels ordinaires, résultats qui sont essentiels pour l'étude des opérateurs à plusieurs variables.

On démontre dans le chapitre III les résultats d'hypoellipticité partielle (théorèmes 1-1 et 1-2). Comme dans [1] deux méthodes peuvent être utilisées : une première méthode basée sur des quotients différentiels à partir d'une estimation a priori et une deuxième méthode basée sur une construction d'une paramétrix partielle. Nous détaillerons essentiellement la première méthode.

Contrairement à ce qui se passe pour les opérateurs du type de Fuchs quasi homogènes de [1], les opérateurs étudiés dans cet article, du moins lorsque

les coefficients possèdent une propriété d'analyticité, ne sont pas hypoelliptiques à partir d'un espace de distributions qui ne sont pas C^∞ dans la direction normale. C'est l'objet du chapitre IV, (proposition 4-1) où on dégage de plus une classe générale d'opérateurs non hypoelliptiques.

Certains résultats donnés dans cet article ont été annoncés dans [2].

Enfin, signalons que dans [4], on étudie des opérateurs de la même forme avec $\sigma=0$, q entier > 1 et vérifiant la même hypothèse d'ellipticité pour $t \neq 0$. Alors que dans le présent article on démontre que l'opérateur L est partiellement hypoelliptique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (dans le sens que pour tous ouverts $I \subset \mathbb{R}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, pour toute distribution $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ telle que $Lu \in C^\infty(I \times \Omega)$ alors, $u \in C^\infty(I \times \Omega)$), on démontre dans [4], sous une hypothèse supplémentaire portant sur l'opérateur défini sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\sum_{j+|\alpha| \leq m} a_{j\alpha}(t, x) \tau^j D_x^\alpha$$

dépendant des paramètres $t \in \mathbb{R}$ et $\tau \in \mathbb{C}$ que l'opérateur L est globalement hypoelliptique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (dans le sens que pour toute distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ pour laquelle il existe $N > 0$ telle que $t^N u$ soit continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et pour laquelle $Lu \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, alors $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$).

TABLE DES MATIERES

I- Notations et résultats.

II- Préliminaires.

- II-1. Quelques espaces de distributions.
- II-2. Structure locale des éléments $C^\infty(\bar{R}_+; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$.
- II-3. Réduction au cas où $\sigma=0$.
- II-4. Résultats concernant certains opérateurs différentiels ordinaires lorsque $q > 1$.
- II-5. Résultats concernant certains opérateurs différentiels ordinaires lorsque $q=1$.

III- Démonstration des théorèmes 1-1 et 1-2.

- III-1. 1ère méthode: méthode des quotients différentiels à partir d'une estimation a priori.
- III-2. 2ème méthode : construction d'une paramétrix partielle.

IV- Non hypoellipticité à partir d'un espace de distributions qui ne sont pas C^∞ dans la direction normale.

Bibliographie.

I- Notations et résultats.

On considère les opérateurs définis sur $I \times \Omega$ où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ définis par ;

$$L = L(t, x; D_t, D_x) = \sum_{j+|\alpha| \leq m} a_{j\alpha}(t, x) t^{\sigma+qj} D_t^j D_x^\alpha$$

où $t \in I$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$,

$$D_x^\alpha = i^{-|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad D_t = i^{-1} \frac{\partial}{\partial t}, \quad m \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}, \sigma \in \mathbb{N}, q \geq 1, [qj] \text{ désignant}$$

le plus petit entier supérieur ou égal à qj .

On suppose que les coefficients $a_{j\alpha}$ sont indéfiniment dérivables dans $\overline{I \times \Omega}$.

On suppose que l'opérateur L satisfait la condition suivante :

Condition 1 : L'opérateur L est elliptique pour $t \neq 0$ dans $I \times \Omega$ ie: pour tout

$(t, x) \in I \times \Omega$, $t \neq 0$ et pour tout $(\tau, \xi) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ on a :

$$\sum_{j+|\alpha| \leq m} a_{j\alpha}(t, x) t^{\sigma+qj} \xi^\alpha \tau^j \neq 0$$

On désigne par "partie principale" de l'opérateur L , l'opérateur L° défini par :

$$L^\circ = L^\circ(x; D_t, D_x) = \sum_{\substack{j+|\alpha| \leq m \\ qj \in \mathbb{N}}} a_{j\alpha}(0, x) t^{\sigma+qj} D_t^j D_x^\alpha$$

On suppose que cet opérateur L° satisfait la condition suivante :

Condition 2 : L'opérateur L° est elliptique pour $t \neq 0$ dans $I \times \Omega$ ie: pour tout

$(t, x) \in I \times \Omega$, $t \neq 0$ et pour tout $(\tau, \xi) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ on a :

$$\sum_{j+|\alpha| \leq m} a_{j\alpha}(0, x) t^{\sigma+qj} \xi^\alpha \tau^j \neq 0.$$

$qj \in \mathbb{N}$

On désigne par $C^\infty(I; \mathcal{D}'(\Omega))$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur I à valeurs dans l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions sur Ω ; $C^\infty(I; \mathcal{D}'(\Omega))$ s'identifie à un sous espace de $\mathcal{D}'(I \times \Omega)$ des distributions sur $I \times \Omega$ (cf [7]). Enfin, $C^\infty(I \times \Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur $I \times \Omega$ à valeurs complexes.

On a alors :

Théorème 1-1:

On suppose que l'opérateur L satisfait les conditions 1 et 2. Alors l'opérateur L est partiellement hypoelliptique dans $I \times \Omega$ ie: pour tous ouverts $I' \subset I$ et $\Omega' \subset \Omega$, pour tout $u \in C^\infty(I; \mathcal{D}'(\Omega))$ tel que $Lu \in C^\infty(I' \times \Omega')$ alors $u \in C^\infty(I' \times \Omega')$.

Remarque 1-1 : Lorsque $q \in \mathbb{N}$, les conditions 1 et 2 se réduisent à la seule condition : pour tout $(t, x) \in I \times \Omega$ et pour tout $(\tau, \xi) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ on a :

$$j + \sum_{|\alpha|=m} a_{j\alpha}(t, x) \tau^j \xi^\alpha \neq 0$$

Il se peut que l'opérateur L (de même pour l'opérateur L°) ne vérifie pas la condition 1 mais soit seulement elliptique pour $t > 0$. Ceci nous amène à considérer les conditions suivantes :

Condition 1' : L'opérateur L est elliptique pour $t > 0$ dans $I \times \Omega$ ie: pour tout $(t, x) \in I \times \Omega$, $t > 0$ et pour tout $(\tau, \xi) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ on a :

$$j + \sum_{|\alpha|=m} a_{j\alpha}(t, x) t^\sigma + [qj] \tau^j \xi^\alpha \neq 0.$$

Condition 2' : L'opérateur L° est elliptique pour $t > 0$ dans $I \times \Omega$ ie : pour tout tout $(t, x) \in I \times \Omega$, $t > 0$ et pour tout $(\tau, \xi) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ on a :

$$j + \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ qj \in \mathbb{N}}} a_{j\alpha}(0, x) t^\sigma + qj \tau^j \xi^\alpha \neq 0.$$

On note $I_+ = \{t \in I, t \geq 0\}$. On a alors :

Théorème 1-2 :

On suppose que l'opérateur L satisfait les conditions 1' et 2'. Alors l'opérateur L est partiellement hypoelliptique dans $I_+ \times \Omega$ ie : pour tout sous intervalle I' de I_+ et tout sous ouvert Ω' de Ω , pour tout $u \in C^\infty(I_+; \mathcal{D}'(\Omega))$ tel que $Lu \in C^\infty(I' \times \Omega')$ alors $u \in C^\infty(I' \times \Omega')$

Le théorème 1-1 est évidemment un corollaire du théorème 1-2.

Remarque 1-2 : La condition 2 (resp 2') entraîne la condition 1 (resp 1') dans un voisinage de $t=0$ éventuellement plus petit que $I \times \Omega$ (resp. $I_+ \times \Omega$).

Remarque 1-3 : Les méthodes de démonstration (données en III) permettent d'étudier l'hypoellipticité partielle pour des opérateurs plus généraux que ceux introduits ci-dessus. Ainsi par exemple elles permettent de montrer que des opérateurs L du type :

$$L \equiv (tD_t)^2 + (xD_x)^2 + D_y^2$$

sont partiellement hypoelliptiques dans $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ au sens suivant :

si $u \in C^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x; \mathcal{D}'(\mathbb{R}_y))$ et si $Lu \in C^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y)$ alors $u \in C^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y)$.

II- PRELIMINAIRES

II-1. Quelques espaces de distributions.

Etant donnés un espace de Banach E et un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, $L^2(U; E)$ est l'espace des (classes de) fonctions u mesurables sur U à valeurs dans E et telles que $\int_U \|u(t)\|_E^2 dt < +\infty$, dt étant la mesure de Lebesgue sur U ; cet espace est muni de la norme :

$$u \longmapsto \|u\|_{L^2(U; E)} = \left(\int_U \|u(t)\|_E^2 dt \right)^{1/2}.$$

Etant donné $s \in \mathbb{R}$, $H^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions tempérées u sur $\mathbb{R}^n$ et telles que $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ où $\hat{u}(\xi)$ désigne la transformée de Fourier de $u(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$; cet espace est muni de la norme :

$$u \longmapsto \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

On aura besoin de l'estimation suivante :

Lemme 2-1.

Etant donnés $s \in \mathbb{R}$ et $\phi \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}^n)$ il existe une constante $C(s, \phi) > 0$ telle que pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}_+; H^s(\mathbb{R}^n))$ on ait :

$$\|\phi u\|_{L^2(\mathbb{R}_+; H^s(\mathbb{R}^n))} \leq \sup |\phi| \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+; H^s(\mathbb{R}^n))} + C(s, \phi) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+; H^{s-1}(\mathbb{R}^n))}$$

$C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}^n)$ est l'espace des restrictions à $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ à valeurs complexes et à support compact.

Enfin étant donnés $m \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$, $W_s^{m, q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions u sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ telles que $t^{qj} D_t^j u \in L^2(\mathbb{R}_+; H^{m-j+s}(\mathbb{R}^n))$ pour $0 \leq j \leq m$; cet espace est muni de la norme :

$$u \longmapsto \|u\|_{W_s^{m, q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)} = \left\{ \sum_{0 \leq j \leq m} \|t^{qj} D_t^j u\|_{L^2(\mathbb{R}_+; H^{m-j+s}(\mathbb{R}^n))}^2 \right\}^{1/2}$$

II-2. Structure locale des éléments de $C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+}; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$

On désigne par $C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+}; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ l'espace des restrictions à $\mathbb{R}_+$ des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ des

distributions sur $\mathbb{R}^n$ (cf : [7])

On donne un résultat de régularité locale de ces fonctions (cf. [7], [8]).

Lemme 2-2 :

Etant donnés $u \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$, $\phi \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^n)$ et $p \in \mathbb{N}$, il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $D_t^j(\phi u) \in L^2(\mathbb{R}_+; H^s(\mathbb{R}^n))$ pour $0 \leq j \leq p$.

II-3. Réduction au cas où $\sigma = 0$

La réduction au cas où $\sigma = 0$ se déduit facilement du lemme suivant.

Lemme 2-3 :

Etant donné $f \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ telle que $tf \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^n)$ alors $f \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^n)$.

démonstration : Comme $tf \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^n)$, pour tous $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ et $x \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$(tf)(t, x) - (tf)(0, x) = \int_0^t \frac{\partial (tf)}{\partial \sigma}(\sigma, x) d\sigma$$

Or $(tf)(0, \cdot) = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$; donc pour tous $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ et $x \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$(tf)(t, x) = \int_0^t \frac{\partial (tf)}{\partial \sigma}(\sigma, x) d\sigma = t \int_0^1 \frac{\partial (tf)}{\partial \sigma}(t\sigma, x) dy$$

Par conséquent dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ on a :

$$f(t, x) = \int_0^1 \frac{\partial (tf)}{\partial \sigma}(t\sigma, x) dy$$

donc $f \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^n)$.

II-4. Résultats concernant certains opérateurs différentiels ordinaires lorsque $q > 1$.

On démontre ici des résultats essentiels pour la suite concernant une classe d'opérateurs différentiels ordinaires.

Soit L l'opérateur différentiel ordinaire défini sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$L = L(t, D_t) = \sum_{0 \leq j \leq m} a_j t^{qj} D_t^j$$

où $D_t = i^{-1} \frac{d}{dt}$, $m \in \mathbb{N}$, $q > 1$, $a_j \in \mathbb{C}$ et $a_j = 0$ si $qj \notin \mathbb{N}$.

On introduit la condition suivante :

(H') pour tout $t > 0$ et pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ on a : $\sum_{0 \leq j \leq m} a_j t^{qj} \tau^j \neq 0$.

On note m_+ le nombre de zéros τ du polynôme $P^+(\tau) = \sum_{0 \leq j \leq m} a_j \tau^j$ avec

$\text{Im } \tau > 0$.

On introduit l'espace de Sobolev avec poids $W^{m,q}(\mathbb{R}_+)$ défini par :

$$W^{m,q}(\mathbb{R}_+) = \{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+); t^{qj} D_t^j u \in L^2(\mathbb{R}_+), 0 \leq j \leq m \}$$

muni de la norme

$$u \longmapsto \|u\|_{W^{m,q}(\mathbb{R}_+)} = \left(\sum_{0 \leq j \leq m} \|t^{qj} D_t^j u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \right)^{1/2}$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 2-1.

On suppose que l'opérateur L satisfait la condition (H'). Alors l'opérateur L considéré comme opérateur linéaire continu de $W^{m,q}(\mathbb{R}_+)$ dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ est injectif et à indice; son indice est $-m_+$.

Pour démontrer ce théorème on fait une étude au voisinage de chaque point singulier ($t=0$ et $t=+\infty$) de l'opérateur L et on regroupe les différents résultats grâce à des théorèmes généraux d'indice.

II-3-1 : Etude de l'opérateur L sur $[0, T]$ pour $0 < T < +\infty$

On désigne par $W^{m,q}(0,T)$ l'espace :

$$W^{m,q}(0,T) = \{ u \in \mathcal{D}'(0,T); t^{qj} D_t^j u \in L^2(0,T), 0 \leq j \leq m \}$$

muni de la norme canonique.

On va établir :

Proposition 2-1 :

On suppose que l'opérateur L satisfait la condition (H'). Pour tout $0 < T < +\infty$ l'opérateur L considéré comme opérateur linéaire continu de $W^{m,q}(0,T)$ dans $L^2(0,T)$ est surjectif et à indice; son indice est $m-m_+$.

démonstration : Dans [6] on montre que L est linéaire, continu, surjectif de l'espace $W_{q,m}^m(0,T) = \{ u \in L^2(0,T), t^{qm} u \in H^m(\partial T) \}$ sur $L^2(0,T)$ et à indice d'indice $m-m_+$.

La proposition 2-1 sera démontrée si l'on vérifie que les espaces $W^{m,q}(o,T)$ et $W_{q,m}^m(o,T)$ coïncident.

Soit donc $u \in W^{m,q}(o,T)$. Comme $t^{qm} D_t^m u \in L^2(o,T)$, grâce à l'inégalité de Hardy on montre que $t^{qm-j} D_t^{m-j} u \in L^2(o,T)$ pour $0 \leq j \leq m$. Par suite $D_t^m(t^{qm}u) \in L^2(o,T)$ et donc $t^{qm}u \in H^m(o,T)$.

Inversement soit $u \in W_{q,m}^m(o,T)$. Supposons que l'on ait démontré que $t^{qi} D_t^i u \in L^2(o,T)$ pour $0 \leq i \leq j-1$ pour un j donné avec $1 \leq j \leq m$ et soit à démontrer que $t^{qj} D_t^j u \in L^2(o,T)$. Comme $t^{q(j-1)} D_t^{j-1} u \in L^2(o,T)$, grâce à l'inégalité de Hardy, on montre que $t^{q(j-1)-\ell} D_t^{j-1-\ell} u \in L^2(o,T)$ pour $0 \leq \ell \leq j-1$. Or $t^{qj} u \in H^j(o,T)$ (cf. [6]) donc $D_t^j(t^{qj}u) \in L^2(o,T)$ et $D_t^j(t^{qj}u) = t^{qj} D_t^j u + \sum_{1 \leq \ell \leq j} \lambda_\ell t^{qj-\ell} D_t^{j-\ell} u$ (avec des $\lambda_\ell \in \mathbb{C}$). Par suite $t^{qj} D_t^j u \in L^2(o,T)$.

II-3-2 : Etude de l'opérateur L sur $[T, +\infty[$ pour $0 < T < +\infty$.

On désigne par $W^{m,q}(T, +\infty)$ l'espace :

$$W^{m,q}(T, +\infty) = \{u \in \mathcal{D}'(T, +\infty); t^{qj} D_t^j u \in L^2(T, +\infty), 0 \leq j \leq m\}$$

muni de la norme canonique.

On va établir :

Proposition 2-2 :

Pour tout $0 < T < +\infty$, l'opérateur L est un isomorphisme algébrique et topologique de $W^{m,q}(T, +\infty)$ sur $L^2(T, +\infty)$.

démonstration : On démontre ce résultat en plusieurs étapes

i) l'opérateur $L_0 : u \mapsto t^{qm} D_t^m u$ est un isomorphisme algébrique et topologique de $W^{m,q}(T, +\infty)$ sur $L^2(T, +\infty)$. En effet il est clair que L_0 est un opérateur linéaire continu et injectif de $W^{m,q}(T, +\infty)$ dans $L^2(T, +\infty)$. D'autre part étant donné $f \in L^2(T, +\infty)$ la fonction :

$$u(t) = i^m \int_t^{+\infty} \int_{t_{m-1}}^{+\infty} \dots \int_{t_1}^{+\infty} x^{-qm} f(x) dx dt_1 \dots dt_{m-1}.$$

qui est bien définie, appartient à $W^{m,q}(T, +\infty)$ ie : $t^{qj} D_t^j u \in L^2(T, +\infty)$ pour $0 \leq j \leq m$.

En effet

$$t^{qj} D_t^j u(t) = i^{m-j} t^{qj} \int_t^{+\infty} \int_{t_{m-j-1}}^{+\infty} \dots \int_{t_1}^{+\infty} x^{-qm} f(x) dx dt_1 \dots dt_{m-j-1}$$

et l'inégalité de Hardy appliquée $m-j$ fois montre que $t^{qj} D_t^j u \in L^2(T, +\infty)$. Par conséquent L_0 est surjectif puisque $L_0 u = f$.

ii) pour $0 \leq j \leq m-1$ l'opérateur $u \longrightarrow t^{qj} D_t^j u$ est compact de $W^{m,q}(T, +\infty)$ dans $L^2(T, +\infty)$.

Soit une suite (u_n) de $W^{m,q}(T, +\infty)$ bornée par 1. Il existe une sous suite encore notée (u_n) qui converge faiblement vers $t^{qj} D_t^j u$ dans $L^2(T, +\infty)$. On va montrer qu'elle converge en fait fortement.

Pour $0 \leq j \leq m-1$, la suite $(t^{qj} D_t^j u_n)$ est bornée dans $H^1(T, R)$ pour tout $T < R < +\infty$. Par conséquent $(t^{qj} D_t^j u_n)$ converge fortement vers $t^{qj} D_t^j u$ dans $L^2(T, R)$. De plus d'après l'inégalité de Hardy il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout n on ait :

$$\| t^{qm-m+j} D_t^j u_n \|_{L^2(T, +\infty)} \leq C \text{ et } \| t^{qm-m+j} D_t^j u \|_{L^2(T, +\infty)} \leq C.$$

Par conséquent, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout n et pour tout $T < R < +\infty$ on ait :

$$\| t^{qj} D_t^j u_n \|_{L^2(R, +\infty)} \leq \frac{C}{R^{(q-1)(m-j)}} \text{ et } \| t^{qj} D_t^j u \|_{L^2(R, +\infty)} \leq \frac{C}{R^{(q-1)(m-j)}}$$

On peut alors en déduire facilement que $(t^{qj} D_t^j u_n)$ converge fortement vers $t^{qj} D_t^j u$ dans $L^2(T, +\infty)$.

iii) Pour $T \geq 1$ (par exemple) la norme de l'opérateur L_0^{-1} en tant qu'opérateur de $L^2(T, +\infty)$ dans $W^{m,q}(T, +\infty)$ est majorée par une constante indépendante de T . En effet soient $f \in L^2(T, +\infty)$, $\tilde{f}$ le prolongement par 0 sur $[0, +\infty[$ et u la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$u(t) = i^m \int_t^{+\infty} \int_{t_{m-1}}^{+\infty} \dots \int_{t_1}^{+\infty} x^{-qm} \tilde{f}(x) dx dt_1 \dots dt_{m-1}$$

D'après l'inégalité de Hardy il existe des constantes $C_j > 0$ telles que

$$\| t^{qj} D_t^j u \|_{L^2(R_+)} \leq C_j \| t^{(m-j)(1-q)} \tilde{f} \|_{L^2(R_+)} \leq C_j T^{(m-j)(1-q)} \| f \|_{L^2(T, +\infty)}.$$

Par conséquent comme $L_0^{-1}f = u$ sur $[T, \infty[$ il s'en suit que

$$\|L_0^{-1}f\|_{W^{m,q}(T, +\infty)} \leq \sum_{0 \leq j \leq m} C_j T^{(m-j)(1-q)} \|f\|_{L^2(T, +\infty)}, \quad \text{D'où le résultat.}$$

iv) pour $0 \leq j \leq m-1$, la norme de l'opérateur $u \mapsto t^{qj} D_t^j u$ en tant qu'opérateur de $W^{m,q}(T, +\infty)$ dans $L^2(T, +\infty)$ tend vers 0 quand T tend vers $+\infty$.

En effet il existe une constante C_j indépendante de T telle que

$$\|t^{qj} D_t^j u\|_{L^2(T, +\infty)} \leq C_j T^{(m-j)(1-q)} \|t^{qm} D_t^m u\|_{L^2(T, +\infty)} \leq C_j T^{(m-j)(1-q)} \|u\|_{W^{m,q}(T, +\infty)}$$

v) on peut alors démontrer la proposition 2-2. Les étapes i) et ii) montrent que L est un opérateur linéaire continu de $W^{m,q}(T, +\infty)$ dans $L^2(T, +\infty)$ à indice, d'indice 0 et ceci pour tout $T > 0$. Les étapes i), iii) et iv) montrent que pour T assez grand l'opérateur L est un isomorphisme de $W^{m,q}(T, +\infty)$ sur $L^2(T, \infty)$ et donc, en particulier, que son noyau dans $W^{m,q}(T, +\infty)$ est nul. Par conséquent pour tout $0 < T < +\infty$ le noyau de L dans $W^{m,q}(T, \infty)$ qui est formé de fonctions analytiques, est nul.

II-3-3: démonstration du théorème 2-1.

Soit R_T l'application qui à une distribution u de $\mathbb{R}_+$ associe le couple formé des restrictions de u à $(0, T)$ et à $(T, +\infty)$.

On considère le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} W^{m,q}(0, T) \times W^{m,q}(T, +\infty) & \xrightarrow{L_T} & L^2(0, T) \times L^2(T, +\infty) \\ \uparrow R_T & & \uparrow R_T \\ W^{m,q}(\mathbb{R}_+) & \xrightarrow{L} & L^2(\mathbb{R}_+) \end{array}$$

où L_T est l'application qui au couple (u, v) associe le couple (Lu, Lv) pour $u \in W^{m,q}(0, T)$ et $v \in W^{m,q}(T, +\infty)$.

L'opérateur R_T est à indice, d'indice $-m$, de $W^{m,q}(\mathbb{R}_+)$ dans $W^{m,q}(0, T) \times W^{m,q}(T, +\infty)$. De même l'opérateur R_T est à indice, d'indice 0 de $L^2(\mathbb{R}_+)$ dans $L^2(0, T) \times L^2(T, +\infty)$.

Des propositions 2-1 et 2-2 il résulte que l'opérateur L_T est à

indice, d'indice $m-m_+$ de $W^{m,q}(0,T) \times W^{m,q}(T, +\infty)$ dans $L^2(0,T) \times L^2(T, +\infty)$.

Regroupant ces résultats on en déduit que l'opérateur L est à indice de $W^{m,q}(\mathbb{R}_+)$ dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ d'indice $-m_+$. De plus utilisant l'injectivité sur $[T, \infty[$ donnée par la proposition 2-2, on en déduit le théorème 2-1.

II-5. Résultats concernant certains opérateurs différentiels ordinaires lorsque $q=1$.

On démontre ici des résultats essentiels pour la suite concernant une classe d'opérateurs différentiels ordinaires dépendant du paramètre $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Soit $L(\xi)$ l'opérateur différentiel ordinaire défini sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$L(\xi) = L(t; D_t, \xi) = \sum_{j+|\alpha| \leq m} a_{j\alpha} \xi^\alpha t^j D_t^j$$

où $D_t = i^{-1} \frac{d}{dt}$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $a_{j\alpha} \in \mathbb{C}$.

On introduit la condition suivante:

(H') : pour tout $t > 0$ et pour tout $(\tau, \xi) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ on a :

$$\sum_{j+|\alpha|=m} a_{j\alpha} \xi^\alpha \tau^j \neq 0$$

On introduit l'espace de Sobolev avec poids $W^{m,1}(\mathbb{R}_+)$ défini par $W^{m,1}(\mathbb{R}_+) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+); t^j D_t^j u \in L^2(\mathbb{R}_+), 0 \leq j \leq m\}$ muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,1}(\mathbb{R}_+)} = \left(\sum_{0 \leq j \leq m} \|t^j D_t^j u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \right)^{1/2}$$

On va établir

Théorème 2-2:

On suppose que l'opérateur $L(\xi)$ satisfait la condition (H'). Alors :

i) il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ avec

$|\xi| \geq 1$ et pour tout $u(t) \in W^{m,1}(\mathbb{R}_+)$ on ait

$$\sum_{0 \leq j \leq m} (1+|\xi|^2)^{m-j} \|t^j D_t^j u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \leq C \{ \|L(t; D_t, \xi) u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 + \sum_{0 \leq j \leq m-1} (1+|\xi|^2)^{m-j-1} \|t^j D_t^j u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \}$$

ii) il existe une constante $A > 0$ telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ avec $|\xi| \geq A$, l'opérateur $L(\xi)$ est un isomorphisme algébrique et topologique de $W^{m,1}(\mathbb{R}_+)$ sur $L^2(\mathbb{R}_+)$

démonstration : i) L'hypothèse (H') montre qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $v(y) \in H^m(\mathbb{R})$ on ait :

$$\sum_{0 \leq j \leq m} |\xi|^{2(m-j)} \|D_y^j v\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C_1 \left\| \sum_{j+|\alpha|=m} a_{j\alpha} \xi^\alpha D_y^j v(y) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Par suite il existe une constante $C_2 > 0$ telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ avec $|\xi| \geq 1$ et pour tout $v(y) \in H^m(\mathbb{R})$ on ait :

$$\sum_{0 \leq j \leq m} (1+|\xi|^2)^{m-j} \|D_y^j v(y)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C_2 \left\| \sum_{j+|\alpha|=m} a_{j\alpha} \xi^\alpha D_y^j v(y) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

Pour $u(t) \in W^{m,1}(\mathbb{R}_+)$ on pose $u(t) = e^{-y/2} v(y)$ avec $t = e^y$. Comme $t^j D_t^j u(t) = e^{-y/2} \sum_{0 \leq \ell \leq j} \lambda_{j\ell} D_y^\ell v(y)$ où les coefficients $\lambda_{j\ell}$ sont des nombres

complexes tels que $\lambda_{jj} = 1$, il résulte qu'il existe une constante $C_3 > 0$ telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ avec $|\xi| \geq 1$ et pour tout $u(t) \in W^{m,1}(\mathbb{R}_+)$ on ait

$$\sum_{0 \leq j \leq m} (1+|\xi|^2)^{m-j} \|t^j D_t^j u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \leq C_3 \left\{ \|L(t; D_t, \xi) u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 + \sum_{0 \leq j \leq m-1} (1+|\xi|^2)^{m-j-1} \|t^j D_t^j u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \right\}$$

ii) Maintenant ξ est un paramètre fixé $\neq 0$. Pour $u(t) \in W^{m,1}(\mathbb{R}_+)$ et $f(t) \in L^2(\mathbb{R}_+)$ on pose $u(t) = e^{-y/2} |\xi| v(y)$ et $f(t) = e^{-y/2} |\xi| g(y)$ avec $t = e^{y/|\xi|}$. Comme $t^j D_t^j u(t) = e^{-y/2} |\xi| \sum_{0 \leq \ell \leq j} \lambda_{j\ell} |\xi|^\ell D_y^\ell v(y)$ où les coefficients $\lambda_{j\ell}$ sont des nombres complexes tels que $\lambda_{jj} = 1$, le problème

$$\begin{cases} L(t; D_t, \xi) u(t) = f(t) \in L^2(\mathbb{R}_+) \\ u(t) \in W^{m,1}(\mathbb{R}_+) \end{cases}$$

est équivalent au problème

$$\begin{cases} M(D_y; \xi) v(y) = g(y) \in L^2(\mathbb{R}) \\ v(y) \in H^m(\mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\text{avec } M(D_y, \xi) = \sum_{j+|\alpha| \leq m} a_{j\alpha} \xi^\alpha \sum_{0 \leq \ell \leq j} \lambda_{j\ell} |\xi|^\ell D_y^\ell$$

$$= |\xi|^m \left\{ \sum_{j+|\alpha|=m} a_{j\alpha} \omega^\alpha D_y^j + \sum_{j+|\alpha| \leq m-1} b_{j\alpha} \xi^\alpha |\xi|^{j-m} D_y^j \right\}$$

où les coefficients $b_{j\alpha}$ sont des nombres complexes et où $\omega = \xi/|\xi|$.

Pour tout $\omega \in \mathbb{R}^n$ avec $|\omega|=1$, l'opérateur $\sum_{j+|\alpha|=m} a_{j\alpha} \omega^\alpha D_y^j$ est un isomorphisme de $H^m(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$ et la norme de son inverse est majorée indépendamment de ω . D'autre part la norme de l'opérateur $\sum_{j+|\alpha| \leq m-1} b_{j\alpha} \xi^\alpha |\xi|^{-j+m} D_y^j$ en tant qu'opérateur de $H^m(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ tend vers 0 quand $|\xi|$ tend vers $+\infty$. Par conséquent il existe une constante $A > 0$ telle que pour $\xi \in \mathbb{R}^n$ avec $|\xi| \geq A$ l'opérateur $M(D_y, \xi)$ soit un isomorphisme de $H^m(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$. Le résultat sur $L(\xi)$ s'en déduit.

III-DEMONSTRATION DU THEOREME 1-1 ET DU THEOREME 1-2.

III-1. 1ère méthode : méthode des quotients différentiels à partir d'une estimation a priori.

III-1-1: une estimation a priori.

Proposition 3-1 :

On suppose que l'opérateur L satisfait la condition 2'. Pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe une constante $\varepsilon > 0$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$ il existe une constante $C_{s\varepsilon} > 0$ telles que si $u \in W_s^{m,q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } u \subset \{(t,x) \in I_+ \times \Omega; \|(t,x)-(0,x_0)\| < \varepsilon\}$ on ait :

$$\|u\|_{W_s^{m,q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)} \leq C_{s\varepsilon} \{ \|Lu\|_{L^2(\mathbb{R}_+; H^s(\mathbb{R}^n))} + \|u\|_{W_{s-1}^{m,q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)} \}$$

Démonstration. Par transformation de Fourier par rapport à la variable tangentielle x dans $\mathbb{R}^n$ on associe à l'opérateur $L^0(x_0, D_t, D_x)$ l'opérateur différentiel ordinaire $L^0(x_0, D_t, \xi)$ dépendant du paramètre ξ dans $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$L^0(x_0, D_t, \xi) = \sum_{\substack{j+|\alpha| \leq m \\ qj \in \mathbb{N}}} a_{j\alpha} (0, x_0) t^{qj} \xi^\alpha D_t^j$$

La condition 2' appliquée au point $(0, x_0)$ étant vérifiée, on peut appliquer le théorème 2-1 lorsque $q > 1$: pour tout $\omega \in \mathbb{R}^n$, $|\omega| = 1$ l'opérateur

$$\sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ qj \in \mathbb{N}}} \left(\sum_{|\alpha|=m-j} a_{j\alpha} (0, x_0) \omega^\alpha \right) t^{qj} D_t^j$$

est un isomorphisme de $W^{m,q}(\mathbb{R}_+)$ sur un sous espace fermé de $L^2(\mathbb{R}_+)$. Par conséquent, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour tout $\omega \in \mathbb{R}^n$, $|\omega| = 1$, pour tout $v(s) \in W^{m,q}(\mathbb{R}_+)$ on ait :

$$\sum_{0 \leq j \leq m} \|s^{qj} D_t^j v(s)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \leq C_1 \left\| \sum_{\substack{j+|\alpha|=m \\ qj \in \mathbb{N}}} a_{j\alpha} (0, x_0) \omega^\alpha s^{qj} D_t^j v(s) \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2$$

Pour $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $u(t) \in W^{m,q}(\mathbb{R}_+)$ on pose $u(t) = v(s)$ avec $s = t |\xi|^{1/1-q}$. Il en résulte :

$$\sum_{0 \leq j \leq m} |\xi|^{2(m-j)} \|t^{qj} D_t^j u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \leq C_1 \left\| \sum_{j+|\alpha|=m} a_{j\alpha}(0, x_0) \xi^\alpha t^{qj} D_t^j u(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2.$$

Par suite il existe une constante $C_2 > 0$ telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ avec $|\xi| \geq 1$ et pour tout $u(t) \in W^{m,q}(\mathbb{R}_+)$ on ait :

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq j \leq m} (1+|\xi|^2)^{m-j} \|t^{qj} D_t^j u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 &\leq C_2 \{ \|L^0(x_0, D_t, \xi) u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \\ &+ \sum_{0 \leq j \leq m-1} (1+|\xi|^2)^{m-j-1} \|t^{qj} D_t^j u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \} \end{aligned}$$

La condition 2' appliquée au point $(0, x_0)$ étant vérifiée, on peut appliquer le théorème 2-2 lorsque $q=1$: il existe une constante $C_3 > 0$ telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ avec $|\xi| \geq 1$ et pour tout $u \in W^{m,1}(\mathbb{R}_+)$ on ait :

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq j \leq m} (1+|\xi|^2)^{m-j} \|t^j D_t^j u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 &\leq C_3 \{ \|L^0(x_0, D_t, \xi) u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \\ &+ \sum_{0 \leq j \leq m-1} (1+|\xi|^2)^{m-j-1} \|t^j D_t^j u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \} \end{aligned}$$

(Notons que dans le cas où $q > 1$, l'estimation a priori pour l'opérateur $L^0(x_0, D_t, \xi)$ a été obtenue à partir d'une estimation à une variable dans laquelle on a fait une homothétie sur la variable t . Au contraire dans le cas où $q=1$ cette méthode échoue puisque l'opérateur $L^0(x_0, D_t, \xi)$ ne fait intervenir que des groupements $t^j D_t^j$ qui sont invariants par toute homothétie faite sur la variable t . C'est pourquoi on a établi directement une estimation a priori pour l'opérateur $L^0(x_0, D_t, \xi)$ dans le théorème 2-2).

Ainsi pour $q \geq 1$, il existe une constante $C_4 > 0$ telle que pour $\xi \in \mathbb{R}^n$ avec $|\xi| \geq 1$ et pour tout $u(t) \in W^{m,q}(\mathbb{R}_+)$ on ait :

$$\begin{aligned} (3-1) \quad \sum_{0 \leq j \leq m} (1+|\xi|^2)^{m-j} \|t^{qj} D_t^j u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 &\leq C_4 \{ \|L^0(x_0, D_t, \xi) u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \\ &+ \sum_{0 \leq j \leq m-1} (1+|\xi|^2)^{m-j-1} \|t^{qj} D_t^j u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \} \end{aligned}$$

Appliquant cette inégalité à la transformée de Fourier $\hat{u}(t, \xi)$ par rapport à la variable x d'une fonction $u(t, x) \in W_s^{m, q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ on en déduit qu'il existe une constante $C_5 > 0$ telle que pour tout $s \in \mathbb{R}$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ avec $|\xi| \geq 1$ et pour tout $u \in W_s^{m, q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ on ait :

$$(3-2) \quad \sum_{0 \leq j \leq m} (1+|\xi|^2)^{m-j+s} \|t^{qj} D_t^j \hat{u}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \\ \leq C_5 \{ (1+|\xi|^2)^s \|L^0(x_0, D_t, \xi) \hat{u}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \\ + \sum_{0 \leq j \leq m-1} (1+|\xi|^2)^{m-j-1+s} \|t^{qj} D_t^j \hat{u}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \}$$

Appliquant maintenant l'inégalité (3-1) avec $\xi = \xi_0$ à la transformée de Fourier $\hat{u}(t, \xi)$ par rapport à la variable x d'une fonction $\hat{u}(t, x) \in W_s^{m, q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ on a :

$$\sum_{0 \leq j \leq m} (1+|\xi_0|^2)^{m-j} \|t^{qj} D_t^j \hat{u}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \leq C_4 \{ \|L^0(x_0, D_t, \xi_0) \hat{u}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \\ + \sum_{0 \leq j \leq m-1} (1+|\xi_0|^2)^{m-j-1} \|t^j D_t^j \hat{u}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \}$$

On en déduit qu'il existe une constante $C_6 > 0$ telle que pour tout $s \in \mathbb{R}$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ avec $|\xi| \leq 1$ et pour tout $u \in W_s^{m, q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ on ait :

$$(3-3) \quad \sum_{0 \leq j \leq m} (1+|\xi|^2)^{m-j+s} \|t^{qj} D_t^j \hat{u}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \\ \leq C_6 \{ (1+|\xi|^2)^s \|L^0(x_0, D_t, \xi) \hat{u}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \\ + \sum_{0 \leq j \leq m-1} (1+|\xi|^2)^{m-j-1+s} \|t^{qj} D_t^j \hat{u}(t, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 \}$$

Regroupant les estimations (3-2) et (3-3) et intégrant par rapport à $\xi \in \mathbb{R}^n$ on en déduit qu'il existe une constante $C_7 > 0$ telle que pour tout $s \in \mathbb{R}$ et

pour tout $u \in W_s^{m,q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ on ait :

$$\|u\|_{W_s^{m,q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)} \leq C_7 \{ \|L^0(x_0, D_t, D_x) u\|_{L^2(\mathbb{R}_+; H^s(\mathbb{R}^n))} + \|u\|_{W_{s-1}^{m,q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)} \}$$

Utilisant le lemme 2-1 on en déduit qu'il existe une constante $\varepsilon > 0$ et une constante $C_8 > 0$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$ il existe une constante $C_9 > 0$ telles que pour tout $u \in W_s^{m,q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } u \subset \{(t,x) \in I_+ \times \Omega, \|(t,x) - (0,x_0)\| < \varepsilon\}$ on ait :

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_s^{m,q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)} &\leq C_8 \left\| \sum_{\substack{j+|\alpha| \leq m \\ qj \in \mathbb{N}}} a_{j\alpha}(t,x) t^{qj} D_t^j D_x^\alpha u \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+; H^s(\mathbb{R}^n))} \\ &\quad + C_9 \|u\|_{W_{s-1}^{m,q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

Utilisant encore le lemme 2-1, il existe une constante $C_{10} > 0$ et pour tout s , il existe une constante $C_{11} > 0$ telles que pour tout $u \in W_s^{m,q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } u \subset \{(t,x) \in I_+ \times \Omega, \|(t,x) - (0,x_0)\| < \varepsilon\}$ et pour tout j tel que $qj \notin \mathbb{N}$ on ait :

$$\begin{aligned} \|a_{j\alpha}(t,x) t^{[qj]} D_t^j D_x^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}_+; H^s(\mathbb{R}^n))} &\leq C_{10} \varepsilon^{[qj] - qj} \|u\|_{W_s^{m,q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)} \\ &\quad + C_{11} \|u\|_{W_{s-1}^{m,q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

On peut alors en déduire la proposition 3-1.

III-1-2. Régularité partielle

Proposition 3-2:

On suppose que l'opérateur L satisfait la condition 2'. Pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que si $u \in W_s^{m,q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } u \subset \{(t,x) \in I_+ \times \Omega, \|(t,x) - (0,x_0)\| < \varepsilon\}$ et $Lu \in L^2(\mathbb{R}_+; H^{s+1}(\mathbb{R}^n))$ pour un certain $s \in \mathbb{R}$, alors $u \in W_{s+1}^{m,q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$.

Démonstration : On utilise la méthode des quotients différentiels par rapport à la variable x . Pour $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $i=1, \dots, n$ on pose :

$$\tau_{ih} v(t, x) = v(t, x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n)$$

$$\rho_{ih} v(t, x) = \frac{1}{h} (\tau_{ih} v(t, x) - v(t, x))$$

On applique la proposition 3-1 à la fonction $\rho_{ih} u$ pour $u \in W_s^{m,q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } u \subset \{(t, x) \in I_+ \times \Omega, \|(t, x) - (0, x_0)\| < \varepsilon\}$ (ε étant donné par la proposition 3-1) et h suffisamment petit :

$$\|\rho_{ih} u\|_{W_s^{m,q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)} \leq C_{s\varepsilon} \{ \|L(\rho_{ih} u)\|_{L^2(\mathbb{R}_+; H^s(\mathbb{R}^n))} + \|\rho_{ih} u\|_{W_{s-1}^{m,q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)} \}$$

Or :

$$L(\rho_{ih} u) = \rho_{ih} Lu + \sum_{j+|\alpha| \leq m} \rho_{ih}(a_{j\alpha})(t, x) t^{[qj]} D_x^\alpha (\tau_{ih} u)(t, x).$$

On en déduit qu'il existe une constante $C'_{s\varepsilon} > 0$ telle que pour h assez petit on ait :

$$\|\rho_{ih} u\|_{W_s^{m,q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)} \leq C'_{s\varepsilon} \{ \|Lu\|_{L^2(\mathbb{R}_+; H^{s+1}(\mathbb{R}^n))} + \|u\|_{W_s^{m,q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)} \}$$

Par conséquent il s'en suit que $D_{x_i} u \in W_s^{m,q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ pour $i=1, \dots, n$ et de là que $u \in W_{s+1}^{m,q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$.

III-1-3 : Résultat de dérivées intermédiaires.

On rappelle le résultat suivant :

Lemme 3-1:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soient } s \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R} \text{ et } p \in \mathbb{N}. \text{ Si } u \in L^2(\mathbb{R}_+; H^s(\mathbb{R}^n)) \text{ et si} \\ D_t^p u \in L^2(\mathbb{R}_+; H^r(\mathbb{R}^n)) \text{ alors } D_t^j u \in L^2(\mathbb{R}_+; H^{s+\frac{j}{p}(r-s)}(\mathbb{R}^n)) \text{ pour} \\ 0 \leq j \leq p. \end{array} \right.$$

III-1-4 : Démonstration du théorème 1-2.

Soit $u \in C^\infty(I_+; \mathcal{D}'(\Omega))$ tel que $Lu \in C^\infty(I' \times \Omega')$ et soit

$(t_0, x_0) \in I' \times \Omega'$. On veut montrer que u est indéfiniment dérivable au

point (t_0, x_0) .

Pour $t_0 \neq 0$ le résultat est classique puisque l'opérateur L est elliptique en tout point (t, x) pour lequel $t \neq 0$.

Pour $t_0 = 0$, soit V un voisinage ouvert du point $(0, x_0)$ dans $I' \times \Omega'$, relativement compact avec $\bar{V} \subset I' \times \Omega'$ et soit $\phi \in C_0^\infty(I' \times \Omega')$ avec $\phi = 1$ sur V . D'après le lemme 2-2, il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $\phi u \in W_{s+1}^{m,q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$. Soit de plus $\varphi \in C_0^\infty(V)$ telle que $\varphi(t, x) = \varphi_1(t) \varphi_2(x)$ avec $\text{supp } \varphi \subset \{(t, x) \in I_+ \times \Omega; \|(t, x) - (0, x_0)\| < \varepsilon\}$ où ε est défini par la proposition 3-2. Alors $L(\varphi u) \in L^2(\mathbb{R}_+; H^{s+1}(\mathbb{R}^n))$ et donc $\varphi u \in W_{s+1}^{m,q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$. Itérant le procédé on en déduit en particulier que $\varphi u \in L^2(\mathbb{R}_+; H^s(\mathbb{R}^n))$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Soient maintenant $p_0 \in \mathbb{N}$ et $s_0 \in \mathbb{R}$ donnés et soit à montrer que $D_t^{p_0}(\varphi u) \in L^2(\mathbb{R}_+; H^{s_0}(\mathbb{R}^n))$. D'après le lemme 2-2 il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $D_t^{p_0+1}(\varphi u) \in L^2(\mathbb{R}_+; H^r(\mathbb{R}^n))$; on choisit alors s tel que $s + \frac{p_0}{p_0+1}(r-s) = s_0$. Comme $\varphi u \in L^2(\mathbb{R}_+; H^s(\mathbb{R}^n))$ on a le résultat annoncé grâce au lemme 3-1.

De là il est facile de conclure que u est indéfiniment dérivable au point $(0, x_0)$.

III-1-5 : Démonstration du théorème 1-1.

C'est un corollaire du théorème 1-2.

III-2: 2ème méthode : Construction d'une paramétrix partielle.

La méthode utilisée est la même que celle introduite dans [1]: on montre que l'opérateur $L(t, x; D_t, D_x)$ convenablement modifié en dehors de $t=0$ peut être considéré comme un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole $L(t, x; D_t, \xi)$ est un opérateur continu de $W^{m,q}(\mathbb{R}_+)$ dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ dont la norme peut être prise indépendante de ξ si on munit $W^{m,q}(\mathbb{R}_+)$ d'une norme dépendant de $|\xi|$ adaptée à l'inégalité (3-1). Puis on montre qu'il existe un opérateur pseudo-différentiel $R(x, D_x)$ dont le symbole $R(x, \xi)$ est un opérateur continu de $L^2(\mathbb{R}_+)$ dans $W^{m,q}(\mathbb{R}_+)$ tel que :

$$R(x, D_x) \circ L(t, x; D_t, D_x) = I + S(x, D_x)$$

où $R(x, D_x)$ opère de $L^2(\mathbb{R}_+; H_{\text{comp}}^s(\Omega))$ dans $W_{s, \text{loc}}^{m, q}(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$
 et $S(x, D_x)$ opère de $W_{s, \text{comp}}^{m, q}(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$ dans $W_{t, \text{loc}}^{m, q}(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$ pour tous $s \in \mathbb{R}$
 et $t \in \mathbb{R}$.

De là, on déduit facilement l'hypoellipticité partielle de
 l'opérateur $L(t, x; D_t, D_x)$.

IV- NON HYPOELLIPTICITE A PARTIR D'UN ESPACE DE DISTRIBUTIONS QUI NE SONT PAS C^∞ DANS LA DIRECTION NORMALE.

Pour $l \in \mathbb{N}$, on désigne par $C^l(I; \mathcal{D}'(\Omega))$ l'espace des fonctions l fois continuellement dérivables sur I à valeurs dans l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions sur Ω .

On peut poser le problème d'hypoellipticité partielle à partir d'un espace du type $C^l(I; \mathcal{D}'(\Omega))$ (et non pas à partir de $C^\infty(I; \mathcal{D}'(\Omega))$ comme on l'a fait précédemment) ie: existe-t-il un entier $l \in \mathbb{N}$ tel que pour tous ouverts $I' \subset I$ et $\Omega' \subset \Omega$, pour tout $u \in C^l(I; \mathcal{D}'(\Omega))$ tel que $Lu \in C^\infty(I' \times \Omega')$ on ait $u \in C^\infty(I' \times \Omega')$.

On va montrer, lorsque les coefficients $a_{j\alpha}$ de l'opérateur L se prolongent en des fonctions $\tilde{a}_{j\alpha}$ appartenant à l'espace $C^\infty(I; \mathcal{O}(\tilde{\Omega}))$ des fonctions indéfiniment dérivables sur I à valeurs dans l'espace $\mathcal{O}(\tilde{\Omega})$ des fonctions holomorphes sur un ouvert $\tilde{\Omega}$ de $\mathbb{C}^n$ tel que $\tilde{\Omega} \cap \mathbb{R}^n = \Omega$, alors L ne possède pas cette propriété d'hypoellipticité partielle à partir d'un certain espace $C^l(I; \mathcal{D}'(\Omega))$.

On se place dans une situation plus générale que celle imposée par les conditions 1 et 2. On normalise l'opérateur L en supposant $a_{m0} \equiv 1$ et on suppose que les coefficients $a_{j\alpha}(t, x)$ se prolongent en des fonctions de $C^\infty(I; \mathcal{O}(\tilde{\Omega}))$ où $\tilde{\Omega}$ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ tel que $\tilde{\Omega} \cap \mathbb{R}^n = \Omega$. On introduit lorsque $q > 1$, la condition suivante :

Condition 3 : Il existe $\alpha \neq 0$ tel que $a_{0\alpha}(0, x)$ ne soit pas identiquement nul.

Remarque 4.1 : Cette condition 3 signifie exactement que l'opérateur $t^{-\sigma} L$, considéré pour $t=0$, n'est pas réduit à un opérateur de multiplication par une fonction.

Le théorème suivant dégage une classe d'opérateurs qui ne sont pas hypoelliptiques.

Théorème 4.1 :

On suppose que l'opérateur L satisfait la condition 3 lorsque $q > 1$.

Alors, l'opérateur L n'est pas hypoelliptique dans $I \times \Omega$.

Démonstration : lorsque $q=1$ et lorsque l'opérateur L est du type de Fuchs (c'est-à-dire, lorsque $a_{j\alpha}(0,x) \equiv 0$ pour $\alpha \neq 0$), ce théorème a été démontré dans [5]. Pour les autres cas, le théorème va résulter de la proposition suivante qui répond en particulier au problème posé précédemment sur l'hypoellipticité partielle à partir d'un espace du type $C^\infty(I; \mathcal{D}'(\Omega))$.

Proposition 4.1 :

On suppose que pour $q=1$, l'opérateur L n'est pas du type de Fuchs et que pour $q > 1$, il satisfait la condition 3. Alors, il existe ℓ_0 tel que pour tout entier $\ell \geq \ell_0$, il existe des ouverts $I' \subset I$ et $\Omega' \subset \Omega$ et une fonction $u \in C^{\ell-1}(I' \times \Omega')$ tels que $u \notin C^\ell(I' \times \Omega')$ et $Lu \in C^\infty(I' \times \Omega')$.

Remarque 4.2. - Si $q=1$ et si l'opérateur L est du type de Fuchs, ce résultat n'est plus vrai en général (cf. [1]).

- Si $q > 1$, la condition 3 peut être affaiblie (cf. remarque 4.3).

Démonstration : Il suffit évidemment de démontrer la proposition 4.1 pour $\sigma=0$.

On précise tout d'abord quelques notations : notant $L(t,z; D_t, D_z)$ l'opérateur défini par prolongement sur $I \times \Omega$, $Y(t)$ la fonction (de Heaviside) égale à 1 pour $t > 0$ et 0 pour $t < 0$, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ et pour toute fonction $\varphi(z)$ holomorphe dans un ouvert V contenu dans $\tilde{\Omega}$, on a :

$$L(t,z; D_t, D_z) (Y(t) t^{\ell+p} \varphi(z)) = \sum_{j+|\alpha| \leq m} \tilde{a}_{j\alpha}(t,z) t^{[qj]} D_t^j (Y(t) t^{\ell+p}) D_z^\alpha \varphi(z).$$

On suppose tout d'abord que $q=1$. On peut écrire l'expression précédente sous la forme :

$$L(t,z; D_t, D_z) (Y(t) t^{\ell+p} \varphi(z)) = Y(t) t^{\ell+p} L_{\ell+p}(z, D_z) \varphi(z) + Y(t) t^{\ell+p+1} \tilde{\varphi}(t,z)$$

avec :

$$L_{\ell+p}(z, D_z) = \sum_{j+|\alpha| \leq m} \tilde{a}_{j\alpha}(o, z) i^j (\ell+p) \dots (\ell+p-j+1) D_z^\alpha$$

et

$$\tilde{\varphi}(t, z) \in C^\infty(I; \mathcal{O}(V)).$$

On note que, puisque l'opérateur L n'est pas du type de Fuchs, l'opérateur $L_{\ell+p}(z, D_z)$ n'est pas réduit à une fonction scalaire dans Ω . Il existe un entier μ avec $1 \leq \mu \leq m$ tel que $L_{\ell+p}(z; D_z)$ se réduise à l'opérateur :

$$L_{\ell+p}(z, D_z) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq \mu \\ j+|\alpha| \leq m}} \tilde{a}_{j\alpha}(o, z) i^j (\ell+p) \dots (\ell+p-j+1) D_z^\alpha$$

Notant $L_{\ell+p}^\mu(z, \zeta)$ le symbole principal de l'opérateur $L_{\ell+p}(z, D_z)$, il existe un entier h avec $0 \leq h \leq m-\mu$ tel que le polynôme $L_{\ell+p}^\mu(z, \zeta)$ se réduise au polynôme :

$$L_{\ell+p}^\mu(z, \zeta) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq \mu \\ 0 \leq j \leq h}} \tilde{a}_{j\alpha}(o, z) i^j (\ell+p) \dots (\ell+p-j+1) \zeta^\alpha$$

avec :

$$\sum_{|\alpha| = \mu} \tilde{a}_{h\alpha}(o, z) \zeta^\alpha \neq 0$$

c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que le polynôme $\sum_{|\alpha| = \mu} \tilde{a}_{h\alpha}(o, x_0) \zeta^\alpha$ ne soit pas identiquement nul. On écrit le symbole principal sous la forme :

$$L_{\ell+p}^\mu(z, \zeta) = i^h (\ell+p) \dots (\ell+p-h+1) \left[\sum_{|\alpha| = \mu} \tilde{a}_{h\alpha}(o, z) \zeta^\alpha + \sum_{\substack{|\alpha| = \mu \\ 0 \leq j < h}} \frac{i^{-h+j}}{(\ell+p-j) \dots (\ell+p-h+1)} \tilde{a}_{j\alpha}(o, z) \zeta^\alpha \right]$$

En appliquant un théorème de Cauchy-Kowaleski précisé implicitement contenu dans [3] et rappelé dans l'Appendice sous la forme utilisée ici, on déduit qu'il existe ℓ_0 et un voisinage V de x_0 dans $\mathbb{C}^n$ tels que pour tout entier $\ell \geq \ell_0$, pour tout entier $p \geq 0$, pour tout $f \in \mathcal{O}(V)$, il existe $u_{\ell+p} \in \mathcal{O}(V)$ non nulle en x_0 telle que $L_{\ell+p}(z, D_z) u_{\ell+p} = f$ dans V .

Soit donc V ce voisinage de x_0 dans $\mathbb{C}^n$ associé à tous les opérateurs

$L_{\ell+p}(z, D_z)$ pour tout entier $p \geq 0$ et pour tout entier $\ell \geq \ell_0$. Soit ℓ entier fixé $\geq \ell_0$. Il existe donc une fonction $\varphi_\ell(z)$ non nulle en x_0 , holomorphe dans V telle que :

$$L_\ell(z, D_z) \varphi_\ell(z) = 0 \text{ dans } V$$

Par suite, on a :

$$(\ell) \quad L(t, z, D_t, D_z) (Y(t) t^\ell \varphi_\ell(z)) = Y(t) t^{\ell+1} \tilde{\varphi}_\ell(t, z)$$

avec $\tilde{\varphi}_\ell(t, z) \in C^\infty(I, \mathcal{O}(V))$.

