JEAN-LUC CHABERT

Anneaux de polynômes à valeurs entières et extensions de Fatou

Thèses d'Orsay, 1973

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1973__0017__A1_0>

ANNEAUX DE POLYNOMES A VALEURS ENTIERES ET EXTENSIONS DE FATOU

- TABLE DES MATIERES -

INTRODUCTION.

Ce travail a pour origine certaines questions concernant les anneaux de Fatou. Rappelons, en gros, la définition des anneaux de Fatou introduite par BENZAGHOU :

On dit qu'un anneau intègre A de corps des fractions K est de Fatou lorsque la condition suivante est réalisée : si une fraction rationnelle en X ,à coefficients dans K , $P(X)/Q(X)$, (vérifiant certaines conditions de normalisation à préciser) possède un développement en série en X à coefficients dans A , alors les polynômes P et Q sont à coefficients dans A .

On emploie cette terminologie car FATOU a montré que $\mathbb{Z}$ jouissait d'une telle propriété.

BENZAGHOU [3] a montré qu'un anneau intègre qui est intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 est de Fatou et qu'un anneau de Fatou est complètement intégralement clos. Il a ensuite posé un certain nombre de questions :

1°) La notion d'anneau de Fatou passe-t-elle à l'anneau des polynômes ?

2°) La notion d'anneau de Fatou passe-t-elle aux localisés ?

3°) La classe des anneaux de Fatou est-elle confondue avec la classe des anneaux intègres qui sont intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 ?

4°) La classe des anneaux de Fatou est-elle confondue avec la classe des anneaux complètement intégralement clos ?

Supposons que A soit un anneau intègre de corps des fractions K et essayons de répondre à la première question. Considérons une fraction rationnelle en T, $P(X)(T)/Q(X)(T)$, à coefficients dans le corps des fractions $K(X)$ de $A[X]$, "normalisée" et dont le développement en série en T est à coefficients dans $A[X]$. En fait, l'anneau $K[X]$ étant lui-même de Fatou, P et Q sont à coefficients dans $K[X]$. Une façon naturelle de procéder est de substituer à X un élément a de A ; nous obtenons alors une fraction rationnelle en T, $P_a(T)/Q_a(T)$, à coefficients dans K et dont le développement en série en T est à coefficients dans A. On vérifie que cette fraction $P_a(T)/Q_a(T)$ est "normalisée" pour presque tout élément a de A.

Supposons maintenant que A soit un anneau de Fatou. Alors, pour presque tout élément a de A, les coefficients de $P_a(T)$ et de $Q_a(T)$ appartiennent à A et donc les coefficients de P et de Q sont des éléments de $K[X]$ dont la valeur pour $X=a$ est dans A ; on verra qu'en fait ils sont à valeurs dans A sur A tout entier. Si l'on pouvait en déduire qu'ils sont des éléments de $A[X]$, on aurait terminé la démonstration. Mais ce n'est pas le cas, par exemple, pour $A = \mathbb{Z}$: le polynôme $\frac{1}{2}X(X-1)$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$ prend des valeurs entières pour tout entier, alors qu'il n'est pas à coefficients entiers.

Aussi, avons-nous été amenés à étudier :

- les anneaux A tels que tout polynôme à coefficients dans K et à valeurs dans A pour tout élément de A soit en fait à

coefficients dans A (on les appellera "anneaux substitutiels") et de façon plus générale :

- le sous-anneau de $K[X]$ formé des polynômes qui sont à valeurs dans A pour tout élément de A (on le notera $A[X]_{sub}$ et on l'appellera "anneau des polynômes à valeurs entières sur A " par analogie avec le cas étudié par POLYA [37] et OSTROWSKI [34] où A est l'anneau des entiers d'un corps de nombres).

L'anneau $A[X]_{sub}$ est donc apparu dans l'ébauche de démonstration précédente, qui prouverait d'ailleurs que, si A est un anneau de Fatou, l'anneau $A[X]_{sub}$ aussi. Cet anneau $A[X]_{sub}$ devient alors un intermédiaire agréable pour répondre à la question 1 . En effet, soit A' la fermeture intégrale de A dans une clôture algébrique de K ; en supposant A de Fatou, on montre que A' est de Fatou et par suite $A'[X]_{sub}$ est de Fatou ; on montre aussi que A' est substitutiel ($A'[X]_{sub} = A'[X]$), donc $A'[X]$ est de Fatou et finalement $A[X] = A'[X] \cap K[X]$ est de Fatou. (C'est le principe de démonstration utilisé, de façon implicite, par CAHEN [7]).

Ajoutons que ce même anneau $A[X]_{sub}$ nous a fourni des contre-exemples permettant de répondre par la négative aux questions 2 et 3 (cf. [11]). Mais, finalement, nous avons répondu par l'affirmative à la question 4 : tout anneau complètement intégralement clos est de Fatou (cf. [13]). (Ce qui répond du même coup aux questions 1, 2 et 3 !).