Supposons qu'on ait construit $\varphi_\ell(z), \dots, \varphi_{\ell+p}(z)$ holomorphes dans V telles que :

$$(\ell+p) \quad L(t, z, D_t, D_z) (Y(t) t^\ell \sum_{0 \leq j \leq p} t^j \varphi_{\ell+j}(z)) = Y(t) t^{\ell+p+1} \phi_{\ell+p}(t, z)$$

avec $\phi_{\ell+p}(t, z) \in C^\infty(I; \mathcal{O}(V))$.

On décompose ce deuxième membre en

$$Y(t) t^{\ell+p+1} \phi_{\ell+p}(0, z) + Y(t) t^{\ell+p+2} \tilde{\phi}_{\ell+p}(t, z)$$

avec $\tilde{\phi}_{\ell+p}(t, z) \in C^\infty(I; \mathcal{O}(V))$.

On construit alors $\varphi_{\ell+p+1}$ par résolution de l'équation :

$$L_{\ell+p+1}(z, D_z) \varphi_{\ell+p+1}(z) = -\phi_{\ell+p}(0, z).$$

Comme $\phi_{\ell+p}(0, z)$ est holomorphe dans V , il existe d'après le théorème de Cauchy-Kowaleski précisé une fonction $\varphi_{\ell+p+1}$ holomorphe dans V .

Par suite :

$$L(t, z; D_t, D_z) (Y(t) t^{\ell+p+1} \varphi_{\ell+p+1}(z)) = -Y(t) t^{\ell+p+1} \phi_{\ell+p}(0, z) + Y(t) t^{\ell+p+2} \tilde{\varphi}_{\ell+p+1}(t, z)$$

avec $\tilde{\varphi}_{\ell+p+1}(t, z) \in C^\infty(I; \mathcal{O}(V))$.

Ainsi, on a pu construire $\varphi_{\ell+p+1}(z)$ holomorphe dans V telle que :

$$(\ell+p+1) \quad L(t, z; D_t, D_z) (Y(t) t^\ell \sum_{0 \leq j \leq p+1} t^j \varphi_{\ell+j}(z)) = Y(t) t^{\ell+p+2} \phi_{\ell+p+1}(t, z)$$

avec $\phi_{\ell+p+1}(t, z) = \tilde{\phi}_{\ell+p}(t, z) + \tilde{\varphi}_{\ell+p+1}(t, z) \in C^\infty(I; \mathcal{O}(V))$. La construction est donc récurrente (par rapport à l'entier $p \geq 0$).

$$\text{Posant pour } \ell \text{ entier fixé } \geq \ell_0, \quad u_p(t, x) = Y(t) t^\ell \sum_{0 \leq j \leq p} t^j \varphi_{\ell+j}(x)$$

la construction précédente montre qu'il existe un ouvert $\Omega_1 \subset \Omega$ et une suite de fonctions $(u_p(t, x))_{p \geq 0}$ tels que pour tout entier $p \geq 0$, on ait :

- i) $u_p \in C^{\ell-1}(I \times \Omega_1)$
- ii) pour tous ouverts $I' \subset I$ contenant 0 et $\Omega_2 \subset \Omega_1$, $u_p \in C^{\ell}(I' \times \Omega_2)$
- iii) $L u_p \in C^{\ell+p}(I \times \Omega_1)$
- iv) $u_{p+1} - u_p \in C^{\ell+p}(I \times \Omega_1)$.

Par un procédé classique (cf. [5] par exemple), on déduit qu'il existe une fonction $u \in C^{\ell-1}(I' \times \Omega')$ telle que $u \in C^{\ell}(I' \times \Omega')$ et $Lu \in C^{\infty}(I' \times \Omega')$, I' étant un ouvert tel que $0 \in I' \subset I$ et Ω' étant un ouvert tel que $\Omega' \subset \subset \Omega_1$. Ce qui termine la démonstration de la proposition 4.1 dans le cas où $q=1$.

On examine maintenant le cas où $q > 1$. On peut écrire l'expression suivante :

$$L(t, z; D_t, D_z) (Y(t) t^{\ell+p} \varphi(z)) = Y(t) t^{\ell+p} L_0(z, D_z) \varphi(z) + Y(t) t^{\ell+p+1} \tilde{\varphi}(t, z)$$

avec :

$$L_0(z, D_z) = \sum_{|\alpha| \leq m} \tilde{a}_{0\alpha}(0, z) D_z^{\alpha} (=L(0, z, D_t, D_z))$$

et :

$$\tilde{\varphi}(t, z) \in C^{\infty}(I; \mathcal{O}(V)).$$

Ayant cette décomposition, on applique la même technique que celle utilisée dans le cas où $q=1$. Notons que dans ce cas où $q > 1$ la construction de la suite de fonctions $(\varphi_{\ell+p})_{p \geq 0}$ par résolution de problèmes de Cauchy par récurrence est simplifiée dans le sens que l'on utilise à chaque étape le même opérateur L_0 (au lieu de la suite d'opérateurs $(L_{\ell+p})_{p \geq 0}$ dans le cas où $q=1$).

Remarque 4.3 : Dans le cas où q est > 1 , si l'opérateur $L_0(z, D_z) =$

$$L(0, z, D_t, D_z) = \sum_{|\alpha| \leq m} \tilde{a}_{0\alpha}(0, z) D_z^{\alpha} \text{ est identiquement nul, on peut chercher}$$

à appliquer la même méthode en utilisant une décomposition de la forme :

$$L(t, z, D_t, D_z) (Y(t) t^{\ell+p} \varphi(z)) = Y(t) t^{\ell+p+n} L_{\ell+p}(z, D_z) \varphi(z) + Y(t) t^{\ell+p+n+1} \tilde{\varphi}(t, z)$$

où n est un entier ≥ 1 et $L_{\ell+p}(z, D_z)$ est un opérateur du type

$$L_{\ell+p}(z, D_z) = \sum_{\substack{j+|\alpha| \leq m \\ k \leq j \leq h}} b_{j\alpha}(z) (\ell+p) \dots (\ell+p-j+1) D_z^\alpha$$

pour certains h et k tels que $1 \leq k \leq h \leq m$. Dans ce cas, la condition 3 (qui n'a évidemment pas lieu) doit être remplacée par une autre condition pour pouvoir appliquer la même méthode.

Par contre, toujours dans le cas où q est > 1 , si l'opérateur $L_0(z, D_z)$ est réduit à une fonction scalaire non nulle, la méthode utilisée ne s'applique plus.

APPENDICE.

On donne une forme du théorème du Cauchy Kowaleski telle qu'on l'utilise dans la démonstration de la proposition 4.1 et qui est contenu implicitement dans [3].

Théorème :

Soit $P_\lambda(z, D_z)$ un opérateur différentiel de la forme

$$P_\lambda(z, D_z) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(z, \lambda) D_z^\alpha$$

où m est un entier ≥ 1 et où les coefficients $a_\alpha(z, \lambda)$ sont holomorphes par rapport à z dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ et sont continus par rapport à (z, λ) au point $(z_0, 0)$ de $U \times \mathbb{C}$. On suppose qu'il existe un vecteur $\zeta_0 \in \mathbb{C}^n$ non caractéristique au point z_0 pour l'opérateur $P_0(z, D_z)$.

Alors, il existe un système fondamental de voisinages V de z_0 dans $\mathbb{C}^n$ et un voisinage W de 0 dans $\mathbb{C}$ tels que pour tout $\lambda \in W$ et pour tout $f \in \mathcal{O}(V)$ il existe $u_\lambda \in \mathcal{O}(V)$ non nulle en z_0 telle que $P_\lambda(z, D_z) u_\lambda(z) = f(z)$ dans V .

Démonstration : Pour simplifier, on suppose que $z_0 = 0$ et $\zeta_0 = (0, \dots, 0, 1)$.

La continuité de l'application :

$$(z, \lambda, \zeta) \longrightarrow \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(z, \lambda) \zeta^\alpha$$

au point $(0, 0, \zeta_0)$ et le fait que $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(0, 0) \zeta_0^\alpha \neq 0$ montre qu'il existe

$\delta_0 > 0$, $\lambda_0 > 0$, $a > 0$ telles que pour tout $z \in \mathbb{C}^n$ avec $|z| < a$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| < \lambda_0$, pour tout vecteur $\zeta_1 \in \mathbb{C}^n$ normal à ζ_0 et $|\zeta_1| = 1$ et pour tout δ avec $0 \leq \delta < \delta_0$, on ait :

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(z, \lambda) (\zeta_0 + \delta \zeta_1)^\alpha \neq 0.$$

Soit δ_1 fixé avec $0 \leq \delta_1 < \inf(1, \delta_0)$. Soit ω la boule ouverte de centre 0 , de rayon a dans l'hyperplan $z_n = 0$ et soit Ω l'enveloppe convexe dans $\mathbb{C}^n$ de ω et de la boule ouverte de centre 0 et de rayon δ_1 dans

$z_1 = \dots = z_{n-1} = 0$. Comme dans [3], on note : $\text{Car } (\Omega, \lambda)$ l'adhérence des directions qui sont caractéristiques pour l'opérateur $P_\lambda(z, D_z)$ en au moins un point de Ω (c'est-à-dire un vecteur ζ non nul appartient à $\text{Car } (\Omega, \lambda)$ s'il existe une suite (z_n, ζ_n) avec $z_n \in \Omega$, ζ_n convergeant vers ζ et telle que

$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(z_n, \lambda) \zeta_n^\alpha = 0$). Alors, tout hyperplan de normale appartenant à $\text{Car } (\Omega, \lambda)$ qui coupe Ω coupe ω pour λ tel que $|\lambda| < \lambda_0$. On peut alors appliquer le théorème de prolongement de [3] : pour tout λ tel que $|\lambda| < \lambda_0$ et pour tout $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ une solution u_λ du problème $P_\lambda(z, D_z) u_\lambda(z) = f(z)$ avec $u_\lambda(0) \neq 0$ fournie par le théorème de Cauchy Kowaleski se prolonge en une fonction holomorphe dans Ω tout entier.

Remarque : Si $a_\alpha(z, \lambda)$ est indépendant de λ pour les α tels que $|\alpha| = m$, le théorème précédent est valable pour tout λ .

B I B L I O G R A P H I E

- [1] BOLLEY (P.), CAMUS (J.) et HELFFER (B.) : "Sur une classe d'opérateurs partiellement hypoelliptiques". A paraître au Journ. Math. Pures et Appl.
- [2] BOLLEY (P.), CAMUS (J.) et HELFFER (B.) : "Hypoellipticité partielle pour une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés". Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz 1974-1975. Exposé n° XIII.
- [3] BONY (J.M.) et SCHAPIRA (P.) : "Solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles". Inventiones Math. 17, 95-105 (1972).
- [4] FURSIKOV (A.V.) : "On a class of globally hypoelliptic operators". Mat. Sbornik, Tom 91 (133) (1973), n° 3. Math. USSR Sbornik, Vol. 20 (1973), n° 3.
- [5] HELFFER (B.) et ZUILY (C.) : "Non-hypoellipticité d'une classe d'opérateurs différentiels". Astérisque n° 19, p. 107-122 (1974).
- [6] PREVOSTO (D.) et ROLLAND (J.) : "Théorème d'indice et régularité pour une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés". C.R. Acad. Sc. Paris, t. 279 (16 décembre 1974), série A. 873.
- [7] SCHWARTZ (L.) : "Distributions à valeurs vectorielles I. II". Ann. Inst. Fourier 7, 1-141 (1957) ; 8, 1-209 (1959).
- [8] TREVES (F.) : "Linear partial differential equations with constant coefficients". Gordon and Breach, New-York, 1966.

SUR UNE CLASSE D'OPERATEURS HYPOELLIPTIQUES
A CARACTERISTIQUES MULTIPLES

B. HELFFER

Résumé : On se propose de généraliser certains résultats de L. Boutet de Monvel, F. Trèves et J. Sjöstrand [2], [3], [5] sur les opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles à certaines classes d'opérateurs pseudodifférentiels qui dégénèrent à un ordre supérieur.

§ 0. INTRODUCTION.

Avant de présenter nos résultats, rappelons brièvement le cadre dans lequel se sont placés les auteurs cités ci-dessus, et les résultats qu'ils ont obtenus.

Soit Ω une variété C^∞ paracompacte de dimension n , et soit $T^*(\Omega) \setminus \{0\}$ l'espace cotangent privé de 0.

Soit $\Sigma \subset T^*(\Omega) \setminus \{0\}$ un ensemble conique fermé, et soit m dans $\mathbb{R}$, M dans $\mathbb{N}$. On définit $L^{m,M}(\Omega, \Sigma)$, comme l'ensemble des opérateurs pseudodifférentiels classiques dans $L^m(\Omega)$, qui, dans chaque système de coordonnées locales d'un ouvert $U \subset \Omega$, ont un symbole de la forme :

$$(0.1.) \quad p(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} p_{m-j}(x, \xi)$$

où les p_{m-j} sont dans $S^{m-j}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus 0)$, positivement homogènes de degré $m-j$, et vérifient :

Pour tout compact $K \subset U$, il existe une constante C strictement positive, telle que, pour tout (x, ξ) dans $K \times \mathbb{R}^n$, tel que $|\xi| \geq 1$, on ait :

$$(0.2.) \quad \frac{|p_m(x, \xi)|}{|\xi|^m} \geq C^{-1} (d(x, \xi))^M.$$

$$(0.3.) \quad \frac{|p_{m-j}(x, \xi)|}{|\xi|^{m-j}} \leq C (d(x, \xi))^{M-2j}, \quad 0 \leq 2j \leq M, \quad j \in \mathbb{N}$$

$d(x, \xi) = \inf_{(y, \eta) \in \Sigma} (|x-y| + |\eta - \frac{\xi}{|\xi|}|)$ est, par définition, la distance de (x, ξ) à Σ .

Soit $\sigma = \sum_{j=1}^n d\xi_j \wedge dx_j$ la forme symplectique canonique sur $T^*(\Omega)$

et nous supposerons dans tout cet article que :

(0.4.) Σ est une variété canonique fermée symplectique de codimension 2 dans $T^*\Omega \setminus 0$.

Cette dernière hypothèse permet de définir en tout point de Σ (de manière invariante) un entier relatif qui est l'indice d'enroulement de p_m autour de Σ (winding number) et dont la définition est donnée, par exemple, dans [5].

Dans le cas où p_m s'annule à l'ordre M , cet indice est un des entiers $-M, -M+2, \dots, +M$.

Dans le cadre ci-dessus, les résultats suivants ont été démontrés :

i) cf. J. Sjöstrand [5] Th. 1-4.

Si l'indice d'enroulement est strictement positif en un point de Σ , l'opérateur n'est pas hypoelliptique.

ii) cf. J. Sjöstrand [5] Th. 1-2.

Si l'indice d'enroulement est égal à $-M$ en tout point de Σ , l'opérateur est hypoelliptique.

iii) cf. J. Sjöstrand [5], L. Boutet de Monvel, F. Trèves [3], L. Boutet de Monvel [2].

Si $M=2$, et que l'indice d'enroulement est nul sur Σ , l'opérateur est hypoelliptique si le symbole sous principal évite des valeurs discrètes, phénomène déjà observé sur un modèle par V.V. Grushin [4].

La méthode utilisée, due à l'origine à Grushin [4] pour des modèles, consiste à se ramener à l'étude du noyau dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (espace des fonctions C^∞ à décroissance rapide à l'infini) d'une équation différentielle

ordinaire associée à P.

Nous nous proposons ici de généraliser le cas iii) lorsque $M \geq 2$ et de donner une condition suffisante d'hypoellipticité lorsque l'indice d'enroulement est $-M+2$.

Nous montrerons comment cette étude se ramène à celle de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$L = a_{0M} \prod_{p=1}^{M-1} (D_t - ia_p t) \cdot (D_t - ibt) + \sum_{l=1}^{[M/2]} \lambda_l \prod_{p=1}^{M-2l} (D_t - ic_p^l t)$$

avec $\operatorname{Re} a_p < 0$, $\operatorname{Re} b > 0$.

Cette étude a déjà été faite dans un article que nous avons fait en collaboration avec P. Bolley et J. Camus [1] et dont nous utiliserons les résultats.

Le plan de ce travail est le suivant :

Nous n'énoncerons le théorème principal de cet article qu'à la fin dans § 1, après avoir défini un invariant ℓ_p lié à l'opérateur.

Le § 2 sera consacré à la démonstration du théorème, tandis que le § 3 considèrera un résultat plus précis dans le cas particulier ($M = 3$).

La définition de l'invariant au § 1 est fortement inspirée de [3], mais nous avons préféré utiliser [5] pour la démonstration proprement dite.

§ 1. ENONCE DU THEOREME.

Nous faisons en plus des hypothèses (0.1) $\rightarrow$ (0.4), l'hypothèse suivante :

(1.1.)^{*} En tout point ρ de Σ , l'indice d'enroulement de p_m est égal à $-M+2$.

^{*} On peut faire une hypothèse microlocale, si on veut démontrer un théorème microlocal.

Dans un voisinage conique Γ d'un point ρ de Σ , Σ peut être défini par les équations :

$$u = v = 0$$

où u et v sont des fonctions réelles C^∞ , homogènes de degré zéro, de telle sorte que le crochet de Poisson satisfait :

$$\{u, v\} > 0 \quad \text{dans } \Gamma.$$

D'après (0.2.), p_m peut s'écrire de la manière suivante dans Γ^{**}

$$p_m = \sum_{j=0}^M a_j u^j v^{M-j}$$

où les a_j , $j = 0, \dots, M$ sont régulières dans Γ , positivement homogènes de degré m .

L'hypothèse 1.1 nous dit que le polynôme en λ , $\sum_{j=0}^M a_j \lambda^j$, a M racines :

α_i : $i=1, \dots, M-1$, β avec $\text{Im}\beta > 0$ et $\text{Im}\alpha_i < 0$ dans Γ , $i=1, \dots, M-1$.

Comme β est racine simple, c'est une fonction régulière homogène de degré zéro dans Γ . De même toute fonction symétrique des α_i sera régulière (ceci sera utile dans la suite).

Soit Y un opérateur pseudodifférentiel dans Ω dont le symbole principal est $q \cdot a_m(u - \beta v)$ dans Γ ; q désigne un symbole elliptique de degré 1.

Observons que $[Y^*, Y]$ est elliptique négatif dans Γ et que Y est dans $L^{1+m,1}(\Omega, \Sigma)$ dans Γ .

Soit X un opérateur pseudodifférentiel dans $L^{-1, M-1}(\Omega, \Sigma)$ dont le symbole principal est $q^{-1} \prod_{j=1}^{M-1} (u - \alpha_j v)$ dans Γ .

** Ceci est vrai, quitte à restreindre Γ . Nous ne mentionnerons pas toujours dans la suite ces restrictions.

Soit P l'opérateur pseudodifférentiel de symbole p , on pose

$$Z = P - XY .$$

Par construction Z est dans $L^{m-1, M-2}(\Omega, \Sigma)$ dans Γ .

On considère l'application $\text{ad}Y$ qui, à un opérateur pseudodifférentiel S , associe l'opérateur pseudodifférentiel $\text{ad}YS = [S, Y]$.

On considère alors :

$$(1.2.) \quad \ell_P = \text{restr. à } \Sigma \cap \Gamma \text{ de } \left[\frac{\sigma_{(1-2l-m)+(1-1+m)M}((\text{ad}Y)^{M-2}Z)}{\sigma_{(1-2l-m)+(1-1+m)M}((\text{ad}Y)^{M-1}X)} \right] \frac{(M-1)!}{(M-2)!}$$

Remarquons que, lorsque $M = 2$,

$$\ell_P = \text{restr. à } \Sigma \cap \Gamma \text{ de } : \frac{\sigma_{m-1}(Z)}{\sigma_{m-1}([X, Y])}$$

est l'invariant défini en [3].

Si on écrit le symbole principal (d'ordre $m-1$) de Z sous la forme :

$$\sigma_{m-1}(Z) = \lambda(u - \gamma_1 v) \dots (u - \gamma_{m-2} v) \quad \text{dans } \Gamma ,$$

on a :

$$\sigma((\text{ad}Y)^{M-2} Z)/\Sigma = \lambda \cdot q^{M-2} a_m^{M-2}(i)^{M-2}(M-2)! (\beta - \gamma_1) \dots (\beta - \gamma_{M-2}) \{u, v\}^{M-2}$$

$$\sigma((\text{ad}Y)^{M-1} X)/\Sigma = q^{M-2} a_m^{M-1}(i)^{M-1}(M-1)! (\beta - \alpha_1) \dots (\beta - \alpha_{M-1}) \{u, v\}^{M-1}$$

de sorte que :

$$(1.3.) \quad \ell_P = \frac{\lambda}{i \{u, v\} a_m} \frac{(\beta - \gamma_1) \dots (\beta - \gamma_{M-2})}{(\beta - \alpha_1) \dots (\beta - \alpha_{M-1})} .$$

L'omission de toute mention de Γ dans ℓ_P est justifiée par le fait que la définition de ℓ_P est indépendante de la décomposition :

$$P = XY + Z$$

où l'on suppose que $[Y^*, Y]$ est elliptique négatif, $Y \in L^{p,1}, X \in L^{m-p, M-1}, Z \in L^{m-1, M-2}$. La démonstration est analogue à celle de [3].

On aura besoin, dans la suite, des deux propriétés suivantes :

(1.4.) Si A et B désignent deux opérateurs pseudodifférentiels elliptiques dans Ω

$$\ell_{APB} = \ell_P .$$

(1.5.) On désigne par $\mathcal{C}$ une transformation canonique d'un ensemble ouvert conique $\Gamma \subset T^*\Omega \setminus 0$ sur un autre ensemble Γ' du même type, et soit U un opérateur fourrier-intégral elliptique associé à $\mathcal{C}$, alors, on a :

$$\ell_{U P U^{-1}/\Sigma} = (\ell_{P/\Sigma \cap \Gamma'}) \circ \tau^{-1}$$

$$\text{où } \Sigma = \tau(\Sigma \cap \Gamma').$$

Les propriétés ci-dessus nous permettront l'usage des transformations canoniques, et la démonstration du théorème sur un modèle microlocal.

Nous démontrerons dans cet article le théorème suivant :

Théorème 1 : Soit P vérifiant (0.1), (0.2), (0.3), (0.4), (1.1), on suppose que ℓ_P ne rencontre pas N sur Σ ; alors P est hypoelliptique. De plus, il existe un opérateur E de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, continu de $H_s^{\text{loc}}(\Omega)$ dans $H_{s+M/2}^{\text{loc}}(\Omega)$ pour tout s réel, tel que ♦ :

$$EP - I \equiv 0 .$$

§ 2. DEMONSTRATION DU THEOREME.

a) Transformations canoniques et opérateurs fourrier-intégraux.

Nous rappelons ici certains résultats de [5], § 6.

♦ $A \equiv B$ si $A-B$ est un opérateur régularisant.

Il est bien connu qu'il existe au voisinage de tout point ρ de Σ une transformation canonique $\mathcal{C}$ qui envoie le cône Σ sur le $\check{\Sigma}$ de $T^*(\mathbb{R}^n) \setminus 0$ défini par $t = 0, \tau = 0$ où $((x, \xi) = (x', t, \xi', \tau) \in T^*(\mathbb{R}^n) \setminus 0)$.

On pose $\rho_0 = \mathcal{C}(\rho)$ et soit V un sous-ensemble conique fermé du graphe de $\mathcal{C}$, contenant (ρ_0, ρ) comme point intérieur.

On pose $V' = \{(\mu, -\nu), (\mu, \nu) \in V\}$.

On associe à $\mathcal{C}$ un opérateur fourier intégral U dans $I^0(\mathbb{R}^n \times \Omega, V')$ elliptique tel que :

$$\begin{aligned} U^* U &\equiv I \text{ près de } \rho \\ U U^* &\equiv I \text{ près de } \rho_0. \end{aligned}$$

On a alors le lemme suivant :

Lemme 2.1 : (cf. lemme 6.2, [5])

Soit P dans $L^{M,M}(\Omega, \Sigma)$ d'indice d'enroulement $-M+2$ au voisinage du point ρ , alors $\tilde{P} = U P U^*$ appartient à $L^{M,M}(\mathbb{R}^n, \check{\Sigma})$ dans un voisinage de ρ_0 et a le même indice d'enroulement. De plus, $\mathcal{A}_{\tilde{P}} = \mathcal{A}_P \circ \mathcal{C}^{-1}$ au voisinage de ρ_0 .

Ce lemme nous permet de nous ramener à la situation microlocale.

b) Résultats microlocaux lorsque Σ est dans une position particulière.

On suppose donc maintenant que Σ est donné par $t = \tau = 0$ et que P appartient (microlocalement au voisinage de ρ_0) à $L^{M,M}(\mathbb{R}^n, \Sigma)$. Utilisant la formule de Taylor, on peut écrire :

$$(2.1) \quad P(x, D) \equiv \sum_{\substack{\alpha + \beta \leq M \\ (M + \alpha - \beta)/2 \in \mathbb{N}}} t^\alpha a_{\alpha\beta}(x, D) D_t^\beta$$

où $a_{\alpha\beta} \in L^{(M + \alpha - \beta)/2}(\mathbb{R}^n)$

lorsque M est pair.

$$(2.1) \text{ bis} \quad P(x, D) \equiv \sum_{\substack{\alpha + \beta \leq M \\ (M + \alpha - \beta)/2 \in \mathbb{N}}} t^\alpha a_{\alpha\beta}(x, D) D_t^\beta + B(x, D)$$

avec $a_{\alpha\beta} \in L^{(M + \alpha - \beta)/2}(\mathbb{R}^n)$, $B \in L^{M-1/2}(\mathbb{R}^n)$
lorsque M est impair.

On associe à $P(x, D)$ l'opérateur différentiel ordinaire (cf. [4], [5]).

$$(2.2) \quad L_o(x', \xi') = \sum_{\substack{\alpha + \beta \leq M \\ (M + (\alpha - \beta))/2 \in \mathbb{N}}} t^\alpha a_{\alpha\beta}^o(x', 0, \xi', 0) D_t^\beta$$

où $x = (x', t)$, $\xi = (\xi', \tau)$, $\rho_o = (x', 0, \xi', 0)$, $a_{\alpha\beta}^o$ est le symbole principal de $a_{\alpha\beta}(x, D)$.

Proposition 2.2 : (th. 5.9 [5]).

Soit Γ un voisinage conique de ρ_o , et supposons que, en tout point $(x', 0, \xi', 0)$ de $\Gamma \cap \Sigma$, $L_o(x', \xi')$ est injectif dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors P est hypoelliptique dans Γ et il existe un opérateur G de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, continu de $H_s^{loc}(\mathbb{R}^n)$ dans $H_{s+M/2}^{loc}(\mathbb{R}^n)$, tel que

$$G.P \equiv I \text{ dans } \Gamma.$$

Nous avons donc ramené l'étude de l'hypoellipticité à l'étude du noyau d'une équation différentielle ordinaire.

c) Etude du noyau d'une équation différentielle ordinaire dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On considère les opérateurs du type 2.2 :

$$L_o = \sum_{\substack{\alpha + \beta \leq M \\ (M + \alpha - \beta)/2 \in \mathbb{N}}} t^\alpha a_{\alpha\beta} D_t^\beta.$$

Utilisant l'hypothèse 1.1, on peut écrire cet opérateur sous la forme (non unique) suivante :

$$(2.3) \quad L_o = a_{oM} \prod_{p=1}^{M-1} (D_t - ia_p t) \cdot (D_t - ibt) + \sum_{l=1}^{[M/2]} \lambda_l \prod_{p=1}^{M-2l} (D_t - ic_p^1 t)$$

♦ On désigne par $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions C^∞ à décroissance rapide.

avec $\operatorname{Re} a_p < 0$, $\operatorname{Re} b > 0$.

On a alors la proposition suivante :

Proposition 2.3 : (Proposition 4.3 [1])

$$(2.4) \quad \text{Posons} \quad \ell_{L_0} = \frac{\lambda_1}{a_{0M}} \frac{\prod_{p=1}^{M-2} (c_p^1 - b)}{\prod_{p=1}^{M-1} (a_p - b)}.$$

Alors, si $\ell_{L_0} \notin \mathbb{N}$, on a $\operatorname{Ker} L_0 \cap \mathcal{V}(\mathbb{R}) = 0$.

d) Démonstration du théorème :

Utilisant la propriété (1.4) de ℓ_p , il est clair qu'on peut démontrer le théorème en supposant que P est dans $L^{M,M}(\Omega, \Sigma)$.

Le lemme 2.1 et 1.5 nous permettent de nous ramener à l'étude du cas particulier où P est dans $L^{M,M}(\mathbb{R}^n, \tilde{\Sigma})$ et où la variété caractéristique est donnée par $t = \tau = 0$.

Les propositions 2.2 et 2.3 permettent alors la démonstration du théorème, si on remarque que (comparer 2.4 et 1.3) :

$$\ell_p(x', \xi', 0, 0) = \ell_{L_0}(x', \xi').$$

§ 3. CAS PARTICULIER : $M = 3$.

On suppose que $M=3$; on peut préciser la proposition 2.3 de la manière suivante :

soit $L_0 = (D_t - ia_1 t)(D_t - ia_2 t)(D_t - ibt) + \lambda(D_t - ict)$
avec $\operatorname{Re} a_1 < 0$, $\operatorname{Re} a_2 < 0$, $\operatorname{Re} b > 0$.

Proposition 3.1 : (Prop. 4.4 [1])

$$\text{Soit} \quad \ell_{L_0} = \lambda \frac{(c-b)}{(a_1-b)(a_2-b)}, \quad \text{alors}$$

i) si $\ell_{L_0} \notin \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker} L_0 \cap \mathcal{V}(\mathbb{R}) = 0$

- ii) si ℓ_{L_0} est un entier pair, $\text{Ker } L \cap \mathcal{Y}(\mathbb{R})$ de dimension 1
- iii) si $\ell_{L_0} = 2n+1$ est un entier impair, on a :

$$\text{Ker } L \cap \mathcal{Y}(\mathbb{R}) = \{0\}$$

si et seulement si $\lambda \neq (2n+1-2p)(a_2-b) + 2p(a_1-b)$, $p = 0, \dots, n$.

Comme au § 1, on va introduire de nouveaux invariants, de manière à donner une condition nécessaire et suffisante d'hypoellipticité avec perte de $3/2$ dérivées.

b) Etude d'invariants.

Remarquons tout d'abord que, lorsque $\ell_{L_0} = 2n+1$, on peut montrer que la condition (iii) s'écrit sous la forme suivante :

$$(3.1) \quad [\lambda[(a_2-b)(a_1-c) + (a_2-c)(a_1-b)] + (a_1-a_2)(a_1-b)(a_2-b)]^2 \neq p_2^2 (a_2-a_1)^2 (a_1-b)^2 (a_2-b)^2$$

$$\text{avec } p_2 = 4(n/2 - p) \quad 0 \leq p \leq [n/2], \quad p \in \mathbb{N}.$$

Cette formule plus compliquée nous semble plus facilement interprétable en termes d'invariants.

On procède comme au § 1 (on garde les mêmes notations).

On considère :

$$\sigma_{\text{princ}}([X, Y], Z)/\Sigma = -\lambda a_m [(\beta - \alpha_2)(\gamma - \alpha_1) + (\beta - \alpha_1)(\gamma - \alpha_2)] \{u, v\}^2$$

$$\sigma_{\text{princ}}([X, Y], Y)/\Sigma = -a_m^2 \cdot q \cdot 2(\beta - \alpha_1)(\beta - \alpha_2) \{u, v\}^2.$$

$\sigma_{\text{s-princ}}(X)/\Sigma$, le symbole sous-principal est bien défini car le symbole principal de X s'annule à l'ordre 2.

Lorsque X peut s'écrire sous la forme $X = Q(X_1 X_2 + R)$ où le symbole principal de X_i est $(u - \alpha_i v)$, on a :

$$\sigma_{\text{s-princ}}(X)/\Sigma = q(r + \frac{1}{2i} (\alpha_1 - \alpha_2) \{u, v\}) \cdot$$

Soit x le symbole principal de X , on lui associe en tout point ρ de Σ l'application A_ρ définie par :

$$\forall T_1 \in T_\rho(T^* X \setminus 0)$$

$$\forall T_2 \in T_\rho(T^* X \setminus 0)$$

$$\sigma(T_1, A_\rho T_2) = \frac{1}{2} (T_1 T_2 x)_\rho .$$

Son déterminant est un invariant que nous désignerons par $\det A_\rho$.

Si $x = q (u - \alpha_1 v) (u - \alpha_2 v)$

$$\det A_\rho = q^2 \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{4} \{u, v\}^2 .$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 2 : Soit P dans $L^{m,3}(\Omega, \Sigma)$, et on suppose qu'en tout point de Σ l'indice d'entrelacement est -1 ; on suppose qu'en tout point de Σ une des deux conditions suivantes est vérifiée :

$$i) \quad \ell_P \notin \mathbb{N}$$

$$ii) \quad \ell_P = (2n+1)$$

mais

$$\begin{aligned} (\sigma_{\text{princ}}([X, Y], Z) + \sigma_{\text{s princ}}(X) \sigma_{\text{princ}}([X, Y], Y))^2 &\neq \\ &\neq p_2^2 (\det A_\rho) (\sigma_{\text{princ}}([X, Y], Y))^2 \end{aligned}$$

où $p_2 = 4(n/2 - p)$, $0 \leq p \leq [n/2]$, $p \in \mathbb{N}$.

Alors P est hypoelliptique avec perte de $3/2$ dérivées $^\diamond$, et ces conditions sont nécessaires pour avoir une telle hypoellipticité.

Le théorème 2 se démontre comme le théorème 1, mais en utilisant cette fois-ci la proposition 3.1 au lieu de la proposition 2.3.

L'invariance de la seconde condition se démontre de manière analogue à celle de ℓ_P .

$^\diamond$ Nous renvoyons à [2], [5] pour la définition d'une telle hypoellipticité.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. Bolley, J. Camus, B. Helffer : Sur une classe d'opérateurs
partiellement hypoelliptiques (à paraître).
 - [2] L. Boutet de Monvel : Hypoelliptic operators with double charac-
teristics and related pseudodifferential
operators (à paraître).
 - [3] L. Boutet de Monvel, F. Trèves : On a class of pseudodifferential
operators with double characteristics
Inventiones Math. 24, p.1-34 (1974).
 - [4] V.V. Grušin : "On a class of hypoelliptic pseudodifferential
operators degenerate on a submanifold".
Math. USSR Sbornik 13 (1971), p.155-185.
 - [5] J. Sjöstrand : "Parametrix for pseudodifferential operators with
multiple characteristics".
Arkiv för Mat. Vol 12, n°1, (1974), p.85-130.
-

INVARIANTS ASSOCIES A UNE CLASSE D'OPERATEURS
PSEUDODIFFERENTIELS ET APPLICATIONS A L'HYPOLLIPTICITE

B. HELFFER

INTRODUCTION.

On sait, dans la théorie des opérateurs pseudodifférentiels classiques (o.p.d.), qu'on peut définir de manière invariante (par changement de coordonnées) le symbole principal p_m d'un o.p.d. et, qu'en un point critique de ce symbole principal, on peut définir un symbole sous principal.

Les résultats obtenus pour des o.p.d. à caractéristiques doubles s'expriment en général à partir de ces deux invariants.

Pour l'étude d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples (> 2), il était naturel de chercher à introduire des invariants plus généraux, permettant d'exprimer des conditions nécessaires ou suffisantes d'hypoellipticité ou des résultats de propagation des singularités.

On se placera ici dans le cadre introduit par J. Sjöstrand dans [19] et développé également par L. Boutet de Monvel et F. Trèves [1] [4].

Dans l'introduction de ces invariants comme dans la présentation de certains résultats, on s'est inspiré de C. Rockland [17].

Nous donnerons dans cet article une formule explicite permettant de calculer ces invariants qui n'ont de sens que sur la surface caractéristique Σ du symbole principal.

Cette formule s'apparente à celle utilisée par J. Leray [16] [17] pour introduire des opérateurs pseudodifférentiels dont les symboles sont définis sur un espace symplectique.

Ce travail sera poursuivi sous un point de vue sensiblement différent dans [3].

Le plan de ce travail est le suivant :

Au § 0 : nous introduisons les principaux théorèmes et rappelons le contexte dans lequel nous travaillons.

Au § 1 : nous construisons les invariants associés à un opérateur pseudodifférentiel.

Aux § 2 et 3 : on donne des applications qui sont les généralisations naturelles des théorèmes d'hypoellipticité à caractéristiques doubles donnés par J. Sjöstrand [19], L. Boutet de Monvel et F. Trèves [1] [4], A. Grigis [6] et qui constituent une formulation intrinsèque des résultats de V.V. Grushin [7] [8].

Au § 4 : on considère une autre classe d'o.p.d. pour laquelle, sous des hypothèses de même type qu'au § 2, on peut construire des paramétrix dans les classes $S_{\rho, \delta}^m$ ($\delta < \rho$) de L. Hörmander [11].

Enfin, nous tenons à remercier J. Sjöstrand et L. Boutet de Monvel dont les conseils ont permis de simplifier la démonstration de certains résultats.

§ 0. DEFINITIONS. RAPPELS. ENONCES DES RESULTATS.

Soit Ω une variété réelle C^∞ paracompacte de dimension n , et soit $T^*(\Omega) \setminus 0$ le fibré cotangent privé de la section nulle.

Soit $\Sigma \subset T^*(\Omega) \setminus 0$ une sous-variété conique fermée ; soit $m \in \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{N}$.

On définit $\text{OPL}^{m, M}(\Omega, \Sigma)$ comme l'ensemble des opérateurs pseudodifférentiels P qui, dans chaque système de coordonnées locales d'un ouvert $U \subset \Omega$, ont un symbole de la forme :

$$0.1. \quad p(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} p_{m-j/2}(x, \xi)$$

où les $p_{m-j/2}(x, \xi)$ sont des symboles de $S^{m-j/2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus 0)$, positivement homogènes de degré $m-j/2$, qui vérifient :

0.2. [Pour tout compact $K \Subset U$, il existe une constante $C_K > 0$ telle que, pour tout (x, ξ) dans $K \times \mathbb{R}^n$, tel que $|\xi| \geq 1$, on ait :

$$\frac{|p_{m-j/2}(x, \xi)|}{|\xi|^{m-j/2}} \leq C_K (d(x, \xi))^{M-j} ; \quad j \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq j \leq M.$$

$d(x, \xi) = \inf_{(y, \eta) \in \Sigma} ((x-y) + |\eta - \frac{\xi}{|\xi|}|)$ est la distance de (x, ξ) à Σ .

La classe $L^{m,M}$ a été introduite par J. Sjöstrand [19] puis généralisée par L. Boutet de Monvel [1].

On dira que p dans $L^{m,M}$ est non dégénéré si la condition suivante est vérifiée :

$$0.3. \quad \left[\begin{array}{l} \text{Pour tout compact } K \subset \mathbb{U}, \text{ il existe } C_K > 0, \text{ telle que, pour} \\ \text{tout } (x, \xi) \text{ dans } K \times \mathbb{R}^n, \text{ tel que } |\xi| \geq 1, \text{ on ait :} \\ \\ \frac{|p_m(x, \xi)|}{|\xi|^m} \geq C_K (d(x, \Sigma))^M. \end{array} \right.$$

Soit $\omega = \sum_{j=1}^n d\xi_j \wedge dx_j$ la 2-forme symplectique sur $T^*\Omega$.

On dira que Σ est symplectique si la restriction de ω à $T\Sigma$ est non dégénérée. Dans ce cas, (Σ, ω) est une variété symplectique de codimension paire.

On dira que Σ est involutive de codimension ν si, localement, elle peut être définie par l'annulation de ν fonctions C^∞ réelles u_i ($i=1, \dots, \nu$) telles que les crochets de Poisson $\{u_j, u_k\}$ s'annulent sur Σ .

On supposera dans la suite que le champ de Liouville $\sum_j \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ et les hamiltoniens H_{u_i} (associés aux fonctions u_i dont l'annulation définit Σ) sont linéairement indépendants en tout point de Σ .

Soient q_1, q_2 deux éléments dans $L^{m,M}(\Omega, \Sigma)$; on définit la relation d'équivalence suivante :

$$q_1 \equiv q_2 \text{ si et seulement si } q_1 - q_2 \in L^{m, M+1}(\Omega, \Sigma) .$$

Nous démontrerons au § 2 le théorème suivant :

Théorème 1 : Soit p un symbole vérifiant (0.1.), (0.2.) ; alors, on peut associer à p un élément q de $L^{m,M}(\Omega, \Sigma) / L^{m, M+1}(\Omega, \Sigma)$ défini par :

$$0.4. \quad \left[q = \exp\left(-\frac{1}{2i} \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial \xi_l}\right) p = \sum_{t=0}^{+\infty} \frac{(-1)^t}{t!} \left(\sum_{l=1}^n \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial \xi_l} \right)^t p \right.$$

et qui possède la propriété d'invariance suivante :

Soit τ une transformation canonique de $T^*\Omega \setminus 0$ dans $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ qui envoie au voisinage d'un point ρ de Σ , Σ sur Σ' .

Soient $\mathcal{F}$ un opérateur fourier intégral associé à τ , P l'opérateur de symbole p , p' le symbole de $P' = \mathcal{F} P \mathcal{F}^{-1}$ et q' le symbole associé à p' par (0.4.), on a

$$q'(\tau(\rho)) = q(\rho) .$$

Corollaire 2 : Soit p^* le symbole complet de l'opérateur P^* adjoint de P de symbole p , soit q^* le symbole invariant associé à p^* , on a :

$$q^* = \overline{q} .$$

Remarque 0.1 : Une formule du type (0.4.) a été utilisée dans un cadre voisin par J. Leray dans [15] [16] pour définir une classe d'opérateurs pseudodifférentiels dont le symbole est une fonction sur un espace symplectique.

Soit q dans $L^{m,M}/_{L^{m,M+1}}$ le symbole invariant associé à p ; remarquons qu'il ne dépend que de la classe d'équivalence de p . On associe en tout point ρ de Σ , à $q_{m-j/2}$, symbole d'ordre $m-j/2$ de q ($0 \leq j \leq M$), une forme $(M-j)$ linéaire, notée $\tilde{q}_{m-j/2}(\rho)$, définie sur $(T_\rho(T^*\Omega \setminus 0))^{M-j}$ par :

$$0.5. \quad \left[\begin{array}{l} \forall X_1, X_2, \dots, X_{M-j} \in T_\rho(T^*\Omega \setminus 0) \\ \tilde{q}_{m-j/2}(\rho)(X_1, \dots, X_{M-j}) = \frac{1}{(M-j)!} (X_1 \dots X_{M-j} q_{m-j/2})_\rho . \end{array} \right.$$

On peut montrer que ces formes sont symétriques, que leur définition ne dépend pas du représentant de la classe de q , et que si q est non dégénéré au sens de 0.3., $\tilde{q}_m(\rho)$ induit une M -forme symétrique non dégénérée sur $T_\rho(T^*\Omega \setminus 0)/T_\rho\Sigma$.

En tout point ρ de Σ on définit l'application de $T_\rho(T^*\Omega \setminus 0)$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall x \in T_\rho(T^*\Omega \setminus 0)$$

$$0.6. \quad \left[\begin{array}{l} \tilde{q}(\rho, X) = \sum_{j \leq M} \tilde{q}_{m-j/2}(\rho)(X, \dots, X) . \end{array} \right.$$

On désignera par Γ_ρ l'ensemble des valeurs de $\tilde{q}(\rho, \cdot)$;

c'est un invariant dans le sens du théorème 1.

Soit $\rho = (x, \xi)$, remarquons que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\Gamma_{(x, \lambda \xi)} = \lambda^{m-M/2} \Gamma_{x, \xi} .$$

Nous démontrerons au §3 le théorème suivant :

Théorème 3 : Soit p un symbole vérifiant 0.1., 0.2., 0.3..

On suppose que Σ est involutive et qu'en tout point ρ de Σ , Γ_ρ ne rencontre pas l'origine ; alors P est hypoelliptique $\diamond$ avec perte de $M/2$ dérivées.

Ce théorème généralise un théorème de L. Boutet de Monvel [1].

Supposons maintenant que Σ est symplectique de codimension $2k$. Dans ce cas, on peut identifier $T_\rho(T^*\Omega \setminus 0)/T_\rho\Sigma$ et $(T_\rho\Sigma)^\perp$ l'orthogonal de $T_\rho\Sigma$ pour ω_ρ .

Sous ces hypothèses, nous montrerons au § 4, en suivant la méthode de C. Rockland [17], qu'on peut associer en tout point ρ de Σ , et pour tout choix b de coordonnées symplectiques dans $T_\rho\Sigma^\perp$ un opérateur $Q_{\rho, b}$ différentiel à coefficients polynomiaux opérant sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k) \diamond\diamond$.

$Q_{\rho, b}$ dépend du choix de b de la manière suivante : si $\tilde{b}$ désigne une autre base, il existe un opérateur unitaire inversible U opérant dans $L^2(\mathbb{R}^k)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k) \diamond\diamond$ tel que $Q_{\rho, b} = U Q_{\rho, \tilde{b}} U^{-1}$.

$\diamond$ On dira que P est hypoelliptique avec perte de $M/2$ dérivées, si pour tout $\omega \subset \Omega$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$; $Pu \in H_{loc}^s(\omega) \Rightarrow u \in H_{loc}^{s+m-M/2}(\omega)$.

$\diamond\diamond$ $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ désigne l'ensemble des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^k$ à décroissance rapide.

On associe ainsi à p , en tout point ρ de Σ , une classe d'opérateurs différentiels P_ρ définie de manière invariante.

De tels opérateurs sont introduits de manière différente [1] et seront étudiés plus précisément dans [3]. Nous renvoyons également aux travaux de J. Leray [15] [16] qui étudient en détail la classe des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux.

On démontrera au § 4 le théorème suivant :

Théorème 4 : Soit p un symbole vérifiant (0.1.), (0.2.), (0.3.).

On suppose que Σ est symplectique de codimension $2k$ et soit P_ρ la classe introduite ci-dessus.

P est hypoelliptique dans Ω avec perte de $M/2$ dérivées si et seulement si, en tout point ρ de Σ ,

$$\text{Ker } P_\rho \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^k) = 0 .$$

Lorsque $M=2$ et que l'on considère des opérateurs pseudodifférentiels classiques, ce théorème a été démontré par de nombreux auteurs et de manière plus explicite [19], [4], [1].

Lorsque $M \geq 2$ et que la codimension de Σ est égale à 2, nous renvoyons à notre travail [10].

La formulation du théorème est celle de V.V. Grusin [7] rendue intrinsèque; elle est à comparer à la proposition 6.1 de l'article de L. Boutet de Monvel [1].

§ 1. DEMONSTRATION DU THEOREME 1.

On suppose que Σ est de codimension ν . Nous allons introduire q de la manière suivante :

Soit $(x, \xi) = \rho \in \Sigma$ et choisissons des fonctions C^∞ réelles $u_1, \dots, u_\nu$ dont l'annulation définit Σ dans un voisinage conique Γ de ρ dans $T^*\Omega \setminus 0$.

On supposera les u_i homogènes de degré $1/2$ en ξ .

Soit U_i ($i=1, \dots, \nu$) un opérateur pseudodifférentiel classique dont le symbole principal est u_i .

Alors si P est dans $L^{m,M}(\Omega, \Sigma)$, on peut en utilisant la formule de Taylor écrire P sous la forme suivante :

$$(1.1.) \quad P = \sum_{j=0}^M \sum_{\alpha \in [1, \dots, \nu]^{M-j}} A_{\alpha, j} U_{\alpha}$$

$$\text{où } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{M-j}), \quad \alpha_i \in [1, \dots, \nu]$$

$$U_{\alpha} = U_{\alpha_1} \dots U_{\alpha_{M-j}}$$

et où les $A_{\alpha, j}$ sont des opérateurs pseudodifférentiels classiques ayant les propriétés suivantes :

$$(1.2.) \quad A_{\alpha} \in L^{m-M/2}.$$

$$(1.3.) \quad \text{Les } A_{\alpha, j} \text{ sont symétriques en } \alpha.$$

$$\text{On pose alors } q_{m-j/2} = \sigma_{m-j/2} \left(\sum_{\alpha \in [1, \dots, \nu]^{M-j}} A_{\alpha, j} U_{\alpha} \right)$$

pour $j = 0, \dots, M$.

Les autres termes n'interviennent pas dans la classe de q .

Dans toute la suite, nous ne déterminerons q que dans la classe d'équivalence $L^{m,M}/L^{m,M+1}$ introduite au § 0.

Remarque 1.1 : $q_{m-j/2}$ étant introduit comme symbole principal, il ne dépend pas du choix des coordonnées (x, ξ) , mais il dépend en revanche du choix des u_i , U_i , $A_{\alpha, j}$.

Le noeud de la démonstration du théorème 1 est le lemme suivant :

Lemme 1.2 : Soit $Q = \sum_{\alpha \in [1, \dots, \nu]^M} A_{\alpha} U_{\alpha}$; $A_{\alpha} \in L^{m-M/2}(\Omega)$, A_{α} symétrique.

Alors le symbole complet de Q dans $L^{m,M}/L^{m,M+1}$ est donné par

$$q \equiv \exp \left(\frac{1}{2i} \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial \xi_l} \right) \cdot \sigma_m(Q).$$

Démonstration : On peut supposer $m = M/2$. Les A_α étant choisis symétriques, il suffit de démontrer le lemme pour un terme du type suivant :

$$Q = V^M$$

où $V \in L^{1/2,1}$.

On utilisera constamment l'inclusion $L^{m,M}(\Omega, \Sigma) \hookrightarrow L^{m+1/2, M+1}(\Omega, \Sigma)$.

On démontre alors le lemme par récurrence sur M ; il est évident pour $M = 1$. Supposons le lemme vrai pour $M = M_0$, on va le démontrer pour $M = M_0 + 1$.

On désigne par q_M le symbole complet de V^M modulo $(L^{M/2, M+1})$.

Par hypothèse : $q_{M_0} \equiv \exp \left(\frac{1}{2i} \sum_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right) v^{M_0}$.

La formule de composition nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} q_{M_0+1} &\equiv q_{M_0} v + \frac{1}{i} \sum_{l=1}^n \frac{\partial q_{M_0}}{\partial \xi_l} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_l} \\ &\equiv q_{M_0} v + \frac{1}{i} \sum_{l=1}^n \frac{\partial q_{M_0}}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi_l} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$(1.4.) \quad q_{M_0+1} \equiv q_{M_0} \cdot v + \frac{1}{2i} \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial q_{M_0}}{\partial \xi_l} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_l} + \frac{\partial q_{M_0}}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi_l} \right).$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \exp \left(\frac{1}{2i} \sum_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right) \cdot v^{M_0+1} &= v \cdot \left(\exp \frac{1}{2i} \sum_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right) v^{M_0} + \\ &+ \left[\exp \left(\frac{1}{2i} \sum_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right), v \right] \cdot v^{M_0}. \end{aligned}$$

Or, il est facile de vérifier que :

$$\left[\exp \left(\frac{1}{2i} \sum_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right), v \right] = \frac{1}{2i} \left(\sum_1 \frac{\partial v}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_l} + \frac{\partial v}{\partial \xi_l} \cdot \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \exp \left(\frac{1}{2i} \sum_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right)$$

où B opère de $L^{p,N}$ dans $L^{p,N+1}$ pour tout (p,N) .

Par conséquent :

$$(1.5) \quad \exp\left(\frac{1}{2i} \sum_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right) v^M_o \equiv v \cdot q_{M_o} + \frac{1}{2i} \left(\sum_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial v}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \cdot q_{M_o}.$$

La comparaison de (1.4) et (1.5) permet de conclure la démonstration du lemme.

Fin de la démonstration du théorème : Utilisant le lemme 1.2 et 1.1, on voit qu'on a démontré que le symbole p de P est congru à

$$\exp\left(\frac{1}{2i} \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial \xi_l}\right) \cdot q \text{ dans } L^{m,M}/L^{m,M+1}.$$

Le théorème est démontré car l'application $\exp\left(\frac{1}{2i} \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial \xi_l}\right)$ est bijective de $L^{m,M}/L^{m,M+1} \rightarrow L^{m,M}/L^{m,M+1}$ et son inverse est

$$\exp\left(-\frac{1}{2i} \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial \xi_l}\right).$$

La démonstration du corollaire est évidente, compte tenu de la formule donnant le symbole de l'adjoint.

Signalons de nouveau le lien avec [15] qui ne travaille cependant pas dans des classes d'équivalence.

Remarque 1.3 : Soit q_1 (resp. q_2) le symbole invariant associé à p_1 (resp. p_2), alors le symbole associé au composé $p_1 \# p_2$ est donné par la formule

$$q \equiv \left(\exp \frac{1}{2i} \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial \xi_l} \right) q_1 \right) \# \left(\exp \frac{1}{2i} \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial \xi_l} \right) q_2 \right)$$

où $\#$ désigne la loi de composition des symboles.

§ 2. DEMONSTRATION DU THEOREME 3.

La démonstration étant strictement analogue à celle de [1], nous renvoyons à cet article pour les détails de la démonstration, que

nous esquissons seulement.

On considère donc un opérateur P de symbole p dans $L^{m,M}(\Omega, \Sigma)$ et vérifiant (0.1), (0.2), (0.3).

On déduit du théorème 1 que, avec les notations du théorème 1, si $\tilde{\Gamma}_{\varphi(\rho)}$ est l'ensemble associé à $\mathcal{F} P \mathcal{F}^{-1}$, $\tilde{\Gamma}_{\varphi(\rho)} = \Gamma_{\rho}$ ($\rho \in \Sigma$).

Σ étant involutive et le vecteur radial étant supposé non orthogonal à Σ pour la forme symplectique ω , il existe, au voisinage de tout point de Σ , une transformation canonique $\Phi : T^* \Omega \setminus 0 \rightarrow T^* \mathbb{R}^n \setminus 0$, qui envoie microlocalement Σ sur la surface $\tilde{\Sigma}$ définie dans $T^*(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ par $(\xi_1 = 0, \dots, \xi_{\nu} = 0)$ où ν désigne la codimension de Σ dans $T^* \Omega \setminus 0$.

On suppose maintenant que Σ est déterminée par $\xi_1 = 0, \dots, \xi_{\nu} = 0$, et on écrit P sous la forme

$$P = \sum_{l=0}^M \sum_{\alpha \in [1, \dots, \nu]^{M-l}} A_{\alpha, l} D_{x_{\alpha_1}} \dots D_{x_{\alpha_{M-l}}}$$

où les $A_{\alpha, l}$ sont des opérateurs pseudodifférentiels classiques de degré $m - M + \frac{l}{2}$ définis dans un voisinage conique ouvert d'un point ρ de Σ .

Dans ce cas, Γ_{ρ} est l'ensemble parcouru par :

$$\sum_{l=0}^M \sum_{\alpha \in [1, \dots, \nu]^{M-l}} \sigma_{m-M+1/2}(A_{\alpha, l})(\rho) \xi_{\alpha_1} \dots \xi_{\alpha_{M-l}}$$

lorsque $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{\nu})$ parcourt $\mathbb{R}^{\nu}$.

L'hypothèse du théorème nous dit que $p' = \sum_{j=0}^M p_{m-j/2}$ ne s'annule pas dans un petit voisinage conique de ρ dans $T^* \mathbb{R}^n \setminus 0$; $p'^{-1}(x, \xi) \in S^{-m, -M}(\Omega, \Sigma)$ (avec les notations de [1]) et l'on vérifie que l'on peut construire comme dans [1] une paramétrix à gauche de P .

Remarque 2.1 : La condition est également nécessaire [1], [14].

Remarque 2.2 : On suppose que $\tilde{q}_\rho(X)$ est réelle sur $\mathfrak{M}(\Sigma)_\rho = \frac{T_\rho(T^*\Omega)}{T_\rho\Sigma}$ et que $\tilde{q}(\rho, X) = 0 \Rightarrow H_{\tilde{q}_\rho} \neq 0$ (hamiltonien de $\tilde{q}_\rho$).

Alors, on a un phénomène de propagation des singularités, cf. [13], [14].

§ 3. DEMONSTRATION DU THEOREME 4.

On suppose maintenant que Σ est symplectique de codimension $2k$ et on identifie $T(T^*\Omega \setminus 0)/T_\rho\Sigma$ et $(T_\rho\Sigma)^\perp$ que l'on notera $\mathfrak{M}(\Sigma)_\rho$.

a) Introduction de P_ρ .

On considère maintenant que $\tilde{q}(\rho, X)$ défini par (0.6) est une fonction sur $\mathfrak{M}(\Sigma)_\rho$.

Nous allons associer par un procédé du à J. Leray ([15], [16]) et C. Rockland ([17], [18]) une classe d'opérateurs différentiels de la manière suivante :

On choisit des coordonnées linéaires canoniques $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k$ sur $\mathfrak{M}(\Sigma)_\rho$, i.e. des coordonnées linéaires telles que

$$\omega|_{\mathfrak{M}(\Sigma)_\rho} = \sum_{i=1}^k dt_i \wedge ds_i.$$

Ce choix de coordonnées associe à $\tilde{q}(\rho, X)$ un polynôme en (s, t)

$${}^v q_b(\rho, s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k)$$

défini par

$${}^v q_b(\rho, s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k) = \tilde{q}(\rho, X)$$

où $(s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k)$ désignent les coordonnées de X sur la base choisie qu'on notera b .

On écrit ce polynôme sous la forme unique suivante :

$${}^v q_b(\rho, s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k) = \sum_{j=0}^M \sum_{\alpha \in [1, \dots, 2k]^{M-j}} \Sigma a_{\alpha, j} u_\alpha$$

$$\text{où } u_\alpha = u_{\alpha_1} \cdot u_{\alpha_2} \cdot \dots \cdot u_{\alpha_{2k}}$$

$$\left. \begin{array}{ll} u_{\alpha_i} = s_1 & \text{si } \alpha_i = 1 \\ u_{\alpha_i} = t_1 & \text{si } \alpha_i = 1+k \end{array} \right\} \quad 1 \leq i \leq k$$

et où les $a_{\alpha, j}$ sont symétriques.

On pose alors

$$\tilde{Q}_b(\rho, s_1, \dots, s_k, D_{s_1}, \dots, D_{s_k}) = \sum_{j=0}^M \sum_{\alpha \in [1, \dots, 2k]^{M-j}} a_{\alpha, j} U_{\alpha}$$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{où } U_{\alpha_j} \text{ désigne l'opérateur } s_1 & \text{si } \alpha_j = 1 \\ & D_{s_1} \text{ si } \alpha_j = 1+k \end{array} \right\} \quad 1 \leq j \leq k.$$

Il est clair que, par ce procédé, on réalise une bijection entre les polynômes de degré $\leq M$ et ces opérateurs différentiels.

On dira que $\check{Q}_b(\rho, s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k)$ est le symbole de $\tilde{Q}_b(\rho, s_1, \dots, s_k, D_{s_1}, \dots, D_{s_k})$.

On désigne par ψ l'application $\check{Q} \rightarrow \tilde{Q}$.

Le polynôme q dépend du choix d'une base symplectique. On est donc tout naturellement conduit à étudier l'action du groupe G des transformations symplectiques de $\mathbb{R}^{2k}$ sur $\check{Q}$.

A un élément g de G , on associe l'application notée multiplicativement à gauche :

$$\check{Q} \rightarrow g \cdot \check{Q} = \check{Q} \circ g^{-1}.$$

On utilisera alors la proposition suivante :

Proposition 3.1 : [15] [16] [17]

Pour tout g dans G , il existe un opérateur unitaire $U_g : L^2(\mathbb{R}^k) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^k)$ tel que l'on ait :

$$\psi(g \cdot \check{Q}) = U_g \cdot \psi(\check{Q}) \cdot U_g^{-1}$$

De plus, U_g et U_g^{-1} opèrent de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$.

Remarque 3.2 : Des constructions explicites de U_g sont données dans ([16], [18], [9]).

(3.1.) On notera P_ρ la classe d'équivalence introduite ; cette classe d'équivalence est invariante (elle ne dépend plus du choix de b) car associée à $\tilde{q}(\rho, X)$ de manière unique.

b) Démonstration du théorème :

La démonstration du théorème est basée sur le lemme classique suivant [12].

On désignera par $(s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_n)$ les coordonnées dans $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$.

Lemme 3.3 : Soit Σ une sous-variété conique fermée de $T^*\Omega \setminus 0$, symplectique de codimension $2k$; alors au voisinage de tout point ρ de Σ , on peut trouver une transformation canonique Φ de $T^*\Omega \setminus 0$ dans $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$, qui envoie Σ sur $\check{\Sigma}$ définie par $\{s_1=0, \dots, s_k=0, t_1=0, \dots, t_k=0\}$.

Le théorème 1 et le lemme 3.3. nous permettent de nous ramener à l'étude d'un modèle microlocal.

On suppose maintenant que Σ est donné dans $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ par :

$$\begin{array}{ll} s_1=0, \dots, s_k=0 & \text{ou} \quad s = (s_1, \dots, s_k, s') \\ t_1=0, \dots, t_k=0 & t = (t_1, \dots, t_k, t') \end{array} \quad (s, t) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0.$$

Soit Λ l'opérateur pseudodifférentiel d'ordre $1/2$ dont le symbole est donné au voisinage de Σ par $|t'|^{1/2}$.

On pose :

$$\begin{array}{ll} U_i = \Lambda s_i & \text{si } i=1, \dots, k \\ U_i = \Lambda^{-1} D_{s_{(i-k)}} & \text{si } i=k+1, \dots, 2k. \end{array}$$

On peut alors écrire P sous la forme (1.1) (1.2) (1.3) :

$$P = \sum_{j=0}^M \sum_{\alpha \in [1, \dots, 2k]} \Sigma A_\alpha U_\alpha^{M-j}.$$

Il est montré dans [19] qu'on peut construire une paramétrix à gauche pour P , opérant continument de $H_{loc}^s(\Omega)$ dans $H_{loc}^{s+m-M/2}(\Omega)$ pour tout s ,

si et seulement si, en tout point $(0, s', 0, t')$ de Σ , l'opérateur différentiel défini par :

$$(3.2.) \quad P_{s', t'} = \sum_{j=0}^M \sum_{\alpha} a_{\alpha, j}^0(0, s', 0, t') W_{\alpha}$$

où $a_{\alpha, j}^0 = \sigma_{\text{princ}}(A_{\alpha, j})$

$$\left. \begin{aligned} W_{\alpha_i} &= |t'|^{1/2} s_j \quad \text{si } \alpha_i = j \\ W_{\alpha_i} &= |t'|^{-1/2} D_{s_j} \quad \text{si } \alpha_i = j+1 \end{aligned} \right\} \quad 1 \leq j \leq k$$

a un noyau réduit à 0 dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$.

Or il est facile de vérifier que $P_{s', t'}$, défini en (3.2), est un élément de la classe $P_{0, s', 0, t'}$ défini en (3.1).

Le théorème est ainsi démontré.

Remarque 3.4 : Lorsque Σ n'est pas symplectique, on peut faire toute la construction exposée au § 3.a) sur $T_{\rho}(T^*\Omega \setminus 0)$ tout entier, au lieu de $\mathcal{N}_{\rho}(\Sigma)$.

Ceci permet d'introduire la classe P_{ρ} dans tous les cas.

Cette remarque sera approfondie et développée dans [3] en suivant le formalisme introduit dans [1].

§ 4. ETUDE D'UN AUTRE CAS.

On considère la classe suivante :

Soit $m \in \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{R}$ tel que $k \geq 2$. On définit $L_k^{m, M}(\Omega, \Sigma)^{\diamond}$ comme l'ensemble des opérateurs pseudodifférentiels P dans $L^m(\Omega)$ qui, dans chaque système de coordonnées locales d'un ouvert $\emptyset \subset \Omega$ ont un symbole de la forme :

$$4.1. \quad p(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} p_{m-j}(x, \xi)$$

[♦] Lorsque $k = 2$, la classe introduite serait la classe $L^{m, M}(\Omega, \Sigma)$ déjà considérée au § 0.

où les $p_{m-j}(x, \xi)$ sont des symboles de $S^{m-j}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus 0)$, positivement homogènes de degré $m-j$, qui vérifient :

4.2. Pour tout compact $K \subset\subset U$, il existe une constante $C_K > 0$ telle que, pour tout (x, ξ) dans $K \times \mathbb{R}^n$, tel que $|\xi| \geq 1$, on ait :

$$\frac{|p_{m-j}(x, \xi)|}{|\xi|^{m-j}} \leq C (d(x, \xi))^{M-kj}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad k \cdot j \leq M$$

$$d(x, \xi) = \inf_{(y, \eta)} \left(|x-y| + \left| \eta - \frac{\xi}{|\xi|} \right| \right).$$

4.3. Pour tout compact $K \subset\subset U$, il existe une constante $C_K > 0$ telle que, pour tout (x, ξ) dans $K \times \mathbb{R}^n$, tel que $|\xi| \geq 1$, on ait :

$$\frac{|p_m(x, \xi)|}{|\xi|^m} \geq C (d(x, \xi))^M.$$

On supposera dans la suite qu'il existe un entier $l \geq 0$ tel que $M = kl$. Il est facile de voir que cette classe est bien définie. En utilisant les méthodes du § 0, on peut introduire en tout point ρ de Σ , pour tout j , tel que $kj \in \mathbb{N}$, et $kj \leq M$, les $(M-kj)$ formes linéaires symétriques suivantes $\tilde{p}_{m-j}(\rho)$ définies par :

4.4. $\forall X_1, \dots, X_{M-kj} \in T_\rho(T^*\Omega \setminus 0)$

$$\tilde{p}_{m-j}(\rho)(X_1, \dots, X_{M-kj}) = \frac{1}{(M-kj)!} (X_1 \dots X_{M-kj} p_{m-j})_\rho.$$

On pose alors :

4.5. $\forall X \in T_\rho(T^*\Omega \setminus 0)$

$$\tilde{q}(\rho, X) = \sum_{\substack{kj \in \mathbb{N} \\ kj \leq M}} \tilde{p}_{m-j}(\rho)(X, \dots, X).$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 4.1 : Soit P un opérateur de $L_{\mathbf{k}}^{m,kl}(\Omega, \Sigma)$, on suppose qu'en tout point ρ de Σ , et pour tout X dans $T_{\rho}(T^*\Omega \setminus 0)$: $\tilde{q}(\rho, X) \neq 0$.

Alors l'opérateur P est hypoelliptique avec perte de 1 dérivées et on peut construire une paramétrix pour P dans $S_{\rho, \delta}^{-m+1}(\Omega)$ ♦ avec $\rho = 1 - \frac{1}{\mathbf{k}}$, $\delta = \frac{1}{\mathbf{k}}$.

L'hypothèse nous dit que dans un voisinage canonique Γ d'un point ρ de Σ , il existe pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$ des constantes $C, C_{\alpha\beta}$ telles que, pour $|\xi| > C, (x, \xi) \in \Gamma$, on ait :

$$|p(x, \xi)| > C |\xi|^{m-1}$$

$$\text{et } \left| p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha\beta} (1 + |\xi|)^{-\rho|\alpha| + \delta|\beta|} |p(x, \xi)|$$

$$\text{avec } \rho = 1 - 1/\mathbf{k}, \quad \delta = 1/\mathbf{k}.$$

On est alors ramené à un théorème d'Hörmander [11].

Exemples : Dans $\mathbb{R}^2$

$D_t^4 + \lambda D_x^3$ est hypoelliptique si $\tau^4 + \lambda \xi^3 \neq 0$ pour $|\tau| + |\xi| \neq 0$

$D_t^4 + t^4 D_x^4 + \lambda D_x^3$ est hypoelliptique si $\tau^4 + t^4 \xi^4 + \lambda \xi^3 \neq 0$ pour $|\xi| \neq 0$.

Remarque : Lorsque Σ est involutive (cf. § 0), la condition du théorème 4.1 est nécessaire pour avoir une hypoellipticité avec perte de 1 dérivées.

Lorsque Σ est involutive et que $\tilde{q}$ est réelle, on a, sous des hypothèses convenables, propagation des singularités comme dans ([2], [13], [14]).

♦ $S_{\rho, \delta}^m$ est défini dans [11].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. Boutet de Monvel : Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudodifferential operators. C P A M (à paraître).
- [2] L. Boutet de Monvel : Actes du Colloque de Nice (1974)
(Opérateurs intégraux de Fourier et équations aux dérivées partielles)
Lecture Notes (Springer).
- [3] L. Boutet de Monvel, A. Grigis, B. Helffer : en préparation.
- [4] L. Boutet de Monvel, F. Trèves : On a class of pseudodifferential operators with double characteristics.
Inventiones Mathematicae 24, p.1-34 (1974).
- [5] J.J. Duistermaat, L. Hörmander : Fourier Integral Operators II
Acta Mathematica 128 (1972), p.183-269.
- [6] A. Grigis : Thèse de 3^{ème} Cycle (Orsay) (en préparation).
- [7] V.V. Grusin : On a class of hypoelliptic-pseudodifferential operators degenerate on a submanifold.
Mat. Sbornik (84) (126) (1971), p.111-134.
(Math. USSR Sbornik 13 (1971), p.155-185).
- [8] V.V. Grusin : Hypoelliptic differential equations and pseudodifferential operators with operator valued symbols.
Mat. Sbornik (88) (130) (1972) n° 4.
(Math. USSR Sbornik Vol 17 (1972) n° 2).
- [9] V.W. Guillemin : non publié (cité par C. Rockland).
- [10] B. Helffer : Sur une classe d'opérateurs hypoelliptiques à caractéristiques multiples (à paraître).
- [11] L. Hörmander : Pseudodifferential operators and hypoelliptic equations (Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math., 10 (1966), Singular integral operators, 138-183).
- [12] L. Hörmander : Fourier Integral Operators I
Acta Mathematica 127 (1971), p.79-183.
- [13] R. Lascar : Propagation des singularités pour des o.p.d. à partie principale quasi-homogène.
CRAS, t.279 n° 19 (4 Novembre 1974) Série A, p.737.
- [14] R. Lascar : Thèse de 3^{ème} Cycle (Paris VI).
- [15] J. Leray : Solutions asymptotiques et groupe symplectique.
Actes du Colloque de Nice (1974).

- [16] J. Leray : Solutions asymptotiques et Physique mathématique.
Actes du Colloque d'Aix en Provence (1974).
- [17] C. Rockland : Hypoellipticity and Eigenvalue Asymptotics
(preprint).
- [18] C. Rockland : Poisson complexes and subellipticity.
Journal of differential Geometry. 9 (1974)
p.71-91.
- [19] J. Sjöstrand : Parametrixes for pseudodifferential operators
with multiple characteristics.
Arkiv för Mat. Vol.12, n° 1 (1974), p.85-130.

CONDITIONS NECESSAIRES D'HYPSELLIPTICITE

par B. HELFFER

INTRODUCTION

Dans cet article, qui ne prétend pas à originalité, nous montrons comment un théorème d'Hörmander [6] permet d'obtenir dans un grand nombre de cas, des conditions nécessaires d'hypoellipticité avec perte de σ dérivées.

Un opérateur P d'ordre m (pseudodifférentiel) sur Ω est dit hypoelliptique avec perte de σ dérivées, s'il est hypoelliptique et si pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$,

$$u \in \mathcal{D}'(\Omega), Pu \in H_{loc}^s(\omega) \Rightarrow u \in H_{loc}^{s+m-\sigma}(\omega)$$

On rappelle au § 1, l'énoncé du théorème et on donnera des applications dans les § suivants.

§ 1 : LOCALISATIONS D'ESTIMATIONS A PRIORI

Soit P un opérateur pseudodifférentiel régulier (son symbole admet une décomposition en termes homogènes) d'ordre m défini dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. On suppose que, pour tout compact K dans Ω , il existe une constante C telle que : $\forall u \in C_0^\infty(K)$.

$$(1.1) \quad \|u\|_{s_1} \leq C (\|Pu\|_{s_0} + \|u\|_{s_2})$$

pour $s_2 < s_1$, $s_1 \leq s_0 + m$ (s_0, s_1, s_2 fixés) où $\|\cdot\|_{s_1}$ désigne la norme dans les espaces de Sobolev classiques $H^s(\mathbb{R}^n)$.

On supposera dans la suite que $m=0$, $s_0=0$. L. Hörmander a démontré dans [6] le théorème suivant (que nous présentons sous une forme légèrement modifiée) :

Théorème 1.1 : Soit P un opérateur pseudodifférentiel régulier d'ordre 0, proprement supporté et $0 < \sigma < \sigma'$ des nombres réels fixés tels que :

$$(1.1)' \quad \|u\|_{-\sigma}^2 \leq C(K) (\|Pu\|_0^2 + \|u\|_{-\sigma'}^2), \quad \forall u \in C_0^\infty(K)$$

Alors, pour tout $K \subset \Omega$, tout $\theta \in \mathbb{R}$, $0 < \theta < 1$, et tout entier $N > 0$, on peut trouver une constante C telle que :

$$\forall x \in K, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0, \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$(1.2) \quad (1+|\xi|)^{-2\sigma} \int |\psi|^2 dy \leq C \left(\int \left| \sum_{|\alpha+\beta| < N} p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi) |\xi|^{(|\alpha|-|\beta|)\theta} \frac{y^{\beta} D_y^{\alpha} \psi}{\alpha! \beta!} \right|^2 dy \right. \\ \left. + (1+|\xi|)^{-2[\text{Inf}(\theta, 1-\theta)]N} \sum_{|\alpha+\beta| \leq N} \int |y^{\beta} D_y^{\alpha} \psi|^2 dy \right)$$

§ 2 : APPLICATIONS

De nombreuses applications de ce théorème sont connues [2] [7] mais elles ne concernent que les opérateurs du type principal et les opérateurs à caractéristiques doubles. Nous traitons ici un certain nombre d'exemples à caractéristiques multiples.

§ 2.1 : EXEMPLE 1 (cf [13])

Théorème 2.1 : Soit P un opérateur pseudodifférentiel régulier d'ordre 0

(son symbole p admet un développement de la forme : $p \sim \sum_{j \in \mathbb{N}} p_{-j}(x, \xi)$, où les p_{-j} sont homogènes de degré $-j$). On suppose que p_0 s'annule à l'ordre $2k$ en un point (x_0, ξ_0) de $T^*\Omega \setminus 0$ ($|\xi_0| = 1$), et qu'en ce point, p_{-j} s'annule à l'ordre $(2k-2j)_+$.

Alors, si P est hypoelliptique avec perte de k dérivées, on a : $\exists C ; \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$(2.1.1) \quad \int |\psi|^2 dy \leq C \left(\int \left| \sum_{j=0}^k \sum_{|\alpha+\beta|=2k-2j} p_{-j}^{(\alpha)}(x_0, \xi_0) \frac{y^{\beta} D_y^{\alpha} \psi}{\alpha! \beta!} \right|^2 dy \right)$$

Il suffit d'appliquer le théorème (1.1) avec $\sigma=k$, $N=2k+1$, $\theta=1/2$ et utiliser l'inégalité obtenue (1.2) en des points $(x, \xi) = (x_0, t\xi_0)$, (2.1.1) s'obtient en faisant tendre dans (1.2) t vers l'infini.

Remarque 2.1.2 : On sait (cf [1]) que l'opérateur P_{x_0, ξ_0} défini par :

$$P_{x_0, \xi_0} (y, D_y) = \sum_{j=0}^k \sum_{|\alpha+\beta|=2k-2j} p_{-j}^{(\alpha)} (x_0, \xi_0) \frac{y^\beta D_y^\alpha}{\alpha! \beta!}$$

(plus exactement l'orbite de $P_{x_0, \xi_0} (y, D_y)$ dans l'action du groupe métaplectique sur $\mathbb{R}^{2n}$) peut être défini de manière invariante (cf [4]).

Lorsque p_0 s'annule exactement à l'ordre $2k$ sur une surface régulière Σ (et que p_{-j} s'annule à l'ordre $2k-2j$ sur Σ) dans $T^*\Omega \setminus 0$, on peut montrer ([1]) que la condition (2.1.1) en tout point de Σ est suffisante pour avoir l'hypoellipticité.

§ 2.2 : EXEMPLE 2 (cf [4])

Théorème 2.2 : Soit P un opérateur pseudodifférentiel régulier d'ordre 0 sur Ω de symbole $\sum_{j \in \mathbb{N}} p_{-j}(x, \xi)$; Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$,

$m > 2$; on suppose que p_{-j} s'annule à l'ordre $((k-j)m)_+$ en un point (x_0, ξ_0) . Alors, si P est hypoelliptique avec perte de k dérivées, on a :

$$(2.2.1) \quad \forall X \in T_{x_0, \xi_0} (T^*\Omega \setminus 0), \quad \sum_{j=0}^k (\text{Hess}^{(k-j)m} p_{-j})_{x_0, \xi_0} (\overset{(k-j)m}{\underbrace{X, \dots, X}}) \neq 0$$

Définissons avant de démontrer le théorème $(\text{Hess}^P f)_y$ pour une fonction $C^\infty f$ définie sur une variété M , à valeur dans $\mathbb{C}$ et s'annulant à l'ordre p en un point y .

On associe au point y , une forme multilinéaire symétrique $(\text{Hess}^P f)_y$ sur $(T_y(M))^p$ par la formule :

$$(\text{Hess}^P f)_y (X_1, \dots, X_p) = \frac{1}{p!} (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_p f)_y$$

où $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_p$ sont des extensions régulières de $X_1, \dots, X_p$ au voisinage du point y .

On notera $(\text{Hess}^P f)_y (X, \dots, X) = (\text{Hess}^P f)_y (X)$ lorsque $X_1 = X_2 = \dots = X_p = X$.

Démonstration du théorème : On utilise de nouveau le théorème (1.1) avec $\sigma=k$, $N=2k+1$, $\theta=1/2$.

On en déduit l'inégalité (1.2) qu'on utilise en des points du type suivant :

$$x = x_0 + t^{-1/m} \vec{v}$$

$$\xi = t(\xi_0 + t^{-1/m} \vec{w})$$

où $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont arbitraires.

Et on fait tendre t vers $+\infty$. On remarque que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (p_{-j}(x, \xi) \cdot |\xi|^k) = (\text{Hess}^{(k-j)m} p_{-j})_{x_0, \xi_0}(\vec{v}, \vec{w})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (p_{-j}^{(\alpha)}(x, \xi) \cdot |\xi|^{k + \frac{|\alpha| - |\beta|}{2}}) = 0$$

si $0 < |\alpha| + |\beta| \leq 2k - 2j$ (car $m > 2$).

On en déduit le résultat.

Réciproquement : Si p_0 s'annule à l'ordre km exactement sur une sous-variété Σ régulière de $T^*\Omega \setminus 0$, et si p_{-j} s'annule à l'ordre $((k-j)m)_+$ sur Σ ; Alors la condition 2.2.1 est également suffisante pour l'hypoellipticité avec perte de k dérivées [4].

§ 2.3 : EXEMPLE 3

Théorème 2.3 : Soit P un opérateur pseudodifférentiel régulier d'ordre m (≥ 1) de symbole :

$$p = p_m + \dots + p_1 + \sum_{j \in \mathbb{N}} p_{-j}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$.

On suppose que pour $j \geq 0$ $\begin{cases} p_{-j} \text{ s'annule à l'ordre } r(k-j)_+ \\ p_j \text{ s'annule à l'ordre } m_j > r(k+j) \end{cases}$ en un point (x_0, ξ_0) .

Alors si P est hypoelliptique avec perte de $(m+k)$ dérivées, on a :

$$\text{si } r=2, \int |\psi|^2 dy \leq C \int \sum_{j=0}^k \frac{p_{-j}^{(\alpha)}(x_0, \xi_0)}{|\alpha+\beta|=2k-2j} \frac{y^\beta D_y^\alpha \psi}{\alpha! \beta!} |^2 dy$$

$$\text{si } r>2, \sum_{j=0}^k (\text{Hess}^{(k-j)r}_{p-j})_{x_0, \xi_0} (X) \neq 0, \forall X \in T_{x_0, \xi_0} (T^* \Omega \setminus 0)$$

On utilise le théorème 1.1 avec $\tilde{P} = P \cdot \Delta^{-m/2}$ (où Δ est le laplacien), avec $\sigma = k+m$, $\theta = 1/2$, $N = 2m+2k+1$; et on utilise la méthode de l'exemple 1 lorsque $r = 2$

2 lorsque $r > 2$

Cette condition n'est pas, bien entendu, suffisante ; elle ne fait pas intervenir en effet p_j pour $j > 0$.

§ 2.4 : EXEMPLE 4 (cf[3])

On considère maintenant des modèles étudiés dans [3]. On suppose que les variables $x \in \mathbb{R}^N$ sont séparées en deux groupes de variables :

$$x = (x', y) \text{ avec } x' \in \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^n, k+n = N$$

Soit $m > 0$, et δ un nombre > 0 tel que $m\delta$ soit un entier.

On désigne par $\mathcal{M}$ l'ensemble des triplets (α, β, γ) de multiindices entiers ≥ 0 , de dimension n, k, n respectivement, tels que :

$$|\alpha| + |\beta| \leq m$$

$$m\delta \geq |\gamma| \geq |\alpha| + (1+\delta) |\beta| - m$$

On désigne par :

$$\mathcal{M}_0 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{M}, |\gamma| = |\alpha| + (1+\delta) |\beta| - m\}$$

$$\mathcal{M}_0^o = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{M}_0, |\alpha| + |\beta| = m\}$$

On considère :

$$(2.4.1) \quad p(x, D) = \sum_{\mathcal{M}} a_{\alpha, \beta, \gamma}(x) y^\gamma D_{x'}^\beta D_y^\alpha$$

Soit $\sigma = (\xi, \eta)$ les variables duales de $x = (x', y)$.

On pose :

$$L(x', y, \xi, D_y) = \sum_{\mathcal{M}_0} a_{\alpha\beta\gamma}(x', 0) y^\gamma \xi^\beta D_y^\alpha$$

et

$$L^0(x', y, \xi, D_y) = \sum_{\mathcal{M}_0^0} a_{\alpha\beta\gamma}(x', 0) y^\gamma \xi^\beta D_y^\alpha$$

Grusin a démontré le théorème suivant [3].

Théorème 2.4.1 : Soit P l'opérateur défini par 2.4.1 et on suppose que les deux hypothèses suivantes sont vérifiées :

$$(H1) \quad L^0(x', y, \xi, \eta) \text{ est elliptique pour } y \neq 0$$

$$(H2) \quad \text{Ker}(L(x', y, \xi, D_y) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) = \{0\}, \forall \xi \in \mathbb{R}^k \setminus 0$$

Alors P est hypoelliptique avec perte de $\frac{m\delta}{1+\delta}$ dérivées.

Réciproquement le théorème 1.1 permet comme au § 2.1 de montrer le théorème suivant :

Théorème 2.4.2 : Soit P l'opérateur défini par (2.4.1), alors si P est hypoelliptique au voisinage de $(x'_0, 0)$ avec perte de $\frac{m\delta}{1+\delta}$ dérivées, on a :

$$(2.4.2) \quad \|\varphi\|_0^2 \leq C \|L(x'_0, y, \xi_0, D_y)\varphi\|_0^2$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \forall \xi_0 \in \mathbb{R}^k \setminus 0$$

Remarque 2.4.3 : L'inégalité (2.4.2) implique (H2) et est équivalente à (H2) lorsque (H1) est vérifiée.

Exemple 2.4.4 : L'hypothèse (H1) n'intervient pas pour démontrer la condition nécessaire.

Considérons, par exemple, l'opérateur

$$P = D_y^2 + y^{2k} D_x^2 + \lambda y^\ell D_x, \ell \leq k-1$$

Cet opérateur est dans la classe avec $\delta = \ell+1$, $m=2$.

Pour que cet opérateur soit hypoelliptique avec perte de $2 \frac{(\ell+1)}{(\ell+2)}$ dérivées il est nécessaire que :

$$\text{Ker} (D_y^2 + \lambda y^\ell) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = 0, \text{ si } \ell < k-1$$

$$\text{Ker} (D_y^2 + y^{2k} + \lambda y^\ell) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = 0 \text{ si } \ell=k-1 \text{ (cf[8])}$$

Nous reviendrons sur le premier cas au § suivant :

§ 2.5 : EXEMPLE 5

On considère un opérateur très particulier (mais représentatif).

$$P = D_y^2 + y^{2k} D_x^2 + \lambda D_x, \text{ avec } k > 1$$

Le théorème 1.1 donne en fait des conditions nécessaires plus fortes que celles obtenues dans l'exemple 2.4.4. Ce n'est d'ailleurs dans ce cas que l'explicitation des conditions de [7].

On n'utilise en effet le théorème 1.1 avec $\sigma=1$, $\theta=1/2$, $N=3$, mais on utilise l'estimation 1.2 obtenue en des points :

$$\tilde{x} = (yt^{-1/2k}, x)$$

$$\tilde{\xi} = t(0, \xi_0), \text{ avec } |\xi_0| = 1$$

(ici on a posé $\tilde{x} = (y, x)$, $\tilde{\xi} = (\eta, \xi)$).

Faisant tendre t vers l^∞ on obtient :

$$\int |\psi(y_1, y_2)|^2 dy_1 dy_2 \leq C \int |((y^{2k} \pm \lambda) + D_{y_1}^2) \psi(y_1, y_2)|^2 dy_1 dy_2$$

d'où

$$\int |\varphi(y_1)|^2 dy_1 \leq C \int |D_{y_1}^2 \pm \lambda + y^{2k}) \varphi(y_1)|^2 dy_1$$

et par Fourier :

$$\eta^{2+y^{2k} \pm \lambda} \neq 0 \quad \forall y, \quad \forall \eta$$

Cette condition est suffisante pour l'hypoellipticité [7].

B I B L I O G R A P H I E

- [1] L. Boutet de Monvel. A. Grigis. B. Helffer : Parametrixes d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples (à paraître Astérisque).
- [2] Y.V. Erogov : Opérateurs sous-elliptiques. *yspehi matematicheski Nauk.* Tome XXX 2 et 3 (182).
- [3] V.V Grusin : On a class of elliptic pseudodifferential operators degenerate on a submanifold. *Mat. Sbornik.* Tome 84(126) (1971) n°2 p163-195. *Math USSR.Sbornik* 13 (1971) n°2 p155-185.
- [4] B. Helffer : Invariants associés à une classe d'opérateurs pseudodifférentiels et application à l'hypoellipticité (à paraître Annales Institut Fourier).
- [5] L. Hörmander : Pseudodifferential operators and non elliptic boundary problems. *Ann. of Math* 83 (1966) p129-209.
- [6] L. Hörmander : Pseudodifferential operators and hypoelliptic equations. *Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math.* 10 (1966) p138-183.
- [7] L. Hörmander : A class of hypoelliptic pseudodifferential operators with double characteristics. *Math. Annalen* 217 n°2 (1975).
- [8] A. Gilioli. F. Trèves : An example in the Solvability theory of linear PDES. *American. J. of Math* (1974).

PARAMETRIXES D'OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS
A CARACTERISTIQUES MULTIPLES

L. BOUTET DE MONVEL

A. GRIGIS

B. HELFFER

§0 Introduction

Dans cet article , nous nous proposons de montrer comment on peut effectuer la construction de paramétrixes pour certains opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques multiples , du type étudié par V.Grusin [5], [6], J. Sjöstrand [17], L. Hörmander [13], A. Menikoff [15], et les auteurs [1] [2] [3] [5] [10]. Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et P un opérateur pseudo-différentiel sur X , dont le symbole total admet un développement asymptotique :

$$p(x, \xi) \sim \sum_0^{\infty} p_j(x, \xi)$$

où pour tout entier j , p_j est homogène de degré $m-j$ en ξ . Soit maintenant Σ un cône lisse, de codimension p , dans $T^*X = X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Nous dirons que P est nul d'ordre k sur Σ si pour tout j , p_j est nul d'ordre $\gg k-2j$ sur Σ . Nous dirons en outre que P est transversalement elliptique le long de Σ s'il est elliptique en dehors de Σ , et si, au voisinage de chaque point de Σ , le symbole $p_0(x, \xi)$ domine d_{Σ}^k , où d_{Σ} est la distance à Σ . Si P est nul d'ordre k sur Σ , il est naturel de lui associer, pour chaque point $(x, \xi) \in \Sigma$, l'opérateur

$$\sigma_{x, \xi}^k(P) = \sum_{|\alpha + \beta| + 2j = k} \frac{1}{x! \beta!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^{\beta} p_j(x, \xi) y^{\alpha} D_y^{\beta}$$

qui est un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^n$, à coefficients polynomiaux, de degré total $\leq k$.

Nous nous appuierons de façon essentielle sur les résultats et les constructions de [1]. Dans cet article, on introduit, pour tous nombres réels m, k , une classe d'opérateurs $OPS^{m, k}$. Dans la situation ci-dessus il est naturel de se demander si P possède une paramétrixe $Q \in OPS^{-m, -k}$ (c'est le mieux qu'on puisse espérer). La réponse est la suivante : P possède une telle paramétrixe à gauche (ou à droite) si et seulement si, pour tout $(x, \xi) \in \Sigma$, l'opérateur

différentiel $\sigma_{x,\xi}^k(P)$ est inversible à gauche (ou à droite) dans $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$. La question de savoir si P possède une paramétrix est donc entièrement ramenée à l'étude de l'inversibilité, à gauche ou à droite, de certains opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux. Ces opérateurs sont d'ailleurs d'un type assez particulier : ils sont tous dans l'algèbre engendrée par p opérateurs d'ordre 1 de la forme $\sum_k b_{jk} y_k + c_{jk} D_{y_k}$ ($j=1,\dots,p$; $k=1,\dots,n$). Naturellement le problème d'inverser de tels opérateurs est loin d'être résolu en général ; il l'est néanmoins assez complètement pour les opérateurs d'ordre 2 (cf. [5], [13]), et pour certains opérateurs d'ordre 3 (cf. [10]).

L'article est organisé comme suit : dans les quatre premiers paragraphes, on étudie les opérateurs différentiels du type ci-dessus qui interviennent dans notre problème, et on construit une algèbre d'opérateurs pseudo-différentiels qui contient leurs inverses lorsque ceux-ci existent. Le plus délicat est de montrer que si un tel opérateur dépend de façon C^∞ d'un paramètre, et est inversible pour toutes les valeurs du paramètre, l'inverse dépend aussi régulièrement du paramètre (§4). L'application à la construction de paramétrixes est faite au §5, où l'énoncé ci-dessus sera précisé.

§1 Notations et préliminaires.

1. Nous utilisons les notations usuelles de la théorie des équations aux dérivées partielles .

Soit E un espace vectoriel réel , de dimension finie (qu'on identifiera au besoin à $\mathbb{R}^n$). On note E^* le dual de E .

On note $\mathcal{S}(E) = \mathcal{S}^{-\infty}(E)$ l'espace de Schwartz des fonctions de classe C^∞ , à décroissance rapide (si $E = \mathbb{R}^n$, on a $f \in \mathcal{S}$ si et seulement si $x^\alpha D^\beta f$ est bornée , pour tous multi-indices α , β). On note $\mathcal{O}_M(E)$ l'espace des fonctions C^∞ à croissance lente (ie. pour tout α il existe m tel que $(1+|x|)^{-m} D^\alpha f$ soit bornée) . Si m est un nombre réel , on note $\mathcal{S}_0^m(E) \subset \mathcal{O}_M(E)$ l'espace des fonctions f telles que pour tout α , $(1+|x|)^{-m} D^\alpha f$ soit bornée , et on pose $\mathcal{S}_0^\infty = \bigcup \mathcal{S}_0^m$. Enfin on note $\mathcal{S}^m(E) \subset \mathcal{S}_0^m(E)$ l'espace des fonctions f telles que pour tout α , $(1+|x|)^{m-|\alpha|} D^\alpha f$ soit bornée , et on pose $\mathcal{S}^\infty = \bigcup \mathcal{S}^m$.

Nous aurons en particulier à utiliser le sous-espace $\mathcal{S}_{\text{reg}}^m \subset \mathcal{S}^m$ des fonctions $a \in \mathcal{S}^m$ qui admettent un développement asymptotique :

$$(1.1) \quad a \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

où a_k est homogène de degré $m-k$ ($a_k(tx) = t^{m-k} a_k(x)$ pour $t > 0$) de classe C^∞ pour $x \neq 0$ (développement asymptotique signifie ici que pour tout entier N , il existe $b_N \in \mathcal{S}^{m-N}$ tel que $a - \sum_{k=0}^{N-1} a_k = b_N$ pour $|x| > 1$). Si $a \in \mathcal{S}_{\text{reg}}^m$, le symbole (ou partie principale) de a est le premier terme a_0 du développement (1.1).

Soit $a = a(x, \xi)$ une fonction continue sur $E \times E^*$. Si a est à croissance lente , on note $a(x, D)$ l'opérateur défini par

$$(1.2) \quad a(x, D)f = \int e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

où $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f , et où pour abréger on a posé $d\xi = (2\pi)^{-\dim E} d\xi$ (la définition de $\hat{f}$ suppose le choix d'une mesure de Lebesgue dx sur E , et $d\xi$ désigne la mesure duale ; la mesure $\hat{f} d\xi$, donc aussi l'opérateur $a(x, D)$, ne dépend pas de ce choix). Il est clair que $a(x, D)$ est un opérateur linéaire continu $\mathcal{S}(E) \rightarrow C(E)$ (espace des fonctions continues sur E)

(1.3) Proposition. - Si $a \in O_M(E \times E^*)$, $a(x, D)$ est continu de $\mathcal{L}(E)$ dans $C^\infty(E)$. Si $a \in S_0^\infty(E \times E^*)$, $a(x, D)$ est continu dans $\mathcal{L}(E)$.

preuve : on peut supposer $E = \mathbb{R}^n$. Remarquons qu'on a $D_j a = b(x, D)$ avec $b = \xi_j a + D_{x_j} a$, et $x_j a(x, D) = c(x, D)$, avec $c = x_j a$. Par récurrence on voit donc qu'on a pour tous α, β , $x^\alpha D^\beta a(x, D) = b_{\alpha\beta}(x, D)$ avec $b_{\alpha\beta} \in O_M$ (resp. S_0^∞) si $a \in O_M$ (resp. S_0^∞). Donc si $a \in O_M$, $D^\alpha a(x, D)$ est continu : $\mathcal{L}(E) \rightarrow C(E)$ pour tout α , donc $a(x, D)$ est continu : $\mathcal{L} \rightarrow C^\infty$ (il est en fait continu $\mathcal{L} \rightarrow O_M$). Pour la seconde assertion, il suffit de prouver que si $a \in S_0^\infty$, $a(x, D)$ est en fait continu : $\mathcal{L} \rightarrow L^\infty$ (alors $x^\alpha D^\beta a(x, D)$ est aussi continu $\mathcal{L} \rightarrow L^\infty$ pour tous α, β , donc $a(x, D)$ est continu $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$). Supposons donc $a \in S_0^m(E \times E^*)$. Intégrant par parties dans (1.2) on obtient

$$a(x, D)f = \int e^{ix \cdot \xi} (1 + |x|^2)^{-N} (1 - \Delta_\xi)^N (a(x, \xi) \hat{f}(\xi)) d\xi$$

or on a, avec des constantes $c_{\alpha\beta}$ convenables

$$(1 - \Delta_\xi)^N (a \hat{f}) = \sum_{|\alpha + \beta| \leq 2N} c_{\alpha\beta} D_\xi^\alpha a D_\xi^\beta \hat{f}$$

et pour tout α , $(1 + |x| + |\xi|)^{-m} D^\alpha a$ est bornée. Pour $N \geq m/2$, on a $(1 + |x| + |\xi|)^m (1 + |x|^2)^{-N} (1 + |\xi|)^{-m} \leq 2^{m/2}$, donc il existe $C > 0$ tel que

$$|a(x, D)f| \leq C \sum_{|\beta| < 2N} \int (1 + |\xi|)^m |D^\beta \hat{f}(\xi)| d\xi$$

Comme le second membre de cette inégalité est une norme continue sur $\mathcal{L}$, ceci achève la démonstration.

Enfin on a le résultat suivant (qui est démontré dans [4]) :

(1.4) Si $a \in S_0^0(E \times E^*)$, $a(x, D)$ se prolonge en un opérateur continu dans $L^2(E)$.

2. Nous noterons $\mathcal{G}$ l'ensemble des opérateurs différentiels ℓ sur E de la forme

$$(1.5) \quad \ell = b.x + c.D \quad , \text{ avec } b \in E^* , \quad c \in E$$

$$(\text{ie. } \ell f = \sum b_j x_j f + \frac{1}{i} c_j \frac{\partial f}{\partial x_j})$$

L'opérateur $i\ell$ est générateur infinitésimal d'un groupe de transformations unitaires :

$$(1.6) \quad \exp t i \ell . f = e^{\frac{1}{2} i t^2 b.c} e^{i t b.x} f(x + t c)$$

(en fait $i(\mathcal{G} \otimes \mathbb{R})$ est l'algèbre de Lie d'un groupe de transformations unitaires de $\mathcal{H}$, isomorphe au groupe de Heisenberg).

On note M_p le groupe d'automorphismes linéaires de $\mathcal{H}$ qui préserve $\mathcal{G}$ (groupe métaplectique). Si $M \in M_p$, et $\ell \in \mathcal{G}$, on a

$$(1.7) \quad M \ell M^{-1} = s_M \ell$$

où s_M est un automorphisme de $\mathcal{G}$, qui préserve la forme symplectique réelle σ définie par $[\ell, \ell'] = i \sigma(\ell, \ell') \text{ Id}$.

On sait (cf. [14], [16], [18]) que M_p est engendré par les constantes ($f \mapsto \lambda f$, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$) , les changements de variable linéaires ($f \mapsto f(g^{-1}x)$, avec $g \in GL(E)$) , les multiplications $f \mapsto e^{iQ} f$, où Q est une forme quadratique réelle sur E , et la transformation de Fourier . C'est un groupe de Lie , qui a pour générateurs infinitésimaux les opérateurs du second ordre de la forme

$$i(\lambda + \sum a_{jk} x_j x_k + b_{jk} (x_j D_k + D_k x_j) + c_{jk} D_j D_k)$$

où λ est une constante complexe , et les a_{jk} , b_{jk} , c_{jk} sont réels)

L'application $M \mapsto s_M \in Sp(\mathcal{G})$ est un homomorphisme de groupes , surjectif , de noyau $\mathbb{C}^*$.

§2. Classes d'opérateurs pseudo-différentiels.

1. Définitions.

Soient E, N deux espaces vectoriels réels de dimension finie, et soit L une application linéaire $E \times E^* \rightarrow N$. On pose

$$(2.1) \quad L(x, \xi) = Bx + C\xi \quad \text{si } x \in E, \xi \in E^*$$

$$A = C^t B \in L(N^*, N)$$

Si a est une fonction à croissance lente sur N , on notera a_L l'opérateur $a(L(x, D))$: on a donc

$$(2.2) \quad a_L f = \int e^{ix \cdot \xi} a(L(x, \xi)) \hat{f}(\xi) d\xi$$

Il est clair qu'on a $a \circ L \in O_M$ (resp. S_0^m) si $a \in O_M$ (resp. si $a \in S_0^m$, et si $m \geq 0$). Par suite a_L est continu : $\lambda(E) \rightarrow C^\infty(E)$ si $a \in O_M$, continu $\lambda(E) \rightarrow \lambda(E)$ si $a \in S_0^\infty$, et se prolonge continuellement : $L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ si $a \in S_0^0$.

Si $a = e^{iy \cdot \eta}$ (avec $\eta \in N^*$), on a, d'après la formule d'inversion de Fourier :

$$(2.3) \quad a_L f = \int e^{ix \cdot \xi} e^{ix \cdot {}^t B \eta} e^{i\xi \cdot {}^t C \eta} \hat{f}(\xi) d\xi = e^{ix \cdot {}^t B \eta} f(x + {}^t C \eta) = \\ = e^{-\frac{1}{2} i A \eta \cdot \eta} \exp(i {}^t L \eta) f$$

Donc de façon générale on a, si $a \in O_M$

$$(2.4) \quad a_L = \int \exp(i {}^t L \eta) e^{-\frac{1}{2} i A \eta \cdot \eta} \hat{a}(\eta) d\eta$$

Dans ces formules, ${}^t L \eta$ désigne l'opérateur différentiel ${}^t B \eta \cdot x + {}^t C \eta \cdot D \in \mathcal{G}$. Il convient d'interpréter la dernière intégrale comme valeur de la distribution $\hat{a}(\eta) d\eta$ sur la fonction à valeurs vectorielles $\eta \mapsto e^{-\frac{1}{2} i A \eta \cdot \eta} \exp(i {}^t L \eta) \in L(\lambda, C^\infty)$.

Il est alors naturel d'introduire aussi l'opérateur

$$(2.5) \quad \rho(a, L) = \int \exp(i {}^t L \eta) \hat{a}(\eta) d\eta = b_L$$

avec $\hat{b} = e^{\frac{1}{2}iA\eta \cdot \eta} \hat{a}$

Remarquons que si Q est une forme quadratique réelle, e^{iQ} est un multiplicateur de $\hat{O}_M (= O'_C$, espace de Schwartz des convoluteurs) donc avec les notations ci-dessus on a $b \in O_M$ si $a \in O_M$. (On peut montrer que $\hat{S}_0^\infty$ est le dual de O_M , donc e^{iQ} est aussi un multiplicateur de $\hat{S}_0^\infty$, et on a $b \in S_0^\infty$ si $a \in S_0^\infty$.) Enfin si $a \in S^m$ (resp. S_{reg}^m) il est immédiat qu'on a $b \in S^m$ (resp. S_{reg}^m), et b admet le développement asymptotique

$$b \sim \sum \frac{1}{n!} (\frac{1}{2}iAD.D)^n a = \exp(\frac{1}{2}iAD.D) a$$

(où on a posé $AD.D = \sum A_{jk} D_j D_k$)

2. Adjoint.

Si $\ell \in \mathcal{G}$, on a $(\exp i\ell)^* = \exp -i\ell$. Comme on a aussi $\hat{a}(\eta) = \hat{a}(-\eta)$, on déduit aussitôt de la définition (2.5) qu'on a $f(a, L)^* = f(\bar{a}, L)$. De même on voit qu'on a $a_L^* = b_L$, avec $\hat{b} = \exp(iA\eta \cdot \eta) \hat{a}$, donc $b \in O_M$ (resp. S_0 , S^m , S_{reg}^m) s'il en est de même de a ; dans les deux derniers cas b admet le développement asymptotique

$$(2.6) \quad b \sim \sum \frac{1}{n!} (iAD.D)^n \bar{a}$$

On voit aussi que si $a \in S_0^\infty$ (et en particulier si $a \in S^m$), a_L^* est aussi continu $\lambda \rightarrow \lambda$, donc a_L se prolonge continument : $\lambda' \rightarrow \lambda'$.

3. Composés.

Si $a = e^{iy \cdot \eta}$ et $b = e^{iy' \cdot \eta'}$, avec $\eta, \eta' \in N^*$, on a d'après

$$(2.3) \quad a_L b_L f = e^{ix \cdot {}^t B \eta} e^{i \langle x + {}^t C \eta, {}^t B \eta' \rangle} f(x + {}^t C \eta + {}^t C \eta') = c_L f$$

avec

$$c = e^{i {}^t C \eta \cdot {}^t B \eta'} e^{i \langle y, \eta + \eta' \rangle} = a(y + A\eta) b = a b(y + {}^t A \eta)$$

On en déduit aussitôt, dans le cas général, qu'on a $a_L b_L = c_L$

avec

$$(2.7) \quad c = \int e^{iy \cdot \eta} a(y+A\eta) \hat{b}(\eta) d\eta = \int e^{iy \cdot \eta} b(y+{}^t A \eta) \hat{a}(\eta) d\eta$$

Cette relation est vraie si $a, b \in \mathcal{S}$, donc aussi à la limite si $a \in O_M$, $b \in S_0^\infty$ ou $a \in S_0^\infty$, $b \in O_M$. En particulier si $a \in S^m$ et $b \in S^{m'}$, on a $c \in S^{m+m'}$, et c admet le développement asymptotique

$$(2.8) \quad c \sim \sum \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D^\alpha a (AD)^\alpha b$$

(obtenu en intégrant dans (2.7) le développement de Taylor

$$a(y+A\eta) \sim \sum i^{|\alpha|}/\alpha! D^\alpha a(y) (A\eta)^\alpha \quad .)$$

Remarquons que la formule (2.7) est un cas particulier de (2.1), avec $E = N$, $B = \text{Id}$, $C = A$. Dans ce cas nous noterons plus simplement a_A l'opérateur correspondant. On a donc

$$(2.9) \quad a_L b_L = (a_A b)_L, \quad a_A b_A = (a_A b)_A$$

La formule (2.7) définit sur $S^\infty(N)$ une structure d'algèbre, associative (puisque'elle correspond à la composition des opérateurs), que nous noterons $\mathcal{L}_A$. La deuxième égalité de (2.7) montre encore que l'algèbre opposée de $\mathcal{L}_A$ est $\mathcal{L}_{t_A}$; en particulier $\mathcal{L}_A$ est commutative si (et seulement si) $A = {}^t A$.

4. Transformations métaplectiques.

Si $M \in M_p$, et $\ell \in \mathcal{G}$ (§1.2) on a $M \exp i\ell M^{-1} = \exp i s_M^\ell$. En particulier si $\eta \in N^*$ on a $M \exp i {}^t L_\eta M^{-1} = \exp i {}^t (L^t s_M) \eta$, d'où

$$(2.10) \quad M \mathfrak{f}(a, L) M^{-1} = \mathfrak{f}(a, L \circ {}^t s_M)$$

On peut toujours choisir $M \in M_p$ de sorte que $s_M {}^t L \cdot N^*$ soit le sous-espace de $\mathcal{G}$ engendré par $x_1, \dots, x_{p+q}, D_1, \dots, D_p$ (avec $2p+q =$ le rang de L , $2p =$ le rang de la restriction à ${}^t L N^*$ de la forme symplectique de $\mathcal{G}$). Lorsqu'il en est ainsi, il sera commode de noter la variable de E (x, y, z) , avec $x = (x_1, \dots, x_p)$, $y = (x_{p+1}, \dots, x_{p+q})$, $z = (x_{p+q+1}, \dots, x_n)$. Tout opérateur a_L s'écrit alors, d'une seule façon :

$$(2.11) \quad a_L f = b(x, y, D_x) f = \int e^{ix \cdot \xi} b(x, y, \xi) \hat{f}(\xi, y, z) d\xi$$

où $\hat{f}$ désigne ici la transformée de Fourier partielle de f par rapport à x , et où $b \in O_M$ (resp. S_0^m, S^m) si $a \in O_M$ (resp. S_0^m, S^m). Dans la situation ci-dessus, nous dirons que a_L a été mis sous forme réduite.

§3 Paramétrixes et inverses.

On conserve les notations du §2. Soit $a \in S_{\text{reg}}^m(N)$: on dit que a est elliptique si son symbole est inversible (cette définition se généralise aussitôt au cas où a est une matrice à coefficients dans S_{reg}^m). Il résulte aussitôt de (2.8) que si a est elliptique, il possède une paramétrix, ie. il existe $b \in S^{-m}$ tel que $a \circ b - 1 \in S^{-\infty}(N)$ et $b \circ a - 1 \in S^{-\infty}(N)$ (où le produit $\circ$ est celui de l'algèbre $\mathcal{L}_A$, défini par la formule (2.7)).

Nous nous proposons de trouver des critères pour que a_L soit inversible, ou pour que a_A soit inversible (ie. que a soit inversible dans l'algèbre $\mathcal{L}_A$). Remarquons que si L est surjective, l'application $a \mapsto a_L$ est injective, et a_L possède un inverse de la forme b_L (avec $b \in S^{-\infty}$) si et seulement si a est inversible dans $\mathcal{L}_A$. Dans toute la suite nous supposons L surjective (cela suffira pour l'application que nous avons en vue).

1. Cas où L est bijectif.

On se ramène aussitôt au cas où $N = E \times E^*$, $L = \text{Id}$. C'est le cas étudié par V.V.Grusin [6] ; on a alors $a_L = a(x, D)$, et le noyau de a_L est la distribution $b(x, x-y)$, où $b(x, z)$ a pour transformée de Fourier partielle par rapport à z la fonction $a(x, \xi)$. En particulier le noyau de a_L est dans $\mathcal{S}'(E \times E)$ (ie. a_L est continu de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}$) si et seulement si $a \in S^{-\infty}$; a_L est alors en fait un opérateur compact de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$.

Par suite si $a \in S^m$ est elliptique, $\text{Ker}(a_L)$ est de dimension finie, contenu dans $\mathcal{S}$, et $\text{Im}(a_L)$ est fermée de codimension finie (orthogonale à $\text{Ker}(a_L^*)$). Si $\text{Ker } a_L = \text{Ker } a_L^* = 0$, a_L est

inversible, d'inverse b_L avec $b \in S^{-m}$ ($b-b' \in S^{-\infty}$ si b' est une paramétrix de a).

Terminons par l'observation suivante : si $r \in S^{-\infty}$, et si $(1+r_L)$ est inversible dans $L^2(E)$, l'inverse est de la forme $1+s_L$ avec $s_L = -r_L + r_L^2 + r_L s_L r_L$, donc $s \in S^{-\infty}$. L'ensemble U des $r \in S^{-\infty}$ tels que $(1+r_L)$ soit inversible est donc ouvert (en fait ouvert pour la topologie induite par celle de $\text{End}(L^2)$), et l'application $r \mapsto s = (1+r)^{-1} - 1$ est holomorphe : $U \rightarrow \text{End}(L^2)$, donc aussi $U \rightarrow U$.

2. Cas général .

Nous supposons désormais que L n'est pas bijectif, mais nous continuons de le supposer surjectif. Quitte à transmuier par un élément $M \in M_p$ convenable, on peut supposer que L est l'application $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{p+q}, \xi_1, \dots, \xi_p) = (x, y, \xi)$ (cas réduit)

(3.1) Théorème.- (On suppose L surjectif) Soit $a \in S^m(N)$, elliptique : les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) a est inversible dans l'algèbre $\mathcal{L}_A$
- (ii) a_L est inversible dans $\mathcal{L}(E)$
- (ii)bis a_L est inversible dans $\mathcal{L}'(E)$
- (iii) (on suppose a_L mis sous forme réduite : $a(x, y, D_x)$) - pour tout $y \in \mathbb{R}^q$, l'opérateur $a_y = a(x, y, D_x)$ est inversible dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ (ou $\mathcal{L}'(\mathbb{R}^p)$).