Pour aborder l'étude de l'anneau $A[X]_{sub}$ nous nous sommes placés dans une situation plus générale (ce qui simplifie parfois les démonstrations). En effet, remarquons que le A-module quotient $A[X]_{sub}/A[X]$ est isomorphe à l'ensemble des polynômes en X à coefficients dans le A-module K/A qui sont nuls en tout élément de A et dire que l'anneau A est substitutiel revient à dire que le polynôme nul est le seul polynôme à coefficients dans le A-module K/A qui soit nul en tout élément de A . Aussi :

Etant donné un anneau quelconque A , nous introduisons dans la catégorie Mod(A) des A-modules un foncteur noté X^A_∞ qui à tout A-module M associe le A-module $X^A_\infty(M)$ des polynômes en X à coefficients dans M nuls en tout élément de A . Nous considérons tout particulièrement les A-modules M tels que $X^A_\infty(M) = o$: ils constituent la classe libre d'une théorie de torsion sur Mod(A) et nous les appellerons " A-modules sans torsion polynomiale " .Lorsque l'anneau est noethérien, les modules sans torsion polynomiale sont caractérisés par leurs idéaux premiers associés (qui doivent avoir un corps résiduel infini). Ceci fait l'objet du chapitre I.

Au chapitre II, nous étudions ce qui se passe lorsqu'on étend ou lorsqu'on restreint les scalaires. Les modules sans torsion polynomiale qui le restent par extension des scalaires ainsi que leurs sous-modules sont caractérisés par les idéaux premiers de leur support (qui doivent avoir un corps résiduel infini). Le résultat le plus important pour la suite concerne

la localisation par une partie multiplicative S de A : $S^{-1}X^{A}_{\infty}(M)$ est inclus dans $X^{S^{-1}A}_{\infty}(M)$ et, lorsque A est noethérien, il y a égalité. Da façon plus générale, si $u : A \longrightarrow B$ est un homomorphisme d'anneaux où B est noethérien, pour que tout polynôme à coefficients dans un B-module quelconque nul sur u(A) soit nul sur B il faut et il suffit que, pour tout idéal maximal m de B , ou bien $A/u^{-1}(m)$ soit infini, ou bien l'image de $u^{-1}(m)$ dans B_m engendre mB_m et $A/u^{-1}(m)$ admette B/m pour corps des fractions.

Puis nous passons à l'étude de l'anneau $A[X]_{sub}$ des polynômes à valeurs entières sur A (supposé maintenant intègre de corps des fractions K). Dans le chapitre III nous utilisons tout d'abord les résultats généraux obtenus dans le cadre des modules. Nous nous intéressons ensuite aux anneaux substitutiels ($A[X]_{sub} = A[X]$) et les caractérisons le plus souvent par leurs idéaux premiers de hauteur 1 (qui doivent avoir un corps résiduel infini). Enfin nous considérons la situation suivante : $A[X]_{sub} = \{P(X) \in K[X] \mid P(A_o) \subset A\}$ où A_o est un sous-anneau de A (nous dirons que A_o est substituable à A).

Au chapitre IV, nous étudions la structure de $A[X]_{sub}$ en tant que A-module. En dehors du cas trivial où $A[X]_{sub}$ est égal à A[X] (étudié précédemment), c'est un A-module libre lorsque l'anneau A est local d'idéal maximal principal (en particulier de valuation discrète) ou lorsque A est factoriel et nous en décrivons une base.

Au chapitre V, nous déterminons les idéaux premiers de l'anneau $A[X]_{sub}$ en fonction de ceux de A. Dans le cas où A est un anneau de valuation discrète de corps résiduel fini, nous savons entièrement décrire le spectre de $A[X]_{sub}$, en particulier les idéaux premiers de $A[X]_{sub}$ au-dessus de l'idéal maximal de A sont en bijection avec les éléments du complété de A (on en déduit les localisés de $A[X]_{sub}$ et les anneaux de valuation contenant $A[X]_{sub}$, ce qui nous permettra d'obtenir par la suite certains contre-exemples). Cette détermination est étendue au cas où A est local d'idéal maximal principal, ou bien noethérien intégralement clos ou encore noethérien de dimension 1.

Nous introduisons ensuite au chapitre VI une notion d'élément quasi-entier qui généralise la notion classique pour les éléments du corps des fractions d'un anneau intègre. L'étude de cette notion redonne en particulier les propriétés classiques des anneaux complètement intégralement clos. D'autre part, nous avons dit au début que l'anneau $A[X]_{sub}$ fournissait des contre-exemples pour les anneaux de Fatou, mais que les anneaux de Fatou n'étaient pas autre chose que les anneaux complètement intégralement clos ; par suite l'anneau $A[X]_{sub}$ fournit des contre-exemples pour les anneaux complètement intégralement clos (ils sont non classiques, mais aussi beaucoup plus maniables que les contre-exemples connus jusqu'à présent). Ainsi :

- l'anneau $A[X]_{sub}$ peut être complètement intégralement clos et posséder des localisés qui ne le sont pas (et l'on sait bien les décrire).

- l'anneau $A[X]_{sub}$ peut être complètement intégralement clos (et en outre de Prüfer et de dimension finie) sans être intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 .