Il est clair que l'assertion (i) implique toutes les autres. Si $q = 0$, on est essentiellement dans le cas traité au n°1 : il est clair que dans ce cas (i) et (iii) sont équivalents ; d'autre part si $a(x, D_x)$ n'est pas inversible dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$, a ou a^* n'est pas injectif et il existe $\varphi = \varphi(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ telle que $a(x, D)\varphi = 0$ ou $a(x, D)^*\varphi = 0$; alors pour toute $\psi = \psi(z)$ ($z = (x_{p+1}, \dots, x_n)$) dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-p})$, on a $a_L(\varphi(x)\psi(z)) = 0$ ou $a_L^*(\varphi(x)\psi(z)) = 0$, de sorte que a_L n'est pas inversible dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ (ni dans $\mathcal{L}'(\mathbb{R}^n)$).

Nous supposons désormais $q > 0$. Prouvons que (iii) implique (i). De toute façon a possède une paramétrix $b' \in S^{-m}(\mathbb{R}^{2p+q})$. Par hypothèse pour tout $y \in \mathbb{R}^q$, $a_y = a(x, y, D_x)$ est inversible, et d'après le n°1, l'inverse est de la forme $b_y = b(x, y, D_x)$, avec $b_y - b'_y \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p})$. Nous allons prouver qu'on a en fait $b - b' \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$.

ce qui implique bien sûr $b \in S^{-m}(\mathbb{R}^{2p+q})$. Pour cela nous utiliserons les résultats du n°1, et les observations suivantes :

-si $r \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$, l'application $y \mapsto r_y$ se prolonge en une application de classe C^∞ , nulle d'ordre infini à l'infini, de $S^q = \mathbb{R}^q \cup \{\infty\}$ dans l'espace de Fréchet $S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p})$. Inversement si U est un ouvert de S^q , et ρ une application de classe C^∞ , nulle d'ordre infini à l'infini : $U \rightarrow S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p})$, pour tout compact $K \subset U$ il existe $r \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$ telle que $r_y = \rho_y$ pour $y \in K$.

-si $r \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$ et $b' \in S^m(\mathbb{R}^{2p+q})$, on a $r \circ b' \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$ et $b' \circ r \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$ (le produit est celui de l'algèbre $\mathcal{L}_A$).

Il s'agit donc de prouver qu'au voisinage de chaque point de $S^q = \mathbb{R}^q \cup \{\infty\}$, l'application $y \mapsto b_y - b'_y$ est de classe C^∞ (nulle d'ordre infini à l'infini le cas échéant), à valeurs dans $S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p})$.

Posons $b' \circ a = 1 + r$: pour y assez grand, r_y est petit, donc $1 + r_y$ est inversible, d'inverse $1 + s_y$, où $s_y \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p})$ est fonction holomorphe de r_y d'après le n°1. En vue de ce qui précède, il existe un voisinage U de l'infini, et $s' \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$ tel que $(1+r_y) \circ (1+s'_y) = 1$ pour $y \in U$. On a alors, pour $y \in U$, $b_y = (1+s'_y) \circ b'_y$, donc $b - b' = s \circ b'$, et comme $s \circ b' \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$ ceci démontre notre assertion au voisinage de l'infini.

Soit maintenant $y_0 \in \mathbb{R}^q$ (à distance finie). On a $b_{y_0} - b'_{y_0} \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p})$ et il existe $\rho \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$ tel que $\rho_{y_0} = b_{y_0} - b'_{y_0}$. On a alors $(b' + \rho) \circ a = 1 + r''$, avec $r'' \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$, $r''_{y_0} = 0$; r'' est petit au voisinage de y_0 , et comme ci-dessus il existe $s'' \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$ et un voisinage U_0 de y_0 tels que $(1+s''_y) \circ (1+r''_y) = 1$ pour $y \in U_0$. Pour $y \in U_0$, on a $b = (1+s'') \circ (b' + \rho)$, donc $b - b' = s'' \circ b' + (1+s'') \circ \rho$ et comme $s'' \circ b' + (1+s'') \circ \rho \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^{2p+q})$, ceci démontre notre assertion au voisinage de y_0 , et achève la démonstration.

Prouvons maintenant que chacune des assertions (ii) implique (i). Remarquons que a_y est un opérateur d'indice fini, indépendant de y donc nul (puisque a_y est inversible pour y assez grand comme on vient de voir). Supposons qu'il existe un point $y_0 \in \mathbb{R}^q$ tel que a_{y_0} ne soit pas inversible : on a donc $\ker a_{y_0} \neq 0$ et $\ker a_{y_0}^* \neq 0$ et il existe $\varphi = \varphi(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ (non nulle), telle que $a_{y_0} \varphi = 0$. Alors si δ_{y_0} désigne la mesure de Dirac au point y_0 sur $\mathbb{R}^q$, on a pour toute $\psi = \psi(z) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-p-q})$ $a_L(\varphi(x) \delta_{y_0} \psi(z)) = 0$, de sorte que a_L n'est pas injectif (donc pas inversible) dans $\mathcal{L}'$. De même

a_L^* n'est pas inversible dans $\mathcal{S}'$, et a_L n'est pas inversible dans $\mathcal{S}$.

Plus généralement soit a une matrice à coefficients dans $S^m(N)$, elliptique à gauche (resp. à droite). En appliquant le théorème à l'opérateur $a_L^* a_L$ (resp. $a_L a_L^*$), on voit que a possède un inverse à gauche (resp. à droite), qui est une matrice à coefficients dans $S^{-m}(N)$, si et seulement si a_L est inversible à gauche (resp. à droite) dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (ou $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$). Lorsque a_L est mis sous forme réduite : $a_L = a(x, y, D_x)$, ceci équivaut encore, compte tenu du n°1, à l'assertion suivante : pour tout $y \in \mathbb{R}^q$ l'opérateur a_y est injectif (resp. surjectif) dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$ (ou dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^p)$).

Nous complétons le théorème par le résultat suivant, qui vaut pour les opérateurs de degré positif :

(3.2) Proposition. - Soit a une matrice à coefficients dans $S^m(N)$, elliptique à gauche. On suppose $m \geq 0$ (et L surjectif). Alors a admet un inverse à gauche à coefficients dans $S^{-m}(N)$ si et seulement s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$(ii) \text{ter} \quad \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c \|a_L \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

En effet si a admet un inverse à gauche b à coefficients dans $S^{-m}(N)$, b_L est de degré négatif donc continu dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, ce qui implique (ii)ter dès que c est plus grand que la norme de b_L dans $\text{End}(L^2(\mathbb{R}^n))$.

Inversement, supposons que a n'est pas inversible à gauche. Nous pouvons supposer a_L mis sous forme réduite : $a_L = a(x, y, D_x)$, et d'après ce qui précède, il existe $y_0 \in \mathbb{R}^q$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p)$ tels que $a_y \cdot \varphi = 0$. Soit alors $\psi_k(y, z)$ une suite de fonctions C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}^{n-p}$, telles que le support de ψ_k tende vers (y_0, z_0) (où z_0 est un point arbitraire de $\mathbb{R}^{n-p-q}$), qu'on ait $\psi_1 = 1$ au voisinage de $\text{supp } \psi_k$ pour $k \geq 1$, et qu'on ait, pour tout k $\int |\psi_k(y, z)|^2 dy dz = 1$. On a alors

$$a_L(\varphi(x) \psi_k(y, z)) = \psi_k(y, z) a_L(\varphi(x) \psi_1(y, z)).$$

Or $a_L(\varphi \psi_1) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est nul pour $y = y_0$, donc $a_L(\varphi \psi_k)$ tend vers 0 en norme quadratique lorsque $k \rightarrow \infty$. Comme la norme de $\varphi \psi_k$ est constante (égale à $\int_{\mathbb{R}^p} |\varphi(x)|^2 dx \neq 0$), ceci contredit

l'inégalité (ii)ter .

Remarquons qu'il peut arriver que a soit elliptique (à droite et à gauche) , et que a_L ait un inverse à gauche sans avoir d'inverse à droite : c'est le cas de l'opérateur $D_x + ix$ (sur $\mathbb{R}$).

Le théorème (3.1) permet de ramener l'étude de l'inversibilité de a_L à la même étude , dans le cas où L est bijectif (n°1) . Dans ce cas l'étude est plus facile (a_L est inversible à gauche (resp. à droite) si et seulement si $\ker a_L = 0$ (resp. $\ker a_L^* = 0$)) mais est loin d'être complète ; elle l'est néanmoins dans le cas où a est un polynôme de degré ≤ 2 (cf. [5] , [13]).

§4 Introduction de paramètres.

1. Position du problème.

Nous nous intéressons maintenant à ce qui se passe lorsque L et le symbole a dépendent d'un paramètre $\lambda \in \Sigma$, où Σ est une variété de classe C^∞ . Nous supposons donc $L \in C^\infty(\Sigma, L(E \times E^*, N))$, et comme au §2 nous posons $L(x, \xi) = Bx + C\xi$, $A = C^t B$ (donc $A \in C^\infty(\Sigma, L(N^*, N))$). Si $a \in S^m(\Sigma \times N)$, a_L désigne la famille d'opérateurs définis par (2.1) . Pour $\lambda \in \Sigma$, on pose $L_\lambda = L(\lambda)$, $a_\lambda(y) = a(\lambda, y)$ (donc $a_\lambda \in S^m(N)$) , et on note a_λ^L l'opérateur correspondant .

Plusieurs des constructions du §2 marchent encore. En particulier si $a \in S^\infty(\Sigma \times N)$, a_L définit un opérateur linéaire continu sur $S^{-\infty}(\Sigma \times E)$, et c'est à cet opérateur que nous nous intéressons plus particulièrement. Si $a \in S^m(\Sigma \times N)$, $b \in S^{m'}(\Sigma \times N)$, on a $a_L b_L = c_L$ où $c \in S^{m+m'}(\Sigma \times N)$ est encore donné par la formule (2.7) et admet le développement asymptotique (2.8).

La formule (2.7) définit encore une structure d'algèbre sur $S^\infty(\Sigma \times N)$, que nous noterons toujours $\mathcal{L}_A$; $a \mapsto a_L$ est donc une représentation de $\mathcal{L}_A$ dans $S^{-\infty}(\Sigma \times E)$.

Si $a \in S_{\text{reg}}^m(\Sigma \times N)$ est elliptique , il possède une paramétrix, ie. il existe $b \in S_{\text{reg}}^{-m}(\Sigma \times N)$ tel que $b \circ a - 1 \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$ et $a \circ b - 1 \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$ (où le produit est celui de $\mathcal{L}_A$).

Nous désirons un critère pour que a_L soit inversible dans $S^{-\infty}(\Sigma \times E)$: ce sera le cas si a est inversible dans l'algèbre $\mathcal{L}_A$.

Le critère ci-dessous est un critère d'inversibilité dans $\mathcal{L}_A$; on y suppose L surjectif (ie. L_λ est surjectif pour tout λ). Il s'applique en particulier à la loi d'algèbre de $\mathcal{L}_A$ elle-même (qui est un cas particulier de (2.7), avec $E = N$, $L = (\text{Id}, A)$, donc L est surjectif)

Si L n'est pas surjectif - ou plutôt si le rang de L n'est pas constant -, le critère ci-dessous ne s'applique plus : il se peut que a_L ait un inverse b_L sans que a soit inversible dans $\mathcal{L}_A$, et aussi que a_L soit inversible pour une valeur du paramètre sans être inversible pour les valeurs voisines. La difficulté pour le critère ci-dessous vient de ce que, même si L est surjectif (ou de rang constant), le rang de la restriction à ${}^tL(N^*)$ de la forme symplectique de $\mathcal{G}$ peut varier : il n'est en général pas possible de trouver $M \in M_p$, dépendant régulièrement du paramètre, et permettant de se ramener à la forme réduite du §2.4.

(4.1) Théorème. - Avec les notations ci-dessus, on suppose L surjectif, et $a \in S_{\text{reg}}^m(\Sigma \times N)$ elliptique.

(i) Si a_L^λ est inversible en un point λ_0 , il est inversible au voisinage de λ_0 .

(ii) Si a_L^λ est inversible pour tout $\lambda \in \Sigma$, a est inversible dans l'algèbre $\mathcal{L}_A$, d'inverse $b \in S_{\text{reg}}^{-m}(\Sigma \times N)$.

Il y a un résultat analogue pour les systèmes (matrices) : si a est une matrice rectangulaire, elliptique à gauche (resp. à droite) et si a est inversible à gauche (resp. à droite) en un point, il l'est au voisinage de ce point ; si a est inversible à gauche (resp. à droite) en tout point de Σ , a admet un inverse à gauche (resp. à droite), qui est une matrice à coefficients dans $S^{-m}(\Sigma \times N)$.

Pour démontrer le théorème, remarquons que comme a est elliptique, il possède une paramétrix $b' \in S^{-m}(\Sigma \times N)$: on a donc $b'_0 a - 1 \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$. Si en outre a_L est inversible en un point λ_0 , l'inverse est de la forme $(b_{\lambda_0})_{L_{\lambda_0}}$, avec $b_{\lambda_0} \in S^{-m}(N)$, et on a $b_{\lambda_0} - b'_{\lambda_0} \in S^{-\infty}(N)$; si alors on pose $b'' = b' + b_{\lambda_0} - b'_{\lambda_0}$, on a $b''_0 a = 1 + r$, avec $r \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$, $r_{\lambda_0} = 0$. Comme L est surjectif et $r_{\lambda_0} = 0$, r_λ est petit au voisinage de λ_0 , donc $(1+r_L^\lambda)$ est inversible dans L^2 , et $(1+r_\lambda)$ inversible au voisinage de λ_0 ,

ce qui démontre l'assertion (i).

Supposons maintenant a_λ inversible pour tout $\lambda \in \Sigma$: l'inverse est alors de la forme b_λ^λ , où b est une fonction sur $\Sigma \times N$, et $b_\lambda \in S^{-m}(N)$ pour tout λ . Il s'agit de prouver qu'on a $b \in S^{-m}(\Sigma \times N)$ (autrement dit b_λ dépend de façon C^∞ de λ). Remarquons qu'avec les notations ci-dessus, si $(1+r_\lambda)$ est inversible pour $\lambda \in U \subset \Sigma$, on a, pour $\lambda \in U$, $b_\lambda = (1+r_\lambda)^{-1} \circ b''$, donc $b_\lambda - b'' = s_\lambda \circ b''$ si $(1+r_\lambda)^{-1} = (1+s_\lambda)$. La deuxième assertion du théorème résultera donc du lemme suivant :

(4.2) Lemme.- Avec les notations ci-dessus, soit $r \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$. Si $(1+r_\lambda)$ est inversible pour tout $\lambda \in \Sigma$, l'inverse est de la forme $(1+s_\lambda)$, avec $s \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$.

Le reste du § est consacré à la démonstration de ce lemme.

2. Preuve du lemme 4.2 .

Nous travaillerons uniquement avec l'algèbre $\mathcal{L}_A$. Nous supposons $\Sigma = \mathbb{R}^p$, $N = \mathbb{R}^q$, et noterons (A_{jk}) la matrice de A . On a les formules suivantes :

$$(4.3) \quad D_{y_j}(a \circ b) = (D_{y_j} a) \circ b + a \circ (D_{y_j} b)$$

$$y_j(a \circ b) = (y_j a) \circ b - \sum_k A_{jk} D_{y_k} b$$

$$D_{\lambda_i}(a \circ b) = (D_{\lambda_i} a) \circ b + a \circ (D_{\lambda_i} b) + \sum_{j,k} \frac{\partial A_{jk}}{\partial \lambda_i} (D_{y_j} a \circ D_{y_k} b)$$

Ces formules résultent aussitôt de (2.7), en remarquant que $\eta_j^\lambda b(\gamma)$ est la transformée de Fourier de $D_{y_j} b$. Elles sont valables pour $a, b \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$ (donc aussi, à la limite, pour $a, b \in S^\infty$).

Pour la suite, nous aurons besoin d'une suite particulière de normes sur $\mathcal{L}(N) = S^{-\infty}(N)$: on pose $H = (|y|^2 + |D_y|^2)^{\frac{1}{2}}$ (H admet pour fonctions propres les fonctions de Hermite :

$$h_\alpha(y) = \prod_{j=1}^q (\pi^{\frac{1}{2}} 2^{\alpha_j} \alpha_j!)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} - y_j \right)^{\alpha_j} e^{-\frac{1}{2}|y|^2}$$

la valeur propre correspondante est $(2|\alpha| + 1)^{\frac{1}{2}}$). Pour tout $z \in \mathbb{C}$

l'opérateur H^z est défini par $H^z(h_\alpha) = (2|\alpha|+1)^{\frac{1}{2}z} h_\alpha$; c'est un opérateur continu sur $\mathcal{S}$, qui dépend de façon holomorphe de z . On note E_s le domaine de H^s dans L^2 , et on pose

$$(4.3) \|f\|_{E_s} = \|H^s f\|_{L^2}$$

(c'est une norme, qui ne dépend que de $\operatorname{Re} s$).

Dans les assertions qui suivent, on oublie (provisoirement) le paramètre.

(4.5) Lemme. - Pour tout $k > \frac{1}{2} \dim N$, il existe $C > 0$ tel que

$$\|a \circ b\|_{L^2} \leq C \|a\|_{L^2} \|b\|_{E_k}$$

En effet on a $a \circ b = \int e^{iy \cdot \eta} a(y+A\eta) \hat{b}(\eta) d\eta$. Or pour tout $\eta \in N^\dagger$, on a $\|e^{iy \cdot \eta} a(y+A\eta)\|_{L^2} = \|a\|_{L^2}$, d'où $\|a \circ b\|_{L^2} \leq \|a\|_{L^2} \int |\hat{b}(\eta)| d\eta$. Mais pour $k > \frac{1}{2} \dim N$, on a, avec une constante C convenable, $\int |\hat{b}(\eta)| d\eta \leq C \|b\|_{E_k}$.

Utilisant l'autre égalité de (2.7), on obtient, avec la même constante C :

$$\|a \circ b\|_{L^2} \leq C \|a\|_{E_k} \|b\|_{L^2}.$$

(4.6) Corollaire. - On a $\|a \circ b\|_{L^2} \leq C \|a\|_{E_j} \|b\|_{E_{k-j}}$ si $0 \leq j \leq k$.

Soient en effet $a, b \in S^{-\infty}(N)$, et considérons la fonction holomorphe $F(z) = (H^{j-kz}a) \circ (H^{kz-j}b)$. C'est une fonction holomorphe de z , bornée (dans L^2 et même dans $\mathcal{S}$) pour $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$.

Pour $\operatorname{Re} z = 0$, on a

$$\|F(z)\|_{L^2} \leq C \|H^j a\|_{L^2} \|H^{-j} b\|_{E_k} = \|a\|_{E_j} \|b\|_{E_{k-j}}$$

et pour $\operatorname{Re} z = 1$, on a

$$\|F(z)\|_{L^2} \leq C \|H^{k-j} a\|_{E_k} \|H^{j-k} b\|_{L^2} = C \|a\|_{E_j} \|b\|_{E_{k-j}}$$

En vertu du théorème des trois droites de Hadamard, on a donc aussi

$$\|F(z)\|_{L^2} \leq C \|a\|_{E_j} \|b\|_{E_{k-j}} \quad \text{si } 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$$

et pour $z = j/k$ on obtient l'assertion du corollaire.

(4.7) Corollaire. - Pour tout entier $k > \frac{1}{2} \dim N$, il existe une constante $C > 0$ (qui ne dépend que de k , $\dim N$, et pas de A) telle que $\|a \circ b\|_{E_k} \leq C (1 + \|A\|)^k \|a\|_{E_k} \|b\|_{E_k}$.

En effet si k est entier ≥ 0 , la norme $\|a\|_{E_k}$ est équivalente à la norme $\sum_{|\alpha+\beta| \leq k} \|x^\alpha D^\beta a\|_{L^2}$. Or il résulte de (4.3) qu'on a

$$x^\alpha D^\beta (a \circ b) = \sum_{\substack{\alpha' \leq \alpha \\ \beta' \leq \beta}} (-1)^{|\alpha'|} \binom{\alpha}{\alpha'} \binom{\beta}{\beta'} (x^{\alpha-\alpha'} D^{\beta-\beta'} a) \circ ((AD)^{\alpha'} D^{\beta'} b)$$

d'où, avec des constantes C, C' convenables :

$$\begin{aligned} \|a \circ b\|_{E_k} &\leq C' \sum_{|\alpha'+\alpha''+\beta'+\beta''| \leq k} \|A\|^{|\alpha''|} \|x^{\alpha'} D^{\beta'} a\|_{E_{k-|\alpha'+\beta'|}} \|D^{\alpha'+\beta''} b\|_{E_{k-|\alpha''+\beta''|}} \\ &\leq C (1 + \|A\|)^k \|a\|_{E_k} \|b\|_{E_k}. \end{aligned}$$

Nous choisissons maintenant un entier $k_0 > \frac{1}{2} \dim N$, et pour tout entier M et tout compact $K \subset \Sigma$, nous définissons une semi-norme sur $S^{-\infty}(\Sigma \times N)$ par

$$(4.8) \quad \|a\|_M^K = \sum_{2|\alpha|+j=M} \sup_{\lambda \in K} \|D_\lambda^\alpha a\|_{E_{k_0+j}}$$

Comme les normes $\|a\|_{E_k}$, $k \in \mathbb{N}$, forment une suite fondamentale de semi-normes de $\mathcal{D}$, les semi-normes $\|a\|_M^K$, lorsque M parcourt $\mathbb{N}$, et K l'ensemble des compacts de Σ , forment une famille fondamentale de seminormes de $S^{-\infty}(\Sigma \times N)$.

(4.9) Proposition. - Pour tout M , et pour tout compact $K \subset \Sigma$, il existe une constante C_M telle que

$$\|a \circ b\|_M^K \leq C_M \sum_{j=0}^M \|a\|_j^K \|b\|_{M-j}^K$$

En effet, c'est vrai pour $M = 0$ (puisque $(1 + \|A\|)^k$ est borné dans K). On démontre alors aisément l'assertion, par récurrence sur M , en remarquant que la semi-norme $\|a\|_M^K$ est équivalente à la semi-norme

$$\|a\|_{M-1}^K + \sum_j \|y_j a\|_{M-1}^K + \|D_{y_j} a\|_{M-1}^K + \sum_i \|D_{\lambda_i} a\|_{M-2}^K$$

et en utilisant les formules (4.3) pour majorer les normes des fonctions $D_{y_j}(a \circ b)$, $y_j(a \circ b)$, $D_{\lambda_i}(a \circ b)$. Nous laissons les

détails au lecteur.

Pour tout entier M , et pour tout compact $K \subset \Sigma$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que $C_j \leq \alpha^j C_0$ pour $0 \leq j \leq M$ (où les C_j sont les constantes de la proposition (4.9)). Si alors on pose

$$N_M(a) = \sum_0^M C_0 \alpha^{-j} \|a\|_j^K T^j$$

la proposition (4.9) implique qu'on a

$$N_M(a \circ b) \ll N_M(a) N_M(b)$$

(où le signe $\ll$ signifie que pour tout j , le coefficient de T^j dans le membre de gauche est plus petit que le coefficient de T^j dans le membre de droite).

(4.10) Corollaire. - Soit $a \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$, soit U un ouvert relativement compact de Σ , et supposons $C_0 \|a\|_0^U < 1$. Alors la série géométrique $\sum_1^\infty a^j$ converge dans $S^{-\infty}(U \times N)$

(a^j désigne la puissance j -ième de a dans l'algèbre $\mathcal{L}_A$).

En effet pour tout M on a

$$N_M(\sum_1^\infty a^j) \ll \sum_1^\infty N_M(a)^j = N_M(a) (1 - N_M(a))^{-1}$$

(la deuxième série est convergente, puisque son terme constant est de valeur absolue < 1). Ainsi la série $\sum_{j=1}^\infty \|a^j\|_k^U$ converge pour tout $k \leq M$, donc pour tout k puisque M est arbitraire, ce qui achève la démonstration.

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du lemme (4.2) : soit $r \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$, et supposons que pour tout $\lambda \in \Sigma$, $(1+r_\lambda)$ est inversible. Soit $\lambda_0 \in \Sigma$: il existe $s \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$ tel que $(1+s_{\lambda_0})(1+r_{\lambda_0}) = 1$. On a donc $(1+s)_0(1+r) = 1 + \varphi$, avec $\varphi \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$, $\varphi_{\lambda_0} = 0$. Comme φ_λ est petit au voisinage de λ_0 , il existe un voisinage U de λ_0 tel qu'on ait $C_0 \|\varphi\|_0^U < 1$. Alors $(1+\varphi_\lambda)$ est inversible dans U , d'inverse $1 + \delta_\lambda$, avec $\delta = \sum (-\varphi)^j \in S^{-\infty}(U \times N)$. On a donc $(1+r)^{-1}|_U = (1+\delta)_0(1+s)^{-1} \in S^{-\infty}(U \times N)$. Ceci peut être répété au voisinage de chaque point de Σ , et achève la démonstration.

§5 Constructions de paramétrixes d'opérateurs à caractéristiques multiples.

1. Soit X un ouvert de R^n (le résultat de ce paragraphe se généralise aisément au cas où X est une variété de classe C^∞ , mais pour les calculs qui suivent il est commode de fixer une fois pour toutes le système de coordonnées). Soit $P = p(x, D)$ un opérateur pseudo-différentiel sur X , de degré m . Nous supposons que le symbole total p admet un développement asymptotique :

$$(5.1) \quad p(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j(x, \xi)$$

où p_j est homogène de degré $m-j$ (autrement dit $p \in S_{\text{reg}}^m$) (pour les calculs qui suivent, j pourrait aussi bien parcourir l'ensemble des demi-entiers positifs : $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$)

Il est commode d'introduire l'opérateur différentiel à coefficients séries formelles de T :

$$(5.2) \quad \sigma_{x, \xi}^\infty(P) = \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{\alpha! \beta!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\beta p(x, \xi) T^{|\alpha+\beta|+2j} y^\alpha D_y^\beta$$

Il est clair qu'on a $\sigma^\infty(P+Q) = \sigma^\infty(P) + \sigma^\infty(Q)$ si P et Q sont de même degré, et il est classique qu'on a $\sigma^\infty(P \circ Q) = \sigma^\infty(P) \circ \sigma^\infty(Q)$ ($P \circ Q$ étant considéré comme opérateur de degré $\deg P + \deg Q$).

2. Soit $\Sigma \subset T^*X \setminus \{0\} = X \times (R^n \setminus \{0\})$ un cône lisse, de codimension p . Nous dirons (comme dans [1]) que P est nul d'ordre k sur Σ (k entier positif), et écrirons $P \in \mathcal{N}^{m, k}$ (ou $p \in \mathcal{N}^{m, k}$) si pour tout j , p_j est nul d'ordre $\geq k-2j$ sur Σ (il n'y a pas de condition pour $j \geq k/2$) ; de façon équivalente : $\sigma_{x, \xi}^\infty(P)$ est divisible par T^k pour tout point $(x, \xi) \in \Sigma$. Il est commode d'introduire

$$(5.3) \quad \sigma_{x, \xi}^k(P) = \sum_{|\alpha+\beta|+2j=k} \frac{1}{\alpha! \beta!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\beta p_j(x, \xi) y^\alpha D_y^\beta$$

de sorte qu'on a $\sigma_{x, \xi}^\infty(P) = \sigma_{x, \xi}^k(P) T^k \text{ mod. } T^{k+1}$ si $(x, \xi) \in \Sigma$; donc si $P \in \mathcal{N}^{m, k}$ et $Q \in \mathcal{N}^{m', k'}$, on a $\sigma_{x, \xi}^{k+k'}(P \circ Q) = \sigma_{x, \xi}^k(P) \circ \sigma_{x, \xi}^{k'}(Q)$.

3. Le développement de Taylor $T_k(P)$

Pour les propriétés locales des symboles et des opérateurs, il sera commode d'introduire, dans un voisinage conique d'un point $(x, \xi) \in \Sigma$, un système de coordonnées

$$(5.4) \quad u = (u_1, \dots, u_p) \quad , \quad v = (v_1, \dots, v_{2n-p})$$

où les u_i (resp. v_j) sont C^∞ , homogènes de degré 0 (resp. 1, et non toutes nulles), de sorte que, au voisinage de (x, ξ) , Σ soit défini par le système d'équations $u = 0$. Dans toute la suite les lettres u, v représentent un tel système de coordonnées.

Si $P = p(x, D) \in \mathcal{N}^{m,k}$, il existe un polynôme unique

$$(5.5) \quad T_k(P) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(v) u^\alpha \quad , \quad \text{avec} \quad a_\alpha(v) \text{ homogène de degré } m - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}|\alpha|$$

tel que $p - T_k(P)$ soit nul d'ordre $k+1$ sur Σ , au voisinage de x, ξ . On obtient ce polynôme en ne retenant dans le développement de Taylor de $p \sim \sum p_j$ le long de Σ que les termes dominants, c'est à dire semi-homogènes de poids $m - \frac{1}{2}k$ lorsqu'on attribue à v le poids 1 et à u le poids $-\frac{1}{2}$ (cf. [1]).

4. L'opérateur P_Σ .

Soit $P \in \mathcal{N}^{m,k}$. On sait d'après [1] qu'il existe (au voisinage de chaque point $(x, \xi) \in \Sigma$) un opérateur différentiel unique

$$(5.6) \quad P_\Sigma = \sum a_{\alpha\beta}(v) u^\alpha D_u^\beta$$

où $a_{\alpha\beta}$ ne dépend que de v , et est homogène de degré $m - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}|\alpha| - \frac{1}{2}|\beta|$, tel que pour tout $Q \in \mathcal{N}^{m',k'}$ on ait

$$(5.7) \quad T_{k+k'}(P \circ Q) = P_\Sigma T_{k'}(Q)$$

(l'unicité d'un tel opérateur est immédiate; l'existence et la construction de P seront repris et précisés ci-dessous)

Il est clair que P_Σ et $\sigma^k(P)$ ne dépendent que de $T_k(P)$. Pour $k = 0$, P_Σ et $\sigma^k(P)$ sont simplement l'opérateur de multiplication par la constante $p_0(x, \xi)$.

5. Lien entre $T_k(P)$, $\zeta^k(P)$, et P_Σ .

Décomposons les champs de vecteurs $\partial/\partial x_s$, $\partial/\partial \xi_s$ en partie transverse et partie tangente à Σ au voisinage d'un point $(x, \xi) \in \Sigma$:

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \partial/\partial x_s &= \sum_j B_{js}(v) \partial/\partial u_j + r_s \\ \partial/\partial \xi_s &= \sum_j C_{js}(v) \partial/\partial u_j + \rho_s \end{aligned}$$

où les B_{js} , C_{js} sont des fonctions qui ne dépendent que de v , et pas de u , et les r_s , ρ_s sont tangents à Σ , donc

$$(5.9) \quad \begin{aligned} B_{js} &= \partial u_j / \partial x_s |_\Sigma \quad (\text{homogène de degré } 0) \\ C_{js} &= \partial u_j / \partial \xi_s |_\Sigma \quad (\text{homogène de degré } -1) \end{aligned}$$

Nous noterons encore $E = \mathbb{R}^n$ (variable y) , et $N = \mathbb{R}^p$ (variable u ; on peut identifier canoniquement N au fibré tangent normal de Σ). Nous noterons aussi

$$(5.10) \quad \begin{aligned} B &: E \rightarrow N \quad \text{l'opérateur de matrice } (B_{js}) \\ C &: E^* \rightarrow N \quad \text{l'opérateur de matrice } (C_{js}) \\ L &= (B + C) : E \times E^* \rightarrow N \\ A &= C^t B : N^* \rightarrow N \end{aligned}$$

On a donc

$$(5.11) \quad A_{jk} = \sum_s C_{js} B_{ks}$$

Soit U_j l'opérateur $u_j(x, D) \in \mathcal{N}^{0,1}$ (la fonction u_j est seulement définie au voisinage de (x, ξ) , et il convient plutôt de considérer U_j comme opérateur pseudo-différentiel opérant sur les micro-fonctions définies au voisinage de (x, ξ)). On a

$$(5.12) \quad \begin{aligned} \sigma^1(U_j) &= \sum_s \partial u_j / \partial x_s y_s + \partial u_j / \partial \xi_s D_{y_s} = \sum_s B_{js} y_s + C_{js} D_{y_s} \\ &= (u_j)_L \end{aligned}$$

D'autre part soit $Q \in \mathcal{N}^{m,k}$, de symbole total $q(x, \xi)$. Le symbole total de $U_j \circ Q$ a pour développement asymptotique :

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^{\alpha} u_j D_x^{\alpha} q$$

Pour le calcul de $T_{k+1}(U_j Q)$ on peut bien sûr remplacer q par $T_k(Q) = b$, et on constate aussitôt que seuls les termes avec $|\alpha| \leq 1$ ont une contribution non nulle. Enfin on peut remplacer D_{x_s} par sa partie transverse à Σ (formule (5.8)), et on obtient en fin de compte

$$T_{k+1}(U_j Q) = T_{k+1}(u_j b + \sum_s \partial u_j / \partial x_s D_{x_s} b) = u_j b + \sum_{j,s} C_{js} B_{ks} D_{u_k} b$$

Finalement, puisque $A_{jk} = \sum_s C_{js} B_{ks}$, on a

$$(5.13) \quad (U_j)_{\Sigma} = u_j + \sum_k A_{jk} D_{u_k} = (u_j)_A$$

Nous pouvons maintenant énoncer le lien qui existe entre P_{Σ} , $\sigma^k(P)$, et le développement de Taylor $T_k(P)$:

(5.14) Proposition. - Soit $P \in \mathcal{N}^{m,k}$, et $a = T_k(P)$. On a

$$P_{\Sigma} = a_A, \quad \sigma^k(P) = a_L \quad (\S 2, \text{formules (2.2), (2.9)}).$$

preuve: nous venons de démontrer cette assertion lorsque P est l'un des U_j , et bien sûr elle est vraie pour $k = 0$. Soient maintenant $P \in \mathcal{N}^{m,k}$, $Q \in \mathcal{N}^{m',k'}$. Posons $a = T_k(P)$, $b = T_{k'}(Q)$, $c = T_{k+k'}(PQ)$, et supposons $P = a_A$, $Q = b_A$, $\sigma^k(P) = a_L$ et $\sigma^{k'}(Q) = b_L$. On a alors

$$c = P_{\Sigma} b = a_A b$$

$$(PQ)_{\Sigma} = P_{\Sigma} Q_{\Sigma} = a_A b_A = (a_A b)_A = c_A \quad (\text{d'après (2.9)})$$

$$\sigma^{k+k'}(PQ) = \sigma^k(P) \sigma^{k'}(Q) = a_L b_L = (a_A b)_L = c_L \quad (\text{d'après (2.9)})$$

Dans le cas général, si $P \in \mathcal{N}^{m,k}$, on peut toujours écrire P sous la forme

$$P = \sum_{|\alpha| \leq k} A_{\alpha} U_1^{\alpha_1} \dots U_p^{\alpha_p}$$

où A_{α} est de degré $\leq m - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}|\alpha|$ (donc $A_{\alpha} \in \mathcal{W}^{m - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}|\alpha|, 0} \subset \mathcal{W}^{m, k - |\alpha|}$). Comme l'assertion est vraie pour les U_j , et pour les A_{α} ($k=0$), elle l'est aussi pour P .

6. Dans [1] on a introduit les classes de symboles $S^{m,k}$ et $\mathcal{K}^m = \bigcap S^{m-j, -2j}$, et les opérateurs pseudo-différentiels correspondants ($OPS^{m,k}$, $OP\mathcal{K}^m$). D'après [1], on a $a \in S^{m,k}$ si $a \in S^m$ en dehors de Σ , et si tout point de Σ possède un voisinage conique dans lequel on ait, pour tous α, β , et pour $|v| \geq 1$, avec des constantes $c_{\alpha\beta}$ convenables :

$$(5.15) \quad \left| \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^{\beta} a \right| \leq c_{\alpha\beta} |v|^{m-|\beta|} (|u| + |v|^{-\frac{1}{2}})^{k-|\alpha|}$$

Aussi d'après [1] (5.2), on a $h \in \mathcal{K}^m$ si et seulement si $h \in S^{-\infty}$ en dehors de Σ , et si tout point de Σ possède un voisinage conique dans lequel on ait, pour tous α, β, γ , et pour $|v| \geq 1$, avec des constantes $c_{\alpha\beta\gamma}$ convenables :

$$(5.16) \quad \left| u^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^{\beta} \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^{\gamma} h \right| \leq c_{\alpha\beta\gamma} |v|^{m-|\gamma| + \frac{1}{2}|\beta| - \frac{1}{2}|\alpha|}$$

Comme $h \in S^{-\infty}$ hors de Σ , on peut, quitte à le tronquer, supposer qu'il est nul pour $|u| > 1$. On a alors $h \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$ (au voisinage d'un point de Σ , on identifie Σ à $\mathbb{R}^{2n-p}$ (variable v), et N à $\mathbb{R}^p$ (variable u); et on attribue aux variables u et v de nouveaux poids : respectivement 1 et 0, comme au §4). La condition (5.16) se réécrit alors comme suit :

(5.17) Soit $h \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$, nulle pour u assez grand. On pose $h_{\lambda}(v, u) = h(\lambda v, \lambda^{-\frac{1}{2}}u)$. Alors $h \in \mathcal{K}^m$ si et seulement si l'ensemble des $\lambda^{-m} h_{\lambda}$, $\lambda \geq 1$, est borné dans $S^{-\infty}(\Sigma \times N)$.

Soit maintenant $P \in \mathcal{W}^{m,k}$, et $Q \in OPS^{m',k'}$ (resp. $OP\mathcal{K}^{m'}$), de symboles totaux $p(x, \xi)$, $q(x, \xi)$. On a $PQ \in OPS^{m+m', k+k'}$ (resp. $OP\mathcal{K}^{m+m' - \frac{1}{2}k}$), et le symbole total r de PQ admet encore le développement asymptotique :

$$r \sim \sum \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\alpha p \ D_x^\alpha q .$$

Utilisant le fait qu'on a $u^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^\beta \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^\gamma q \in S^{m'-|\alpha|, k+|\alpha|-|\beta|}$ (resp. $\mathcal{H}^{m'-|\alpha|+\frac{1}{2}|\beta|-\frac{1}{2}|\alpha|}$) on constate aisément qu'on a

$$(5.18) r - P_\Sigma q \in S^{m+m', k+k'+1} \quad (\text{resp. } \mathcal{H}^{m+m'-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}})$$

et P_Σ est bien sûr le seul opérateur différentiel de la forme (5.6) qui ait cette propriété .

(5.19) Remarque. - Les mêmes constructions que ci-dessus peuvent aussi être effectuées pour étudier la multiplication à droite par P : il existe un opérateur P'_Σ unique , de la forme (5.6) , tel que pour tout $Q \in OPS^{m', k'}$ (resp. $OP\mathcal{H}^{m'}$) on ait ,

$$(5.18)\text{bis } r - P'_\Sigma q \in S^{m+m', k+k'} \quad (\text{resp. } \mathcal{H}^{m+m'-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}})$$

q désignant le symbole total de Q , et r celui de QP .

Si $Q \in \mathcal{H}^{m', k'}$, la classe de $Q_0 P \bmod. OPS^{m+m', k+k'+1}$ est complètement déterminée par le développement de Taylor $T_{k+k'}(QP)$, et si $T_k(P) = a$, $T_{k'}(Q) = b$, on a d'après ce qui précède

$$T_{k+k'}(Q_0 P) = Q_\Sigma a = b_A a = a \epsilon_A b \quad (\text{d'après (2.7)})$$

On a donc de façon générale $P'_\Sigma = a \epsilon_A$. Il est alors clair que P'_Σ est inversible à gauche (resp. à droite) si et seulement si P_Σ est inversible à droite (resp. à gauche) , puisque c'est la multiplication à droite par $a = T_k(P)$ dans l'algèbre $\mathcal{L}_A$.

7. Constructions de paramétrixes.

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le théorème que nous avons en vue : soit $P \in \mathcal{H}^{m, k}$. Nous supposons P transversalement elliptique le long de Σ , ie. P est elliptique (de degré m) en dehors de Σ , et tout point de Σ possède un voisinage conique dans lequel on ait (avec $c > 0$ convenable)

$$(5.20) \quad |p_0(x, \xi)| \geq c |\xi|^m |u|^k .$$

De façon équivalente : P est elliptique de degré m hors de Σ , et $a = T_k(P)$ est elliptique de degré k en chaque point de Σ .

Cette définition se généralise aussitôt au cas des systèmes (ie. P est une matrice à coefficients dans $\mathcal{M}^{m,k}$) : nous dirons que P est transversalement elliptique à gauche (resp. à droite) s'il est elliptique à gauche (resp. à droite) en dehors de Σ , et si $a = T_k(P)$ est elliptique à gauche (resp. à droite) en chaque point de Σ .

(5.21) Théorème.- Soit P un système d'opérateurs pseudo-différentiels, de degré m , nul d'ordre k sur Σ , transversalement elliptique à gauche (resp. à droite) le long de Σ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) P possède une paramétrix à gauche (resp. à droite)
 $Q \in OPS^{-m, -k}$.

(ii) P_Σ est inversible à gauche (resp. à droite) en tout point de Σ .

(iii) $\sigma^k(P)$ est inversible à gauche (resp. à droite) en tout point de Σ .

(iv) Pour tout point $(x, \xi) \in \Sigma$, il existe $C > 0$ tel qu'on ait, pour $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:
 $\|\psi\|_{L^2} \leq C \|\sigma^k(P) \cdot \psi\|_{L^2}$
(resp. la même assertion pour l'adjoint $\sigma^k(P)^*$).

(v) Pour toute distribution f , $Pf \in H_{loc}^s$ implique $f \in H_{loc}^{s+m-\frac{1}{2}k}$
(resp. la même assertion pour P^*)

(pour la dernière assertion, nous supposons P propre, de sorte que Pf est bien définie, sans restriction sur le support de f).

Il est clair que l'assertion (i) implique toutes les autres (en particulier la dernière, parce que la paramétrix $Q \in OPS^{-m, -k}$, qu'on peut toujours choisir propre, est continue $H_{loc}^s \rightarrow H_{loc}^{s+m-\frac{1}{2}k}$). Par ailleurs, si $a = T_k(P)$, on a, avec les notations ci-dessus, $P_\Sigma = a_A$, $\sigma^k(P) = a_L$. Or a est elliptique à gauche (resp. à droite), et L est surjectif (car les différentielles $du_j = \sum_j B_{js} dx_s + C_{js} d\xi_s$ sont linéairement indépendantes) ; l'équivalence de (ii), (iii), (iv) résulte donc du théorème 3.1 et de la proposition 3.2. Reste à prouver que (ii) implique (i), et que (v) implique (iv).

Nous commençons par prouver l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) pour une paramétrix à droite (l'existence d'une paramétrix à gauche se traite

de façon complètement analogue grâce à la remarque (5.19)). Nous nous appuyons sur les résultats de [1], en particulier la proposition (6.1) et les résultats d'existence de symboles ayant un développement asymptotique donné ([1], §1). Remarquons pour commencer que le problème est local, car si P possède une paramétrix à droite, de classe $OPS^{-m, -k}$, au voisinage de chaque point de $T^*X \setminus 0$, elle en possède une globalement, comme on voit aussitôt par partition de l'unité.

Remarquons maintenant qu'il existe $Q_1 \in OPS^{-m, -k}$ tel que $P Q_1 = Id - R_1$, avec $R_1 \in OPS^{-\frac{1}{2}, -1}$ (par exemple : puisque p_0 est transversalement elliptique à droite, on a

$$(p_0 p_0^* + |\xi|^{2m-k} Id)^{-1} \in S^{-2m, -2k}$$

d'après [1], §1, et on peut prendre $Q_1 = q_1(x, D)$, avec $q_1(x, \xi) = p_0^* (p_0 p_0^* + |\xi|^{2m-k} Id)^{-1}$).

D'après [1], §1, il existe Q_2 tel qu'on ait, pour tout entier N , $Q_2 - \sum_{j < N} (R_1)^j \in OPS^{-\frac{1}{2}N, -N}$. On a alors $P Q_1 Q_2 = Id - R_2$, avec $R_2 \in OP\mathcal{K}^0 = \bigcap OPS^{-\frac{1}{2}N, -N}$.

Notons r_2 le symbole total de R_2 , tronqué de façon qu'il soit nul pour $|u| < 1$ comme plus haut. Comme $P_\Sigma = a_A$ est inversible à droite en tout point de Σ , le théorème (4.1) affirme que P_Σ possède un inverse à droite de la forme b_A , avec $b \in S^{-k}(\Sigma \times N)$, b_A est continu sur $S^{-\infty}(\Sigma \times N)$, et par raison d'homogénéité on a $b_A(h_\lambda) = \lambda^{\frac{1}{2}k-m} (b_A(h))_\lambda$ pour tout $\lambda > 0$, et tout $h \in S^{-\infty}(\Sigma \times N)$. En particulier il résulte de (5.17) qu'il existe un opérateur de Hermite $Q_3 \in OP\mathcal{K}^{\frac{1}{2}k-m}$ tel que le symbole total q_3 de Q_3 coïncide avec $b_A r_2$ pour $|u| < 1$; on a alors $P Q_3 - R_2 \in OP\mathcal{K}^{-\frac{1}{2}}$ (puisque $P_\Sigma Q_3 = r_2$ pour $|u| < 1$, et d'après (5.18)). On a donc

$$P (Q_1 Q_2 + Q_3) = Id + R_3$$

avec $R_3 \in OP\mathcal{K}^{-\frac{1}{2}}$. Finalement R_3 est de degré < 0 , et il existe un opérateur $Q_4 \sim \sum_0^\infty (R_3)^j$ (on a $Q_4 - Id \in OP\mathcal{K}^{-\frac{1}{2}}$). Si on pose $Q = (Q_1 Q_2 + Q_3) Q_4$, on a bien $Q \in OPS^{-m, -k}$, et $PQ \sim Id$.

Montrons enfin l'implication (v) $\Rightarrow$ (iv) (cf. aussi [13]). D'après L. Hörmander [12], l'assertion (v) a la conséquence suivante : pour tout compact $K \subset X$, il existe $C > 0$ tel que pour $x \in K$ et $|\xi| > 1$ on ait, pour toute $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$:

$$|\xi|^{-k} \|\psi\|_{L^2}^2 \leq C \left(\|p_{N,x,\xi} \psi\|_{L^2}^2 + |\xi|^{-N} \sum_{|\alpha+\beta| \leq N} \int |y^\alpha D_y^\beta \psi(y)|^2 dy \right)$$

où on a posé

$$p_{N,x,\xi} = \sum_{|\alpha+\beta| \leq N} \frac{1}{\alpha! \beta!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\beta p(x, \xi) |\xi|^{-m - \frac{1}{2}|\alpha| + \frac{1}{2}|\beta|} y^\alpha D_y^\beta$$

Appliquons ceci au point $(x, \lambda \xi)$, avec $(x, \xi) \in \Sigma$, $|\xi| = 1$, $\lambda \rightarrow \infty$, en choisissant $N = k+1$. On voit aussitôt que $\lambda^{\frac{1}{2}k} p_{N,x,\lambda \xi}$ tend vers $\sigma_{x,\xi}^k(P)$ pour $\lambda \rightarrow \infty$, et on obtient donc à la limite (puisque λ^{R-N} tend vers 0)

$$\|\psi\|_{L^2}^2 \leq C \|\sigma_{x,\xi}^k(P) \cdot \psi\|_{L^2}^2$$

ce qui implique (iv) d'après la proposition 3.2.

Comme on a dit, le théorème 3.1 facilite l'étude de l'inversibilité d'un opérateur différentiel de la forme a_L , mais celle-ci est loin d'être complète en général. Elle l'est néanmoins lorsque a est un polynôme elliptique du second degré (cf. [5], [13]), et le critère de [5] ou [13] se traduit en le résultat suivant (qui généralise le résultat de [5] parce que la restriction à Σ de la forme symplectique canonique de T^*X n'a plus besoin d'être de rang constant, et qui précise le résultat de [13] en affirmant l'existence d'une paramétrix d'un type particulier) :

Soit $P \in \mathcal{N}^{m,2}$ (ie. nul d'ordre 2 sur Σ), transversalement elliptique le long de Σ . On suppose que le symbole principal p_0 prend (localement) ses valeurs dans un angle (strictement convexe) $\Gamma \subset \mathbb{C}$. Notons Q la matrice hessienne de p_0 (identifiée à une forme bilinéaire symétrique), et A la matrice fondamentale de p_0 (définie par $Q(u,v) = \sigma(u, Av)$, où σ est la forme symplectique canonique de T^*X) : en tout point de Σ , les valeurs propres de A sont de la forme $\pm 2i\lambda_k$ ($k=1, \dots, n$), avec $\lambda_k \in \Gamma$. Soit d'autre part $V = \ker A^{2n}$ le sous-espace spectral de A relatif à la valeur propre 0, et $I_2(P) = p_1 - (1/2i) \sum_1^n \partial^2 p_0 / \partial x_j \partial \xi_j$ le symbole sous principal (p_0, p_1 sont les deux premiers termes dans le développement asymptotique $p \sim p_0 + p_1 + \dots$ du symbole total de P). Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) P possède une paramétrix bilatère $Q \in OPS^{-m, -2}$
(ii) Pour tout $(x, \xi) \in \Sigma$, tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$,
et tout vecteur complexe $v \in V$, on a

$$\sum_1^n (2\alpha_j + 1) \lambda_j + Q(v, \bar{v}) + I_2(P) \neq 0$$

- (iii) $Pf \in H_{loc}^S$ implique $f \in H_{loc}^{S+m-1}$

- [1] Boutet de Monvel L.: Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudodifferential operators. Comm. Pure Appl. Math. 27, 585-639 (1974).
- [2] Boutet de Monvel L., et Trèves F.: On a class of pseudodifferential operators with double characteristics. Inventiones Math. 24, 1-34 (1974).
- [3] Boutet de Monvel L., et Trèves F.: On a class of systems of pseudodifferential equations with double characteristics. Comm. Pure Appl. Math. 27, 59-89 (1974).
- [4] Calderon A.P., et Vaillancourt R.: On the boundedness of pseudodifferential operators. J. Math. Soc. Japan 23, 374-378 (1971).
- [5] Grigis A.: Hypoellipticité et paramétrixes pour des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles. Astérisque, ce vol.
- [6] Grusin V.V.: On a class of hypoelliptic operators. Mat. Sbornik 83, 456-473 (1970), et Math. USSR Sbornik 12, 458-476 (1970).
- [7] Grusin V.V.: Pseudodifferential operators in R^n with bounded symbols. Funkt. anal. i evo pril. 43, 37-50 (1970), et Funct. Anal. Appl. 4, 202-212 (1970).
- [8] Guillemin V.: Symplectic spinors and partial differential equations C.R. Colloque sur la géométrie symplectique, Aix en Provence, 1974.
- [9] Guillemin V.: A symbol calculus for Hermite operators, à paraître.
- [10] Helffer B.: Sur une classe d'opérateurs hypoelliptiques à caractéristiques multiples. A paraître dans J. Math. pures appl.
- [11] Helffer B.: Invariants associés à une classe d'opérateurs pseudodifférentiels. A paraître dans Ann. Inst. Fourier.
- [12] Hörmander L.: Pseudodifferential operators and hypoelliptic equations. A.M.S. Proc. Symp. Pure Math. 10, 138-183 (1967).
- [13] Hörmander L.: A Class of Pseudodifferential Operators with Double Characteristics. Math. Ann. 217, 165-188 (1975).
- [14] Leray J.: Solutions asymptotiques et groupe symplectique. Fourier Integral Operators. Lecture notes in Math. 459, Springer Verlag.
- [15] Menikoff A.: Subelliptic estimates for pseudo-differential operators with double characteristics. Preprint.
- [16] Segal I.E.: Transforms for operators and symplectic automorphisms over a locally compact abelian group. Math. Scand. 13, 31-43 (1963)
- [17] Sjöstrand J.: Parametrixes for pseudodifferential operators with multiple characteristics. Ark. för Mat. 12, 85-130 (1974).
- [18] Weil A.: Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. Acta Math. 111, 143-211 (1964).

**SUR L'HYPONELLIPTICITE DES OPERATEURS
PSEUDODIFFERENTIELS A CARACTERISTIQUES MULTIPLES**

B. HELFFER

INTRODUCTION .

L'étude de l'hypoellipticité avec perte d'une dérivée pour des opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques doubles a connu un grand développement ces dernières années. Commencée par J. Sjöstrand [10], L. Boutet de Monvel et F. Trèves [2] qui considéraient le cas où l'ensemble caractéristique était un cône C^∞ symplectique Σ , elle fut poursuivie par L. Boutet de Monvel [3] qui construisit une algèbre d'opérateurs pseudo-différentiels contenant les parametrixes des opérateurs considérés et permettant d'étudier des situations plus générales [6], [4]. Dans [9] enfin, L. Hörmander caractérise l'hypoellipticité avec perte d'une dérivée pour des opérateurs à caractéristiques doubles dont le symbole principal p_m vérifie la condition suivante : microlocalement, il existe un angle Γ dans $\mathbb{C}$ d'ouverture inférieure à π tel que $p_m(x, \xi) \in \Gamma$. Il est montré, dans ce cas général, que, si la condition d'hypoellipticité avec perte d'une dérivée n'est pas satisfaite, on ne peut espérer d'hypoellipticité avec une perte inférieure à $9/8$. Dans le cas où Σ est symplectique, il est montré dans [10] qu'on ne peut espérer d'hypoellipticité avec une perte inférieure à $3/2$ dérivées. Nous présentons ici une étude de l'hypoellipticité avec perte de $3/2$ dérivées, inspirée au départ par l'article de J. Sjöstrand et les discussions que nous avons eu avec lui. Nous tenons à le remercier pour les conseils qu'il nous a donnés. Notre présentation est cependant différente dans la forme, car il nous a semblé bon d'utiliser et de développer la théorie des opérateurs d'hermite introduite dans [3] et qui donne lieu à un calcul symbolique plus agréable. Nous introduisons en particulier la notion d'opérateurs d'Hermite pair ou impair et différentes notions de "régularité" qui joueront un rôle important dans les démonstrations.

Cet article est relativement self contained mais nous conseillons au lecteur d'avoir sous la main [3] et [10] en particulier pour l'étude détaillée des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux d'ordre 2 que nous n'avons pu expliquer en détail ici. Les principaux résultats "explicites" sont les théorèmes 1.2, 4.2.1 et 4.3.14 mais d'autres résultats implicites sont donnés dans les propositions 3.2.2 et 3.3.1.

Le plan de ce travail est le suivant :

§ 1 : Notations et présentation des principaux résultats

§ 2 : Rappels et compléments sur les classes de Boutet de Monvel

- 2.1 Les classes $S^{m,k}(\Omega, \Sigma)$
- 2.2 Les opérateurs d'Hermite
- 2.3 Les opérateurs d'Hermite adjoints
- 2.4 La classe $S^{m,k}(\Omega, \Sigma)$ dans le cas où Σ est symplectique
- 2.5 Composition de $OPS^{m,k}(\Omega, \Sigma)$ et des opérateurs d'Hermite
- 2.6 Premier critère d'hypoellipticité

§ 3 : Rappels et compléments sur la méthode de J. Sjöstrand

- 3.1 Etude d'un système. Second critère d'hypoellipticité
- 3.2 Parité et "régularité".

§ 4 : Démonstration des théorèmes. La construction explicite des systèmes.

- 4.1 Le cas général : La construction de J. Sjöstrand
- 4.2 Démonstration du théorème 1.2. L'hypothèse H1
- 4.3 Généralisations et conjecture.

§ 1 : ENONCE DU THEOREME. NOTATIONS ET PRESENTATION DES PRINCIPAUX RESULTATS.

Soit Ω une variété C^∞ paracompacte de dimension n et soit $T^*\Omega \setminus 0$ le fibré cotangent privé de la section nulle.

On considère des opérateurs pseudodifférentiels P sur Ω qui, dans tout système de coordonnées locales, ont un symbole de la forme :

$$(1.1) \quad p(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_{m-j}(x, \xi)$$

où les $p_{m-j}(x, \xi)$ sont des symboles positivement homogènes de degré $m-j$.

On dit alors que P est un o.p.d régulier d'ordre m : $P \in L_{\text{reg}}^m(\Omega)$.

Un opérateur d'ordre m est dit hypoelliptique avec perte de k dérivées ($k \in \mathbb{R}$) si :

$$\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega), \forall \omega \subset \Omega, Pu \in H_{\text{loc}}^s(\omega) \Rightarrow u \in H_{\text{loc}}^{s+m-k}(\omega)$$

Cette définition locale peut être microlocalisée dans $T^*\Omega \setminus 0$.

On considère ici le cas, où le symbole principal p_m de l'opérateur P considéré, s'annule à l'ordre 2 exactement (cf [10]) sur une sous variété Σ conique, fermée, symplectique de codimension 2ν dans $T^*\Omega \setminus 0$.

On peut définir en tout point ρ de Σ les invariants suivants (cf [10])

(1.2) le symbole sous-principal :

$$p'_{m-1}(\rho) = \left(p_{m-1} - \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 p_m}{\partial x_j \partial \xi_j} \right) (\rho)$$

(1.3) L'indice d'enroulement de p_m (winding number) lorsque Σ est de codimension 2.

On fera dans la suite l'hypothèse que cet indice d'enroulement est nul.

(1.4) La matrice fondamentale A_ρ .

On sait que A_ρ opère sur la fibre au dessus de ρ du complexifié du fibré normal à Σ et que ses valeurs propres sont de la forme $\pm i\lambda_j$ ($j=1, \dots, \nu$) où λ_j appartient à Γ_ρ [Γ_ρ est l'ensemble des valeurs du Hessien de p_m]. L'hypothèse faite en (1.3) assure que Γ_ρ est un angle convexe d'ouverture inférieure à π .

Σ étant symplectique, on peut définir un crochet de Poisson noté $\{, \}_\Sigma$ sur les fonctions C^∞ sur Σ .

Dans le cadre ci-dessus, il est démontré le théorème suivant ([10] [2] [3].)

Théorème 1.1

Soit P vérifiant les hypothèses ci-dessus, on suppose que :

$$(1.5) \quad \forall \rho \in \Sigma, \quad \forall \alpha_j \in \mathbb{N}$$

$$p'_{m-1}(\rho) + \sum_{j=1}^{\nu} (2\alpha_j + 1) \lambda_j(\rho) \neq 0$$

Alors P admet une parametrix qui est continue de $H_s^{loc}(\Omega)$ dans $H_{s+m-1}^{loc}(\Omega)$ pour tout s réel.

Lorsque (1.5) n'est pas vérifiée, on sait (cf [10]) que l'on ne peut espérer d'hypoellipticité avec perte de r dérivées ($r < 3/2$). Le théorème que nous présentons ici étudie l'hypoellipticité avec perte de $3/2$ dérivées.

Théorème 1.2

On suppose $\nu=1$; on garde les hypothèses précédentes mais on suppose qu'en un point ρ_0 de Σ , il existe j dans $\mathbb{N}$ tel que :

$$(1.6) \quad p'_{m-1}(\rho_0) + (2j+1) \lambda(\rho_0) = 0$$

Soit $\tilde{p}_{m-1}(\rho)$ le symbole défini sur Σ par :

$$\tilde{p}_{m-1}(\rho) = p'_{m-1}(\rho) + (2j+1) \lambda(\rho)$$

Alors P est strictement hypoelliptique avec perte de $3/2$ dérivées dans un voisinage conique du point ρ_0 dans $T^*\Omega \setminus 0$ si et seulement si :

$$(1.7) \quad \frac{1}{i} \{ \tilde{p}_{m-1}, \overline{\tilde{p}_{m-1}} \}_{\Sigma} < 0 \quad \text{au point } \rho_0$$

Remarque 1.3

La démonstration du théorème 1.2, permet en fait, en utilisant les résultats de [5], d'obtenir une étude complète de l'hypoellipticité avec perte de r dérivées : $3/2 \leq r < 2$.

Remarque 1.4

Dans le cas où la codimension de Σ est plus grande que 2, on obtient des résultats analogues en imposant des conditions supplémentaires.

Ceci sera détaillé au § 4 [Théorèmes 4.2.1 et 4.3.14].

§ 2 : RAPPELS ET COMPLEMENTS SUR LES CLASSES DE BOUTET DE MONVEL

2.1 Les classes $S^{m,k}_{(\Omega,\Sigma)}$ (cf [3])

On considère un cône C^∞ (au sens de [3], 2.1.1) U et un sous-cône Σ de U . On définit une fonction $r(>0)$ C^∞ homogène de degré 1 sur U et on pose : $U = U' \times \mathbb{R}$. U' est la base de U . On note : $f \lesssim g$ si dans tout cône inclus dans U à base compacte dans U' , il existe une constante C telle qu'on a $f \leq Cg$ pour r assez grand. On définit une fonction d_Σ dont le carré est la somme d'une fonction (>0) homogène de degré -1 et d'une fonction positive (>0) hors de Σ , nulle à l'ordre 2 exactement sur Σ , et homogène de degré 0.

Définition 2.1.1

On désigne par $S^{m,k}(U,\Sigma)$ l'espace de toutes les fonctions C^∞ sur U telles que, quels que soient les champs de vecteurs $X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_q$ à coefficients C^∞ , homogènes de degré 0, avec les X_j tangents à Σ , on ait :

$$|X_1 \dots X_p \cdot Y_1 \dots Y_q a| \lesssim r^m d_\Sigma^{k-q}$$

Si $U = T^*\Omega \setminus 0$, on notera $S^{m,k}(\Omega, \Sigma)$ et on désignera par $OPS^{m,k}(\Omega, \Sigma)$ la classe des opérateurs pseudodifférentiels naturellement associée aux symboles de $S^{m,k}(\Omega, \Sigma)$.

Définition 2.1.2

Soit $S_{\rho,\delta}^m(\Omega)$ la classe des symboles pseudodifférentiels sur Ω telle qu'elle a été introduite dans [8] [$0 \leq \delta \leq \rho \leq 1, \delta < 1$].

Un symbole de $S_{1,0}^m(\Omega)$ ($S^m(\Omega)$ en abrégé) est dit régulier (resp. semi-régulier) s'il admet un développement asymptotique :

$$p \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_{m-j}(x, \xi)$$

resp.

$$p \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_{m-j/2}(x, \xi)$$

où les $p_{m-j/2}(x, \xi)$ sont homogènes de degré $m-j/2$.

Définition 2.1.3

On dit qu'un opérateur pseudodifférentiel semi-régulier P de degré m s'annule à l'ordre k sur Σ si $p_{m-j/2}(x, \xi)$ s'annule à l'ordre $k-j$ sur Σ pour $j \leq k$.

Il est facile de voir que de tels opérateurs sont dans $OPS^{m,k}(\Omega, \Sigma)$.

On utilisera la propriété suivante :

Si k est négatif, un opérateur de $OPS^{m,k}(\Omega, \Sigma)$ opère de $H_{\text{comp}}^s(\Omega)$ dans $H_{\text{loc}}^{s-m+1/2, k}(\Omega)$.

On introduit maintenant les classes d'opérateurs suivantes :

$$2.1.4 \quad OP\mathcal{K}^m(\Omega, \Sigma) = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} OPS^{m-j, -2j}$$

$$2.1.5 \quad OPS^{m, \infty}(\Omega, \Sigma) = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} OPS^{m, j}$$

On utilisera constamment les propriétés suivantes :

Si $A \in OP\mathcal{K}^m(\Omega, \Sigma)$, $B \in OPS^{m', k'}$, $A^* \in OP\mathcal{K}^m(X, \Sigma)$
 $A \circ B, B \circ A \in OP\mathcal{K}^{m+m'-1/2, k'}(\Omega, \Sigma)$.

En particulier, si A est dans $OP\mathcal{K}^m(\Omega, \Sigma)$ et B est dans $OPS^{m', \infty}$, AB et BA sont régularisants (i.e à noyau C^∞).

On utilisera également les résultats suivants sur les développements asymptotiques.

Proposition 2.1.6

i) Soit $a_j \in S^{m-j, k}$ ($j=0, \dots, \infty$), alors il existe a dans $S^{m, k}$ tel que : $\forall N, a - \sum_{j < N} a_j \in S^{m-N, k}$.

a est défini modulo un élément de $S^{-\infty}(\Omega)$.

ii) Soit $a_j \in S^{m, k+j}$ ($j=0, \dots, \infty$), alors il existe a dans $S^{m, k}$ tel que : $\forall N, a - \sum_{j < N} a_j \in S^{m, k+N}$, a est défini modulo un élément de $S^{m, \infty}(\Omega, \Sigma)$.

iii) Soit $a_j \in S^{m-j/2, k-j}$ ($j=0, \dots, \infty$), alors il existe a dans $S^{m, k}$ tel que : $\forall N, a - \sum_{j < N} a_j \in S^{m-N/2, k-N}$.

a est défini modulo un élément de $\mathcal{K}^{m-k/2}$.

§ 2.2 : LES OPERATEURS D'HERMITE : OPH^m (cf[3])

On suppose maintenant que Σ est symplectique de codimension 2ν . Alors par un choix convenable de coordonnées canoniques, on peut supposer que la surface Σ est donnée dans $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ par

$$t = 0$$

$$\tau = 0$$

où $T^*\mathbb{R}^n \ni (x, \xi) = (y, t, \eta, \tau)$

$$t = (t_1, \dots, t_\nu) \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_\nu)$$

On désigne par Y la surface définie dans $\mathbb{R}^n$ par $t=0$, $T^*Y \setminus 0$ peut alors être identifié à Σ .

On a alors la définition suivante :

Définition 2.2.1

On appelle opérateur d'hermite de degré m , tout opérateur $H = H' + R$ de $C_0^\infty(Y)$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ où R est un opérateur à noyau C^∞ et H' a une représentation intégrale :

$$H' f(x) = (2\pi)^{n-\nu} \int e^{iy \cdot \eta} \cdot h(y, t, \eta) \cdot \hat{f}(\eta) d\eta$$

avec $h \in \mathcal{K}^{m+\nu/4}(U, \Sigma_1)$

où $U = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^{n-\nu} \setminus \{0\})$, $(x, \eta) = (y, t, \eta)$ et Σ_1 est le cône $t = 0$.

On écrira alors que H est dans OPH^m .

Exemple 2.2.2 *

Soit $\tilde{h}(y, \nu, t)$ une fonction dans $C_{y, \nu}^{\infty}(\mathbb{R}^{n-\nu} \times S^{n-\nu-1}; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{\nu}))$ alors $h(y, t, \eta) = (\eta)^{m+\nu/4} \cdot \tilde{h}(y, \frac{\eta}{|\eta|}, t|\eta|^{1/2})$ définit le symbole d'un opérateur dans OPH^m .

Soit H un opérateur d'hermite défini par une fonction h dans $\mathcal{K}^{m+\nu/4}(U, \Sigma_1)$, le symbole $\sigma^0(H)$ est la classe de h modulo $\mathcal{K}^{m+\nu/4-1/2}(U, \Sigma_1)$ et le symbole complet de H , $\sigma(H)$, est la classe de h modulo $S^{-\infty}(U)$.

On dira que H est semi-régulier d'ordre m si $h(y, t, \eta)$ admet un développement asymptotique du type suivant :

$$2.2.3 \quad h(y, t, \eta) \sim \sum_{j=0}^{\infty} h_{m-j/2}(y, t, \eta)$$

où $h_p(y, t, \eta)$ est dans $\mathcal{K}^{p+\nu/4}(U, \Sigma_1)$ et a la propriété d'homogénéité suivante :

$$2.2.4 \quad h_p(y, \lambda^{-1/2} t, \lambda \eta) = \lambda^p h_p(y, t, \eta), \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

On définit de manière analogue un opérateur d'hermite régulier d'ordre m .

On dira qu'un opérateur d'hermite est pair (resp. impair) si son symbole complet est pair modulo $S^{-\infty}$ (resp. impair).

Tout opérateur d'Hermite admet une décomposition en partie paire et impaire.

On utilisera les propriétés suivantes des opérateurs d'Hermite :

Soit H un opérateur d'hermite de degré m , Q un opérateur pseudo-différentiel de degré m' sur Y , alors $H' = H \circ Q$ est un opérateur d'hermite de degré $m+m'$, et on a $\sigma^0(H') = \sigma^0(H) \circ \sigma^0(Q)$.

* On désigne par S^{p-1} la sphère unité dans $\mathbb{R}^p$.

Cette opération conserve la parité et la régularité, i.e.

Si H est pair (resp. impair), HQ est pair (resp. impair). Si H est semi-régulier (resp. régulier), Q est semi-régulier (resp. régulier), HQ est semi-régulier (resp. régulier).

Enfin on désignera par $H_{y,\eta}$ l'opérateur de $\mathcal{A}$ dans $L^2(\mathbb{R}^v)$ (ou $\mathcal{S}(\mathbb{R}^v)$) défini par :

$$H_{y,\eta} \cdot z = h(y, \eta, t) \cdot z, \quad z \in \mathcal{A}.$$

§2.3 : LES OPERATEURS D'HERMITE ADJOINTS : OPH^{m*}

On définit OPH^{m*} , comme la classe des opérateurs H' de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $C^\infty(Y)$ de la forme :

$$2.3.1 \quad H' = H^* + R$$

où H^* est l'adjoint d'un opérateur d'Hermite H de OPH^m proprement supporté et R est un opérateur à noyau C^∞ .

Une fonction d'hermite h dans $\mathcal{H}^{m+v/4}$ définit un opérateur d'hermite adjoint par la formule :

$$2.3.2 \quad (H^* \cdot f)(y) = (2\pi)^{n-v} \int_t \int_\eta e^{iy \cdot \eta} \bar{h}(y, t, \eta) \cdot \hat{f}(t, \eta) dt d\eta$$

On appellera symbole de H' , le symbole de H ; on étend ainsi toutes les notions de symbole principal, régularité, parité.

Soient H et H' deux opérateurs d'hermite de degré m , m' proprement supportés, alors $H^* \circ H'$ est dans $OPS_{1,0}^m(Y)$, $H \circ H'^*$ est dans $OP\mathcal{H}^{m+m'}(\Omega, \Sigma)$, si H et H' sont semi-réguliers (resp. régulier) $H^* \circ H'$ est semi-régulier (resp. régulier). On a :

$$2.3.3 \quad \sigma^0(H^* \circ H') = \overline{\int \sigma^0(H)} \cdot \sigma^0(H') dt$$

Si H et H' sont de parités différentes, $H^* \circ H'$ est régularisant.

Enfin, si H' est dans OPH^{m*} de symbole h , on désignera par $H'_{y,\eta}$ l'opérateur de L^2 dans $\mathcal{U}$ défini pour $f(t)$ dans L^2 par :

$$H'_{y,\eta} \cdot f = \int \bar{h}(y, t, \eta) f(t) dt.$$

§ 2.4 : LA CLASSE $S^{m,k}(\Omega, \Sigma)$ DANS LE CAS SYMPLECTIQUE

Lorsque Σ est défini dans $T^* \mathbb{R}^n \setminus 0$ par $t=\tau=0$, les symboles de $S^{m,k}(\Omega, \Sigma)$ vérifient les relations suivantes (traduction en coordonnées locales de la définition 2.1.1) (au voisinage de $t=\tau=0$).

$$\begin{aligned} 2.4.1 \quad & \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} \cdot \frac{\partial^\beta}{\partial \eta^\beta} \cdot \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \cdot \frac{\partial^\delta}{\partial \tau^\delta} a(y, \eta, t, \tau) \right| \lesssim \\ & \lesssim (1+|\eta|)^{m-|\beta|-|\delta|} (|t| + \frac{|\tau|}{|\eta|} + \frac{1}{|\eta|^{1/2}})^{k-|\gamma|-|\delta|} \end{aligned}$$

On désigne par $S_{\text{glob}}^k(\mathbb{R}^{2\nu})$ l'espace des symboles a sur $\mathbb{R}^{2\nu}$ vérifiant :

$$2.4.2 \quad \left| \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \cdot \frac{\partial^\delta}{\partial \tau^\delta} a(t, \tau) \right| \lesssim (1+|t|+|\tau|)^{k-|\gamma|-|\delta|}$$

Un symbole de $S_{\text{glob}}^k(\mathbb{R}^{2\nu})$ définit un opérateur sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$ qu'on notera $a(t, D_t)$. Un opérateur régularisant (i.e dans $OPS_{\text{glob}}^{-\infty}(\mathbb{R}^\nu)$) est un opérateur qui envoie $\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}$.

On désigne par $S_{\text{glob}}^{m,k}(\Sigma, \mathbb{R}^{2\nu})$ la classe des fonctions C^∞ définie par les inégalités 2.4.1 mais où t et τ parcourt $\mathbb{R}^{2\nu}$. Pour (y, η) fixés, ce symbole définit un opérateur dans $OP S_{\text{glob}}^k(\mathbb{R}^\nu)$, on notera alors la classe $OPS_{\text{glob}}^{m,k}(\Sigma, \mathbb{R}^\nu)$ pour mentionner la dépendance en (y, η) .

Soit A un opérateur pseudo-différentiel semi-régulier s'annulant à l'ordre k sur Σ .

Son symbole admet un développement asymptotique :

$$2.4.3 \quad a(y, \eta, t, \tau) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-j/2}(y, \eta, t, \tau)$$

Il est introduit dans [3] l'opérateur $A_{\Sigma}^{m-k/2}$ défini par son symbole :

$$2.4.4 \quad \begin{aligned} a_{\Sigma}^{m-k/2}(y, \eta, t, \tau) &= \\ &= \sum_{j=0}^k \sum_{|\alpha|+|\beta|=k-j} a_{m-j/2}^{(\alpha)}(\beta)(y, \eta, 0, 0) t^{\beta} \cdot \tau^{\alpha} \end{aligned}$$

$A_{\Sigma}^{m-k/2}$ possède la propriété suivante :

$$2.4.5 \quad A - A_{\Sigma}^{m-k/2} \in OPS^{m, k+1}(\Omega, \Sigma)$$

$a_{\Sigma}^{m-k/2}(y, \eta, t, \tau)$ est dans $S_{glob}^{m, k}(\Sigma, \mathbb{R}^{2\nu})$ et possède la propriété

d'homogénéité suivante :

$$2.4.6 \quad a_{\Sigma}^{m-k/2}(y, \lambda \eta, \lambda^{-1/2} t, \lambda^{1/2} \tau) = \lambda^{m-k/2} a_{\Sigma}^{m-k/2}(y, \eta, t, \tau)$$

Un élément de $S_{glob}^{m, k}(\Sigma, \mathbb{R}^{2\nu})$ possédant cette propriété est dit homogène.

On notera $A_{\Sigma(y, \eta)}^{m-k/2}$ l'opérateur associé dans $OPS_{glob}^{m, k}(\Sigma, \mathbb{R}^{\nu})$ (mais on omettra (y, η) lorsqu'aucune confusion ne sera possible).

On va écrire A comme une somme asymptotique de termes homogènes dans $OPS^{m, k+j}(\Omega, \Sigma)$, somme qui sera définie modulo $OPS^{m, \infty}(\Omega, \Sigma)$ (cf Prop 2.1.6).

On utilise un développement de Taylor de 2.4.3 en $t=0, \tau=0$

$$a(y, \eta, t, \tau) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{\alpha! \beta!} a_{m-j/2}^{(\alpha)}(\beta)(y, \eta, 0, 0) t^{\beta} \cdot \tau^{\alpha}$$

qu'on réordonne sous la forme :

$$a(y, \eta, t, \tau) \sim \sum_{i=0}^{\infty} a_{\Sigma}^{m-k/2-i/2}(y, \eta, t, \tau)$$

$$\text{avec } a_{\Sigma}^{m-k/2-i/2}(y, \eta, t, \tau) = \sum_{j=0}^{k+i} \sum_{|\alpha|+|\beta|=k+i-j} \frac{1}{\alpha! \beta!} a_{\Sigma}^{m-j/2}(\beta)^{(\alpha)}(y, \eta, 0, 0) t^{\beta} \tau^{\alpha}$$

Il est facile de voir que $a_{\Sigma}^{m-k/2-i/2}(y, \eta, t, \tau)$ est homogène dans

$$S_{\text{glob}}^{m, k+i}(\Sigma, \mathbb{R}^{2\nu}).$$

On notera

$$A \sim \sum_{i=0}^{\infty} A_{\Sigma}^{m-k/2-i/2} \quad \text{dans } OPS^{m, k}(\Omega, \Sigma)$$

modulo $OPS^{m, \infty}$

L'image de A dans $\sum_{i=0}^{\infty} OPS_{\text{glob}}^{m, k+i}(\Sigma, \mathbb{R}^{\nu})$ est la somme formelle :

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{\Sigma}^{m-k/2-i/2}(y, \eta, t, D_t) = \sum_{i=0}^{\infty} A_{\Sigma, (y, \eta)}^{m-k/2-i/2}$$

Réciproquement, considérant une famille $A^i (i=0, \dots, \infty)$ dans $OPS_{\text{glob}}^{m, k+i}(\Sigma, \mathbb{R}^{\nu})$,

on peut associer à ΣA^i un opérateur A dans $OPS^{m, k}(\Omega, \Sigma)$ unique modulo $OPS^{m, \infty}(\Omega, \Sigma)$. On dira que A est d'ordre $m-k/2$.

Définition 2.4.7*

Un opérateur A dans $OPS^{m, k}(\Omega, \Sigma)$ sera dit semi-homogène s'il admet un développement :

$$A \sim \sum_{i=0}^{\infty} A_i \quad (\text{mod } OPS^{m, \infty})$$

où les A_i sont les images inverses dans $OPS^{m,k+i}(\Omega, \Sigma)$ d'éléments de $OPS_{glob}^{m,k+i}(\Sigma, \mathbb{R}^v)$ à symboles homogènes (cf. 2.4.6).

Par exemple un opérateur semi-régulier est semi-homogène.

Définition 2.4.8*

Un opérateur A dans $OPS^{m,k}(\Omega, \Sigma)$ sera dit homogène s'il admet un développement :

$$A \sim \sum_{i=0}^{\infty} A_i \quad (\text{mod. } OPS^{m,\infty})$$

où les A_i sont les images inverses dans $OPS^{m,k+2i}(\Omega, \Sigma)$ d'éléments de $OPS_{glob}^{m,k+2i}(\Sigma, \mathbb{R}^v)$ à symboles homogènes (cf. 2.4.6)

Σ Un opérateur régulier n'est pas homogène mais seulement semi-homogène.

Nous pouvons encore définir une notion de parité : On dira que A dans $OPS^{m,k}(\Omega, \Sigma)$ conserve la parité (resp. inverse la parité) si tous les $A_{m-k/2-i/2}$ respectent la parité (resp. l'inversent) $\Sigma(y, \eta)$ en tant qu'opérateurs sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^v)$.

* Un élément de $OPS_{glob}^{m,k+2i}(\Sigma, \mathbb{R}^v)$ à symbole homogène (2.4.6) est homogène au sens de la définition 2.4.8 de sorte que la coexistence de ces définitions n'est pas gênante.

On a la propriété suivante :

Si A est régulier, les $A_{\Sigma}^{m-k/2-i/2}$ respectent la parité si $\frac{k+i}{2}$ est pair, l'inversent si $\frac{k+i}{2}$ est impair.

On peut alors écrire :

$$A \sim A_{\text{pair}} + A_{\text{impair}} \quad (\text{mod. OPS}^{m,\infty}(\Omega, \Sigma))$$

où

$$\left. \begin{aligned} A_{\text{pair}} &\sim \sum_{i=0}^{\infty} A_{\Sigma}^{m-k/2-i} \\ A_{\text{impair}} &\sim \sum_{i=0}^{\infty} A_{\Sigma}^{m-k/2-1/2-i} \end{aligned} \right\} \text{ si } k \text{ est pair}$$

A pair et A impair sont homogènes

$$\left. \begin{aligned} A_{\text{pair}} &\sim \sum_{i=0}^{\infty} A_{\Sigma}^{m-k/2-1/2-i} \\ A_{\text{impair}} &\sim \sum_{i=0}^{\infty} A_{\Sigma}^{m-k/2-i} \end{aligned} \right\} \text{ si } k \text{ est impair.}$$

Soient A (resp. B) un opérateur dans $\text{OPS}^{m,k}(\Omega, \Sigma)$ (resp. $\text{OPS}^{m',k'}(\Omega, \Sigma)$), alors $A \circ B$ est dans $\text{OPS}^{m+m', k+k'}$.

Si A et B sont semi-homogènes, $A \circ B$ est semi-homogène. Soient A $_{\Sigma(y, \eta)}$

(resp. B $_{\Sigma(y, \eta)}$) l'image de A (resp. B) dans $\Sigma \text{OPS}_{\text{glob}}^{m,k}(\Sigma, \mathbb{R}^{\nu})$

(resp. $\Sigma \text{OPS}_{\text{glob}}^{m',k'}(\Sigma, \mathbb{R}^{\nu})$).

On désigne la loi de composition des opérateurs dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{\nu})$ par #.

On a alors la formule suivante :

$$2.4.9 \quad \sigma(A \circ B) \sim \sum_{\alpha} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} \sigma \left(\frac{\partial^{\alpha}}{\partial \eta^{\alpha}} A_{\Sigma y, \eta} \# \frac{\partial^{\alpha}}{\partial y^{\alpha}} B_{\Sigma y, \eta} \right)$$

modulo $S^{m,\infty}$.

$(\frac{\partial^\alpha}{\partial \eta^\alpha} A_{\Sigma(y, \eta)})$ est l'opérateur dans $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ dont le symbole est $\frac{\partial^\alpha}{\partial \eta^\alpha} a(y, \eta, t, \tau)$

qu'on peut noter encore $\frac{\partial^\alpha}{\partial \eta^\alpha} a(y, \eta, t, D_t)$.

§ 2.5 : COMPOSITION DE $OPS^{m, k}(\Omega, \Sigma)$ ET DES OPERATEURS D'HERMITE

On considère des éléments de $OPS^{m, k}(\Omega, \Sigma)$ qui sont semi-homogènes.

On a vu que :

$$A - \sum_{i=0}^{N-1} A^{m-k/2-i/2} \in OPS^{m, k+N}$$

Si A est dans $OPH^{m'}$, AH est dans $OPH^{m+m'-k/2}$ et

$$\sigma^0(AH) = A^{m-k/2}_{\Sigma(y, \eta)} \circ \sigma^0(H)$$

$$\sigma^0(H^* A) \stackrel{\text{déf}}{=} \sigma^0(A^* H) = (A^{m-k/2}_{\Sigma(y, \eta)})^* \circ \sigma^0(H)$$

Le symbole complet h' de $H'=AH$ s'obtient par le développement asymptotique suivant :

$$2.5.1 \quad h' \sim \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{i^{-|\alpha|}}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial \eta^\alpha} A^{m-k/2-i/2}_{\Sigma(y, \eta)} \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} h(y, \eta, t) \right)$$

où h désigne le symbole complet de H .

Si A est semi-homogène, H est semi-régulier, AH est semi-régulier et h' admet le développement suivant :

$$h' \sim \sum_{j=0}^{\infty} h'_{m+m'-k/2-j/2}(y, t, \eta)$$

où

$$h'_{m+m'-k/2-j/2} = \sum_{\substack{\alpha, i, p \\ \frac{i+p}{2} + |\alpha| = j/2}} \frac{i-|\alpha|}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial \eta^\alpha} A^{m-k/2-i/2}_{\Sigma(y, \eta)} \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} h_{m'-p/2}(y, t, \eta) \right)$$

Remarquons que si $A-B$ est dans $OPS^{m, \infty}$, $(A-B)H$ est régularisant, ce qui justifie le formalisme ci-dessus.

On a des formules analogues pour $H^* A$ (passer à l'adjoint).

Faisons enfin quelques remarques évidentes sur la parité :

Si H est pair et A conserve la parité, AH est pair.

Si H est impair et A conserve la parité, AH est impair.

§ 2.6 : UN PREMIER CRITERE D'HYPOELLIPTICITE ([10] [3])

Proposition 2.6.1

Soit A un opérateur pseudo-différentiel semi-régulier d'ordre m s'annulant à l'ordre k sur Σ symplectique. On suppose que le symbole principal de A s'annule à l'ordre k exactement sur Σ , alors A est hypoelliptique avec perte de $k/2$ dérivées si et seulement si pour tout (y, η) dans Σ , $A^{m-k/2}_{\Sigma(y, \eta)}$ a son noyau dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ réduit à zéro.

Ce théorème est bien connu [10], mais nous esquissons une démonstration dans le cadre introduit ci-dessus.

On sait [3] [4] que si A s'annule exactement à l'ordre k sur Σ , il existe Q_1 dans $OPS^{-m, -k}$ tel que :

$$Q_1 \cdot A \equiv I + R_1 \text{ où } R_1 \in OPS^{-1/2, -1}(\Omega, \Sigma)$$

utilisant la série $\Sigma(-1)^j R_1^j$ (cf Prop 2.1.6), on en déduit l'existence de Q_2 tel que :

$$Q_2 \cdot A \equiv I + R_2 \quad \text{où } R_2 \in \text{OPK}^0(\Omega, \Sigma)$$

Par ailleurs, on peut montrer que si $A_{\Sigma(y, \eta)}^{m-k/2}$ est injectif dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^v)$,

il admet un inverse à gauche $B_{\Sigma(y, \eta)}$ dans la classe $\text{OPS}_{\text{glob}}^{-m, -k}(\Sigma, \mathbb{R}^v)$

(ceci sera détaillé dans un cadre plus général au §3, mais résulte essentiellement du travail de [10])

$B_{\Sigma(y, \eta)}$ définit alors un opérateur B dans $\text{OPS}^{-m, -k}(\Omega, \Sigma)$ tel que :

$$B \circ A_{\Sigma}^{m-k/2} = I + R_3 \quad \text{où } R_3 \in \text{OPS}^{-1, 0}(\Omega, \Sigma)$$

On utilise ici (2.4.9).

Par ailleurs $B \cdot (A - A_{\Sigma}^{m-k/2}) = R_4$ où R_4 est dans $\text{OPS}^{0, 1}$ car $A - A_{\Sigma}^{m-k/2}$ est dans $\text{OPS}^{m, k+1}$.

On en déduit donc que :

$$B \cdot A = I + R_5 \quad \text{avec } R_5 \text{ dans } \text{OPS}^{0, 1}$$

Utilisant la série $\Sigma(-1)^j R_1^j$ (cf Prop 2.1.6), on en déduit l'existence de Q_3 dans $\text{OPS}^{-m, -k}$ tel que :

$$Q_3 \cdot A = I + R_6 \quad \text{avec } R_6 \text{ dans } \text{OPS}^{0, \infty}$$

Alors $(-R_6 \cdot Q_2 + Q_3)$ est une parametrix pour A , ce qui démontre la proposition.

§ 3 : RAPPELS ET COMPLEMENT SUR LA METHODE DE J.SJÖSTRAND

Nous reprenons la méthode de J.Sjöstrand, mais en utilisant notre formalisme. Dans tout le §, A est un opérateur pseudodifférentiel semi-régulier d'ordre m s'annulant à l'ordre k sur Σ symplectique.

§ 3.1 : ETUDE D'UN SYSTEME - SECOND CRITERE D'HYPOELLIPTICITE

On veut maintenant traiter le cas où $A^{m-k/2}_{\Sigma(y,\eta)}$ n'est pas injectif dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en un point (y_0, η_0) .

Suivant [10], on introduit le système suivant :

Soient R^{-j} ($j=1, \dots, p$) des opérateurs d'hermites dans $OPH^{m-k/2}$ de symbole h^j homogènes, R^{+j} ($j=1, \dots, q$) des opérateurs d'hermite adjoints dans $OPH^{*m-k/2}$ de symbole $\tilde{h}^j$ homogène et on considère le système

$$\mathcal{R}_{(y,\eta)}^{m-k/2} = \begin{pmatrix} A_{\Sigma(y,\eta)}^{m-k/2} & R_{y,\eta}^- \\ R_{y,\eta}^+ & 0 \end{pmatrix}$$

qui opère de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{A}^p$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{A}^q$.

$$\text{Ici pour } z \text{ dans } \mathcal{A}^p : R_{y,\eta}^- \cdot z = \sum_{j=1}^p R_{y,\eta}^{-j} \cdot z_j = \sum_{j=1}^p h^j(y, \eta, t) z_j$$

$$\text{pour } u \text{ dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \left(R_{y,\eta}^+ u \right)_j = R_{y,\eta}^{+j} \cdot u = \int \tilde{h}^j(y, t, \eta) u(t) dt$$

pour $j=1, \dots, q$.

Il lui correspond un système d'opérateurs pseudodifférentiels opérant de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times (C_0^\infty(Y))^p$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^n) \times C^\infty(Y)^q$, défini par la matrice :

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} A & R^- \\ R^+ & 0 \end{pmatrix} : (u, u_1, \dots, u_p) \rightarrow (f, v_1, \dots, v_q)$$

$$\text{où } R^-(u_1, \dots, u_p) = \sum_{j=1}^p R^{-j} \cdot u_j$$

$$(R^+u)_j = v_j = R^{+j}u \quad j=1, \dots, q$$

On a alors la proposition suivante :

Proposition 3.1.1

On suppose que $\mathcal{R}_{y,\eta}^{m-k/2}$ est bijectif de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^y) \times \mathcal{U}^p$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^y) \times \mathcal{U}^q$

alors $\mathcal{R}$ admet une parametrix bilatère au sens suivant :

il existe $E \in OPS^{-m,-k}$, $E^+ \in (OPH^{-m+k/2})^q$, $E^- \in (OPH^{*-m+k/2})^p$,

$E^\pm = (E^\pm)_{ij}$ avec $E_{ij}^\pm \in OPS_{1,0}^{-m+k/2}(Y)$ tels que, si on pose :

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & E^+ \\ E^- & E^- \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E} \cdot \mathcal{R} \equiv \mathcal{R} \mathcal{E} \equiv I + \mathcal{R}$$

où $\mathcal{R}$ est régularisant au sens suivant :

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{11} & \mathcal{R}_{12} \\ \mathcal{R}_{21} & \mathcal{R}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_{12}, \mathcal{R}_{21}, \mathcal{R}_{22} \text{ sont à noyau } C^\infty \text{ et } \mathcal{R}_{11} \in OPS^{0,\infty}.$$

Bien entendu, on peut "microlocaliser" cette proposition si $\mathcal{R}_{y,\eta}^{m-k/2}$ est bijectif pour (y,η) dans un voisinage de (y_0, η_0) .

Une telle parametrix permet de démontrer des résultats d'hypoellipticité comme le montre la proposition suivante, qui est l'analogue de la proposition 2.6.1.

Proposition 3.1.2 [10]

Sous les hypothèses précédentes :

- i) le système $\mathcal{R}$ admet une parametrix bilatère $\mathcal{E}$ au sens habituel (i.e $\mathcal{R}_{11}$ est à noyau C^∞).
- ii) A est hypoelliptique avec perte de $k/2 + t$ dérivées si et seulement si E^+ est hypoelliptique avec perte de t dérivées.

Remarque 3.1.3

Si E^+ admet une parametrix à gauche dans $OPS_{1/2,1/2}^{m-k/2+t}(Y)$, *

A admet une parametrix à gauche dans $OPS_{1/2,1/2}^{-m+k/2+t}(\Omega)$.

Remarque 3.1.4

Comme il est remarqué dans [10], on a des résultats analogues pour la résolubilité locale, la propagation des singularités.

Démonstration de la proposition 3.1.2

Par la proposition 3.1.1, on sait qu'il existe $\mathcal{E}$ tel que :

$$\mathcal{E} \cdot \mathcal{R} \equiv I + \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(modulo des opérateurs à noyau C^∞) où $\mathcal{R}_{11}$ est dans $OPS^{0,\infty}$.

Par ailleurs, il existe (cf Démonstration de la proposition 2.6.1) Q dans $OPS^{-m,-k}$ tel que :

$$Q \cdot A \equiv I + \mathcal{R}_1 \quad \text{avec } \mathcal{R}_1 \text{ dans } \mathcal{OPK}^0$$

* chaque terme de la matrice E^+ est dans $OPS_{1/2,1/2}^{m-k/2+t}(Y)$

On en déduit

$$\mathfrak{R}_{11} \cdot Q \cdot A \equiv \mathfrak{R}_{11}$$

$$\text{car } \mathfrak{R}_{11} \mathfrak{R}_1 \equiv 0$$

On vérifie alors aisément que :

$$\begin{pmatrix} (E - \mathfrak{R}_{11} Q) & E^+ \\ E^- & E^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & R^- \\ R^+ & 0 \end{pmatrix} \equiv I$$

$$\text{car } \mathfrak{R}_{11} Q \cdot R^- \equiv 0.$$

On a ainsi démontré l'existence d'un parametrix à gauche ; On démontre de même l'existence d'une parametrix à droite. Ceci termine la démonstration du point i).

On pose $E = E - \mathfrak{R}_{11} Q$; La démonstration du point ii) est faite dans [10], rappelons la brièvement :

La suffisance résulte des deux identités suivantes :

$$3.1.5 \quad E \cdot A + E^+ R^+ \equiv I$$

$$3.1.6 \quad E^- \cdot A + E^- R^+ \equiv 0$$

$$\begin{aligned} Au \in H_{loc}^s(\Omega) &\Rightarrow \begin{aligned} EAu &\in H_{loc}^{s+m-k/2}(\Omega) \\ E^- Au &\in \left(H_{loc}^{s+m-k/2}(Y) \right)^p \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\text{On en déduit que } E^+ R^+ u \in \left(H_{loc}^{s+m-k/2}(Y) \right)^p$$

d'où par l'hypoellipticité de E^+

$$R^+ u \in \left(H_{loc}^{s-t}(Y) \right)^q$$

Retournant à 3.1.5 on en déduit que $u \in H_{loc}^{s+m-k/2-t}(\Omega)$ (t est positif).

La nécessité résulte des deux identités suivantes :

$$A \cdot E^+ + R^- E^- \equiv 0$$

$$R^+ E^+ \equiv I$$

Démonstration de la proposition 3.1.1

La démonstration de 3.1.1 est faite dans [10] en utilisant le formalisme des opérateurs pseudodifférentiels à valeurs vectorielles, nous la transcrivons dans notre formalisme.

On a le lemme suivant :

Lemme 3.1.7

Sous les hypothèses de la proposition 3.1.1, il existe $E_{o(y,\eta)}$ dans $OPS_{glob}^{-m,-k}(\Sigma, \mathbb{R}^V)$, E_o^+ dans $(OPH^{-m+k/2})^q$, E_o^- dans $(OPH^{*-m+k/2})^p$, $E_{o(y,\eta)}^+$ dans $(S_{1,o}^{-m+k/2}(Y))^{pq}$ homogènes* tels que si l'on pose :

$$\mathcal{E}_{o(y,\eta)} = \begin{pmatrix} E_{o(y,\eta)} & E_o^+ \\ E_o^- & E_{o(y,\eta)}^+ \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E}_{o(y,\eta)} \# \mathcal{D}_{y,\eta}^{m-k/2} = \mathcal{D}_{y,\eta}^{m-k/2} \# \mathcal{E}_{o(y,\eta)} = I$$

Admettons un instant ce lemme et démontrons la proposition 3.1.1.

Soit $\mathcal{E}_o$ l'élément dans $\begin{pmatrix} OPS^{-m,-k} & (OPH^{-m+k/2})^q \\ (OPH^{*-m+k/2})^p & (OPS^{-m+k/2})^{pq} \end{pmatrix}$

* au sens de (2.4.6) pour $E_{o(y,\eta)}$, de (2.2.4) pour E_o^+ et E_o^- , au sens habituel pour E_o^+ .

associé à $\varepsilon_{o(y,\eta)}$, alors :

$$\varepsilon_o \circ \mathcal{R} = \varepsilon_o \cdot \mathcal{L}_{\Sigma}^{m-k/2} + \varepsilon_o \cdot (\mathcal{R} - \mathcal{L}_{\Sigma}^{m-k/2})$$

Examinons chacun des termes :

1) Utilisant (2.4.7) et (2.5.1), on obtient :

$$\varepsilon_o \cdot \mathcal{L}_{\Sigma}^{m-k/2} \equiv I + \mathcal{R}'$$

où

$$\mathcal{R}' = \begin{pmatrix} \mathcal{R}'_{11} & \mathcal{R}'_{12} \\ \mathcal{R}'_{21} & \mathcal{R}'_{22} \end{pmatrix}$$

avec

$$\mathcal{R}'_{11} \in \text{OPS}^{-1,0}(\Omega, \Sigma)$$

$$\mathcal{R}'_{12} \in (\text{OPH}^{-1})^p$$

$$\mathcal{R}'_{21} \in (\text{OPH}^{*-1})^p$$

$$\mathcal{R}'_{22} \in (\text{OPS}^{-1}(Y))^p$$

2)

$$\varepsilon_o (\mathcal{R} - \mathcal{L}_{\Sigma}^{m-k/2}) = \mathcal{R}''$$

où

$$\mathcal{R}'' = \begin{pmatrix} \mathcal{R}''_{11} & 0 \\ \mathcal{R}''_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{R}''_{11} \in \text{OPS}^{0,1}(\Omega, \Sigma)$$

$$\mathcal{R}''_{21} \in (\text{OPH}^{*-1/2})^p$$

Par conséquent :

$$\varepsilon_o \circ \mathcal{R} = I + \mathcal{R}''$$

avec

$$\mathfrak{R}''' = \begin{pmatrix} \mathfrak{R}_{11}''' & \mathfrak{R}_{12}''' \\ \mathfrak{R}_{21}''' & \mathfrak{R}_{22}''' \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{R}_{11}''' \in \text{OPS}^{0,1}, \mathfrak{R}_{12}''' \in (\text{OPH}^{-1/2})^p, \mathfrak{R}_{21}''' \in (\text{OPH}^{*-1/2})^p, \mathfrak{R}_{22}''' \in (\text{OPS}^{-1/2})^{p^2}$$

Il existe $\mathfrak{R}^{(1v)}$ dans la même classe que $\mathfrak{R}'''$ tel que :

$$(I + \mathfrak{R}^{(1v)}) - \sum_{j < N} (-1)^j \mathfrak{R}'''^j \in \begin{pmatrix} \text{OPS}^{0,N} & (\text{OPH}^{-N/2})^p \\ (\text{OPH}^{*-N/2}) & (\text{OPS}^{-N/2})^{p^2} \end{pmatrix}$$

pour tout N ce qui démontre la proposition 3.3.1 on prend

$$\mathfrak{E} = (I + \mathfrak{R}^{(1v)}) \mathfrak{E}_0$$

Démonstration du lemme 3.1.7

Par hypothèse $\mathfrak{R}_{(y,\eta)}^{m-k/2}$ admet un inverse $\mathfrak{E}_{(y,\eta)}^0$. Vu les propriétés d'homogénéité en η du problème, il suffit en fait d'étudier le cas où $|\eta|=1$, et on doit alors montrer que :

$$E_{o(y,\eta)} \in C^\infty(\Sigma, \text{OPS}_{\text{glob}}^{-k}(\mathbb{R}^N))$$

$$E_{o(y,\eta)}^+ \in (C^\infty(\Sigma, \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)))^q$$

$$(E_{o(y,\eta)}^-)^* \in C^\infty(\Sigma, \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))^p$$

$$E_{o(y,\eta)}^{+-} \in (C^\infty(\Sigma))^{pq}$$

Pour ℓ dans $\mathbb{N}$, soit $B^\ell(\mathbb{R}^N)$, l'espace des $\{u \in L^2(\mathbb{R}^N) ; t^\alpha D_t^\beta u \in L^2(\mathbb{R}^N) \text{ pour } |\alpha| + |\beta| \leq \ell\}$.

$$\text{Pour } (y,\eta) \text{ fixé : } \begin{pmatrix} E_{o(y,\eta)} & E_{o(y,\eta)}^+ \\ E_{o(y,\eta)}^- & E_{o(y,\eta)}^{+-} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{A}^q ; B^k(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{A}^p)$$

et il est facile de montrer que (3.1.8)

$$\mathcal{E}_{o(y,\eta)} \in C^\infty\left(\Sigma ; \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^V) \times \mathcal{A}^Q ; B^k(\mathbb{R}^V) \times \mathcal{A}^P)\right)$$

On va montrer que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$:

$$(3.1.9) \quad \mathcal{E}_{o(y,\eta)} \in C^\infty(\Sigma ; \mathcal{L}(B^\ell(\mathbb{R}^V) \times \mathcal{A}^Q ; B^{\ell+k}(\mathbb{R}^V) \times \mathcal{A}^P))$$

ce qui montrera que :

$$E_{o(y,\eta)} : C^\infty(\Sigma, \mathcal{S}(\mathbb{R}^V)) \rightarrow C^\infty(\Sigma, \mathcal{S}(\mathbb{R}^V))$$

$$E_o^+ : (C^\infty(\Sigma))^Q \rightarrow C^\infty(\Sigma, \mathcal{S}(\mathbb{R}^V))$$

$$E_o^- : C^\infty(\Sigma, \mathcal{S}(\mathbb{R}^V)) \rightarrow (C^\infty(\Sigma))^P$$

$$E_o^{\pm} : (C^\infty(\Sigma))^Q \rightarrow (C^\infty(\Sigma))^P$$

Pour montrer que (3.1.9) se déduit de (3.1.8), on utilise l'identité :

$$\mathcal{E}_{o(y,\eta)} \cdot \mathcal{H}_{\Sigma(y,\eta)}^{m-k/2} = \mathcal{H}_{\Sigma(y,\eta)}^{m-k/2} \cdot \mathcal{E}_{o(y,\eta)} = I$$

et celles qu'on déduit en commutant avec t , et D_t ; par exemple

$$\left[t, \mathcal{E}_o \right] \cdot \mathcal{H}_{\Sigma}^{m-k/2} + \mathcal{E}_o \left[t, \mathcal{H}_{\Sigma}^{m-k/2} \right] = 0$$

$$\left[D_t, \mathcal{E}_o \right] \mathcal{H}_{\Sigma}^{m-k/2} + \mathcal{E}_o \left[D_t, \mathcal{H}_{\Sigma}^{m-k/2} \right] = 0$$

Par conséquent

$$(3.1.10) \quad \begin{aligned} & \mathcal{E}_{o(y,\eta)} \text{ est continu de } C^\infty(\Sigma, \mathcal{F}(\mathbb{R}^N)) \times C^\infty(\Sigma)^q \text{ dans} \\ & C^\infty(\Sigma, \mathcal{F}(\mathbb{R}^N)) \times C^\infty(\Sigma)^p. \end{aligned}$$

Par ailleurs il existe $\mathfrak{B}_{y,\eta}$ (cf [3]) dans $C^\infty(\Sigma, OPS_{glob}^{-k}(\mathbb{R}^N))$ tel que :

$$A_{\Sigma(y,\eta)}^{m-k/2} \cdot \mathfrak{B}_{y,\eta} = I + \mathfrak{R}_{y,\eta}$$

où $\mathfrak{R}_{y,\eta} : C^\infty(\Sigma, \mathcal{F}'(\mathbb{R}^N)) \rightarrow C^\infty(\Sigma, \mathcal{F}(\mathbb{R}^N))$

On en déduit l'existence de $\mathfrak{B}_{y,\eta} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{y,\eta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tel que :

$$\mathcal{R}_{\Sigma(y,\eta)}^{m-k/2} \cdot \mathfrak{B}_{y,\eta} = I + \tilde{\mathfrak{R}}_{y,\eta}$$

où (3.1.11) $\tilde{\mathfrak{R}}_{y,\eta} : C^\infty(\Sigma, \mathcal{F}'(\mathbb{R}^N)) \times C^\infty(\Sigma)^q \rightarrow C^\infty(\Sigma, \mathcal{F}(\mathbb{R}^N)) \times C^\infty(\Sigma)^p$

on dira que $\tilde{\mathfrak{R}}_{(y,\eta)}$ est régularisant.

On en déduit :

$$\mathcal{R}_{\Sigma(y,\eta)}^{m-k/2} \cdot (\mathfrak{B}_{y,\eta} - \mathcal{E}_{o(y,\eta)}) = \tilde{\mathfrak{R}}_{y,\eta}$$

$$\mathfrak{B}_{y,\eta} - \mathcal{E}_{o(y,\eta)} = \mathcal{E}_{o(y,\eta)} \tilde{\mathfrak{R}}_{(y,\eta)}$$

On déduit de (3.1.10) et (3.1.11) que $\mathcal{E}_{o(y,\eta)} \tilde{\mathfrak{R}}_{(y,\eta)}$ est régularisant c'est à dire

(3.1.12)

$$\mathcal{E}_{o(y,\eta)} \tilde{\mathfrak{R}}_{(y,\eta)} : C^\infty(\Sigma, \mathcal{F}'(\mathbb{R}^N)) \times C^\infty(\Sigma)^q \rightarrow C^\infty(\Sigma, \mathcal{F}(\mathbb{R}^N)) \times C^\infty(\Sigma)^p$$

Les propriétés de $\xi_{\mathfrak{o}(y,\eta)}$ se déduisent alors des propriétés connues de $\mathfrak{B}$ et $\xi_{\mathfrak{o}} \tilde{\mathfrak{R}}$.

Ceci termine la démonstration du lemme 3.1.7 et de la proposition 3.1.1.

§ 3.2 : PARITE ET REGULARITE

Au § 3.1, on a montré comment l'existence de fonctions d'hermite $h_j, \tilde{h}_j$, permettant de construire un système inversible, ramenait l'étude de l'hypoellipticité à celle d'un opérateur dont le symbole est une fonction sur Σ .

On suppose dans ce § que l'opérateur A est régulier de sorte que, comme il a été remarqué au § 2.4, $A^{\frac{m-k}{2}}_{\Sigma(y,\eta)}$ conserve ou inverse la parité des fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^V)$ selon la parité de k .

On va montrer ici comment le choix (s'il est possible) de fonctions d'hermites $h_j, \tilde{h}_j$ d'une parité déterminée, se répercute sur la régularité de l'opérateur E^+ .

Auparavant, remarquons qu'il découle de la démonstration de la proposition 3.1.1 la remarque suivante :

Remarque 3.2.1

Le symbole principal de $(E^+)_{ij}$ est $(E^+_{\mathfrak{o}})_{ij}$ modulo $(S^{-m+k/2-1/2}(Y))$, $i=1, \dots, q$, $j=1, \dots, p$.

On va démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.2.2

On suppose que A dans $OPS^{m,k}(\Omega, \Sigma)$ est régulier et que les fonctions d'hermite homogènes $h_j, \tilde{h}_j$ données ont la propriété suivante :

Si ℓ désigne le nombre 1 ou 2 ,

$$h_j(y, \eta, t) = (-1)^\ell h_j(y, \eta, -t) \quad j=1, \dots, p$$

$$\tilde{h}_j(y, \eta, t) = (-1)^{\ell+k} \tilde{h}_j(y, \eta, -t), \quad j=1, \dots, q$$

Alors E^+ est régulier, en particulier son symbole principal est égal à $(E_0^+(y, \eta))_{ij}$ modulo $(S^{-m+k/2}(Y))$, $i=1, \dots, p$; $j=1, \dots, q$.

Démonstration de la proposition 3.2.2

On démontre la proposition dans le cas où k et ℓ sont pairs, et, ce qui ne diminue en rien la généralité, $m=k/2$. Les autres cas se traiteraient de la même manière.

On sait donc que les symboles de R^+ et R^- sont pairs, homogènes et que A_Σ^0 conserve la parité. On a alors le lemme suivant :

Lemme 3.2.3

Sous les hypothèses précédentes, les symboles de E_0^+ et E_0^- sont pairs et $E_{(y, \eta)}^0$ conserve la parité.

On décompose $(\mathcal{G}(\mathbb{R}^v) \times \mathbb{C}^p)$ (resp. $\mathcal{G}(\mathbb{R}^v) \times \mathbb{C}^q$) de la manière suivante :

$$(\mathcal{G}(\mathbb{R}^v) \times \mathbb{C}^p) \ni (u, z) = \left(\frac{u(t) + u(-t)}{2}, z \right) \oplus \left(\frac{u(t) - u(-t)}{2}, 0 \right)$$

c'est à dire

$$\mathcal{G}(\mathbb{R}^v) \times \mathbb{C}^p = (\mathcal{G}(\mathbb{R}^v)^{\text{paires}} \times \mathbb{C}^p) \oplus (\mathcal{G}(\mathbb{R}^v)^{\text{impaires}} \times 0)$$

$$\left(\text{resp } \mathcal{G}(\mathbb{R}^v) \times \mathbb{C}^q = (\mathcal{G}(\mathbb{R}^v)^{\text{paires}} \times \mathbb{C}^q) \oplus (\mathcal{G}(\mathbb{R}^v)^{\text{impaires}} \times 0) \right)$$

Le système $\mathcal{H}_{(y, \eta)}^0$ respecte la décomposition ; on en déduit que $\mathcal{E}_0$ la respecte aussi, ce qui démontre le lemme.

Il nous faut maintenant suivre pas à pas la construction de $\mathcal{E}$ à partir de $\mathcal{E}_0$, telle qu'elle est esquissée au § 3.1.

On a :

$$\mathcal{E}_0(y, \eta) \# \mathcal{D}_0(y, \eta) = I$$

$$A_\Sigma \sim A_\Sigma^0 + \tilde{A}_\Sigma^{-1/2, \text{imp}} + \tilde{A}_\Sigma^{-1, \text{pair}}$$

où
$$\tilde{A}_\Sigma^{-1/2, \text{imp}} = \sum_{i=0}^{\infty} A_\Sigma^{-1/2-i}$$

$$\tilde{A}_\Sigma^{-1, \text{pair}} = \sum_{i=0}^{\infty} A_\Sigma^{-1-i}$$

Convention

A partir de maintenant, on utilise des décompositions où les éléments de $\text{OPS}^{m,k}$ sont homogènes au sens de la définition 2.4.8, les hermites et leurs adjoints sont réguliers, de même que les opérateurs pseudodifférentiels sur Y .

On a réalisé ci-dessus une telle décomposition, la notation $\tilde{A}_\Sigma^{-1/2, \text{imp}}$ signifie que $\tilde{A}_\Sigma$ est un opérateur homogène d'ordre $-1/2$ (i.e $m-k/2$ pour un élément dans $\text{OPS}^{m,k}$) et qui inverse la parité. Avec ces notations, A_Σ^0 sera noté $A_\Sigma^{0, \text{pair}}$. De même $R^{0, \text{pair}}$ désigne un opérateur d'hermite régulier d'ordre 0 et pair, E_0^{+0} signifie qu'on a un opérateur pseudodifférentiel régulier d'ordre 0.

Remarque

Les opérateurs homogènes ont la propriété de conserver par composition la régularité des opérateurs d'Hermites.

On considère :

$$\varepsilon_{o(y,\eta)} \# \mathcal{D}_{\Sigma(y,\eta)} = I + \varepsilon_{o(y,\eta)} \# \left(\mathcal{D}_{\Sigma} - \mathcal{D}_{\Sigma}^o \right)_{(y,\eta)} = I + \mathcal{R}_{(y,\eta)}$$

$\mathcal{R}_{(y,\eta)} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{11} & \mathcal{R}_{12} \\ \mathcal{R}_{21} & \mathcal{R}_{22} \end{pmatrix}$ possède (en particulier) la propriété suivante :

$$\mathcal{R}_{11} \sim \mathcal{R}_{11}^{o, \text{pair}} + \mathcal{R}_{11}^{-1/2, \text{impair}}$$

$$\mathcal{R}_{12} \sim \mathcal{R}_{1,2}^{o, \text{pair}} + \mathcal{R}_{12}^{-1/2, \text{impair}}$$

$$\mathcal{R}_{21} \sim \mathcal{R}_{21}^{o, \text{pair}} + \mathcal{R}_{21}^{-1/2, \text{impair}}$$

$$\mathcal{R}_{22} \sim \mathcal{R}_{22}^o$$

On dira que les matrices $\mathcal{R}$ possédant cette propriété vérifient la propriété (C).

$\mathcal{D}_{\Sigma(y,\eta)}, \varepsilon_{o(y,\eta)}$ vérifient la propriété (C)

Remarquons le lien entre l'ordre de l'opérateur (modulo 1) et la parité. La démonstration de la proposition 3.2.2 se déduit alors du lemme suivant :

Lemme 3.2.4

La classe des matrices $\mathcal{R}$ vérifiant la propriété (C) est stable, par composition ($\#$), par dérivation par rapport à y ou η de son symbole.

Le deuxième point est évident, montrons le premier point :
Soit $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ vérifiant la condition (C), on va montrer

que $\mathfrak{R}'' = \mathfrak{R} \# \mathfrak{R}'$ vérifie la condition (C).

$$(a) \quad \mathfrak{R}_{11}'' = \mathfrak{R}_{11} \# \mathfrak{R}_{11}' + \mathfrak{R}_{12} \# \mathfrak{R}_{21}'$$

$$(b) \quad \mathfrak{R}_{12}'' = \mathfrak{R}_{11} \# \mathfrak{R}_{12}' + \mathfrak{R}_{12} \# \mathfrak{R}_{22}'$$

$$(c) \quad \mathfrak{R}_{21}'' = \mathfrak{R}_{21} \# \mathfrak{R}_{11}' + \mathfrak{R}_{22} \# \mathfrak{R}_{21}'$$

$$(d) \quad \mathfrak{R}_{22}'' = \mathfrak{R}_{21} \# \mathfrak{R}_{12}' + \mathfrak{R}_{22} \# \mathfrak{R}_{22}'$$

d'où par exemple pour (a)

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{11}'' &= (\mathfrak{R}_{11}^{o, \text{pair}} \# \mathfrak{R}_{11}'^{o, \text{pair}} + \mathfrak{R}_{11}^{-1/2, \text{impair}} \# \mathfrak{R}_{11}'^{-1/2, \text{impair}} \\ &\quad + \mathfrak{R}_{12}^{o, \text{pair}} \# \mathfrak{R}_{21}'^{o, \text{pair}} + \mathfrak{R}_{12}^{-1/2, \text{impair}} \# \mathfrak{R}_{21}'^{-1/2, \text{impair}}) \\ &\quad + (\mathfrak{R}_{11}^{o, \text{pair}} \# \mathfrak{R}_{11}'^{-1/2, \text{impair}} + \mathfrak{R}_{11}^{-1/2, \text{impair}} \# \mathfrak{R}_{11}'^{o, \text{pair}} \\ &\quad + \mathfrak{R}_{12}^{o, \text{pair}} \# \mathfrak{R}_{21}'^{-1/2, \text{impair}} + \mathfrak{R}_{12}^{-1/2, \text{impair}} \# \mathfrak{R}_{21}'^{o, \text{pair}}) \\ &= \mathfrak{R}''^{o, \text{pair}} + \mathfrak{R}''^{-1/2, \text{impair}}. \end{aligned}$$

On utilise alors les propriétés suivantes :

- 1) Le composé de deux opérateurs homogènes est homogène (cf Déf. 2.4.8)
- 2) Les ordres des opérateurs s'ajoutent par composition.
- 3) Le composé d'un opérateur "pair" et d'un opérateur "impair" est impair.
- 4) Si H et H' sont des opérateurs d'hermites réguliers, alors si H et H' ont même parité, $H \circ H'^*$ est un opérateur homogène et $(H \circ H'^*)_{y, \eta}$ conserve la parité.

Si H et H' ont des parités opposées, $H \circ H'^*$ est un opérateur homogène et $(H \circ H'^*)_{y, \eta}$ inverse la parité.

5) Si H et H' sont des opérateurs d'hermites réguliers, $H'^* \circ H$ est un opérateur pseudodifférentiel régulier sur Y .

Si H et H' ont des parités différentes $H'^* \circ H$ est régularisant.

Le lemme étant admis, la proposition 3.2.2 est très simple ; il suffit de constater que toutes les opérations faites dans la démonstration de la proposition 3.1.1 pour passer de $\mathcal{E}_{(y,\eta)}^0$ à $\mathcal{E}$ se font dans les classes vérifiant la propriété (C) ; par conséquent, $\mathcal{E}$ vérifie la propriété (C), en particulier E^+ est régulier.

§ 3.3 : ETUDE D'UN CAS PLUS GENERAL

On peut par les mêmes méthodes qu'au § 3.2 démontrer la proposition suivante, dont la démonstration est laissée au lecteur.

Proposition 3.3.1

On suppose que A dans $OPS^{m,k}(\Omega, \Sigma)$ est régulier et que les fonctions d'hermite homogènes h_j , $\tilde{h}_j$ données ont la propriété suivante : Soit p' un entier compris entre 0 et p , q' un entier compris entre 0 et q , on a :

$$h_j(y, \eta, t) = h_j(y, \eta, -t) \text{ pour } 1 \leq j \leq p'$$

$$h_j(y, \eta, t) = -h_j(y, \eta, -t) \text{ pour } p' < j \leq p$$

$$\tilde{h}_j(y, \eta, t) = (-1)^k \tilde{h}_j(y, \eta, -t) \text{ pour } 1 \leq j \leq q'$$

$$\tilde{h}_j(y, \eta, t) = (-1)^{k+1} \tilde{h}_j(y, \eta, -t) \text{ pour } q' < j \leq q$$

Alors $E^+(y, \eta)$ a la forme suivante :

$$E^+(y, \eta) = \begin{pmatrix} E_{11}^+ & E_{12}^+ \\ E_{21}^+ & E_{22}^+ \end{pmatrix} \begin{matrix} p' \\ p-p' \\ q' \\ q-q' \end{matrix}$$

où * $E_{ij}^+ \in (S^{-m+k/2}(Y))$ si $i=j$

$E_{ij}^+ \in (S^{-m+k/2-1/2}(Y))$ si $i \neq j$

et les E_{ij}^+ sont séparément réguliers.

§ 4 : CONSTRUCTION EXPLICITE DES SYSTEMES - DEMONSTRATION DES THEOREMES

§ 4.1 : LE CAS GENERAL : CONSTRUCTION DE J. SJÖSTRAND (cf [10])

On suppose que $A_{\Sigma}^{m-k/2}(y_o, \eta_o, t, D_t)$ n'est pas inversible dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ au point (y_o, η_o) .

Soit q la dimension du noyau de A_{Σ} , p la dimension du conoyau. Soit $\tilde{h}_j(t)$ ($j = 1, \dots, q$) une base orthogonale du noyau de $A_{\Sigma}(y_o, \eta_o)$, $h_j(t)$ ($j = 1, \dots, p$) une base orthogonale du noyau de $A_{\Sigma}^*(y_o, \eta_o)$.

Convenablement prolongés par homogénéité, ils définissent des symboles d'hermite et on peut considérer le système associé :

$$\begin{pmatrix} A_{\Sigma}^{m-k/2}(y, \eta) & R_{y, \eta}^+ \\ R_{y, \eta}^- & 0 \end{pmatrix}$$

dont on vérifie aisément qu'il est inversible en (y_o, η_o) .

Il existe donc un voisinage conique Γ de (y_o, η_o) dans lequel les hypothèses de la proposition 3.1.1 sont vérifiées. On en déduit alors des résultats d'Hypoellipticité.

Si A est régulier, $A_{\Sigma}^{m-k/2}$ respecte (ou inverse selon la parité de k)

la parité. On peut alors décomposer le noyau (resp. le noyau de $A_{\Sigma}^{*m-k/2}$)

* c'est à dire chaque élément de la matrice est dans $S^{-m+k/2}(Y)$.

en partie paire et impaire. Les hypothèses de la proposition 3.3.1 sont alors vérifiées. Sous des hypothèses plus restrictives, et dans le cas $k=2$, on fera une étude plus précise, permettant de donner un calcul explicite de $E_0^+(y, \eta)$. Ceci fera l'objet des § suivants.

§ 4.2 : DEMONSTRATION DU THEOREME 1.2

On suppose que $k=2$, $m=1$ et on reprend les notations du § 1, c'est à dire que $P = A$.

$$A_{\Sigma}^0(y, \eta) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(y, \eta) \left(\frac{t^{\alpha} D_t^{\beta} + D_t^{\beta} t^{\alpha}}{2} + a_{00}(y, \eta) \right).$$

On pose
$$L_{(y, \eta)}^0(t, D_t) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(y, \eta) \left(\frac{t^{\alpha} D_t^{\beta} + D_t^{\beta} t^{\alpha}}{2} \right)$$

et on sait (cf [10]) que $a_{00}(y, \eta) = p'_0(y, \eta)$ où $p'_0(y, \eta)$ désigne le symbole sous principal. On sait que $A_{\Sigma}^0(y, \eta, t, D_t)$ est d'indice 0 (de $B^2(\mathbb{R}^{\nu})$ dans $L^2(\mathbb{R}^{\nu})$) et qu'il est inversible si et seulement si

$$p'_{m-1}(y, \eta) + \sum_{j=1}^{\nu} (2\alpha_j + 1) \lambda_j(y, \eta) \neq 0, \quad \forall \alpha_j \in \mathbb{N}$$

On suppose qu'en un point (y_0, η_0) , il existe $\alpha \in \mathbb{N}^{\nu}$ tel que :

$$(4.2.1) \quad p'_{m-1}(y_0, \eta_0) + \sum_{j=1}^{\nu} (2\alpha_j + 1) \lambda_j(y_0, \eta_0) = 0$$

et on fait l'hypothèse suivante sur les valeurs propres $\lambda_j(y_0, \eta_0)$.

H1 Au point (y_0, η_0) les valeurs propres λ_j sont indépendantes sur $\mathbb{Z}$, c'est à dire :

$$\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \lambda_i = 0, \quad \alpha_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha_i = 0, \quad i=1, \dots, \nu$$

Ceci implique en particulier que les valeurs propres sont distinctes ; on a alors le théorème suivant. (L'hypothèse (H1) assure que (4.2.1) n'est satisfaite que pour un α au plus).

Théorème 4.2.1

Soit P vérifiant les hypothèses du § 1 ; on suppose qu'en un point ρ_0 de Σ , il existe $\alpha \in \mathbb{N}^k$ tel que :

$$p'_{m-1}(\rho_0) + \sum_{j=1}^{\nu} (2\alpha_j + 1) \lambda_j(\rho_0) = 0$$

et que l'hypothèse H1 est vérifiée.

Soit
$$\tilde{p}_{m-1}(\rho) = p'_{m-1}(\rho) + \sum_{j=1}^{\nu} (2\alpha_j + 1) \lambda_j(\rho).$$

Alors P est strictement hypoelliptique au voisinage du point ρ_0 avec perte de 3/2 dérivées si et seulement si :

$$\frac{1}{i} \left\{ \tilde{p}_{m-1}, \overline{\tilde{p}_{m-1}} \right\}_{\Sigma} < 0 \text{ au point } \rho_0.$$

Remarque 4.2.2

Lorsque $\nu = 1$, l'hypothèse [H1] est automatiquement vérifiée. On en déduit le théorème 1.2.

Démonstration du théorème 4.2.1

Il résulte des propositions 3.1.1, 3.1.2 et 3.2.2 qu'il suffit de montrer les points suivants :

- 1) Construire R^+ et R^- avec des propriétés de parité convenables.
- 2) Montrer que $E_o^-(y, \eta) = q(y, \eta) \cdot \tilde{p}_{m-1}(y, \eta)$ où $q(y, \eta)$ est un symbole elliptique. Le théorème résultera alors d'un théorème classique sur les opérateurs sous-elliptiques pour E^+ .

Construction de $R_{y, \eta}^+$, $R_{y, \eta}^-$ et calcul de $E_o^+(y, \eta)$

Vu les propriétés d'homogénéité du problème, on construit $h_j(y, \eta, t)$, $\tilde{h}_j(y, \eta, t)$ pour $|\eta| = 1$. La condition H1 assure que :

$$\dim \ker A_{\Sigma(y_0, \eta_0)}^o(t, D_t) = \dim \ker A_{\Sigma(y_0, \eta_0)}^{o*}(t, D_t) = 1.$$

Par conséquent, on prend $p=q=1$.

Il existe $([10]) \tilde{h}_{(y_o, \eta_o)}(t)$ (resp. $h_{(y_o, \eta_o)}(t)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^v)$ tel que :

$$A_{y_o, \eta_o}^o \cdot \tilde{h}_{(y_o, \eta_o)} = 0 \quad \|\tilde{h}_{(y_o, \eta_o)}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^v)} = 1$$

$$A_{y_o, \eta_o}^{o*} h_{(y_o, \eta_o)} = 0 \quad \|h_{(y_o, \eta_o)}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^v)} = 1$$

de plus (4.2.3) $\tilde{h}_{(y_o, \eta_o)}(-t) = (-1)^{|\alpha|} \tilde{h}_{(y_o, \eta_o)}(t)$

(4.2.4) $h_{(y_o, \eta_o)}(-t) = (-1)^{|\alpha|} h_{(y_o, \eta_o)}(t)$

où α est l'élément de $\mathbb{N}^k$ intervenant dans les hypothèses du théorème 4.2.1.

Il est facile de prolonger $\tilde{h}_{y_o, \eta_o}$ et $h_{(y_o, \eta_o)}$ au voisinage de (y_o, η_o) de telle sorte que :

(4.2.5) $\mathcal{D}_{\Sigma(y, \eta)}^o \circ \tilde{h}_{y, \eta}(t) = a(y, \eta) \cdot h_{y, \eta}(t)$

$$\tilde{h}_{y, \eta}(+t) = (-1)^{|\alpha|} \tilde{h}_{y, \eta}(t)$$

$$a(y, \eta) = \tilde{p}_{m-1}(y, \eta)$$

$$h_{y, \eta}(t) \in C^\infty(\Sigma, \mathcal{S}(\mathbb{R}^v))$$

(4.2.6) $\mathcal{D}_{\Sigma(y, \eta)}^{o*} \cdot h_{y, \eta}(t) = \bar{a}(y, \eta) h_{y, \eta}(t)$

$$h_{y, \eta}(-t) = (-1)^{|\alpha|} h_{y, \eta}(t)$$

$$h_{y, \eta}(t) \in C^\infty(\Sigma, \mathcal{S}(\mathbb{R}^v))$$

Il est alors facile de voir que $\begin{pmatrix} A_{\Sigma(y,\eta)}^0 & R_{y,\eta}^- \\ R_{y,\eta}^+ & 0 \end{pmatrix}$ est inversible dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^v)$ en (y_0, η_0) ; Il nous faut calculer $E_0^+(y, \eta)$ au voisinage de (y_0, η_0) .

On considère le système :

$$\begin{pmatrix} A_{\Sigma(y,\eta)}^0 & R_{y,\eta}^- \\ R_{y,\eta}^+ & 0 \end{pmatrix}$$

Il est inversible et admet comme inverse $\mathcal{F}_{y,\eta}$ qui est de la forme :

$$\mathcal{F}_{y,\eta} = \begin{pmatrix} F_{y,\eta} & F^+ \\ F^- & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$F_+(y, \eta) = \tilde{h}_{(y,\eta)}(t)$$

$$F_-(y, \eta) \cdot f = \int_{\mathbb{R}^v} f(t) \cdot \overline{h_{y,\eta}} dt \text{ pour } f \text{ dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^v)$$

Calculons $\mathcal{E}_{o(y,\eta)}$, on a :

$$\mathcal{D}_{\Sigma(y,\eta)}^o \circ \mathcal{F}_{y,\eta} = I + \begin{pmatrix} a(y,\eta) F_{y,\eta} & a(y,\eta) F_{y,\eta}^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $a(y_0, \eta_0) = 0$; il existe donc un voisinage de (y_0, η_0) dans lequel

$$I + \begin{pmatrix} aF & aF^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est inversible dans } L^2 \oplus \mathcal{A}.$$

On a donc :

$$\xi^0 = \begin{pmatrix} F_+ \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j F(aF)^j & F_+ \sum_{j=1}^{\infty} F(aF)^{j-1} aF^+ \\ F_- \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j F_-(aF)^j & \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j F_-(aF)^{j-1} aF_+ \end{pmatrix}$$

Par conséquent :

$$E_{\pm}^0 = a \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j F_{\pm} (aF)^{j-1} F_{\pm}$$

si $F_- F_+ \neq 0$, on en déduira que :

$$E_{\pm}^0 = q(y, \eta) \cdot a(y, \eta)$$

où $q(y, \eta)$ est elliptique dans un voisinage de (y_0, η_0) ce qui terminera la démonstration du théorème.

Démonstration de $F^- \cdot F^+ \neq 0$

Par définition, $(F^- F^+) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{h}(t) \cdot \bar{h}(t) dt$

On se place au point (y_0, η_0) .

$\tilde{h}(t)$ est la fonction propre associée à la valeur propre $\sum_{j=1}^n (2\alpha_j + 1) \lambda_j$ de $L_{y_0, \eta_0}^0(t, D_t)$.

On désigne par $\tilde{h}^\beta(t)$ les fonctions propres associées aux valeurs propres $\sum_{j=1}^n (2\beta_j + 1) \lambda_j$ pour $\beta \neq \alpha$.

($\sum_{j=1}^n (2\beta_j + 1) \lambda_j$) étant différent de zéro, l'espace engendré par les $\tilde{h}^\beta(t)$

est dans l'espace image de L^0 , par conséquent, il est orthogonal au noyau de L^{0*} . On a donc :

$$\int \tilde{h}^\beta(t) \cdot \bar{h}(t) dt = 0 \quad \forall \beta \neq \alpha$$

Si $\int \tilde{h}(t) \cdot \bar{h}(t) dt = 0$, ceci entraînerait que $h(t)$ est orthogonale à un espace dense de $L^2(\mathbb{R}^v)$, ce qui est impossible. c.q.f.d.

§ 4.3 : GENERALISATIONS

On garde les hypothèses du § 4.2 mais on substitue à [H1] l'hypothèse plus faible suivante :

[H2] $\forall p \in \Sigma$, A_p a toutes ses valeurs propres distinctes

On suppose donc qu'en un point (y_o, η_o) de Σ , il existe $\alpha^1 \in \mathbb{N}^v$ tel que :

$$p'_{m-1}(y_o, \eta_o) + \sum_{i=1}^v (2\alpha_i^1 + 1) \lambda_i(y_o, \eta_o) = 0$$

Soit $(\alpha^1, \dots, \alpha^p)$ l'ensemble des p v -tuples tels que :

$$p'_{m-1}(y_o, \eta_o) + \sum_{i=1}^v (2\alpha_i^j + 1) \lambda_i(y_o, \eta_o) = 0 \quad \text{pour } j=1, \dots, p$$

Pour $\beta \neq \alpha^j (j=1, \dots, p)$, on a par conséquent :

$$p'_{m-1}(y_o, \eta_o) + \sum_{i=1}^v (2\beta_i + 1) \lambda_i(y_o, \eta_o) \neq 0$$

La dimension du noyau de $A_{\Sigma(y_o, \eta_o)}^0$ est alors p , et, l'indice étant nul, la dimension du conoyau est également p .

On classe les α^j de la manière suivante :

$$4.3.1 \quad \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i^j = 1 \quad \text{pour } j=1, \dots, p'$$

$$4.3.2 \quad \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i^j = -1 \quad \text{pour } j=p'+1, \dots, p.$$

Le noyau de $A_{\Sigma(y_0, \eta_0)}^0$ (et de $A_{\Sigma(y_0, \eta_0)}^{0*}$) admet alors une décomposition en une partie paire de dimension p' et une partie impaire de dimension $(p-p')$.

Il est clair alors, comme remarqué au § 4.1, qu'on est dans les hypothèses de la proposition 3.3.1. Nous nous proposons de construire ici des fonctions d'hermites $h_j, \tilde{h}_j$ telles que le calcul de $E_0^+(y, \eta)$ soit aisé.

On suppose $|\eta| = 1$. Comme au § 4.2, on peut trouver p "fonctions propres" de $A_{\Sigma, \tilde{h}_{y, \eta}^1}, \dots, \tilde{h}_{y, \eta}^p$ dans $C^\infty(\Sigma, \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu))$ (ici intervient l'hypothèse H2 cf [10]) telles que :

$$4.3.3 \quad \left[\begin{array}{l} A_{\Sigma(y, \eta)}^0 \cdot \tilde{h}_{y, \eta}^j = a_j \cdot \tilde{h}_{(y, \eta)}^j \quad j=1, \dots, p \\ a_j = p'_{m-1} + \sum_{i=1}^{\nu} (2\alpha_i^{j+1}) \lambda_i \\ \tilde{h}_{(y, \eta)}^j(-t) = \tilde{h}_{(y, \eta)}^j(t) \quad j=1, \dots, p' \\ \tilde{h}_{(y, \eta)}^j(-t) = -\tilde{h}_{(y, \eta)}^j(t) \quad j=p'+1, \dots, p \end{array} \right]$$

De même, on peut trouver p "fonctions propres" de $A_{\Sigma}^{o*}, h_{y,\eta}^1, \dots, h_{y,\eta}^p$ dans $C^\infty(\Sigma, \mathcal{S}(\mathbb{R}^V))$ telles que :

$$4.3.4 \quad \left[\begin{array}{l} A_{\Sigma(y,\eta)}^{o*} \cdot h_{y,\eta}^j = \bar{a}_j h_{y,\eta}^j \quad j=1, \dots, p \\ h_{(y,\eta)}^j(-t) = + h_{(y,\eta)}^j(t) \quad j=1, \dots, p' \\ h_{(y,\eta)}^j(-t) = - h_{(y,\eta)}^j(t) \quad j=p'+1, \dots, p \end{array} \right.$$

On a ainsi décomposé les espaces "propres" en deux parties orthogonales l'une paire et l'autre impaire, mais les $\tilde{h}^j$ (resp. les h^j) ne constituent pas une base orthonormale (ce qui n'est pas essentiel).

On pose :

$$4.3.5 \quad R_{y,\eta}^- z = \sum_{j=1}^p z_j \cdot h_{y,\eta}^j$$

On désigne par $\tilde{R}_{y,\eta}^-$ le projecteur orthogonal sur l'espace engendré par les $h_{(y,\eta)}^j$.

On désigne par $\tilde{R}_{y,\eta}^+$ le projecteur orthogonal sur l'espace engendré par les $\tilde{h}_{y,\eta}^j$.

Pour f dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^V)$, $R_{y,\eta}^+$ est défini (d'une manière légèrement différente de celle faite au § 3.1) par :

$(R_{y,\eta}^+ f)^j = R_{y,\eta}^{+j} f$ est la j^{ième} coordonnée de $\tilde{R}_{y,\eta}^+ f$ sur la base des $\tilde{h}_{y,\eta}^j$, i.e :

$$4.3.6 \quad \tilde{R}_{y,\eta}^+ f = \sum_{j=1}^p (R_{y,\eta}^{+j} f) \cdot \tilde{h}_{y,\eta}^j$$

R^{+j} est bien entendu un opérateur d'hermite adjoint dans OPH^{*o} .

Il est clair qu'en (y_0, η_0) , le système

$$\begin{pmatrix} A_{\Sigma(y_0, \eta_0)}^{o=} & R_{y_0, \eta_0}^- \\ R_{y_0, \eta_0}^+ & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^v) \times \mathbb{C}^p$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^v) \times \mathbb{C}^p$.

Il est donc inversible dans un voisinage de (y_0, η_0) ; Il existe donc dans ce voisinage

$$\mathcal{E}_{(y, \eta)}^o = \begin{pmatrix} E_o(y, \eta) & E_o^+(y, \eta) \\ E_o^-(y, \eta) & E_o^+(y, \eta) \end{pmatrix}$$

telle que :

$$4.3.7 \quad \mathcal{E}_{(y, \eta)}^o \# \mathcal{H}_{(y, \eta)}^o = \mathcal{H}_{(y, \eta)}^o \# \mathcal{E}_{(y, \eta)}^o = I$$

et on vérifie aisément que $E_o^+(y_0, \eta_0) = 0$.

On cherche à calculer $E_o^+(y, \eta)$; on va démontrer le lemme suivant :

Lemme 4.3.8

Il existe deux matrices $(p \times p)$, C^∞ , $Q_1(y, \eta)$, $Q_2(y, \eta)$, inversibles au voisinage de (y_0, η_0) telles que :

$$E_o^+(y, \eta) = Q_1(y, \eta) \begin{pmatrix} a_1(y, \eta) & 0 \\ 0 & \ddots & a_p(y, \eta) \end{pmatrix} Q_2(y, \eta)$$

où $a_j(y, \eta) = p_{m-1}'(y, \eta) + \sum_{i=1}^v (2\alpha_{i+1}^j) \lambda_i(y, \eta) \quad , j=1, \dots, p$

Démonstration du lemme

On va calculer $E_0^+(y, \eta)$ par approximation successive. On a à inverser :

$$4.3.9 \quad \begin{cases} R^- z + A^0 u = f \\ \tilde{R}^+ u = \sum_{j=1}^p x_j \tilde{h}^j \end{cases}$$

On peut naturellement supposer $f=0$;

On pose :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ w_0 = \sum x_j' \tilde{h}^j \end{cases}$$

On a :

$$R^-(z-z_0) + A^0(u-w_0) = -\sum a_j x_j' \tilde{h}^j \stackrel{\text{déf}}{=} f_0$$

(z_0, w_0) est une solution approchée de (4.3.9) (avec $f=0$) ; On cherche donc à itérer.

Il nous faut faire quelques remarques préliminaires :

Il résulte de 4.3.7, l'identité :

$$A_{\Sigma}^0 E_0 + R^- E_0^- = I$$

d'où

$$(4.3.10) \quad A_{\Sigma}^0 E_0 (I - \tilde{R}^-) = (I - \tilde{R}^-) (-R^- E_0^-) (I - \tilde{R}^-)$$

Au point (y_0, η_0) , $(I - \tilde{R}_{y_0, \eta_0}^-)$ est le projecteur orthogonal sur l'image de $A_{\Sigma}^0(y_0, \eta_0)$.

Or il résulte également de (4.3.7) que :

$$E_o^- A_\Sigma^o + E_o^+ \cdot R^+ = 0$$

En (y_o, η_o) on en déduit $E_o^-(y_o, \eta_o) \cdot A_\Sigma^o(y_o, \eta_o) = 0$ car $E_o^+(y_o, \eta_o) = 0$.

$E_o^-(y_o, \eta_o)$ s'annule donc sur l'image de $A_\Sigma^o(y_o, \eta_o)$ et par conséquent :

$$(R^- E_o^-(I - \tilde{R}^-))_{y_o, \eta_o} = 0$$

On pose

$$\begin{cases} w_1 - w_o = E_o (I - \tilde{R}^-) f_o \\ R^-(z_1 - z_o) = \tilde{R}^- f_o \end{cases}$$

On déduit de 4.3.10 que :

$$R^-(z - z_1) + A^o(u - w_1) = (-R^- E_o^-(I - \tilde{R}^-)) f_o = f_1$$

On pose

$$K_{y, \eta} = -R^- E_o^-(I - \tilde{R}^-)$$

et on définit par récurrence :

$$f_n = K^n (-\sum a_j x_j' \tilde{h}^j)$$

$$w_{n+1} - w_n = E_o (I - \tilde{R}^-) f_n$$

$$R^-(z_{n+1} - z_n) = \tilde{R}^- f_n$$

et on pose :

$$(4.3.11) \quad u = w_0 + \sum (w_{n+1} - w_n) = \sum x'_j \tilde{h}^j + E_0 (I - \tilde{R}^-) \left[\sum_{n=0}^{\infty} K^n (-\sum_j a_j x'_j \tilde{h}^j) \right]$$

$$(4.3.12) \quad \tilde{R}^- z = \sum_n \tilde{R}^- (z_{n+1} - z_n) = \tilde{R}^- \left(\sum_{n=0}^{\infty} K^n \right) (-\sum_j a_j x'_j \tilde{h}^j)$$

Utilisant le fait que $K_{y_0, \eta_0} \equiv 0$, on peut trouver un voisinage de (y_0, η_0) tel que :

$$\|K_{y, \eta}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^V), L^2(\mathbb{R}^V))} < 1$$

De sorte que (4.3.11) et (4.3.12) ont un sens dans ce voisinage.

Enfin

$$(4.3.13) \quad \tilde{R}^+ u = \sum_{j=1}^p x'_j \tilde{h}^j + \tilde{R}^+ E_0 (I - \tilde{R}^-) \left[\sum_{n=0}^{\infty} K^n \left(-\sum_{j=1}^p a_j x'_j \tilde{h}^j \right) \right]$$

et on cherche $x'_1, \dots, x'_p$ de telle sorte que

$$\tilde{R}^+ u = \sum_{j=1}^p x_j \tilde{h}^j$$

La matrice $M_{ij}(y, \eta)$ définie par

$$M_{ij} = (\tilde{R}^+ E_0 (I - \tilde{R}^-) \left[\sum_{n=0}^{\infty} K^n (-a_j \tilde{h}^j) \right])_i$$

est nulle en (y_0, η_0) de sorte que :

$$(x) = (I + M_{y, \eta}) (x')$$

et $(I + M_{y, \eta})$ est une matrice $p \times p$ inversible ; On pose :

$$Q_2(y, \eta) = (I + M_{y, \eta})^{-1}$$

Déterminons maintenant (z) en fonction de (x')

On utilise (4.3.12) ;

$$(z) = Q_1(y, \eta) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} (x')$$

avec

$$(Q_1(y, \eta))_k^j = (\tilde{R}^-(\sum_{n=0}^{\infty} K^n) \tilde{h}^j)_k$$

La démonstration du lemme sera complète si on montre que $(Q_1(y_o, \eta_o))_k^j$ est inversible.

Or $(Q_1(y_o, \eta_o))_k^j$ est la $k^{i\text{ème}}$ coordonnée sur la base des h^k de $\tilde{R}^- \cdot \tilde{h}^j$.

Si $\det(Q_1(y_o, \eta_o)) = 0$, il existe x'' tel que :

$$\tilde{R}_{y_o, \eta_o}^-(\sum_j x''_j \cdot \tilde{h}^j) = 0$$

C'est à dire qu'il existe un élément u dans le noyau de $A_{\Sigma}^o(y_o, \eta_o)$ qui est dans l'image de $A_{\Sigma}^o(y_o, \eta_o)$.

On complète la base des $\tilde{h}^j$ par des fonctions propres de $A_{\Sigma}^o(y_o, \eta_o)$, $\tilde{h}^\beta$ et on a :

$$\langle u, h^j \rangle = 0 \quad j=1, \dots, p$$

$$\langle \tilde{h}^\beta, h^j \rangle = 0 \quad j=1, \dots, p$$

$\forall \beta$

Ceci est contradictoire avec la dimension du noyau de $A_{\Sigma}^{o*}(y_o, \eta_o)$.

Du lemme 4.3.8, des propositions 3.1.2 et 3.2.2 ; on déduit le résultat suivant.

On fait l'hypothèse suivante

[H3] Le noyau de $A_{\Sigma(y_o, \eta_o)}^0$ a une parité déterminée, i.e

$$\forall j = 1, \dots, p, \quad \sum_{i=1}^{\nu} |\alpha_i^j| = \sum_{i=1}^{\nu} |\alpha_i^k| \quad \forall k$$

Théorème 4.3.14

Soit P vérifiant les hypothèses du § 1 ; on suppose qu'en un point ρ_o de Σ , il existe p ν -tuples α tels que :

$$p'_{m-1}(\rho_o) + \sum_{j=1}^{\nu} (2\alpha_j^{i+1}) \lambda_j(\rho_o) = 0 \text{ pour } i=1, \dots, p$$

On suppose que les hypothèses [H2] et [H3] sont vérifiées.

Soit $a_i(\rho) = p'_{m-1}(\rho) + \sum_{j=1}^{\nu} (2\alpha_j^{i+1}) \lambda_j(\rho), i=1, \dots, p$

Alors P est strictement hypoelliptique au voisinage de ρ_o avec perte de 3/2 dérivées si et seulement si :

$$4.3.15 \quad \forall j=1, \dots, p ; \quad \frac{1}{i} \{a_j, \overline{a_j}\}_{\Sigma} < 0 \text{ au point } \rho_o$$

Ce théorème généralise les théorèmes 1.2 et 4.2.1.

Remarque 4.3.16

Dans le cas où l'hypothèse [H3] n'est pas satisfaite, il est raisonnable de penser que 4.3.15 reste une condition suffisante. Elle n'est sûrement pas nécessaire en général, car, comme, remarqué dans la proposition 3.3.1, E^+ n'est pas régulier et des termes d'ordre 1/2 de moins peuvent apparaitre. Ce problème est étudié dans [12].

B I B L I O G R A P H I E

- [1] R. Beals. A General Calculus of pseudodifferential operators
Duke Math. Journal Vol 42, n^o1, (1975).
- [2] L. Boutet de Monvel. F. Trèves : On a class of pseudodifferential
operators with double characteristics. Inventiones math. 24, 1.34
(1974).
- [3] L. Boutet de Monvel : Hypoelliptic operators with double charac-
teristics and related pseudodifferential operators. Comm. pure.
Appl. Math. 27, p585 - 639 (1974).
- [4] L. Boutet de Monvel. A. Grigis. B. Helffer (à paraître Astérisque)
- [5] Y.V. Egorov : Uspehi Tome 30, n^o2 et 3 (182) (1975).
- [6] A. Grigis : Hypoellipticité pour une classe d'opérateurs pseudo-
différentiels à caractéristiques doubles et parametrixes associées
(à paraître Astérisque).
- [7] V.V. Grusin : On a class of elliptic pseudodifferential operators
degenerate on a submanifold. Mat. Sbornik Tom 84 (126) (1971)
n^o2, p163-195, Math. USSR sb.13 (1971) n^o2, p155-185.
- [8] L. Hörmander : Pseudodifferential operators and hypoelliptic equa-
tions, Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math., 10 (1966), p138-183.
- [9] L. Hörmander : A class of Hypoelliptic Pseudodifferential operators
with double characteristics. Mathematische Annalen. 217 n^o2 1975.
- [10] J. Sjöstrand : Parametrixes for pseudodifferential operators
with multiple characteristics. Ark. för Mat. 12, p85-130. 1974.
- [11] K. Taira : Hypoelliptic differential operators with double
characteristics. Proc. Jap. Acad. 50 (1974) 124.
- [12] B. Helffer : Construction de parametrixes pour des opérateurs
pseudodifférentiels caractéristiques sur la réunion de deux cônes
lisses.

CONSTRUCTION DE PARAMETRIXES POUR DES OPERATEURS PSEUDODIFFERENTIELS
CARACTERISTIQUES SUR LA REUNION DE DEUX CONES LISSES

par B. HELFFER

INTRODUCTION

On se propose de construire des paramétrixes pour une classe d'opérateurs pseudo-différentiels sur X dont l'ensemble caractéristique est la réunion de deux cônes C^∞ . La construction de paramétrixes pour des classes d'opérateurs pseudo-différentiels dont l'ensemble caractéristique est un cône $C^\infty \Sigma$ a été réalisée dans de nombreux articles ([7], [1], [3], etc ...). Rappelons ici un résultat bien connu [4].

Soit P un opérateur pseudo-différentiel sur un ouvert X de $\mathbb{R}^n$ régulier d'ordre m (i.e son symbole admet un développement asymptotique en termes homogènes) dont le symbole principal p vérifie la condition

$$(H) \quad \frac{1}{i} \{p, \overline{p}\} x, \xi < 0 \text{ lorsque } p(x, \xi) = 0$$

Alors l'opérateur P admet une paramétrixe à gauche Q qui permet en particulier de démontrer l'hypoellipticité avec perte d' $1/2$ dérivée.

Rappelons également le résultat suivant qui motive l'étude faite ici.

Soit P_{2m-1} un opérateur pseudo-différentiel régulier d'ordre $2m-1$, alors $P^2 + P_{2m-1}$ admet (sous l'hypothèse (H) sur P) une paramétrixe à gauche Q donnant l'hypoellipticité avec perte d'une dérivée (cf. [7].)

On considère ici le problème suivant :

Soient P_1 et P_2 deux opérateurs pseudo-différentiels réguliers sur X d'ordre $1/2$, dont les symboles principaux p_j ($j=1,2$) vérifient (H) ; Soit A un opérateur régulier d'ordre 0 .

On considère

$$P = P_1 \cdot P_2 + A$$

et on se pose la question suivante :

Peut-on construire une paramétrixe pour P donnant l'hypoellipticité avec perte d'une dérivée ?

On montrera au chapitre V que c'est toujours possible, le fait intéressant étant que l'on peut se passer de faire des hypothèses sur la géométrie de Σ_1 et Σ_2 (où Σ_i ($i=1,2$) désigne l'ensemble caractéristique de p_i).

Dans les chapitres II, III, IV, on supposera que Σ_1 et Σ_2 sont quasi-transverses, mais on montrera au chapitre V que l'on peut toujours se ramener au cas où Σ_1 et Σ_2 sont transverses en "ajoutant des variables".

Au chapitre I, on introduit une classe d'opérateurs pseudo différentiels adaptée au problème et qui généralise la classe introduite par L. Boutet de Monvel dans [1].

On montre, au chapitre II, que des hypothèses du type (H) permettent de ramener la construction de paramétrixes à gauche ou à droite à l'étude de l'inversibilité d'opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux. On suppose ici que Σ_1 et Σ_2 sont quasi-transverses.

Le chapitre III, calqué sur l'article [2], développe la théorie adaptée à l'étude d'opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux. Il s'agit pour l'essentiel de montrer que, si on a une famille d'opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux dépendant de manière C^∞ d'un paramètre, alors on peut déduire de l'existence d'un inverse pour toute valeur d'un paramètre, l'existence d'un inverse dépendant de manière C^∞ du paramètre. La réponse positive à cette question est bien entendu liée à la forme particulière des opérateurs considérés.

Au chapitre IV, on fait l'étude de l'inversibilité pour chaque valeur du paramètre ; l'algèbre linéaire symplectique permet de ramener le problème à l'étude de quatre modèles simples.

Au chapitre V on énonce les théorèmes généraux, on montre comment on peut ramener la situation générale au cas transverse et on traite une application à la sous-ellipticité des systèmes. En particulier, on répond positivement à la question suivante :

Soit

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P_1 & B \\ A & P_2 \end{pmatrix}$$

où P_1 et P_2 sont des opérateurs pseudo-différentiels réguliers d'ordre $1/2$ dont le symbole principal vérifie (H) et où A et B sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0 régulier.

Alors $\mathcal{P}$ admet-il une paramétrix à gauche donnant la sous-ellipticité avec perte d' $1/2$ dérivée ?

Le plan de cet article est le suivant :

CHAPITRE I

Etude d'une classe de symboles

§ 1 Définition de la classe $S^{m,k_1,k_2,k}(U,\Sigma_1,\Sigma_2)$

§ 1.1 Préliminaires

§ 1.2 Rappels sur la classe de L.Boutet de Monvel

§ 1.3 Le modèle local dans le cas transverse

§ 1.4 Le modèle local dans le cas quasitransverse

§ 1.5 Définition invariante

§ 2 Estimation pour certaines intégrales oscillantes

CHAPITRE II

Opérateurs pseudo-différentiels

§ 1 La classe $OPS^{m,k_1,k_2,k}(X,\Sigma_1,\Sigma_2)$

§ 2 Opérateurs d'Hermite et construction de paramétrixes

§ 3 Le cas de j sous-cônes $\Sigma_1, \dots, \Sigma_j$

CHAPITRE III

Etude d'une classe d'opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux .

§ 1 Introduction

§ 2 Une classe d'opérateurs pseudo-différentiels

§ 3 Paramétrixes dans la classe $OPS^{m_1,m_2}_{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2}(E)$

CHAPITRE IV

Etude de l'inversibilité dans $\mathcal{Y}$

§ 1 Introduction

§ 2 Classification symplectique

§ 2.1 Le cas transverse

§ 2.2 Le cas quasitransverse $\dim \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = 1$

§ 2.3 Le cas quasitransverse $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$

§ 2.4 Conséquences; réduction du nombre de variables

§ 3 Etude de l'inversibilité dans $\mathcal{J}$ pour le modèle A1

§ 4 Etude de l'inversibilité dans $\mathcal{J}$ dans les autres cas

CHAPITRE V

Applications

§ 1 Enoncé des théorèmes - Démonstration dans le cas quasi-transverse.

§ 2 Démonstration dans le cas général

§ 3 Application aux systèmes

CHAPITRE I ETUDE D'UNE CLASSE DE SYMBOLES

§ 1. Définition de la classe $S^{m,k_1,k_2,k}(U, \Sigma_1, \Sigma_2)$

§ 1.1 Préliminaires

On considère un cône C^∞ arbitraire de dimension $N+1$, et $\Sigma_i \subset U$ ($i=1,2$) un sous cône fermé C^∞ de codimension v_i

On dira que Σ_1 et Σ_2 sont quasitransverses si

$\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ est un sous cône fermé C^∞ de U , tel qu'en tout point ρ de $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$,

$$T_\rho(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) = T_\rho(\Sigma_1) \cap T_\rho(\Sigma_2)$$

On dira que Σ_1 et Σ_2 sont transverses s'ils sont quasitransverses et si $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ est de codimension $v_1 + v_2$.

Localement, dire que Σ_1 et Σ_2 sont transverses, c'est dire qu'il existe des fonctions C^∞ sur U homogènes de degré 0, $u_1^1, \dots, u_1^{v_1}; u_2^1, \dots, u_2^{v_2}$ telles que les formes du_i^j sont indépendantes, et telles que

$$\begin{array}{lll} \Sigma_1 & \text{est définie par} & u_1^1 = 0; \dots; u_1^{v_1} = 0 \\ \Sigma_2 & & u_2^1 = 0; \dots; u_2^{v_2} = 0 \\ \Sigma_1 \cap \Sigma_2 & & u_1^1 = 0; \dots; u_1^{v_1} = 0, u_2^1 = 0, \dots, u_2^{v_2} = 0 \end{array}$$

Dire que Σ_1 et Σ_2 sont quasi transverses, c'est dire qu'il existe des fonctions C^∞ sur U homogènes de degré 0, $u_1^1, \dots, u_1^{v_1}; w^1, \dots, w^v, u_2^1, \dots, u_2^{v_2}$ telles que :

- $v = v_1 - v_1' = v_2 - v_2'$
- les formes du_i^j, dw^k sont indépendantes

$$\Sigma_1 \text{ est définie par } u_1^1 = 0, \dots, u_1^{v_1'} = 0, w^1 = 0, \dots, w^v = 0$$

$$\Sigma_2 \text{ est définie par } u_2^1 = 0, \dots, u_2^{v_2'} = 0, w^1 = 0, \dots, w^v = 0$$

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \text{ est définie par } u_1^1 = 0; \dots; u_1^{v_1'} = 0; u_2^1 = 0, \dots, u_2^{v_2'} = 0; w^1 = 0; \dots; w^v = 0$$

On peut prendre alors localement comme système de coordonnées

$$(u_1, u_2, w, v, r) = (u_1, u_2, w, \hat{v})$$

où

$v^1, \dots, v^\mu$ sont des fonctions C^∞ homogènes de degré $0 (\mu = N - \nu_1 - \nu_2 + \nu)$ et r est homogène de degré 1 strictement positive.

Dans la notation du second membre $\hat{v}$ est un système de coordonnées d'un cône localement isomorphe à $\mathbb{R}^\mu \times \mathbb{R}^+$

Si Σ est un sous-cône C^∞ arbitraire de U de codimension ν , on notera $(d_\Sigma)^2$ la somme d'une fonction strictement positive homogène de degré -1 et d'une fonction homogène de degré 0 s'annulant exactement à l'ordre 2 sur Σ .

Si Σ est défini localement par $u^1 = 0, \dots, u^\nu = 0$, on pourra prendre

$$d_\Sigma^2 = \sum_{i=1}^{\nu} u_i^2 + \frac{1}{r}$$

On utilisera constamment la définition suivante :

Soient f et g deux fonctions C^∞ sur U , on dira que :

$$f \lesssim g$$

si, dans tout sous-cône V de U à base compacte, il existe $C > 0$ et r_0 telle que

$$f \leq Cg$$

pour $r > r_0$ dans V .

Enfin, tout ce que nous ferons dans la suite est "local", c'est à dire que pour les applications que nous avons en vue, on peut toujours se restreindre à un voisinage conique.

§ 1.2 Rappels sur la classe de L. Boutet de Monvel [1]

Soit Σ un sous cône C^∞ dans U défini par $u = 0$. Si on prend comme coordonnées locales (u, v, r) , on pose la :

Définition 1.2.1

Si m, k sont des réels, on désigne par $S^{m,k}(U, \Sigma)$ l'ensemble

de toutes les fonctions $C^\infty a(u,v,r)$ sur U , telles que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^\nu$, $\beta \in \mathbb{N}^{N-\nu}$, on ait :

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^\beta \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^p a \right| \lesssim r^{m-p} d_\Sigma^{k-|\alpha|}$$

Pour étudier l'invariance par difféomorphisme, L. Boutet de Monvel avait montré l'équivalence avec la définition suivante :

Soit Σ un sous-cône C^∞ dans U de codimension ν

Définition 1.2.1'

Si m, k sont des réels, on désigne par $S^{m,k}(U, \Sigma)$ l'espace de toutes les fonctions $C^\infty a$ sur U , telles que, pour tous champs de vecteurs $X^1, \dots, X^p$, $Y^1, \dots, Y^q$ à coefficients C^∞ , homogènes de degré 0, avec les X_j tangents à Σ , l'on ait :

$$|X^1 \dots X^p \cdot Y^1 \dots Y^q a| \lesssim r^m d_\Sigma^{k-q}$$

L'équivalence locale de ces deux définitions vient du fait que si X est tangent à Σ , il peut s'écrire sous la forme :

$$X = \sum a_j \cdot \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum b_j \frac{\partial}{\partial v_j} + c \cdot r \frac{\partial}{\partial r}$$

où a_j, b_j, c sont C^∞ homogènes de degré 0 (donc sont dans $S^{0,0}$) et a_j s'annule sur Σ (donc est dans $S^{0,1}$)

§ 1.3 Le modèle local dans le cas transverse

Soit U le cône $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$, on prend comme coordonnées :

$$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \ni \tilde{u} = (u, r) = (u_1, u_2, v, r) \in \mathbb{R}^{\nu_1} \times \mathbb{R}^{\nu_2} \times \mathbb{R}^{N-\nu_1-\nu_2} \times \mathbb{R}^+$$

Soit Σ_i ($i=1,2$) le cône défini par $u_i=0$

On définit d_{Σ_1, Σ_2} par :

$$\frac{1}{d_{\Sigma_1, \Sigma_2}} = \frac{1}{d_{\Sigma_1}} + \frac{1}{d_{\Sigma_2}}$$

Soient m, k_1, k_2, k des nombres réels, on pose la définition

Définition 1.3.1

On désigne par $S^{m,k_1,k_2,k}(U,\Sigma_1,\Sigma_2)$, l'espace de toutes les fonctions $C^\infty a(\tilde{u})$ sur U , telles que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ et tous multi-indices $\alpha_1 \in \mathbb{N}^{\nu_1}$, $\alpha_2 \in \mathbb{N}^{\nu_2}$, $\beta \in \mathbb{N}^{N-\nu_1-\nu_2}$, on ait :

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial u_2} \right)^{\alpha_2} \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^{\beta} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^p a \right| \lesssim r^m d_{\Sigma_1}^{k_1-|\alpha_1|} d_{\Sigma_2}^{k_2-|\alpha_2|} \cdot (d_{\Sigma_1,\Sigma_2})^k$$

L'inégalité

$$1.3.1. \quad r^{-1/2} \lesssim d_{\Sigma_i} \lesssim 1 \quad i = 1, 2, \quad r^{-1/2} \lesssim d_{\Sigma_1,\Sigma_2} \lesssim 1$$

entraîne l'inclusion

$$1.3.2. \quad S^{m,k_1,k_2,k}(U) \subset S_{1/2,1/2}^{m-1/2 \cdot k_1 - 1/2 \cdot k_2 - 1/2 \cdot k}(U)$$

Rappelons [5] que $S_{1/2,1/2}^m(U)$ est la classe des symboles tels que :

$$1.3.3. \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^\alpha \cdot \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^p a \right| \lesssim r^{m + \frac{|\alpha|}{2}}$$

On notera

$$S^{m,k_1,k_2}(U,\Sigma_1,\Sigma_2) \quad \text{lorsque } k = 0$$

L'introduction d'une telle classe est justifiée par les remarques suivantes :

$$1.3.4. \quad S^{m,k_1}(U,\Sigma_1) \subset S^{m,k_1,0}(U,\Sigma_1,\Sigma_2)$$

$$1.3.5. \quad S^{m,k_2}(U,\Sigma_2) \subset S^{m,0,k_2}(U,\Sigma_1,\Sigma_2)$$

$$1.3.6. \quad \text{Si } p_1 \in S^{m,k_1,k_2,k}, \quad p_2 \in S^{m',k'_1,k'_2,k'}$$

$$p_1 p_2 \in S^{m+m',k_1+k'_1,k_2+k'_2,k+k'}$$

La proposition suivante nous permettra de donner une définition intrinsèque ultérieurement.

Proposition 1.3.2

Soit X un champ de vecteur à coefficients C^∞ homogène de degré 0. Alors

i) Si X est tangent à Σ_2 , X est continu de

$$S^{m,k_1,k_2,k} \longrightarrow S^{m,k_1-1,k_2,k}$$

ii) Si X est tangent à Σ_1 , X est continu de

$$S^{m,k_1,k_2,k} \longrightarrow S^{m,k_1,k_2-1,k}$$

iii) Si X est tangent à Σ_1 et Σ_2 , X est continu de

$$S^{m,k_1,k_2,k} \longrightarrow S^{m,k_1,k_2,k}$$

iv) Si X est quelconque, X est continu de

$$S^{m,k_1,k_2,k} \longrightarrow S^{m,k_1,k_2,k-1}$$

Démonstration

$$X = \sum_{i=1}^{v_1} a_i^1 \frac{\partial}{\partial u_1^i} + \sum_{i=1}^{v_2} a_i^2 \frac{\partial}{\partial u_2^i} + \sum_{i=1}^{N-v_1-v_2} b_i \frac{\partial}{\partial v_i} + c r \frac{\partial}{\partial r}$$

où a_i^j , b_i , c sont des fonctions C^∞ homogènes de degré 0, et sont donc dans $S^{0,0,0,0}$

(iv) s'en déduit aisément.

Si X est tangent à Σ_1 , alors les fonctions a_i^1 s'annulent sur Σ_1 et il est facile de voir qu'elles sont alors dans $S^{0,1,0,0}$

Le point i) (et ii) s'en déduit.

Si X est tangent à Σ_1 et Σ_2 , alors les fonctions a_i^1 s'annulent sur Σ_1 et les fonctions a_i^2 s'annulent sur Σ_2 , on vérifie alors aisément (iii).

Ces classes ont bien entendu d'autres propriétés, mais que nous exposerons dans un cas qui généralise la situation précédente, i.e le cas quasi-transverse.

§ 1.4. Le modèle local dans le cas quasi-transverse

Soit U le cône $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$,

On désigne par :

$$\tilde{u} = (u, r) = (u_1, u_2, w, v, r) \in \mathbb{R}^{\nu_1'} \times \mathbb{R}^{\nu_2'} \times \mathbb{R}^{\nu} \times \mathbb{R}^{N-\nu_1'-\nu_2'-\nu} \times \mathbb{R}^+$$

la variable de U , et soit

$\Sigma_i (i=1,2)$ le sous-cône défini par $u_i=0, w=0$

$\Sigma_i (i=1,2)$ est donc de codimension $\nu_i = \nu_i' + \nu$

d_{Σ_i} est défini bien entendu par : $d_{\Sigma_i}^2 = |u_i|^2 + |w|^2 + \frac{1}{r}$

d_{Σ_1, Σ_2} est encore défini par : $d_{\Sigma_1, \Sigma_2}^{-1} = d_{\Sigma_1}^{-1} + d_{\Sigma_2}^{-1}$

on pose la définition suivante :

Définition 1.4.1

Si m, k_1, k_2, k désignent des réels,

on désigne par $S^{m, k_1, k_2, k}$, l'espace de Fréchet de toutes les fonctions $C^\infty a(\tilde{u})$ sur U , telles que pour tout entier p et tout multi-
indice $\alpha_1 \in \mathbb{N}^{\nu_1'}$, $\alpha_2 \in \mathbb{N}^{\nu_2'}$, $\alpha \in \mathbb{N}^{\nu}$, $\beta \in \mathbb{N}^{N-\nu_1'-\nu_2'-\nu}$, on ait :

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial u_2} \right)^{\alpha_2} \left(\frac{\partial}{\partial w} \right)^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^{\beta} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^p a \right| \lesssim r^m d_{\Sigma_1}^{k_1 - |\alpha_1|} d_{\Sigma_2}^{k_2 - |\alpha_2|} d_{\Sigma_1, \Sigma_2}^{k - |\alpha|}$$

On notera encore simplement S^{m, k_1, k_2} si $k = 0$.

Lorsque $\nu = 0$, on retombe sur la définition 1.3.1, de sorte que

tout ce que nous montrerons dans ce § s'applique au cas précédent.

Les propriétés 1.3.1, 1.3.2, 1.3.4, 1.3.5 et 1.3.6 sont bien entendu vérifiées.

Donnons un exemple de symbole appartenant à cette classe.

Exemple 1.4.2 :

Soit a dans $S_{\text{reg}}^m(U)$ un symbole semirégulier ($a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-j/2}$)
et soient k_1, k_2 deux entiers positifs, alors a est dans S^{m, k_1, k_2} si
et seulement si :

$$(1.4.1) \quad a_{m-j/2}(u_1, u_2, w, v, r) = \sum_{\substack{|\beta_1| \leq k_1 \\ |\beta_2| \leq k_2 \\ |\beta_1| + |\beta_2| + |\beta| = (-j + k_1 + k_2)^+}} C_{\beta_1, \beta_2, \beta, j} u_1^{\beta_1} u_2^{\beta_2} w^{\beta}$$

où $C_{\beta_1, \beta_2, \beta, j}$ est une fonction C^∞ sur U homogène d'ordre $m-j/2$

La condition est vide pour $j > k_1 + k_2$

Démonstration

La condition suffisante est facile à vérifier ; montrons que
la condition est nécessaire.

Utilisant un développement de Taylor (et raisonnant par j croissants
successifs), on doit montrer que :

$$\frac{\partial^{\beta_1}}{\partial u_1^{\beta_1}} \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial u_2^{\beta_2}} \frac{\partial^{\beta}}{\partial w^{\beta}} a_{m-j/2} \equiv 0 \quad \text{sur } \Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$$

dans les cas suivants :

(A) lorsque $|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta| + j < k_1 + k_2$

(B) lorsque $|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta| + j = k_1 + k_2$

(B 1) $|\beta| + |\beta_2| < k_2 - j$

(B 2) $|\beta| + |\beta_1| < k_1 - j$

Cas A : Il résulte de l'estimation sur $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ que :

$$\left| \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial u_1^{\beta_1}} \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial u_2^{\beta_2}} \frac{\partial^{\beta}}{\partial w^{\beta}} a_{m-j/2} \right| \lesssim r^m \cdot r^{-\left(\frac{k_1 - |\beta_1|}{2}\right)} r^{-\left(\frac{k_2 - |\beta_2|}{2}\right)} r^{\frac{|\beta|}{2}}$$

Le terme de gauche a comme homogénéité $m-j/2$, celui de droite

$$m - \frac{k_1 + k_2 - |\beta_1| - |\beta_2| - |\beta|}{2} \quad \text{d'où le résultat en faisant tendre } r$$

vers l^∞ .

Pour la vérification de (B1) et (B2), on raisonne en tout point de Σ_1 extérieur à Σ_2 (ou tout point de Σ_2 extérieur à Σ_1), le résultat est alors celui de [1].

Corollaire 1.4.3 :

Pour $k_1 \geq 0, k_2 \geq 0$

$$S^{m,k_1,k_2}(U, \Sigma_1, \Sigma_2) \cap S_{\text{reg}}^m(U) \subset S^{m,k_1+k_2}(U, \Sigma_1 \cap \Sigma_2)$$

Ce corollaire évident permet de relier la théorie développée ici à celle développée dans [1] [2] ; on en verra bientôt des applications.

Exemple 1.4.4 :

Soit a une fonction C^∞ homogène de degré 0 s'annulant sur Σ_1 et Σ_2 , alors $a \in S^{0,0,0,1}$.

Si a s'annule sur Σ_1

$$a(u_1, u_2, w, v, r) = \sum_{i=1}^{v'_1} u_1^i \cdot b_i(u_1, u_2, w, v, r) + \sum_{j=1}^v w^j c_j(u_1, u_2, w, v, r)$$

où les b_i, c_j sont C^∞ homogènes de degré 0.

$\sum_{j=1}^v w^j c_j$ s'annule sur Σ_2 . On doit donc se limiter à considérer

$$\sum_{i=1}^{v'_1} u_1^i b_i(u_1, u_2, w, v, r)$$

On suppose que :

$$\sum_{i=1}^{v'_1} u_1^i b_i(u_1, u_2, w, v, r)$$

est nul sur Σ_2 .

$$b_i(u_1, u_2, w, v, r) = b_i(u_i, 0, 0, v, r) + \sum_{j=1}^{v'_2} u_2^j b_{ij}(u_1, u_2, w, v, r) \\ + \sum_{k=1}^v b_{ik} \cdot w^k$$

Par conséquent :

$$f = \sum_{i=1}^{v'_1} u_1^i b_i(u_1, u_2, w, v, r) = \sum_{i=1}^{v'_1} u_1^i b_i(u_1, 0, 0, v, r) \\ + \sum_{i=1}^{v'_1} \sum_{j=1}^{v'_2} b_{ij}(u_1, u_2, w, v, r) u_1^i u_2^j \\ + \sum_{k=1}^v \tilde{b}_{ik} w^k$$

Dire que cette expression s'annule sur Σ_2 , c'est dire que

$$f(u_1, 0, 0, v, r) = \sum_{i=1}^{v'_1} u_1^i b_i(u_1, 0, 0, v, r) \text{ est identiquement nul.}$$

C'est à dire que f (et donc a) est dans l'idéal engendré par $(u_1^i u_2^j)$

et w^k . Il suffit donc de vérifier la propriété pour $(u_1^i u_2^j)$ et pour w^k . Or on a :

$$(u_1^i u_2^j) \lesssim d_{\Sigma_1} d_{\Sigma_2} \lesssim \frac{1}{\frac{1}{d_{\Sigma_1}} + \frac{1}{d_{\Sigma_2}}} = \frac{d_{\Sigma_1} d_{\Sigma_2}}{d_{\Sigma_1} + d_{\Sigma_2}} \\ w^k \lesssim \frac{d_{\Sigma_1} d_{\Sigma_2}}{d_{\Sigma_1} + d_{\Sigma_2}} \text{ car } w^k \lesssim d_{\Sigma_1} \text{ et } w^k \lesssim d_{\Sigma_2}$$

On vérifie facilement les estimations pour les dérivées.

Ceci termine la démonstration du lemme.

On démontre la proposition suivante :

Proposition 1.4.5 :

Soit X un champ de vecteur à coefficients C^∞ homogène de degré 0. Alors

i) Si X est tangent à Σ_2 , X est continu de

$$S^{m,k_1,k_2,k} \longrightarrow S^{m,k_1-1,k_2,k}$$

ii) Si X est tangent à Σ_1 , X est continu de

$$S^{m,k_1,k_2,k} \longrightarrow S^{m,k_1,k_2-1,k}$$

iii) Si X est tangent à Σ_1 et Σ_2 , X est continu de

$$S^{m,k_1,k_2,k} \longrightarrow S^{m,k_1,k_2,k}$$

iv) Si X est quelconque, X est continu de

$$S^{m,k_1,k_2,k} \longrightarrow S^{m,k_1,k_2,k-1}$$

Le seul point où la démonstration diffère de celle de la proposition 1.3.2 est le point iii) .

Démonstration du point iii)

$$X = \sum_{i=1}^{v'_1} a_i^1 \frac{\partial}{\partial u_i^1} + \sum_{i=1}^{v'_2} a_i^2 \frac{\partial}{\partial u_i^2} + \sum_{j=1}^v b_j \frac{\partial}{\partial w^j} + \sum_{k=1}^{N-v'_1-v'_2-v} c_k \frac{\partial}{\partial v_k} + d r \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)$$

Si X est tangent à Σ_1 , a_i^1 et b_j doivent s'annuler sur Σ_1 , en particulier

$$a_i^1 \in S^{0,1,0,0}, \quad b_j \in S^{0,1,0,0}$$

Si X est tangent à Σ_2 , a_i^2 et b_j doivent s'annuler sur Σ_2 , en particulier

$$a_i^2 \in S^{0,0,1,0}, \quad b_j \in S^{0,0,1,0}$$

On déduit de l'exemple 1.4.4 que b_j est dans $S^{0,0,0,1}$. La démonstration est alors aisée.

§ 1.5 Définition invariante

On considère un cône C^∞ arbitraire U , et $\Sigma_i \subset U, (i=1,2)$ un sous cône fermé de codimension ν_i .

Il résulte des § 1.4 et 1.5 que, lorsque Σ_1 et Σ_2 sont quasitransverses, on peut prendre la définition suivante qui est clairement invariante par difféomorphisme :

Définition 1.5.1:

m, k_1, k_2, k étant des réels donnés, on désigne par $S^{m, k_1, k_2, k}(U, \Sigma_1, \Sigma_2)$ l'espace de Fréchet de toutes les fonctions C^∞ sur U telles que :

Pour tous champs de vecteurs C^∞ homogènes de degré 0, $X_1^1, \dots, X_1^{p_1}, X_2^1, \dots, X_2^{p_2}, Y^1, \dots, Y^q; Z^1, \dots, Z^p$ avec X_1^j tangent à Σ_2 , X_2^j tangent à Σ_1 , Y^j tangent à Σ_1 et Σ_2 , on ait :

$$|X_1^1 \dots X_1^{p_1} X_2^1 \dots X_2^{p_2} \cdot Y^1 \dots Y^q \cdot Z^1 \dots Z^p a| \lesssim r^m d_{\Sigma_1}^{k_1 - p_1} d_{\Sigma_2}^{k_2 - p_2} d_{\Sigma_1, \Sigma_2}^{k - p}$$

Remarque 1.5.2 :

L'hypothèse que Σ_1 et Σ_2 sont quasitransverses n'intervient dans la définition que pour montrer que $S^{m, k_1, k_2, k}$ est métrisable. On pourra donc utiliser cette définition avec précaution dans le cas non quasitransverse.

Remarque 1.5.3 :

Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $T^*X \setminus 0$ le fibré cotangent à X privé de la section nulle. Soient U_1, U_2, U_3 des sous-cônes ouverts de $T^*X \setminus 0$ tels que $U_1 \subset U_2 \subset U_3$ (i.e $U_1 \cap S^*X \subset U_2 \cap S^*X \subset U_3 \cap S^*X$).

Soient Σ_1, Σ_2 des sous-cônes fermés de U_3

Alors si a est dans $S^{m, k_1, k_2, k}(U_2, \Sigma_1 \cap U_2, \Sigma_2 \cap U_2)$, il existe $\tilde{a}$ dans

$S^{m, k_1, k_2, k}(U_3, \Sigma_1, \Sigma_2)$ telle que $\tilde{a} = a$ dans U_1 .

Remarque 1.5.4 :

Soit $V \subset U$ alors si $a \in S^{m,k_1,k_2,k}(U, \Sigma_1, \Sigma_2)$,
 $a|_V \in S^{m,k_1,k_2,k}(V, \Sigma_1 \cap V, \Sigma_2 \cap V)$.

Proposition 1.5.5 :

On suppose que Σ_1 et Σ_2 sont quasitransverses.
 Soit U' un second cône C^∞ , $\phi : U' \rightarrow U$ une application C^∞ , homogène
 de degré 1 transverse à Σ_1, Σ_2 et $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ et posons

$$\Sigma'_i = \phi^{-1}(\Sigma_i) (i=1,2)$$

Alors $a \rightarrow a \circ \phi$ est continue de $S^{m,k_1,k_2,k}(U, \Sigma_1, \Sigma_2)$ dans
 $S^{m,k_1,k_2,k}(U', \Sigma'_1, \Sigma'_2)$.

Démonstration On prend des cartes locales pour U et U' de sorte
 que Σ_1, Σ_2, ϕ sont mis sous forme canonique.

§ 2. ESTIMATIONS POUR CERTAINES INTEGRALES OSCILLANTES

Soit U un cône C^∞ , Δ un sous-cône C^∞ fermé, Σ_1 et Σ_2 deux
 sous-cônes C^∞ fermés de U contenus dans Δ .

On définit $d_{\Sigma_1}, d_{\Sigma_2}, d_\Delta, d_{\Sigma_1, \Sigma_2}$ comme au paragraphe 1, mais on notera
 pour abréger, $d_1, d_2, d_\Delta, d_{12}$.

Soient m, k_1, k_2, k, l des nombres réels, on pose la

Définition 2.1 :

On désigne par $QS^{m,k_1,k_2,k,l}(U, \Sigma_1, \Sigma_2, \Delta)$ l'ensemble de toutes
 les fonctions C^∞ a sur U telles que, pour tout champ de vecteur homo-
 gène de degré 0 $X^1, \dots, X^p; W^1, \dots, W^q; Y_1^1, \dots, Y_1^{p_1}; Y_2^1, \dots, Y_2^{p_2}; Z^1, \dots, Z^s$

où X^i est tangent à Σ_1, Σ_2 et Δ , $i=1, \dots, p$

W^i est tangent à Δ $i=1, \dots, q$

Y_1^i est tangent à Σ_2 et Δ , $i=1, \dots, p_1$

Y_2^i " " à Σ_1 et Δ , $i=1, \dots, p_2$

Z^i est quelconque

On ait :

$$(2.1) \quad |X^1 \dots X^p W^1 \dots W^q Y_1^1 \dots Y_1^{p_1} Y_2^1 \dots Y_2^{p_2} Z^1 \dots Z^s a| \lesssim r^m d_1^{k_1} d_2^{k_2} d_{12}^k (r^{1/2} d_\Delta)^{l+p} (r^{1/2} \frac{d_\Delta}{d_1})^{p_1} (r^{1/2} \frac{d_\Delta}{d_2})^{p_2} (r^{1/2} \frac{d_\Delta}{d_{12}})^q \cdot r^{s/2}$$

On écrira $QS^{m, k_1, k_2, k, l}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

$$(2.2) \quad \text{On a } QS^{m, k_1, k_2, k, l} \subset S_{1/2}^{m - \frac{1}{2}k_1^- - \frac{1}{2}k_2^- - \frac{1}{2}k^- + \frac{1}{2}^+} \quad (U)$$

Les résultats suivants sont immédiats à partir de la définition :

$$(2.3) \quad \text{Si } a \in QS^{m, k_1, k_2, k, l}, b \in QS^{m', k'_1, k'_2, k', l'} \text{ alors } ab \in QS^{m+m', k_1+k'_1, k_2+k'_2, k+k', l+l'}$$

$$(2.4) \quad \text{Si } X \text{ est un champ de vecteur } C^\infty, \text{ homogène de degré } 0, \text{ et } a \in QS^{m, k_1, k_2, k, l} \text{ alors}$$

$$X a \in QS^{m, k_1, k_2, k, l+1} \quad \text{Si } X \text{ est tangent à } \Sigma_1, \Sigma_2 \text{ et } \Delta.$$

$$X a \in QS^{m, k_1-1, k_2, k, l+1} \quad \text{Si } X \text{ est tangent à } \Sigma_2 \text{ et } \Delta.$$

$$X a \in QS^{m, k_1, k_2-1, k, l+1} \quad \text{Si } X \text{ est tangent à } \Sigma_1 \text{ et } \Delta$$

$$X a \in QS^{m, k_1, k_2, k-1, l+1} \quad \text{Si } X \text{ est tangent à } \Delta$$

$$X a \in QS^{m+1/2, k_1, k_2, k, l} \quad \text{Si } X \text{ est quelconque}$$

$$(2.4) \quad \text{Si } a \in QS^{m, k_1, k_2, k, l} \text{ et } a \gtrsim r^m d_1^{k_1} d_2^{k_2} (r^{1/2} d_\Delta)^l d_{12}^k \text{ alors } a^{-1} \in QS^{-m, -k_1, -k_2, -k, -l}$$

(2.5) La classe est invariante par difféomorphisme.

On a les propositions suivantes :

Proposition 2.2 :

Soit $\tilde{\Sigma}_1, \tilde{\Sigma}_2$ deux cônes C^∞ de U et on suppose que $\tilde{\Sigma}_i$ coupe Δ transversalement le long de $\Sigma_i (i=1,2)$.

On suppose de plus que tout champ tangent à Σ_1, Σ_2 et Δ peut s'écrire comme la somme d'un champ tangent à $\tilde{\Sigma}_1$ et $\tilde{\Sigma}_2$ et d'un champ nul sur Δ .

Alors

$$S^{m, k_1, k_2, k}(U, \tilde{\Sigma}_1, \tilde{\Sigma}_2) \subset QS^{m, k_1, k_2, k, -k_1 - k_2 - k}(U, \Sigma_1, \Sigma_2, \Delta)$$

Nous ne démontrerons pas cette proposition, mais elle est pratiquement identique à celle de la proposition 2.5.

Remarque 2.3 :

Lorsque $\tilde{\Sigma}_1$ et $\tilde{\Sigma}_2$ sont quasitransverses, et que $\tilde{\Sigma}_1, \tilde{\Sigma}_2, \tilde{\Sigma}_1 \cap \tilde{\Sigma}_2$ sont transverses à Δ le long respectivement de $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_1 \cap \Sigma_2$. Alors on peut écrire en coordonnées locales au voisinage de Δ tout champ tangent à Σ_1, Σ_2 et Δ comme la somme d'un champ tangent à $\tilde{\Sigma}_1$ et $\tilde{\Sigma}_2$ et d'un champ nul sur Δ .

On a le lemme suivant :

Lemme 2.4 :

Soit $U = \Delta \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ un cône défini par $(\lambda u, z, \lambda \zeta) = \lambda(u, z, \zeta)$. Soit ϕ une application C^∞ homogène de degré 1 de U sur Δ , induisant l'identité lorsqu'elle est restreinte à Δ .

Soient Σ_1 et Σ_2 deux sous-cônes de Δ , alors tout champ homogène de degré 0 tangent à Σ_1 et Δ (resp. Σ_2 et Δ , resp. Σ_1, Σ_2 et Δ) s'écrit localement au voisinage de Δ comme la somme d'un champ tangent à $\phi^{-1}(\Sigma_1)$ (resp. $\phi^{-1}(\Sigma_2)$, resp. $\phi^{-1}(\Sigma_1)$ et $\phi^{-1}(\Sigma_2)$) et d'un champ nul sur Δ .

Démonstration

Soit Φ l'application de U dans U définie par :

$$\Phi(u, z, \zeta) = (\Phi, z, \zeta)$$

C'est un difféomorphisme dans un voisinage conique de Δ , qui conserve Δ . Grâce à ce difféomorphisme, on se ramène à démontrer le lemme dans le cas où Φ est la projection de U sur Δ .

Tout champ tangent à Δ s'écrit comme la somme d'un champ constant en

$$(z, \zeta) : \sum_{i=1}^N a_i(u) \frac{\partial}{\partial u_i} \quad \text{et d'un champ nul sur } \Delta.$$

Si $\sum a_i(u) \frac{\partial}{\partial u_i}$ est tangent à Σ_1 (resp. Σ_2 , resp. Σ_1 et Σ_2) il est encore tangent à $\Phi^{-1}(\Sigma_1)$ (resp. $\Phi^{-1}(\Sigma_2)$, resp. $\Phi^{-1}(\Sigma_1)$ et $\Phi^{-1}(\Sigma_2)$ qui s'identifie à $\Sigma_1 \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ (resp. $\Sigma_2 \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, resp. $\Sigma_1 \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ et $\Sigma_2 \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$).

Ceci montre le lemme dans le cas où Φ est la projection.

Proposition 2.5 :

Sous les hypothèses du lemme 2.4, si $a \in S^{m, k_1, k_2, k}(\Delta, \Sigma_1, \Sigma_2)$ alors $a_o \Phi \in QS^{m, k_1, k_2, k, -k_1 - k_2 - k}(U, \Sigma_1, \Sigma_2, \Delta)$ où Δ est identifié à Δ est $\Delta \times \{0\}$ dans U .

Démonstration

Comme précédemment, on se ramène localement au voisinage de Δ (mais c'est seulement là qu'on a à démontrer quelque chose) au cas où Φ est une projection de U sur Δ .

Soit d_{Σ_i} la distance à Σ_i dans U (en abrégé d_i)

$\tilde{d}_{\Sigma_i}$ la distance à Σ_i dans Δ (ou la distance à $\Phi^{-1}(\Sigma_i)$ dans U)
(en abrégé $\tilde{d}_i$)

On définit de même

d_{Σ_1, Σ_2} , $\tilde{d}_{\Sigma_1, \Sigma_2}$ en abrégé d_{12} , $\tilde{d}_{12}$.

On a

$$(2.6) \quad d_i \sim \tilde{d}_i + d_\Delta \quad i = 1, 2$$

$$(2.7) \quad 1 \lesssim \frac{d_i}{\tilde{d}_i} \lesssim 1 + \frac{d_\Delta}{\tilde{d}_i} \lesssim (r^{1/2} d_\Delta)$$

Si $a \in S^{m, k_1, k_2, k}(\Delta, \Sigma_1, \Sigma_2)$; $a \circ \Phi = a$ ne dépend pas de (z, ζ)

$$|a| \lesssim r^m \tilde{d}_1^{k_1} \cdot \tilde{d}_2^{k_2} \cdot \tilde{d}_{12}^k$$

On veut en déduire que

$$(2.8) \quad |a| \lesssim r^m d_1^{k_1} d_2^{k_2} (d_{12})^k (r^{1/2} d_\Delta)^{-(k_1-) - (k_2-) - (k-)}$$

Ceci résulte de (2.6) , (2.7) et de l'inégalité

$$(2.9) \quad 1 \lesssim \frac{d_{12}}{\tilde{d}_{12}} \lesssim (r^{1/2} d_\Delta)$$

On considère maintenant l'action d'un champ de vecteur homogène de degré 0 :

Soit un champ tangent à Σ_2 et Δ , alors on l'écrit comme la somme $Y_1 = Y_1' + Y_1''$ d'un champ constant (en z, ζ) à $\tilde{\Sigma}_2 = \Sigma_2 \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ et d'un champ nul sur Δ .

Alors si $a \in S^{m, k_1, k_2, k}(\Delta, \Sigma_1, \Sigma_2)$ (considéré comme symbole sur U)

$$Y_1 a \in S^{m, k_1-1, k_2, k}(\Delta, \Sigma_1, \Sigma_2) + J_\Delta \cdot S^{m, k_1, k_2, k-1}(\Delta, \Sigma_1, \Sigma_2)$$

On identifie les fonctions C^∞ sur U indépendantes de (z, ζ) avec les fonctions sur Δ .

J_Δ est l'idéal des fonctions C^∞ homogènes de degré 0 sur U qui s'annulent sur Δ .

J_Δ^0 désigne par convention l'espace des fonctions C^∞ sur U homogènes de degré 0.

Si $Y_1^1, \dots, Y_1^{p_1}$ sont des champs tangents à Σ_2 et Δ , on en déduit que

$$Y_1^1 \dots Y_1^{p_1} a \in \sum_{l_1=0}^{p_1} (J_\Delta)^{l_1} S^{m, k_1-p_1+l_1, k_2, k-l_1}(\Delta, \Sigma_1, \Sigma_2)$$

De même, on a :

$$Y_2^1 \dots Y_2^{p_2} a \in \sum_{l_2=0}^{p_2} (J_\Delta)^{l_2} S^{m, k_1, k_2 - p_2 + l_2, k - l_2}(\Delta, \Sigma_1, \Sigma_2)$$

Si X est tangent à Σ_1, Σ_2 et Δ , alors

$$X a \in S^{m, k_1, k_2, k} + (J_\Delta) S^{m, k_1, k_2, k-1}$$

de sorte que si $X^1 \dots X^p$ désignent des champs de vecteurs C^∞ tangents à Σ_1, Σ_2 et Δ .

alors

$$X^1 \dots X^p a \in \sum_{l=0}^p (J_\Delta)^l S^{m, k_1, k_2, k-l}$$

Si W^i est tangent à Δ (homogène de degré 0)

$$W^1 \dots W^q a \in J_\Delta^0 \cdot S^{m, k_1, k_2, k-q}$$

On en déduit que :

$$W^1 \dots W^q X^1 \dots X^p Y_1^1 \dots Y_1^{p_1} Y_2^1 \dots Y_2^{p_2} a \in \sum_{l=0}^p \sum_{l_1=0}^{p_1} \sum_{l_2=0}^{p_2} (J_\Delta)^{l+l_1+l_2} S^{m, k_1 - p_1 + l_1, k_2 - p_2 + l_2, k - l_1 - l_2 - l - q}$$

car les champs tangents à Δ , respectent J_Δ^j .

Enfin si Z^i est quelconque :

$$Z^1 \dots Z^s W^1 \dots W^q X^1 \dots X^p Y_1^1 \dots Y_2^{p_2} a \in \sum_{i=0}^s \sum_{l=0}^p \sum_{l_1=0}^{p_1} \sum_{l_2=0}^{p_2} (J_\Delta)^{(l+l_1+l_2-i)} \times S^{m, k_1 - p_1 + l_1, k_2 - p_2 + l_2, k - l_1 - l_2 - l - q + i - s}$$

On a donc à considérer

$$r^m (d_\Delta)^{(l_1+l_2+l-i)+} \sim_{d_1}^{k_1 - p_1 + l_1} \sim_{d_2}^{k_2 - p_2 + l_2} \sim_{d_{12}}^{k - l_1 - l_2 - l - q + i - s}$$

qu'on majore, en utilisant (2.6), (2.7), (2.8), (2.9), par :

$$(2.10) \quad |Z^1 \dots Z^s \cdot W^1 \dots W^q \cdot X^1 \dots X^p \cdot Y_1^1 \dots Y_2^{p_2} a| \lesssim \\ \lesssim r^m d_1^{k_1} d_2^{k_2} (d_{12})^k (r^{1/2} d_\Delta)^{-(k_1)-(k_2)-(k-)} (r^{1/2} d_\Delta)^{p_1+p_2+p+q} \times \\ \times (d_{12})^{-q} (d_1)^{-p_1} (d_2)^{-p_2} r^{s/2}$$

Ceci termine la démonstration de la proposition 2.5.

On garde les mêmes notations mais on suppose que $p=q=n$.

Soit a dans $QS^{m,k_1,k_2,k,l}(U, \Sigma_1, \Sigma_2, \Delta)$ un symbole nul pour $\frac{1}{r}|\zeta| + z \geq C$ (où C est >0). Comme auparavant, r est une fonction C^∞ strictement positive sur Δ qu'on identifie à une fonction sur U (indépendante de z, ζ).

Nous posons

$$(2.11) \quad I(a) = \iint e^{i z \cdot \zeta} \cdot a(u, z, \zeta) dz \cdot d\zeta$$

alors

Proposition 2.6 :

Avec les notations ci-dessus, nous avons

$$I(a) \in S^{m,k_1,k_2,k}(\Delta, \Sigma_1, \Sigma_2)$$

Démonstration

Soit $X_1^1, \dots, X_1^{p_1}, X_2^1, \dots, X_2^{p_2}, Y^1, \dots, Y^q, Z^1, \dots, Z^p$ des champs de vecteurs homogènes de degré 0 sur Δ , tels que :

$$X_1^i \text{ (resp. } X_2^i \text{ resp. } Y^i) \text{ est tangent à } \Sigma_2 \text{ (resp. } \Sigma_1, \text{ resp. } \Sigma_1 \text{ et } \Sigma_2)$$

Alors

$$X_1^1 \dots Z^p I(a) = I(X_1^1 \dots Z^p a)$$

et

$$X_1^1 \dots Z^p a \in QS^{m,k_1-p_1,k_2-p_2,k-p,l+p_1+p_2+q+p}$$

En effet ramené sur U, X_1^i est tangent à Σ_2 et Δ
 X_2^i est tangent à Σ_1 et Δ
 Y^i est tangent à Σ_1, Σ_2 et Δ
 Z^j est tangent à Δ

Il est donc suffisant de montrer que

$$|I(a)| \lesssim r^m d_{\Sigma_1}^{k_1} d_{\Sigma_2}^{k_2} (d_{\Sigma_1, \Sigma_2})^k \quad (d_{\Sigma_i} \text{ est la distance à } \Sigma_i \text{ dans } \Delta)$$

Soit $d_{\Sigma_i}^U$, d_{Σ_1, Σ_2}^U les fonctions associées à Σ_i sur Δ , identifiées avec une fonction sur U indépendante de (z, ζ) ; il résulte de la proposition 2.5 que :

$$c \equiv (d_{\Sigma_1}^U)^{-k_1} (d_{\Sigma_2}^U)^{-k_2} (d_{\Sigma_1, \Sigma_2}^U)^{-k} r^{-m} \in QS^{-m, -k_1, -k_2, -k, k_1^+ + k_2^+ + k^+}$$

Par conséquent

$$b = c.a$$

est dans $QS^{0,0,0,0,1+k_1^++k_2^++k^+}$

et il suffit de montrer que si b est dans la classe ci-dessus, alors

$$I(b) \lesssim 1.$$

Choisissons $N \geq \sup \left(\frac{1+k_1^++k_2^++k^+, 0}{2} \right)$, alors

$$b = (1 + r|z|^2 + \frac{1}{r}|\zeta|^2)^{-N} a$$

est dans $QS^{0,0,0,-2N+1+k_1^++k_2^++k^+} \subset S_{1/2}^0(U)$

Or, en intégrant par partie, on a :

$$I(a) = I((1 - r\Delta_\zeta - \frac{1}{r}\Delta_z)^N b)$$

Lorsque b est dans $S_{1/2}^0(U)$, on sait que I(b) est majoré (cf. lemme 2.8 de [1]).

Ce qui démontre la proposition.

CHAPITRE II OPERATEURS PSEUDODIFFERENTIELS

§ 1. La classe $OPS^{m,k_1,k_2,k}(X,\Sigma_1,\Sigma_2)$

Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$, U le cône $T^*X \setminus \{0\} = X \times \{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$ et Σ_1, Σ_2 deux sous-cônes C^∞ fermés de U qu'on supposera, pour simplifier quasi-transverses.

Soit $a = a(x, \xi)$ une fonction C^∞ sur $X \times \mathbb{R}^n$ telle que $a \in S^{m,k_1,k_2,k}(U, \Sigma_1, \Sigma_2)$ dans U .

Alors, on définit l'opérateur pseudodifférentiel $a(x, D)$ par :

$$a(x, D) f = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

pour f dans $C_0^\infty(X)$.

On désignera par $OPS^{m,k_1,k_2,k}(X, \Sigma_1, \Sigma_2)$ l'ensemble de tous les opérateurs de la forme $a(x, D) + \mathcal{R}$ où a est comme ci-dessus et $\mathcal{R}$ est un opérateur à noyau C^∞ .

Si V est un sous-cône ouvert de $T^*X \setminus \{0\}$, $OPS^{m,k_1,k_2,k}(V, \Sigma_1, \Sigma_2)$ est l'ensemble des opérateurs de la forme $a(x, D) + \mathcal{R}$ où $a(x, \xi)$ est dans $S^{m,k_1,k_2,k}(V, \Sigma_1, \Sigma_2)$, et $\mathcal{R}$ envoie toute distribution à support compact en une distribution dont le spectre singulier (Wave Front) est disjoint de V .

Proposition 1.1 :

Soient a et b des fonctions C^∞ sur $X \times \mathbb{R}^n$, $a \in S^{m,k_1,k_2,k}$,
 $b \in S^{m',k'_1,k'_2,k'}$ et supposons $b(x, \xi) = 0$ pour $x \notin K$, où K est un compact dans X .
 Alors nous avons $a(x, D) \circ b(x, D) \in OPS^{m+m', k_1+k'_1, k_2+k'_2, k+k'}$

Démonstration :

Si nous posons $c(x, D) = a(x, D) \circ b(x, D)$ nous avons :

$$\begin{aligned} c(x, \xi) &= e^{-ix \cdot \xi} a(x, D) \cdot b(x, D) e^{ix \cdot \xi} \\ &= (2\pi)^{-n} \iint e^{iz \cdot \zeta} a(x, \xi + \zeta) \cdot b(x - z, \xi) dz \cdot d\zeta \\ &= I(c_1) \end{aligned}$$

La démonstration résultera de la proposition (2.6) si l'on montre que

$$c_1(x, \xi, z, \zeta) = a(x, \xi + \zeta) \cdot b(x - z, \xi)$$

est dans QS^{m+m', k₁+k'₁, k₂+k'₂, k+k', -k₁-k'₁-k₂-k'₂-k-k' dans un domaine où $|\zeta + \xi| \approx \xi$ (une troncature permet de se ramener à ce cas)}

Montrons par exemple que :

$$\begin{aligned} a(x, \xi + \zeta) &\in \text{QS}^{m, k_1, k_2, k, -k_1 - k_2 - k_-} \\ \text{si } a &\in S^{m, k_1, k_2}(U, \Sigma_1, \Sigma_2) \end{aligned}$$

L'application Φ

$$(x, \xi, z, \zeta) \rightarrow (x, \xi + \zeta)$$

de $U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

vérifie les hypothèses du lemme 2.4 (chap. I) dans le domaine où on s'est placé. La proposition 2.5 (chap. I) donne le résultat.

On montre de même que : $b(x - z, \xi)$ est dans QS<sup>m', k'₁, k'₂, k', -k'₁-k'₂-k'
d'où le résultat de la proposition 1.1.</sup>

Proposition 1.2 :

$$\begin{aligned} \text{Soit } A &\in \text{OPS}^{m, k_1, k_2, k}(X, \Sigma_1, \Sigma_2), \text{ alors } A^* \text{ est dans} \\ \text{OPS}^{m, k_1, k_2, k}(X, \Sigma_1, \Sigma_2) \end{aligned}$$

Démonstration:

Si $a(x, \xi)$ est le symbole de a , le symbole de A^* est donné par :

$$a^*(x, \xi) = (2\pi)^{-n} \iint e^{iz \cdot \zeta} \bar{a}(x - z, \xi + \zeta) dz \cdot d\zeta$$

Utilisant la proposition 2.5 chap. I, on montre que $\bar{a}(x - z, \xi + \zeta)$ est

dans $QS^{m,k_1,k_2,k,-k_1,-k_2,-k-}$, dans un voisinage conique de $\xi = 0, z = 0$

La proposition résulte alors de la proposition 2.6 chapitre I.

Changement de fonction de phase, changement de coordonnées

Soit $\varphi(x, \theta)$ une fonction de phase sur $X \times \mathbb{R}^n$. Soit $\sum_i^{\vee} (i=1,2)$ deux sous-cônes fermés C^∞ quasitransverses de $U = X \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et soit $a \in S^{m,k_1,k_2,k}_{\vee}(U, \sum_1^{\vee}, \sum_2^{\vee})$.

On suppose que a s'annule pour θ petit et pour $x \notin K$ où K est un sous-ensemble compact de X .

De plus, $(x, \theta) \rightarrow (x, d_x \varphi(x, \theta))$ est un difféomorphisme d'un ouvert conique voisinage de $\sup a$ sur un ouvert conique dans $T^*X \setminus \{0\}$.

Finalement, soit $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, avec $\chi = 1$, si $|x| < \varepsilon$, $\chi = 0$ si $|x| > 2\varepsilon$ (ε suffisamment petit).

On considère :

$$A f = \iint e^{i(\varphi(x, \theta) - \varphi(y, \theta))} \chi(x-y) a(x, \theta) f(y) dy d\theta$$

On a la proposition :

Proposition 1.3 :

Soit $\sum_i$ l'image de $\sum_i^{\vee}$ par l'application $(x, \theta) \rightarrow (x, d_x \varphi(x, \theta))$
Alors (si ε est assez petit), on a $A \in OPS^{m,k_1,k_2,k}(X, \sum_1, \sum_2)$

Démonstration :

On a $A = b(x, D)$ avec

$$b(x, \xi) = e^{-ix\xi} A \cdot e^{ix\xi} = \iint e^{i(\varphi(x, \theta) - \varphi(y, \theta) - \langle x-y, \xi \rangle)} \chi(x-y) a(x, \theta) dy d\theta$$

Ecrivons : $\varphi(x, \theta) - \varphi(y, \theta) = \langle x-y, \eta \rangle$

avec

$$\eta(x, y, \theta) = \int_0^1 \varphi'_x((1-t)x + ty, \theta) dt$$

Alors si ε est suffisamment petit, l'application $(x, y, \theta) \rightarrow (x, y, \eta)$ est un isomorphisme d'un voisinage conique V dans $X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

Soit $(x, y, \eta) \rightarrow (x, y, \theta(x, y, \eta))$ l'application inverse, et on pose

$$J(x, y, \eta) = \left| \frac{D\theta}{D\eta} \right|$$

On a :

$$b(x, \xi) \sim \iint e^{i \langle x-y, \eta-\xi \rangle} \chi(x-y) a(x, \theta(x, y, \eta)) J(x, y, \eta) dy d\eta$$

Par une troncature, on se ramène au cas où $|\eta - \xi| < \frac{1}{2} |\xi|$, de sorte que

$$b(x, \xi) \sim \iint e^{i \langle x-y, \eta-\xi \rangle} b_1(x, y, \xi, \eta) dy d\eta$$

$$\text{avec } b_1(x, y, \xi, \eta) = \chi_1(\xi, \eta) \chi(x-y) a(x, \theta(x, y, \eta)) J(x, y, \eta)$$

où χ_1 est dans S^0 , égal à 1 si $|\xi| > 3(|\xi - \eta| + 1)$ et 0 si $|\xi| < 2(|\xi - \eta| + 1)$

On étend b_1 à $X \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (prolongement par 0) et on réécrit cette intégrale en posant :

$$c(x, z, \xi, \zeta) = b_1(x, x-z, \xi, \xi+\zeta)$$

d'où

$$b(x, \xi) \sim \iint e^{iz \cdot \xi} c(x, z, \xi, \zeta) dz d\zeta = I(c)$$

Le seul point délicat est de montrer que

$$a(x, \theta(x, x-z, \xi+\zeta))$$

est dans

$$QS^{m, k_1, k_2, k, -k_1^-, -k_2^-, k^-}$$

dans la zone où $|\xi + \zeta| \sim |\xi|$

Soit Φ l'application $(x, \xi, z, \zeta) \rightarrow (x, \theta(x, x-z, \xi+\zeta))$

Pour $z = 0$

$$\zeta = 0$$

$$\Phi = (x, \xi, 0, 0) \rightarrow (x, \theta(x, x, \xi))$$

Avec ces notations :

$$a(x, \theta(x, x-z, \xi+\zeta)) = a \circ \Phi$$

qu'on écrit sous la forme

$$a \circ \Phi = a \circ \tilde{\Phi}^{-1} \circ \tilde{\Phi} \circ \Phi$$

où $\tilde{\Phi}$ est l'application : $(x, \theta) \rightarrow (x, d_x \varphi(x, \theta))$

$a \circ \tilde{\Phi}^{-1}$ est dans $S^{m, k_1, k_2, k}(V, \Sigma_1, \Sigma_2)$, car $\tilde{\Phi}$ est un difféomorphisme sur le support de a .

$\tilde{\Phi} \circ \Phi$ opère de $V \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans V , et induit l'identité sur V , sur

$$\tilde{\Phi}(x, \theta(x, x, \xi)) = (x, \xi)$$

On peut alors appliquer la proposition (2.5) du chapitre I pour montrer que

$$a(x, \theta(x, x-z, \xi+\zeta)) \cdot \chi_1(\xi, \xi+\zeta) \text{ est dans } QS^{m, k_1, k_2, k, -k_1^- - k_2^- - k^-}$$

La proposition en résulte.

On déduit de cette proposition l'invariance par difféomorphisme. Il suffit en effet de prendre une phase de la forme $\langle \Psi(x), \theta \rangle$ où Ψ est un difféomorphisme.

La classe d'opérateurs pseudodifférentiels $OPS^{m, k_1, k_2, k}(X, \Sigma_1, \Sigma_2)$

peut donc être définie lorsque X est une variété C^∞ .

Enfin on pourrait montrer par les mêmes méthodes (cf. [1]), la proposition suivante :

Proposition 1.4 :

Soient X et Y deux variétés C^∞ , $\Phi : T^*X \setminus 0 \rightarrow T^*Y \setminus 0$

Une transformation canonique homogène de degré 1 et F (resp. G) un opérateur intégral de Fourier à support propre associé à Φ (resp. Φ^{-1}).

On suppose que Σ_1 et Σ_2 sont deux sous-cônes C^∞ fermés de $T^*X \setminus 0$ quasi-

transverses, alors si $A \in OPS^{m, k_1, k_2, k}(X, \Sigma_1, \Sigma_2)$, $F \circ A \circ G$ est dans

$OPS^{m', k_1, k_2, k}(Y, \Phi \Sigma_1, \Phi \Sigma_2)$ avec $m' = m + \deg F + \deg G$

§ 2 Opérateurs d'Hermite et construction de paramétrixes

On garde les notations précédentes et on pose :

$$(2.1) \quad \tilde{\mathcal{H}}^m(U, \Sigma_1, \Sigma_2) \stackrel{\text{Déf}}{=} \bigcap_{j \in \mathbb{N}} S^{m-j, -j, -j}(U, \Sigma_1, \Sigma_2)$$

Cette définition sera justifiée par la proposition (2.1) mais il nous faut auparavant démontrer des résultats préliminaires.

Proposition 2.1 : Approximation successive

On suppose que Σ_1 et Σ_2 sont quasitransverses. Alors :

- i) Soit $a_j \in S^{m-j, k_1, k_2}$ ($j = 0, \dots, \infty$) alors il existe $a \in S^{m, k_1, k_2}$ tel que pour tout N , $a - \sum_{j < N} a_j \in S^{m-N, k_1, k_2}$

On notera $a \sim \sum a_j$. Deux tels symboles diffèrent par un élément de $S^{-\infty}(U)$

- ii) Soit $a_j \in S^{m-j, k_1-j, k_2-j}$ ($j=0, \dots, \infty$), alors il existe $a \in S^{m, k_1, k_2}$ tel que pour tout N , $a - \sum_{j < N} a_j \in S^{m-N, k_1-N, k_2-N}$

On écrira $a \sim \sum a_j$. Deux tels symboles diffèrent par un élé-

ment de $\tilde{\mathcal{H}}^{m - \frac{k_1 + k_2}{2}}$

Démonstration

Elle est la même que celle de la proposition 1.11 de [1] si on remarque que $S^0(U) \subset S^{0,0,0}(U, \Sigma_1, \Sigma_2)$, que S^{m, k_1, k_2} est un espace de Fréchet (ici intervient l'hypothèse quasitransverse), et qu'on a le lemme suivant (analogue au lemme 3.12 de [1])

Lemme 2.2 :

Soit $\chi(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\chi = 0$ si $|t| < 1/2$, $\chi = 1$ si $|t| > 1$

- i) Soit $\varphi_\lambda^1 = \chi(r/\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, alors $\varphi_\lambda^1 \in S^{0,0,0}$ et $1 - \varphi_\lambda^1 \in S^{-\infty}$;

$\lambda \varphi_\lambda^1$ est borné dans $S^{1,0,0}$ •

- ii) On suppose que Σ_i est définie localement par $u_i^1(x, \xi) = 0; \dots;$

$u_i^j(x, \xi) = 0$ (où les u_j^i sont homogènes de degré 0), on pose

$$\varphi_\lambda^2 = \chi(r/\lambda) \chi \left(\frac{\sum_{i=1,2} \sum_{j=1}^{\nu_i} |u_i^j|^2}{\lambda} \right)$$

Alors $\varphi_\lambda^2 \in S^{0,0,0}$, $1 - \varphi_\lambda^2 \in \tilde{\mathcal{K}}^0$, $\lambda \varphi_\lambda^2$ est borné dans $S^{2,2,2}$

Proposition 2.3 :

Si Σ_1 et Σ_2 sont quasitransverses

$$\tilde{\mathcal{K}}^m(U, \Sigma_1, \Sigma_2) = \mathcal{K}^m(U, \Sigma_1 \cap \Sigma_2), \text{ où } \mathcal{K}^m(U, \Sigma_1 \cap \Sigma_2) = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} S^{m-j, -2j}(U, \Sigma_1 \cap \Sigma_2)$$

La classe $\mathcal{K}^m$ a été introduite dans [1]

Démonstration: On prend des coordonnées locales adaptées (cf § 1.4 chap. I)

On a

$$(2.2) \quad \begin{cases} r^{1/2} d_i \gtrsim 1 & r^{1/2} d_{12} \gtrsim 1 \\ (r d_1 d_2) \lesssim (r d_{\Sigma_1 \cap \Sigma_2}^2) \lesssim (r d_1 d_2)^2 \end{cases}$$

Montrons que $\tilde{\mathcal{K}}^m(U, \Sigma_1, \Sigma_2) \subset \mathcal{K}^m(U, \Sigma_1 \cap \Sigma_2)$ (l'autre inclusion est facile)

Soit alors $a \in \tilde{\mathcal{K}}^m(U, \Sigma_1, \Sigma_2)$, utilisant 2.2, on déduit facilement que :

$$a \lesssim r^m (r d_1 d_2)^{-j} \lesssim r^m (r d_{\Sigma_1 \cap \Sigma_2}^2)^{-j/2}$$

pour tout j .

Il nous faut montrer que :

$$(2.3) \quad |(r^{-1/2} \frac{\partial}{\partial u_1})^{\alpha_1} (r^{-1/2} \frac{\partial}{\partial u_2})^{\alpha_2} (r^{-1/2} \frac{\partial}{\partial w})^\beta (\frac{\partial}{\partial v})^\alpha (r \frac{\partial}{\partial r})^p a| \\ \lesssim r^m (r d_{\Sigma_1 \cap \Sigma_2}^2)^{-j/2} - \frac{|\alpha_1|}{2} - \frac{|\alpha_2|}{2} - \frac{|\beta|}{2}$$

pour tout j .

On se ramène aisément au cas $p=0$, $|\alpha|=0$,

Par hypothèse

$$\begin{aligned} & |(r^{-1/2} \frac{\partial}{\partial u_1})^{\alpha_1} (r^{-1/2} \frac{\partial}{\partial u_2})^{\alpha_2} (r^{-1/2} \frac{\partial}{\partial w})^{\beta} a| \\ & \lesssim r^m (r d_1 d_2)^{-j'} (r^{1/2} d_1)^{-|\alpha_1|} (r^{1/2} d_2)^{-|\alpha_2|} (r^{1/2} d_{12})^{-|\beta|} \end{aligned}$$

pour tout j' .

La proposition résulte alors du fait que pour tout j , il existe j' tel que

$$\begin{aligned} (2.4) \quad & (r d_1 d_2)^{-j'} (r^{1/2} d_1)^{-|\alpha_1|} (r^{1/2} d_2)^{-|\alpha_2|} (r^{1/2} d_{12})^{-|\beta|} \lesssim \\ & \lesssim (r d_{\Sigma_1 \cap \Sigma_2}^2)^{-\frac{j+|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\beta|}{2}} \end{aligned}$$

En effet (2.4) est équivalent à :

$$(r d_{\Sigma_1 \cap \Sigma_2}^2)^{\frac{j+|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\beta|}{2}} \lesssim (r d_1 d_2)^{j'} (r^{1/2} d_1)^{|\alpha_1|} (r^{1/2} d_2)^{|\alpha_2|} (r^{1/2} d_{12})^{|\beta|}$$

qui est toujours vérifiée pour j' assez grand grâce à 2.2.

Proposition 2.4 : On suppose Σ_1 et Σ_2 quasitransverses.

Soit $P \in OPS^{m, k_1, k_2}(X, \Sigma_1, \Sigma_2)$. Alors P a une paramétrix à droite Q dans $OPS^{-m, -k_1, -k_2}$ si et seulement si :

i) Il existe Q_1 dans $OPS^{-m, -k_1, -k_2}$ tel que :

$$PQ_1 = I \quad \text{modulo} \quad OPS^{-1/2, -1/2, -1/2}(X, \Sigma_1, \Sigma_2)$$

ii) Pour tout A dans $OPK^0(X, \Sigma_1, \Sigma_2)$, il existe B dans $OPK^{-m + \frac{k_1 + k_2}{2}}$

tel que

$$PB = A \text{ modulo } OPK^{-1/2}$$

Démonstration

Elle est analogue à celle de la proposition 6.1 de [1],

compte tenu des propositions 2.1 et 2.3.

Dans les applications, i) sera vérifié de la manière suivante :

Exemple de base 2.5

Soit P_1 dans $OPS^{m_1, k_1}(X, \Sigma_1)$, P_2 dans $OPS^{m_2, k_2}(X, \Sigma_2)$ et on suppose que P_i ($i=1,2$) admet une paramétrix à droite dans $OPS^{-m_i, -k_i}(X, \Sigma_i)$ ($i=1,2$)

Alors pour tout Q dans $OPS^{m_1+m_2-1/2, k_1-1/2, k_2-1/2}$, $P_1 P_2 + Q$ vérifie la condition i) .

Dans les applications, ii) sera étudiée de la manière suivante. On suppose que P dans OPS^{m, k_1, k_2} est un opérateur pseudodifférentiel régulier. Dans ce cas, (Corollaire 1.4.3 chap. I) il est dans $OPS^{m, k_1+k_2}(X, \Sigma_1 \cap \Sigma_2)$

L'étude de ii) dans ce cas est faite dans [1] [2] et nous rappelons les résultats qui seront utiles ici.

2.6 Rappels (cf [1], [2])

Soit Σ un sous-cône C^∞ de $T^*X \setminus 0$ de codimension ν . On choisit dans un voisinage conique d'un point de Σ , un système de coordonnées (u, v) tel que $u(x, \xi)$ est homogène de degré 0, v est homogène de degré 1, et tel que $u = 0$ définisse Σ .

On pose $\mathcal{A}^{m, k}(X, \Sigma) = OPS^{m, k}(X, \Sigma) \cap OPS_{\text{reg}}^m(X)$

Soit maintenant $P \in \mathcal{A}^{m, k}(X, \Sigma)$ et B dans $OPK^{m'}(X, \Sigma)$ de symbole total $p(x, \xi), b(x, \xi)$, alors il existe un opérateur P_Σ différentiel unique

$$P_\Sigma(v) = \sum_{|\alpha| + |\beta| \leq k} a_{\alpha\beta}(v) u^\alpha D_u^\beta$$

tel que si a désigne le symbole de $P \circ Q = A$

$$a = P_\Sigma \cdot b \quad \text{soit dans } \mathcal{K}^{m+m'-k/2-1/2}$$

L'étude de $PB = A$, pour A dans OPK^0 , P dans $\mathcal{A}^{m, k}$, se ramène donc à l'étude de

$$P_\Sigma(v) b = a$$

où $a \in \mathcal{K}^0$, b est cherché dans $\mathcal{K}^{-m+k/2}$.

Il est alors montré dans [2] que cette étude se ramène à l'étude de l'inversibilité de $P_{\Sigma(\frac{v}{|v|})}$ dans $C^\infty(\Sigma \cap S^*X, \mathcal{G}(\mathbb{R}^v))$ au voisinage dans S^*X de tout point de $\Sigma \cap S^*X$.

Dans le cas que nous étudions ici, l'étude de ii) se ramène donc à l'étude de l'inversibilité à droite de $P_{\Sigma_1 \cap \Sigma_2}(v)$ dans

$$C^\infty((\Sigma_1 \cap \Sigma_2) \cap S^*X; \mathcal{G}(\mathbb{R}^{\nu'_1 + \nu'_2 + \nu}))$$

où $P_{\Sigma_1 \cap \Sigma_2}$ est de la forme :

$$P_{\Sigma_1 \cap \Sigma_2} = \sum_{|\alpha| + |\beta| \leq k_1 + k_2} a_{\alpha\beta}(v) u^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^\beta$$

$$\text{avec } u = (u_1^1, \dots, u_1^{\nu'_1}, u_2^1, \dots, u_2^{\nu'_2}, w^1, \dots, w^\nu)$$

L'objet de l'article [2] était de montrer que l'étude de ce problème se ramenait, sous certaines hypothèses (non vérifiées ici) à l'étude de l'inversibilité dans $\mathcal{G}$ pour v fixé. L'objet du chapitre III sera de faire une étude analogue pour le cas présenté dans l'introduction.

§ 3 Le cas de j sous-cônes $\Sigma_1, \dots, \Sigma_j$

Dans ce §, nous ne prétendons pas à la rigueur, mais présenterons brièvement certaines extensions possibles de la théorie.

Soit U un cône C^∞ arbitraire, $\Sigma_1, \dots, \Sigma_j$ j sous-cônes fermés C^∞ de U .

Soit $(i_1, \dots, i_q)$ la donnée de q entiers de $[1, \dots, j]$ tels que $i_1 < i_2 < \dots < i_q$

On désignera par $(i_1, \dots, i_q)^0$ le complémentaire de $(i_1, \dots, i_q)$ dans $[1, \dots, j]$.

On pose

$$d_i = d_{\Sigma_i}$$

$$d_{i_1, i_2} = \frac{1}{\frac{1}{d_{i_1}} + \frac{1}{d_{i_2}}}$$

$$d_{i_1 \dots i_q} = \frac{1}{\sum_{i=i_1, \dots, i_q} \frac{1}{d_i}} \quad d_{\emptyset} = 1$$

$X_{i_1 \dots i_q}$ désigne un champ de vecteur homogène de degré 0, tangent à Σ_i pour tous les i dans $(i_1, \dots, i_q)^0$

En particulier

$X_{1, \dots, j}$ désigne un champ de vecteur quelconque
 $X_{\emptyset}$ est un champ tangent à tous les Σ_i
 $X_{i_1 \dots i_q}^{l_{i_1 \dots i_q}}$ désigne le composé de $l_{i_1 \dots i_q}$ champs de vecteurs tangents à Σ_i pour tous les i dans $(i_1, \dots, i_q)^0$.

On pose alors la définition suivante

Définition 3.1 :

A chaque q -plet $(i_1, \dots, i_q)$, on associe un réel $k_{i_1, \dots, i_q}$
On désigne par $S^{m, k_{i_1, \dots, i_q}}(U, \Sigma_1, \dots, \Sigma_j)$ la classe des fonctions C^∞ sur U telles que :

$$\left| \left(\prod_{i_1 < i_2 < \dots < i_q} X_{i_1 \dots i_q}^{l_{i_1 \dots i_q}} \right) a \right| \lesssim r^m \prod_{i_1 < \dots < i_q} d_{i_1 \dots i_q}^{k_{i_1 \dots i_q} - l_{i_1 \dots i_q}}$$

Cette classe a probablement toutes les bonnes propriétés, elle a été construite pour être invariante par changement de coordonnées et pour contenir des classes relatives à un nombre inférieur de sous-cônes Σ_i .

Citons seulement un lemme relatif au cas $j=3$ et qui correspond à la vérification du point i) de la proposition 2.4

Ce lemme suggère comment passer du cas j au cas $j+1$ dans l'étude de l'hypoellipticité.

Lemme 3.2

Soit $P_i (i=1,2,3)$ un opérateur dans $OPS^{1/2,1}(X, \Sigma_i)$ et on suppose que :

- i) P_i admet une paramétrix à droite Q_i dans $OPS^{-1/2,-1}(X, \Sigma_i)$
- ii) $P_i P_j + B$ admet pour tout B dans OPS^0 , $i \neq j$, une paramétrix à droite dans $OPS^{-1,-1,-1}(X, \Sigma_i, \Sigma_j)$

Alors $P = P_1 P_2 P_3 + \lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_3$ où (λ, μ, ν) sont dans OPS_{reg}^0 admet un

inverse Q dans $OPS^{-3/2,-1,-1,-1,0,0,0,0}(X, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$

tel que

$$PQ = I + R \quad \text{avec } R \text{ dans } OPS^{-3/2,-1,-1,-1,0,0,0,0}$$

Nous ne démontrerons pas ce lemme ici, mais remarquons que :

• La condition (ii) est plus ou moins, si i) est vérifiée, la conclusion de notre article

• Dans le cas où $\bigcap_j OPS^{-3/2,j,-j/2,-j/2,-j/2} = OPS^0(X, \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3)$

l'étude de l'hypoellipticité pour P se ramène à une étude d'inversibilité dans $\mathcal{Y}$. On a ramené l'étude à un problème sur l'intersection.

CHAPITRE III ETUDE D'UNE CLASSE D'OPERATEURS DIFFERENTIELS A
COEFFICIENTS POLYNOMIAUX.

Ce chapitre suit étroitement l'article [2] dont nous reprendrons pour l'essentiel les notations :

§ 1 Introduction

On garde les notations du § 1 du chapitre I. On pose $\tilde{v}=(v,r)$. Σ_1 et Σ_2 sont quasitransverses. m, k_1, k_2
Alors si P est dans $OPS^{m, k_1, k_2}(X, \Sigma_1, \Sigma_2) \cap OPS_{reg}^m(X)$, on peut écrire que

$$P = \sum_{\substack{|\beta_1| \leq k_1 \\ |\beta_2| \leq k_2 \\ |\beta_1| + |\beta_2| + |\beta| \leq k_1 + k_2}} A_{\beta_1, \beta_2, \beta} (u_1, u_2, w, \tilde{v}) U_1^{\beta_1} U_2^{\beta_2} w^{\beta} + B$$

$$\text{où } A_{\beta_1, \beta_2, \beta} \in OPS^{m + \frac{|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta|}{2} - \frac{k_1 + k_2}{2}}$$

U_i^j (resp w^j) est un opérateur pseudodifférentiel régulier d'ordre 0 de symbole u_i^j (resp w^j)

$$U_i^{\beta_i} = (U_i^1)^{\beta_i^1} \circ \dots \circ (U_i^j)^{\beta_i^j} \quad i = 1, 2$$

$$B \text{ est dans } OPS^{m - \frac{k_1 + k_2}{2} - 1/2}$$

$$\text{Alors } \tilde{L}_i \stackrel{\text{Def}}{=} U_i(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) = u_i + \sum_{j=1,2} d_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j} + \beta_i \cdot \frac{\partial}{\partial w}$$

$$M \equiv w(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) = w + \sum_{j=1,2} \tilde{\alpha}_j \frac{\partial}{\partial u_j} + \tilde{\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial w}$$

On en déduit que :

$$P_{\Sigma_1 \cap \Sigma_2} = \sum_{\substack{|\beta_1| \leq k_1 \\ |\beta_2| \leq k_2 \\ |\beta_1| + |\beta_2| + |\beta| \leq k_1 + k_2}} A_{\beta_1, \beta_2, \beta}(\tilde{v}) \cdot \tilde{L}_1^{\beta_1} \tilde{L}_2^{\beta_2} M^\beta$$

où $A_{\beta_1, \beta_2, \beta}$ est dans $C^\infty(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)$ et est homogène de degré $m + \frac{|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta|}{2} - \frac{k_1 + k_2}{2}$.

Si E désigne l'espace vectoriel : $\mathbb{R}^{\nu'_1 + \nu'_2 + \nu} \ni (u_1, u_2, w)$

Les symboles complets de $\tilde{L}_i^j, W^j$ peuvent être considérés comme définissant les plans de $(E \times E^*)^*$ suivants :

$\mathcal{L}_i (i=1,2)$ est engendré par les formes linéaires $\sigma(\tilde{L}_i^j) (u_i, \hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{w})_{j=1, \dots, \nu'_i}$

et par les formes $\sigma(M^j)(w, \hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{w})_{j=1, \dots, \nu}$

où $(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{w})$ désignent les variables duales de (u_1, u_2, w)

$\mathcal{M}$ est engendré par les formes $\sigma(M^j)(w, \hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{w})_{j=1, \dots, \nu}$

$\tilde{\mathcal{L}}_i$ est engendré par les formes linéaires $\sigma(\tilde{L}_i^j)$, $j=1, \dots, \nu'_i$

On a $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \mathcal{M}$

Ici $\sigma(\tilde{L}_i^j)$ est le symbole complet de $\tilde{L}_i^j$

$\sigma(M)$ " " " " " M

§ 2 Une classe d'opérateurs pseudodifférentiels

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . E^* le dual de E . Soient (x, ξ) les coordonnées de $E \times E^*$.

Soient $\mu, \nu'_1, \nu'_2, \nu, \nu_1, \nu_2$ des entiers positifs ou nuls vérifiant :

$$\mu = \nu'_1 + \nu'_2 + \nu$$

$$\nu_i = \nu'_i + \nu \quad (i = 1, 2)$$

On utilise la décomposition suivante :

$$\mathbb{R}^\mu = \mathbb{R}^{\nu'_1} \times \mathbb{R}^{\nu'_2} \times \mathbb{R}^\nu \ni (\tau_1, \tau_2, \tau')$$

Définition 2.1

On désigne par $S^{m_1, m_2, m'}(\mathbb{R}^\mu)$ l'ensemble des symboles sur $\mathbb{R}^\mu$ qui vérifient :

$$\forall \alpha_i \in \mathbb{N}^{\nu'_i}, \forall \alpha' \in \mathbb{N}^\nu,$$

$$\left| \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial \tau_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial \tau_2^{\alpha_2}} \frac{\partial^{\alpha'}}{\partial \tau'^{\alpha'}} a(\tau_1, \tau_2, \tau') \right| \leq (1+|\tau_1|+|\tau'|)^{m_1-|\alpha_1|} (1+|\tau_2|+|\tau'|)^{m_2-|\alpha_2|}$$

$$\left(\frac{1}{1+|\tau_1|+|\tau'|} + \frac{1}{1+|\tau_2|+|\tau'|} \right)^{m'+|\alpha'|}$$

On notera $S^{m_1, m_2}(\mathbb{R}^\mu)$ si $m' = 0$

On a les propriétés suivantes :

$$2.2 \quad \bigcap_{j \in \mathbb{N}} S^{m_1-j, m_2-j}(\mathbb{R}^\mu) = \mathcal{F}(\mathbb{R}^\mu)$$

$$2.3. \quad \text{Si } a \in S^{m_1, m_2, m'}; b \in S^{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}'}, ab \in S^{m_1+\tilde{m}_1, m_2+\tilde{m}_2, m'+\tilde{m}'}$$

2.4 Si on fait un changement de variable linéaire inversible du type suivant

$$\tilde{\tau}_1 = \sum \alpha_1^i \tau_1^i + \sum \beta_1^i \tau'^i = \alpha_1 \cdot \tau_1 + \beta_1 \cdot \tau'$$

$$\tilde{\tau}_2 = \sum \alpha_2^i \tau_2^i + \sum \beta_2^i \tau'^i = \alpha_2 \cdot \tau_2 + \beta_2 \cdot \tau'$$

$$\tilde{\tau}' = \sum \alpha_3^i \tau'^i = \alpha_3 \cdot \tau'$$

La classe est conservée.

Soit $\mathcal{L}_i (i=1,2)$ un ν_i -plan dans $(E \times E^*)^*$. On suppose que $\mathcal{M} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ est de dimension ν

On choisit alors un supplémentaire $\tilde{\mathfrak{L}}_i$ dans $\mathfrak{L}_i$ par rapport à $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{M} \oplus \tilde{\mathfrak{L}}_i = \mathfrak{L}_i$$

On pose

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{M} \oplus \tilde{\mathfrak{L}}_1 \oplus \tilde{\mathfrak{L}}_2 = \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2$$

On peut identifier par le choix d'une base $\mathfrak{M}$ (resp. $\mathfrak{L}_i, \tilde{\mathfrak{L}}_i, \mathfrak{L}$) à la donnée d'une application linéaire $M(x, \xi)$ (resp. $L_i(x, \xi), \tilde{L}_i(x, \xi), L(x, \xi)$) de $E \times E^*$ dans $\mathbb{R}^{\nu}$ (resp. $\mathbb{R}^{\nu_i}, \mathbb{R}^{\nu'_i}, \mathbb{R}^{\nu'_1 + \nu'_2 + \nu}$) .

Rappelons (cf. [2]) la définition :

Définition 2.2 :

Soit $S^m(\mathbb{R}^N)$ l'espace des fonctions f sur $\mathbb{R}^N \ni \tau$, telles que $(1 + |\tau|)^{-m + |\alpha|} D^\alpha f$ soit bornée, soit $\mathfrak{L}$ un N -plan de $(E \times E^*)$ qu'on identifie à une application linéaire de $E \times E^*$ dans $\mathbb{R}^N$; on désigne par $OPS_{\mathfrak{L}}^m$ la classe des opérateurs de $\mathcal{S}(E)$ dans $\mathcal{S}(E)$ telle qu'il existe a dans $S^m(\mathbb{R}^N)$ telle que :

$$A.f = (2\pi)^{-n} \int e^{i x \cdot \xi} a(L(x, \xi)) \hat{f}(\xi) d\xi \quad \text{pour } f \in \mathcal{S}(E)$$

Définition 2.3 :

On dira que A appartient à $OPS_{\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2}^{m_1, m_2, m'}(E)$ s'il existe $a \in S^{m_1, m_2, m'}(\mathbb{R}^N)$ telle que A est défini pour f dans $\mathcal{S}(E)$ par :

$$A f = (2\pi)^{-n} \int e^{i x \cdot \xi} a(\tilde{L}_1(x, \xi), \tilde{L}_2(x, \xi), \mathfrak{M}(x, \xi)) \hat{f}(\xi) d\xi$$

Remarque: La classe ne dépend pas des supplémentaires choisis de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{L}_1$ et $\mathfrak{L}_2$, et des bases choisies, ce qui justifie la notation (ceci est du à 2.4)

Il est montré dans [2] que A est continu de $\mathcal{S}(E)$ dans $\mathcal{S}(E)$ et que si a est dans $OPS_{\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2}^{0,0}$, il se prolonge en un opérateur continu de $L^2(E)$ dans $L^2(E)$.

On sait comment agit le groupe métaplectique (cf [2]) et on peut montrer la proposition suivante :

Proposition 2.4 :

Soit P dans $\text{OPS}_{\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2}^{m_1, m_2, m'}$, Q dans $\text{OPS}_{\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2}^{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}'}$ alors

$$P \circ Q \in \text{OPS}_{\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2}^{m_1 + \tilde{m}_1, m_2 + \tilde{m}_2, m' + \tilde{m}'}(E)$$

$$P^* \text{ est dans } \text{OPS}_{\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2}^{m_1, m_2, m'}(E)$$

On renvoie à [2] pour une démonstration analogue .

§ 3 Paramétrixes dans la classe $\text{OPS}_{\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2}^{m_1, m_2}(E)$ (On suppose $m' = 0$)

On dira dans ce § qu'un opérateur est régularisant s'il est défini par un symbole dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Remarquons que :

$$\bigcap_j \text{OPS}_{\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2}^{m_1 - j, m_2 - j} = \bigcap_j \text{OPS}_{\mathfrak{f}}^{m_1 + m_2 - j}(E) = \text{OPS}_{\mathfrak{f}}^{-\infty}(E)$$

Autrement dit

$$\bigcap_j \text{OPS}_{\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2}^{m_1 - j, m_2 - j}$$

est régularisant

Notons qu'un opérateur régularisant n'opère pas nécessairement de $\mathcal{S}'(E)$ dans $\mathcal{S}(E)$. Ce n'est vrai que lorsque $\mathfrak{f} = (E \times E^*)$.

La proposition suivante sera utile.

Proposition 3.1

Soit P dans $\text{OPS}_{\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2}^{m_1, m_2}(E)$; on suppose qu'il admet un "inverse" à droite Q

dans $\text{OPS}_{\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2}^{-m_1, -m_2}$ tel que

$$P \circ Q = I + \mathcal{R}$$

avec $\mathcal{R}$ dans $\text{OPS}_{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2}^{-1, -1}$

Alors P admet un inverse à droite $\tilde{Q}$ dans $\text{OPS}_{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2}^{-m_1, -m_2}$ tel que

$$P \cdot \tilde{Q} = I + \tilde{\mathcal{R}}$$

où $\tilde{\mathcal{R}}$ est régularisant. On dira alors que $\tilde{Q}$ est une paramétrix à droite et que P est elliptique à droite.

L'énoncé de la proposition ainsi que la démonstration (facile) est à rapprocher des propositions (2.4) et (2.1) du chapitre II.

Proposition 3.2 :

Soit P un opérateur elliptique à droite, alors s'il est inversible à droite dans $\mathcal{D}'(E)$, il admet un inverse à droite dans $\text{OPS}_{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2}^{-m_1, -m_2}$

Démonstration

De par la proposition précédente, P admet une paramétrix à droite Q telle que :

$$P \cdot Q = I + \mathcal{R} \quad \text{où } \mathcal{R} \text{ est régularisant.}$$

Par ailleurs, il existe B continu de $\mathcal{D}'(E)$ dans $\mathcal{D}'(E)$ tel que :

$$P \cdot B = I$$

Alors $Q - B\mathcal{R}$ est l'inverse cherché. Il est effet montré dans [2] Th.3.1 que si $\mathcal{R}$ est régularisant, $B\mathcal{R}$ est régularisant .

On a la proposition "duale".

Proposition 3.3

Soit P un opérateur elliptique à gauche dans $\text{OPS}_{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2}^{m_1, m_2}$, alors s'il est

inversible à gauche dans $\mathcal{D}'(E)$, il admet un inverse à gauche dans $\text{OPS}_{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2}^{-m_1, -m_2}$.

Pour terminer ce §, donnons un exemple d'opérateur elliptique à gauche.

Exemple 3.4:

Soit $P_1 \in OPS_{\mathfrak{L}_1}^{m_1}(E)$, $P_2 \in OPS_{\mathfrak{L}_2}^{m_2}(E)$ et on suppose qu'il existe

$$Q_1 \in OPS_{\mathfrak{L}_1}^{-m_1}(E), \quad Q_2 \in OPS_{\mathfrak{L}_2}^{-m_2}(E)$$

tels que

$$Q_1 P_1 = I, \quad Q_2 P_2 = I$$

Soit $\mathcal{P} = P_1 P_2 + A$ avec $A \in OPS_{\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2}^{m_1-1, m_2-1}(E)$

Alors $\mathcal{P}$ est elliptique à gauche

§ 4 Dépendance d'un paramètre

On conseille vivement au lecteur de consulter le § 4 de [2]

On suppose maintenant que $\mathfrak{L}_1$ et $\mathfrak{L}_2$ dépendent de manière C^∞ d'un paramètre λ de Σ . Mais $\dim \mathfrak{L}_1(\lambda) = \nu_1 = \text{cte}$, $\dim \mathfrak{L}_2(\lambda) = \nu_2 = \text{cte}$, $\dim \mathfrak{L}_1(\lambda) \cap \mathfrak{L}_2(\lambda) = \nu = \text{cte}$.

Et on considère des classes $C^\infty(\Sigma; OPS_{\mathfrak{L}_1(\lambda), \mathfrak{L}_2(\lambda)}^{m_1, m_2}(E))$, associées

à des symboles dans $C^\infty(\Sigma; S^{m_1, m_2}(\mathbb{R}^n))$

Un opérateur A est défini par :

$$A_\lambda f = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} a(\lambda, \tilde{L}_1(\lambda, x, \xi), \tilde{L}_2(\lambda, x, \xi), M(\lambda, x, \xi)) \hat{f}(\xi) d\xi$$

λ parcourt Σ (ou un ouvert de Σ), $M(\lambda, x, \xi)$ désigne une base de $\mathfrak{L}_1(\lambda) \cap \mathfrak{L}_2(\lambda)$ et $(\tilde{L}_i(\lambda, x, \xi), M(\lambda, x, \xi))$ forment une base de $\mathfrak{L}_i(\lambda)$ ($i=1, 2$)

On pose la définition suivante :

Définition 4.1

On dira que A_λ dans $C^\infty(\Sigma, OPS_{\mathfrak{L}_1(\lambda), \mathfrak{L}_2(\lambda)}^{m_1, m_2})$ est régulièrement

elliptique à droite, s'il existe Q_λ dans

$C^\infty(\Sigma, OPS_{f_1(\lambda), f_2(\lambda)}^{-m_1, -m_2})$ tel que :

$$A_\lambda Q_\lambda = I + R_\lambda \quad \text{avec} \quad R_\lambda \text{ dans } C^\infty(\Sigma, OPS_{f_1(\lambda), f_2(\lambda)}^{-1, -1})$$

Alors on montre, en utilisant le fait que

$\cap_j C^\infty(\Sigma, OPS_{f_1(\lambda), f_2(\lambda)}^{-j, -j}) = C^\infty(\Sigma, OPS_{f_1(\lambda), f_2(\lambda)}^{-\infty})(E)$ et le § 4 de [2], le théorème suivant :

Proposition 4.2 :

Soit A_λ dans $C^\infty(\Sigma, OPS_{f_1(\lambda), f_2(\lambda)}^{m_1, m_2})$ un opérateur régulièrement elliptique à droite

Alors, si en un point λ_0 de Σ , A_{λ_0} est inversible dans $\mathcal{U}(E)$ à droite

- i) il existe un voisinage V_{λ_0} de λ_0 où A_λ est inversible à droite
- ii) Il existe un inverse à droite Q_λ dans $C^\infty(V_{\lambda_0}, OPS_{f_1(\lambda), f_2(\lambda)}^{-m_1, -m_2})$

et on a la proposition duale :

Proposition 4.3 :

Soit A_λ dans $C^\infty(\Sigma, OPS_{f_1(\lambda), f_2(\lambda)}^{m_1, m_2})$ un opérateur régulièrement elliptique à gauche

Alors si en un point λ_0 de Σ , A_{λ_0} est inversible dans $\mathcal{U}'(E)$ à gauche,

- i) Il existe un voisinage V_{λ_0} de λ_0 où A_λ est inversible à gauche
- ii) Il existe un inverse à gauche Q_λ dans $C^\infty(V_{\lambda_0}, OPS_{f_1(\lambda), f_2(\lambda)}^{-m_1, -m_2})$

Les propositions 4.2 et 4.3 permettent de résoudre comme dans [2] le problème posé à la fin du chapitre II.

L'objet des chapitres IV et V sera donc d'étudier l'inversibilité de $P_{\Sigma_1 \cap \Sigma_2}$ en tout point v de $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap S^*X$

CHAPITRE IV ETUDE DE L'INVERSIBILITE DANS $\mathcal{S}$

§ 1 Introduction

On étudie maintenant le problème particulier posé dans l'introduction.

Soit $\mathcal{P} = P_1 P_2 + Q$

l'opérateur considéré et on suppose que Q est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0 régulier et que P_i ($i=1,2$) est d'ordre $1/2$ et vérifie :

$$(H') \quad \frac{1}{i} \{p_i, \overline{p_i}\} > 0 \quad i=1,2$$

où p_i désigne le symbole principal de P_i .

Soit Σ_i l'ensemble caractéristique de p_i :

Σ_i est un sous-cône symplectique de $T^*X \setminus 0$, on suppose que Σ_1 et Σ_2 sont quasi-transverses.

On veut construire une parametrix à droite pour $\mathcal{P}$. Grâce à la proposition 2.4 (chapitre II) on se ramène à la vérification de deux points :

point i : L'hypothèse (H') entraîne que P_i admet une parametrix à droite dans $OPS^{-1/2, -1}(X, \Sigma_i)$.

Le point i) se déduit alors de l'exemple 2.5 (chapitre II).

point ii : Il nous faut étudier $\mathcal{P}_{\Sigma_1 \cap \Sigma_2}$

$$\mathcal{P}_{\Sigma_1 \cap \Sigma_2} = P_1(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) \cdot P_2(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) + q(o, \tilde{v})$$

où q désigne le symbole principal de Q .

On distingue alors les cas suivants :

cas 1 : Σ_1 et Σ_2 transverses

Dans ce cas, on peut choisir des coordonnées de telle sorte que :

$$\Sigma_i \text{ est défini par } u_i^1 = 0, u_i^2 = 0 \quad (i = 1, 2)$$

$\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ est défini par $u_1^1 = 0, u_1^2 = 0, u_2^1 = 0, u_2^2 = 0$.

Les du_i^j sont indépendantes ($i=1,2 ; j=1,2$).

Alors $\mathcal{L}_i = \tilde{\mathcal{L}}_i$

$$P_{i(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)} = \alpha_i^1 \tilde{L}_i^1(u, D_u) + \alpha_i^2 \tilde{L}_i^2(u, D_u) \quad i=1,2$$

$$\alpha_i^j \in \mathbb{C}$$

où $\tilde{L}_i^j(u, D_u)$ a été défini en III. §1.

On omettra dans la suite l'indice $(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)$ et on désigne par p_i le symbole de P_i c'est une forme complexe sur $(E \times E^*)$ qu'on peut considérer également comme un élément dans le compléxifié de $\tilde{\mathcal{L}}_i$, le 2-plan associé à Σ_i .

Remarquons que l'on a la propriété suivante :

Remarque 1.1

$$\frac{1}{i} \{p_i, \overline{p_i}\} = [P_{i(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)}, \overline{P_{i(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)}}] = \frac{1}{i} \{P_{i(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)}, \overline{P_{i(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)}}\}$$

c'est la conséquence du fait que l'application $P \rightarrow P_\Sigma$ de $OPS^{m,1}(X, \Sigma)$ dans $C^\infty(\Sigma, OPS_\Sigma^1)$ conserve les crochets.

Cas B : $\text{Dim}(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) = 3$

Dans ce cas, on peut choisir des coordonnées de telle sorte que :

Σ_i est défini par $u_i=0, w=0$ ($i=1,2$)

$\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ est défini par $u_1=0, u_2=0, w=0$

et du_1, du_2, dw sont indépendantes.

Alors

$$P_{i(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)} = \alpha_i \tilde{L}_i(u, D_u, D_w) + \beta_i M(w, u, D_u, D_w) \quad (i=1,2)$$

p_i le symbole de $P_i(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)$ est une forme complexe sur $(E \times E^*)$ qu'on peut considérer comme un élément dans le complexifié de $\mathfrak{L}_i$

Cas (C) $\Sigma_1 = \Sigma_2$

Alors $\Sigma_1 = \Sigma_2$ est défini par $u^1 = 0$, $u^2 = 0$

où les du^i sont indépendantes.

$$P_{i \Sigma_1} = (\alpha_i^1 \tilde{L}^1 + \alpha_i^2 \tilde{L}^2) (u, D_u) \quad (i = 1, 2)$$

$$\alpha_i^j \in \mathbb{C}$$

On est bien dans la situation générale étudiée au chapitre III, le fait que Σ_i soit symplectique entraîne de plus la propriété suivante :

$$(1.2) \quad \begin{array}{ll} \text{Dans le cas (A)} & [\tilde{L}_i^1(u, D_u), \tilde{L}_i^2(u, D_u)] \neq 0 \quad i=1,2 \\ \text{Dans le cas (B)} & [\tilde{L}_i(u, D_u), M] \neq 0 \quad i=1,2 \\ \text{Dans le cas (C)} & [\tilde{L}^1, \tilde{L}^2] \neq 0 \end{array}$$

Il résulte de la remarque 1.1, que $P_i(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)$ qui est dans

$C^\infty(\Sigma_1 \cap \Sigma_2, OPS_{L_i}^1)$, admet une paramétrix Q_i dans $C^\infty(\Sigma_1 \cap \Sigma_2, OPS_{L_i}^{-1})$;

$\mathcal{P}_{\Sigma_1 \cap \Sigma_2}$ est donc régulièrement elliptique à droite.

Par conséquent, en vertu de la proposition 4.2 du chapitre III, il suffit de montrer que en tout point λ_0 de $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$, $\mathcal{P}_{\Sigma_1 \cap \Sigma_2}$ est inversible

dans $\mathcal{Y}(E)$ à droite.

Dans le § suivant, on va montrer comment dans les cas (A), (B), (C), on peut en un point de $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$, grâce à des transformations symplectiques mettre $p_1, p_2, \tilde{L}_i^j, M$ sous des formes réduites.

§ 2 Classification symplectique

§ 2.1 Le cas transverse (A)

La classification est déterminée par le rang de la 2-forme canonique

ω sur $(E \times E^*)^*$ restreinte à $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2$.

Ce rang est nécessairement supérieur ou égal à 2, car $\mathfrak{L}_1$ est symplectique. On distingue donc deux cas :

Cas A.1 Rang $\omega = 4$

Autrement dit, $\mathfrak{L}$ est symplectique. On reprend pour $(E \times E^*)$ les coordonnées $(x, \xi) \equiv (x_1, \dots, x_4, \xi_1, \dots, \xi_4)$

Comme $\{L_1^1(x, \xi), L_1^2(x, \xi)\} \neq 0$, on peut toujours supposer que

$$\{L_1^1(x, \xi), L_1^2(x, \xi)\} = 1$$

Il existe une transformation symplectique Φ_1 de $(E \times E^*)$ telle que

$$L_1^1 \circ \Phi_1 = x_1$$

$$L_1^2 \circ \Phi_1 = \xi_1$$

On note encore

L_2^1, L_2^2 les formes engendrant $\mathfrak{L}_2$ dans ce nouveau système de coordonnées

On pose

$$\begin{aligned} \{L_2^i, x_1\} &= k_{i1} \\ \{L_2^i, \xi_1\} &= k_{i2} \end{aligned} \quad i = 1, 2$$

$$\text{Alors } L_2^i + k_{i1} \xi_1 - k_{i2} x_1 = L_2'^i$$

commute avec x_1 et ξ_1 et de plus $\{L_2'^1, L_2'^2\} \neq 0$ (On peut se ramener au cas où c'est égal à 1) en raison de l'hypothèse ω non dégénérée.

On peut alors trouver une transformation symplectique sur $(x_2, \dots, x_4, \xi_2, \dots, \xi_4)$ Φ_2 telle que

$$L_2'^1 \circ \Phi_2 = x_2$$

$$L_2'^2 \circ \Phi_2 = \xi_2$$

On s'est ainsi ramené au cas où :

$$\begin{aligned} L_1^1 &= x_1 & L_2^1 &= x_2 + \tilde{\alpha}_1 x_1 + \tilde{\beta}_1 \xi_1 & \tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i &\in \mathbb{R} \\ L_1^2 &= \xi_1 & L_2^2 &= \xi_2 + \tilde{\alpha}_2 x_1 + \tilde{\beta}_2 \xi_1 \end{aligned}$$

Si dans le cas considéré ici, on avait pris $L_i^2 = \text{Rep}_i$ $L_i^1 = \text{Imp}_i$ et si on avait $\frac{1}{i} \{p_1, \bar{p}_1\} = +1$,

alors après transformation symplectique ,

$$p_1 = \xi_1 - i x_1 ; \quad p_2 = \alpha_1 \xi_2 + \alpha_2 x_2 + \beta_1 \xi_1 + \beta_2 x_1$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$

$$2.1 \quad \left[\begin{array}{l} \frac{1}{i} \{p_2, \bar{p}_2\} > 0 \\ \text{Re}(\alpha_1 \xi_2 + \alpha_2 x_2) = 0 \\ \text{Im}(\alpha_1 \xi_2 + \alpha_2 x_2) = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ \xi_2 = 0 \end{array}$$

(Conséquence du fait que $\text{Rep}_2, \text{Imp}_2$ définissent $\mathfrak{L}_2$)

Cas A2 : Rang $\omega = 2$

On montre qu'on peut se ramener au cas où

$$\begin{aligned} L_1^1 &= x_1 & L_2^1 &= x_2 + \tilde{\alpha}_1 x_1 + \tilde{\beta}_1 \xi_1 & \tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i &\in \mathbb{R} \\ L_1^2 &= \xi_1 & L_2^2 &= x_3 + \tilde{\alpha}_2 x_1 + \tilde{\beta}_2 \xi_1 \end{aligned}$$

$$p_1 = \xi_1 - i x_1$$

$$p_2 = \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_2 + \beta_1 \xi_1 + \beta_2 x_1$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ et :

$$2.2 \quad \left[\begin{array}{l} \frac{1}{i} \{p_2, \bar{p}_2\} > 0 \\ \text{et } \text{Re}(\alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_2) = 0 \\ \text{Im}(\alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_2) = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}$$

(Conséquence du fait que $\text{Rep}_2, \text{Imp}_2$ définissent $\mathfrak{L}_2$)

§ 2.2 Dimension $\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2 = 1$: Le cas (B)

Le rang de la 2-forme sur $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2$ est nécessairement 2.

Une étude du même type que précédemment montre qu'on peut choisir (à une transformation symplectique près) $L^1(x, \xi)$, $M(x, \xi)$, $L^2(x, \xi)$ de telle sorte que (le choix dépend également de la donnée de p_1 et de p_2) :

$$\begin{aligned} L^1 &= x_1 \\ M &= \xi_1 \\ L^2 &= x_2 + \tilde{\alpha}_2 \xi_1 \\ p_1 &= \xi_1 - i x_1 \\ p_2 &= \alpha x_2 + \beta_1 \xi_1 + \beta_2 x_1 \end{aligned}$$

avec

$$(2.3) \quad \begin{cases} \alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0 \\ \frac{1}{i} \{p_2, \bar{p}_2\} > 0 \end{cases}$$

§ 2.3 $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_2$: le cas (C)

Ce cas est connu, on se ramène au cas où

$$L_1 = x_1, L_2 = \xi_1 \quad p_1 = \xi_1 - i x_1 \quad p_2 = \xi_1 - i \alpha x_1 \quad \text{avec } \operatorname{Re} \alpha > 0.$$

§ 2.4 Conséquences : réduction du nombre de variables :

Cas A : Pour f dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, un opérateur A de $\operatorname{OPS}_{\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2}^{m_1, m_2}(\mathbb{R}^4)$

est défini par

$$Af = (2\pi)^{-4} \int e^{i x \cdot \xi} a(L_1^1, L_1^2, L_2^1, L_2^2) \hat{f}(\xi) d\xi$$

Dans le cas (A.1), on obtient en mettant sous forme réduite :

$$\begin{aligned} (Af)(x_1, \dots, x_4) &= (2\pi)^{-2} \int e^{i(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)} a(x_1, \xi_1, x_2 + \tilde{\alpha}_1 x_1 + \tilde{\beta}_1 \xi_1, \xi_2 + \tilde{\alpha}_2 x_1 \\ &\quad + \tilde{\beta}_2 \xi_1) \\ &\quad \hat{f}(\xi_1, \xi_2, x_3, x_4) d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

On voit aisément que dans le problème qui nous intéresse x_3 et x_4 ne jouent aucun rôle, et on considère que A opère dans $\mathcal{Y}(\mathbb{R}^2)$

Dans le cas (A2), on obtient :

$$(Af)(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2\pi)^{-1} \int e^{i x_1 \xi_1} a(x_1, \xi_1, x_2 + \tilde{\alpha}_1 x_1 + \tilde{\beta}_1 \xi_1, x_3 + \tilde{\alpha}_2 x_1 + \tilde{\beta}_2 \xi_1) \hat{f}(\xi_1, x_2, x_3, x_4) d\xi_1$$

x_4 ne joue aucun rôle, on considère que A opère dans $\mathcal{Y}(\mathbb{R}^3)$.

Cas B : On obtient :

$$(Af)(x_1, x_2, x_3) = (2\pi)^{-1} \int e^{i x_1 \xi_1} a(x_1, \xi_1, x_2 + \tilde{\alpha}_1 x_1 + \tilde{\alpha}_2 \xi_1) \hat{f}(\xi_1, x_2, x_3) d\xi_1$$

x_3 ne joue aucun rôle .

Cas C :

$$(Af)(x_1, x_2) = (2\pi)^{-1} \int e^{i x_1 \xi_1} a(x_1, \xi_1) \hat{f}(\xi_1, x_2) d\xi_1$$

x_2 ne joue aucun rôle .

L'existence d'une paramétrix à droite est donc ramenée à l'étude de l'existence d'un inverse à droite dans $\mathcal{Y}$ pour les modèles suivants :

$$\mathcal{P} = P_1 P_2 + q \quad , \quad q \in \mathbb{C}$$

Cas A1

$$P_1 = D_{x_1} - i x_1$$

$$P_2 = \alpha_1 D_{x_2} + \alpha_2 x_2 + \beta_1 D_{x_1} + \beta_2 x_1$$

+ conditions (2.1) sur $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$

Cas A2

$$P_1 = D_{x_1} - i x_1$$

$$P_2 = \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_2 + \beta_1 D_{x_1} + \beta_2 x_1$$

+ conditions (2.2)

Cas B

$$P_1 = D_{x_1} - i x_1$$

$$P_2 = \alpha x_2 + \beta_1 D_{x_1} + \beta_2 x_1 \quad + \text{conditions} \quad (2.3)$$

Cas C

$$P_1 = D_{x_1} - i x_1$$

$$P_2 = D_{x_1} - i \alpha x_1 \quad \text{Re} \alpha > 0$$

C'est cette étude que nous mènerons dans le § suivant .

§ 3 Etude de l'inversibilité pour le modèle A1

On étudie l'inversibilité à droite dans $\mathcal{V}(\mathbb{R}^2)$ de

$$\mathcal{P} = P_1 P_2 + q = (D_{x_1} - i x_1) (\alpha_1 D_{x_2} + \alpha_2 x_2 + \beta_1 D_{x_1} + \beta_2 x_1) + q$$

Il résulte des hypothèses précédentes que :

$(D_{x_1} - i x_1)$ admet un inverse à droite Q_1 dans $OPS_{\mathcal{L}_1}^{-1}(\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{L}_1$ est maintenant considéré comme un 2-plan de $\mathbb{R}^4$

P_2 admet un inverse à droite Q_2 dans $OPS_{\mathcal{L}_2}^{-1}(\mathbb{R}^2)$; $\mathcal{L}_2$ est maintenant considéré comme un 2-plan de $\mathbb{R}^4$.

Par conséquent, $P_1 P_2 + q$ est un opérateur elliptique à droite et admet une paramétrix Q dans $OPS_{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2}^{-1, -1}(\mathbb{R}^2)$ telle que

$$\begin{aligned} \mathcal{P} Q &= I + \mathcal{R} \\ \text{avec} \quad \mathcal{R} &\in \bigcap_j OPS_{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2}^{-j, -j}(\mathbb{R}^2) \end{aligned}$$

$$\text{Mais } \bigcap_j OPS_{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2}^{-j, -j} = \bigcap_j OPS_{\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2}^{-j} = OPS^{-\infty}(\mathbb{R}^2)$$

$\mathcal{R}$ est donc régularisant , au sens habituel, i.e il opère de $\mathcal{V}'(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathcal{V}(\mathbb{R}^2)$.

On est presque, dans la situation classique sauf que P n'est pas à indice, on va donc étudier PP^* qui lui sera un opérateur à indice dans des espaces adaptés.

On va montrer la proposition suivante :

Proposition 3.1 :

PP^* a un inverse dans $\mathcal{Y}(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si $\text{Ker}(PP^*) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) = 0$

On va montrer que PP^* est elliptique bilatère.

$$PP^* = (P_1 P_2 + q)(P_2^* \cdot P_1^* + \bar{q}) \equiv (P_1 P_1^*) (P_2 P_2^*) \text{ (modulo } OPS_{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2}^{1,1} \text{)}$$

$(P_i P_i^*)$ admet un inverse bilatère dans $OPS_{\mathcal{L}_i}^{-2}(\mathbb{R}^2)$, d'où le résultat.

Il existe alors Q dans $OPS_{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2}^{-2, -2}$ tel que :

$$Q(PP^*) = I + \mathcal{R}$$

$$(PP^*)Q = I + \mathcal{R}'$$

où $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont des opérateurs compacts de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{Y}$ et de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{Y}'$

On en déduit que PP^* est un opérateur à indice d'indice nul de $\mathcal{Y}(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathcal{Y}(\mathbb{R}^2)$

On est donc ramené à l'étude du noyau dans $\mathcal{Y}(\mathbb{R}^2)$.

Lemme 3.2 $\text{Ker}(PP^*) \cap \mathcal{Y}(\mathbb{R}^2) = 0$

Démonstration

Il suffit de montrer que $\text{Ker } P^* \cap \mathcal{Y}(\mathbb{R}^2) = 0$; on réécrit P^* sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} P^* &= (D_{x_1} + i x_1)(\alpha(D_{x_1} + i x_1) + \beta(D_{x_1} - i x_1) + \gamma(D_{x_2} + i x_2) + \delta(D_{x_2} - i x_2)) + \lambda \\ &= P_1^* P_2^* + \lambda \end{aligned}$$

où P_i^* est inversible à gauche dans $\mathcal{Y}(\mathbb{R}^2)$

- a) Si $\lambda = 0$, il est clair que ρ^* est inversible à gauche et donc $\text{Ker } \rho^* \cap \mathcal{Y}(\mathbb{R}^2) = 0$.
- b) On suppose donc $\lambda \neq 0$, on introduit les fonctions d'Hermite $h^k(t)$, $k=0, \dots, \infty$ qui possèdent les propriétés suivantes.

- i) c'est une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$.
- ii) $(D_t + it) h^k(t) = \sqrt{2} \sqrt{k+1} h^{k+1}(t)$
 $(D_t - it) h^k(t) = \sqrt{2} \sqrt{k} h^{k-1}(t)$

Soit $u(x_1, x_2)$ une solution dans $\mathcal{Y}(\mathbb{R}^2)$ de $\rho^* u = 0$, on développe u sur la base des fonctions d'Hermite :

$$u(x_1, x_2) = \sum_{j,k} \alpha_{jk} h^j(x_1) h^k(x_2) = \sum_{j,k} \alpha_{jk} h^{jk}$$

On veut montrer que $\rho^* u = 0 \Leftrightarrow u = 0$

or

$$\begin{aligned} P(\alpha_{jk} h^{j,k}) &= \alpha \cdot 2\sqrt{(j+1)(j+2)} \alpha_{jk} h^{j+2,k} \\ &+ (2\beta j + \lambda) \alpha_{jk} h^{j,k} \\ &+ 2\sqrt{(j+1)(k+1)} \alpha_{jk} h^{j+1,k+1} \\ &+ 2\delta \sqrt{(j+1)k} \alpha_{jk} h^{j+1,k-1} \end{aligned}$$

On en déduit que $\rho^* u = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} (3.3) \quad (2\beta j + \lambda) \alpha_{jk} &= -2\alpha \sqrt{j(j-1)} \alpha_{j-2,k} - 2\sqrt{jk} \alpha_{j-1,k-1} \\ &- 2\delta \sqrt{j(k+1)} \alpha_{j-1,k+1} \end{aligned}$$

On suppose que :

$$(2\beta j + \lambda) \neq 0, \quad \forall j < j_0$$

Alors (3.3) implique que :

$$\alpha_{j,k} = 0 \quad \forall k, \quad \forall j < j_0$$

Si donc $(2\beta j + \lambda) \neq 0, \quad \forall j$, alors $\rho^* u = 0 \Rightarrow u = 0$

Si il existe j_0 tel que :

$(2\beta j_0 + \lambda) = 0$, alors il résulte de (3.4) que

$$u = (D_{x_1} + i x_1)^{j_0} v$$

avec v dans $\mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$

$$\rho^* u = 0 \Leftrightarrow \rho_{\lambda}^* (D_{x_1} + i x_1)^{j_0} \cdot v = 0$$

Or on vérifie que pour tout λ

$$\rho_{\lambda}^* (D_{x_1} + i x_1)^{j_0} = (D_{x_1} + i x_1)^{j_0} \rho_{\lambda+2\beta j_0}^*$$

Par conséquent, lorsque $(2\beta j_0 + \lambda) = 0$

$$\rho_{-2\beta j_0}^* \circ (D_{x_1} + i x_1)^{j_0} = (D_{x_1} + i x_1)^{j_0} \rho_0^*$$

On reconnaît là un procédé de concaténation [8]

Or $\text{Ker } \rho_0^* \cap \mathcal{J}(\mathbb{R}^2) = 0$ (d'après a))

On en déduit que

$$\begin{aligned} \rho_{-2\beta j_0}^* (D_{x_1} + i x_1)^{j_0} v = 0 &\Leftrightarrow (D_{x_1} + i x_1)^{j_0} \circ \rho_0^* v = 0 \\ &\Leftrightarrow \rho_0^* v = 0 \\ &\Leftrightarrow v = 0 \Leftrightarrow u = 0 \end{aligned}$$

c . q . f . d .

§ 4 Etude de l'inversibilité dans $\mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$ pour le modèle A2.

On étudie dans $\mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$ l'opérateur

$$\rho = P_1 P_2 + q = (D_{x_1} - i x_1)(\alpha(D_{x_1} + i x_1) + \beta(D_{x_1} - i x_1) + \gamma x_2 + \delta x_3) + q$$

Comme au § précédent, on se ramène à l'étude de $\rho\rho^*$

On montre la proposition 4.1

Proposition 4.1

$\rho\rho^*$ a un inverse dans $\mathcal{Y}(\mathbb{R}^3)$ si et seulement si pour tout $(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2$
 $\text{Ker } (\rho\rho^*_{x_2, x_3}) \cap \mathcal{J}(\mathbb{R}) = 0$

On montre comme au § précédent que $\rho\rho^*$ est elliptique, c'est à dire qu'il existe Q tel que

$$Q(\rho\rho^*) = I + \mathcal{R} \quad \text{avec} \quad \mathcal{R} \in \text{OPS}_{\mathcal{L}}^{-\infty}(\mathbb{R}^3)$$

$$(\rho\rho^*)Q = I + \mathcal{R}' \quad \mathcal{R}' \in \text{OPS}_{\mathcal{L}}^{-\infty}(\mathbb{R}^3)$$

où $\mathcal{L}$ est le 4-plan engendré par x_1, ξ_1, x_2, x_3 , la proposition résulte alors de la démonstration du théorème 3.1 de [2] (point (iii) $\rightarrow$ i).

On vérifie alors aisément que $\text{Ker } (\rho\rho^*_{x_2, x_3}) \cap \mathcal{Y}(\mathbb{R}) = 0$; en effet, ceci résulte $\text{Ker } \rho^*_{x_2, x_3} \cap \mathcal{J}(\mathbb{R}) = 0$

On montre ce point en remarquant que

$$\begin{aligned} [P_2, P_2^*] &> 0 \\ [P_1, P_1^*] &> 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Indice } \rho^*_{x_2, x_3} = -2 \Rightarrow \text{Ker } \rho^*_{x_2, x_3} \cap \mathcal{J}(\mathbb{R}) = 0$$

On montre par la même technique que ρ est inversible à droite dans $\mathcal{Y}(\mathbb{R}^2)$, ou $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ dans les cas B) et C).

CHAPITRE V APPLICATIONS

§ 1 : Enoncé des Théorèmes : le cas quasitransverse

Les propositions 2.4, 2.5 chapitre II, 3.2 chapitre III, 4.2 chapitre III, et 3.1, 3.2, 4.1, nous permettent de démontrer le théorème suivant.

Soient P_1 et P_2 deux opérateurs pseudo-différentiels réguliers sur un ouvert X de $\mathbb{R}^n$ d'ordre $1/2$ dont le symbole principal p_1 (resp. p_2) vérifie l'hypothèse :

$$(H') \quad \frac{1}{i} \{p, \bar{p}\}_{x, \xi} > 0 \text{ lorsque } p(x, \xi) = 0.$$

Soit Σ_i le cône caractéristique de p_i , on a alors :

Théorème 1.1 : On suppose que Σ_1 et Σ_2 sont quasi-transverses, alors

$\forall A$ opérateur pseudodifférentiel régulier d'ordre 0, l'opérateur

$\mathcal{P} = (P_1 \circ P_2 + A)$ admet une parametrix à droite dans $OPS^{-1, -1, -1}(X, \Sigma_1, \Sigma_2)$.

Par passage à l'adjoint, on considère la situation exposée dans l'introduction : Soient P_1 et P_2 deux opérateurs pseudodifférentiels réguliers sur un ouvert X de $\mathbb{R}^n$ d'ordre $1/2$ dont le symbole principal p_1 (resp. p_2) vérifie l'hypothèse.

$$(H) \quad \frac{1}{i} \{p, \bar{p}\} < 0 \text{ lorsque } p(x, \xi) = 0$$

Alors :

Théorème 1.2 : On suppose que Σ_1 et Σ_2 sont quasi-transverses, alors

$\forall A$ opérateur pseudodifférentiel régulier d'ordre 0, l'opérateur

$\mathcal{P} = (P_1 P_2 + A)$ admet une parametrix à gauche dans $OPS^{-1, -1, -1}(X, \Sigma_1, \Sigma_2)$.

En particulier, $P_1 P_2 + A$ est hypoelliptique avec perte d'une dérivée.

§ 2 : Démonstrations des théorèmes 1.1 et 1.2 dans le cas général.

Soit donc à étudier $P_1 P_2 + A$ où p_1 et p_2 vérifient la condition (H)

et les hypothèses du § précédent.

Σ_1 est défini dans $T^*X \setminus 0$ par $\text{Rep}_1 = 0$, $\text{Imp}_1 = 0$

Σ_2 est défini dans $T^*X \setminus 0$ par $\text{Rep}_2 = 0$, $\text{Imp}_2 = 0$

On utilise alors une idée de [6].

On considère $X \times \mathbb{R}^2 \ni (x, z_1, z_2)$

et $T^*(X \times \mathbb{R}^2) \setminus 0 \ni (x, z_1, z_2, \xi, \zeta_1, \zeta_2)$

On identifie $T^*(X) \setminus 0$ au sous cône $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = 0$

et soit U_ε le cône défini par $|\zeta_1| + |\zeta_2| < \varepsilon |\xi|$.

Dans ce cône U_ε , il est clair que des symboles pseudodifférentiels sur $T^*(X) \setminus 0$ peuvent être considérés comme des symboles sur U indépendants de (z, ζ) .

Ainsi P_2 , A définissent des opérateurs $\tilde{P}_2$, $\tilde{A}$ opérant sur les microfonctions dans U_ε .

$\tilde{P}_2$ est caractéristique sur $\tilde{\Sigma}_2$ défini dans U par $\text{Rep}_2 = 0$, $\text{Imp}_2 = 0$.

On considère $\tilde{\Sigma}_1$ défini dans U_ε par :

$$\text{Rep}_1 + \frac{\zeta_1}{|\xi|^{1/2}} = 0$$

$$\text{Imp}_1 + \frac{\zeta_2}{|\xi|^{1/2}} = 0$$

et soit $\tilde{P}_1$ l'opérateur pseudodifférentiel sur U de symbole

$$\tilde{p}_1 = p_1 + \frac{\zeta_1}{|\xi|^{1/2}} + i \frac{\zeta_2}{|\xi|^{1/2}}$$

On remarque alors que $\tilde{\Sigma}_1$ et $\tilde{\Sigma}_2$ sont transverses dans U et que $\tilde{\Sigma}_i$ ($i=1,2$) est symplectique de codimension 2 si ε est choisi suffisamment petit ; en effet :

$$\frac{1}{i} \{ \tilde{p}_1, \overline{\tilde{p}_1} \} = \frac{1}{i} \{ p_1, \overline{p_1} \} \text{ pour } \zeta_1=0, \zeta_2=0$$

$\frac{1}{i} \{p_1, \bar{p}_1\}$ étant strictement négatif lorsque $\text{Rep}_1=0$, $\text{Imp}_1=0$, $\frac{1}{i} \{\tilde{p}_1, \overline{\tilde{p}_1}\}$ est strictement négatif lorsque $|\zeta_1| + |\zeta_2| < \varepsilon |\xi|$

$$\text{Rep}_1 = -\frac{\zeta_1}{|\xi|^{1/2}}$$

$$\text{Imp}_1 = -\frac{\zeta_2}{|\xi|^{1/2}}$$

pour ε suffisamment petit.

On considère l'opérateur :

$$\tilde{P} = \tilde{P}_1 \cdot \tilde{P}_2 + \tilde{A}$$

alors $\tilde{P} \in \text{OPS}^{1,1,1}(U, \tilde{\Sigma}_1, \tilde{\Sigma}_2)$ et vérifie microlocalement dans U les hypothèses du théorème 1.2.

De plus le symbole de P ne dépend pas de (z_1, z_2) .

Il existe $\tilde{Q}$ dans $\text{OPS}^{-1,-1,-1}(U, \tilde{\Sigma}_1, \tilde{\Sigma}_2)$ tel que

$$\tilde{Q} \circ \tilde{P} = I + \tilde{R}$$

où $\tilde{R}$ est régularisant dans U (ie pour toute distribution ω dont le WF est dans U , $\tilde{R}\omega$ est C^∞).

De plus le symbole de $\tilde{Q}$ et $\tilde{R}$ ne dépendent pas de z_1, z_2 en un sens évident.

Soit $\tilde{q}$ et $\tilde{p}$ les symboles complets de $\tilde{Q}$ et $\tilde{P}$, si on désigne par $\#$ la loi des symboles dans U , on a :

$$(2.1) \quad \tilde{q}(x, \xi, \zeta_1, \zeta_2) \# \tilde{p}(x, \xi, \zeta_1, \zeta_2) = 1 + \tilde{r}(x, \xi, \zeta_1, \zeta_2)$$

où $\tilde{r}$ est dans $S^{-\infty}(U)$, $\tilde{q}, \tilde{p}, \tilde{r}$ ne dépendent pas de z_1, z_2

On désigne par $\circledast$ la loi de composition des symboles dans $T^*X \setminus 0$. Alors

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \tilde{q}(x, \xi, \zeta_1, \zeta_2) \# \tilde{p}(x, \xi, \zeta_1, \zeta_2) &\equiv \tilde{q}(x, \xi, \zeta_1, \zeta_2) \circledast \tilde{p}(x, \xi, \zeta_1, \zeta_2) \\ &= 1 + \tilde{r}(x, \xi, \zeta_1, \zeta_2) \end{aligned}$$

est multiplicative en ζ_1, ζ_2 sur les symboles qui ne dépendent pas de (z_1, z_2) (modulo $S^{-\infty}$).

En effet, on a :

$$\tilde{q} \# \tilde{p} = I(c)$$

$$\text{avec } c = (2\pi)^{-n-2} \iint e^{i(\tilde{x} \cdot \tilde{\xi} + \tilde{z} \cdot \tilde{\zeta})} \tilde{q}(x, \xi + \tilde{\xi}, \zeta + \tilde{\zeta}) \tilde{p}(x - \tilde{x}, \xi, \zeta) d\tilde{x} d\tilde{\xi} d\tilde{z} d\tilde{\zeta}$$

Formellement, on peut écrire :

$$\begin{aligned} I(c) &= (2\pi)^{-n} \int e^{i\tilde{x} \cdot \tilde{\xi}} \tilde{p}(x - \tilde{x}, \xi, \zeta) [(2\pi)^{-2} \int \tilde{q}(x, \xi + \tilde{\xi}, \zeta + \tilde{\zeta}) e^{i\tilde{z} \cdot \tilde{\zeta}} d\tilde{z} d\tilde{\zeta}] d\tilde{x} d\tilde{\xi} \\ &= (2\pi)^{-n} \int e^{i\tilde{x} \cdot \tilde{\xi}} p(x - \tilde{x}, \xi, \zeta) \cdot \tilde{q}(x, \xi + \tilde{\xi}, \zeta) d\tilde{x} d\tilde{\xi} \\ &= p(\cdot, \cdot, \zeta) \bigoplus q(\cdot, \cdot, \zeta). \end{aligned}$$

Cette formule est exacte sous des hypothèses convenables d'intégrabilité sur $\tilde{q}, \tilde{p}, \tilde{q} \cdot \tilde{p}$ (Théorème de Fubini). Classiquement $\tilde{q}, \tilde{p}, \tilde{q}(\cdot, \cdot, \zeta), \tilde{p}(\cdot, \cdot, \zeta)$ étant des symboles dans un $S_{1/2}^\mu$, on peut se ramener à ce cas par intégration par partie (utiliser un opérateur P tel que :

$$P.e^{i(\tilde{x} \cdot \tilde{\xi} + \tilde{z} \cdot \tilde{\zeta})} = e^{i(\tilde{x} \cdot \tilde{\xi} + \tilde{z} \cdot \tilde{\zeta})}, \text{ cf [1]}).$$

On peut faire $\zeta_1 = 0, \zeta_2 = 0$ dans (2.2), et on obtient

$$\begin{aligned} (2.3) \quad \tilde{q}(x, \xi, 0, 0) \bigoplus \tilde{p}(x, \xi, 0, 0) &= \tilde{q}(x, \xi, 0, 0) \bigoplus p(x, \xi) \\ &= 1 + \tilde{r}(x, \xi, 0, 0) \end{aligned}$$

Posons $q(x, \xi) = \tilde{q}(x, \xi, 0, 0)$, q est le symbole complet de la parametrix de P.

La question est de savoir dans quelle classe est $q(x, \xi)$. Il est immédiat que $q(x, \xi)$ est dans $S_{1/2}^0(T^*X)$ car $\tilde{q}(x, \xi, \zeta_1, \zeta_2)$ est dans $S_{1/2}^0(U)$, mais il est difficile d'être plus précis dans le cas général.

On a le lemme suivant :

Lemme 2.1 : Soit $\tilde{q}(x, \xi, \zeta_1, \zeta_2)$ dans $S^{m, k_1, k_2}(U, \tilde{\Sigma}_1, \tilde{\Sigma}_2)$. On suppose que tout champ tangent à $\Sigma_{1\sim}$ et $\Sigma_{2\sim}$ peut s'écrire comme la somme d'un champ tangent à Σ_1 et Σ_2 et d'un champ nul sur $(\zeta_1=0, \zeta_2=0)$, alors $q(x, \xi)$ est dans $S^{m, k_1, k_2}(T^*X, \Sigma_1, \Sigma_2)$.

Il importe de remarquer que l'hypothèse du lemme n'est pas vérifiée dans le cas général.

On pourrait par contre, en utilisant ce lemme ramener l'étude du cas quasitransverse à l'étude du cas transverse.

Dans le cas général, on a cependant les propriétés suivantes :

Si Q est la parametrix, $Q, QP_1, QP_2, P_1Q, P_2Q$ sont dans $OPS_{1/2}^0(X)$, ceci nous suffira pour l'application aux systèmes.

§ 3 : APPLICATION AUX SYSTEMES

Utilisant les théorèmes précédents, on montre les deux théorèmes suivants

Théorème 3.1 : Soient P_1 et P_2 deux opérateurs pseudodifférentiels réguliers d'ordre $1/2$ vérifiant (H').

Alors pour tous opérateurs pseudodifférentiels réguliers d'ordre 0, A et B , le système :

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & A \\ B & P_2 \end{pmatrix}$$

admet une parametrix à droite $Q = (Q_{ij})_{i,j=1,2}$ avec $Q_{ij} \in OPS_{1/2}^0(X)$.

Théorème 3.2 : Soient P_1 et P_2 deux opérateurs pseudodifférentiels réguliers d'ordre $1/2$ vérifiant (H). Alors pour tous opérateurs pseudodifférentiels réguliers d'ordre 0, A et B , le système

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & A \\ B & P_2 \end{pmatrix} \text{ admet une parametrix à gauche } Q = (Q_{ij})_{i,j=1,2}$$

$Q_{ij} \in OPS_{1/2}^0(X)$. En particulier, le système est souselliptique avec perte d' $1/2$ dérivée.

Esquisse de la démonstration du Th. 3.2

On pose

$${}^v\rho = \begin{pmatrix} P_2 & -A \\ -B & P_1 \end{pmatrix}$$

$${}^v\rho.\rho = \begin{pmatrix} P_2P_1-AB & [P_2, A] \\ -[B, P_1] & -BA+P_1P_2 \end{pmatrix}$$

Les termes diagonaux de ${}^v\rho.\rho$ (et dominants) sont du type étudié au §2.

On en déduit un inverse à gauche pour ${}^v\rho.\rho$, d'où un inverse pour ${}^v\rho$.

La classe obtenue dans le théorème se déduit aisément du calcul symbolique.

Le théorème 3.2 répond à une question posée dans [3].



R E F E R E N C E S

- [1] L. Boutet de Monvel : Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudodifferential operators. Comm. Pure. Appl. Math. 27 p585-639 (1974).
- [2] L. Boutet de Monvel. A. Grigis. B. Helffer : Parametrixes d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples (à paraître Asterisque).
- [3] B. Helffer : Sur l'hypoellipticité des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples (perte $3/2$ dérivées) (à paraître).
- [4] L. Hörmander : Pseudodifferential operators and non elliptic boundary problems. Ann. of Math. 83 (1966), 129-209.
- [5] L. Hörmander : Pseudodifferential operators and hypoelliptic equations, Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math., 10 (1966) p138-183.
- [6] Rotschild L.P, Stein E.M. Hypoelliptic differential operators and Nilpotent groups (à paraître).
- [7] Sjöstrand J. Parametrixes for pseudodifferential operators with multiple characteristics. Ark för Mat. 12, 85-130 (1974).
- [8] Trèves F. Concatenations of second. Order Evolution Equations applied to local solvability and hypoellipticity. Comm. pure appl. Math. 26 (1973), 201-250.

DATE DE FIN DE PRÊT

H. 564

1/1/81			
20/3/81			
6.5.81			
9.6.81			
5/12/81			
26.4.82			
19/12/82			