Enfin, au chapitre VII, nous étudions les représentations des fractions rationnelles en X et leur développement en série en X . En utilisant la notion généralisée d'élément quasi-entier, nous montrons que : si P(X) et Q(X) sont deux polynômes de K[X] étrangers entre eux, si Q(o)=1 et si les coefficients du développement en série en X de P(X)/Q(X) appartiennent à A , alors les coefficients de P(X) et de Q(X) sont quasi-entiers sur A (A étant un anneau intègre quelconque de corps des fractions K). Ceci prouve en particulier qu'un anneau complètement intégralement clos est de Fatou. FLIESS [18] ayant généralisé la notion d'anneau de Fatou par la notion d'extension de fatou, nous caractérisons ensuite de telles extensions lorsque les anneaux considérés sont intègres. (Ces résultats semblent utilisés dans l'étude des systèmes linéaires dynamiques sur les anneaux intègres, cf. ROUCHALEAU et WYMAN [38]).

Le point de départ de cette étude est un travail effectué avec Paul-Jean CAHEN sur les "coefficients et valeurs d'un polynôme" [9]. De son côté, Paul-Jean CAHEN a développé la question des polynômes à valeurs entières mais dans des directions différentes : ainsi, il a particulièrement étudié les théories de torsion et généralisé à ces théories bien des résultats obtenus primitivement dans le cas de la torsion polynomiale ; il a donné

une nouvelle démonstration, par des méthodes d'analyse, pour déterminer le spectre de $A[X]_{sub}$; il a généralisé aux anneaux de Dedekind les résultats de POLYA et OSTROWSKI ; il a étudié le cas de plusieurs variables.

Je le remercie de l'aide (réciproque) qu'il m'a fournie, en particulier pour généraliser la caractérisation des anneaux de Fatou [13] en une caractérisation des extensions de fatou [10].

Une pensée émue pour Véronique GAUTHERON et Geneviève JACOB avec qui nous formions en 1968 un sympathique groupe de travail où certains de ces problèmes furent posés.

Une pensée reconnaissante pour Daniel BARSKY qui m'a dévoilé quelques secrets de l'analyse p-adique.

Des remerciements à M. LAZARD pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et pour le soin avec lequel il a lu cette thèse.

Des remerciements à M. MEYER pour l'intéressant sujet de deuxième thèse qu'il m'a proposé.

Enfin et surtout un peu plus que des remerciements sincères à mon professeur et directeur de thèse M. SAMUEL.

Signalons une fois pour toutes que ce travail est fait en algèbre commutative : les anneaux sont commutatifs et unitaires et les modules et les morphismes sont unitaires.

CHAPITRE I - LA TORSION POLYNOMIALE

Soient A un anneau et M un A-module. Notons X une indéterminée. Considérons le A-module $M \otimes_A A[X]$. On a les isomorphismes suivants :

$$M \otimes_A A[X] \simeq M \otimes_A (\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n) \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (M \otimes_A A_n) \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_n \quad \text{où}$$

$A_n = A$ et $M_n = M$. Les éléments de $M \otimes_A A[X]$ peuvent être écrits formellement : $m_o + m_1 X + \ldots + m_d X^d$ où les éléments $m_o, m_1, \ldots, m_d$ appartiennent à M et on peut considérer $M \otimes_A A[X]$ comme le A-module (ou même le A[X]-module) des polynômes à une indéterminée à coefficients dans M que l'on notera $M[X]$ (l'addition de deux polynômes et la multiplication par un scalaire se faisant formellement).

En outre, étant donné un élément a de A, on peut définir pour tout élément $P(X) = m_o + m_1 X + \ldots + m_d X^d$ de $M[X]$ sa valeur $P(a)$ en a en posant :

$$P(a) = m_o + m_1 a + \ldots + m_d a^d \ .$$

Il est immédiat que cette application de $M[X]$ dans M qui à $P(X)$ associe $P(a)$ est un homomorphisme de A-modules.

1. LA FILTRATION POLYNOMIALE

Soit A un anneau filtré par une filtration décroissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $A_o = A$ et que les A_n soient des idéaux de A .

L'anneau $A[X]$ est de façon évidente muni de la filtration décroissante $(A_n[X])_{n\in\mathbb{N}}$.

Etant donné un A-module M filtré par une filtration décroissante $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (les M_n sont des A-modules), le $A[X]$-module $M[X]$ est muni de la filtration évidente $(M_n[X])_{n\in\mathbb{N}}$ et on vérifie que celle-ci est bien compatible avec la filtration $(A_n[X])_{n\in\mathbb{N}}$ de $A[X]$.

Nous allons maintenant définir une autre filtration qui va faire intervenir la structure de module de polynômes et que l'on pourra appeler "filtration polynomiale" de $M[X]$: pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons :

1.1. $$X_n^A(M) = \{Q(X) \in M[X] \mid Q(A) \subset M_n\} .$$

En particulier pour le A-module A cela donne :

$$X_n^A(A) = \{Q(X) \in A[X] \mid Q(A) \subset A_n\} .$$

On vérifie que :

$$X_n^A(A).X_{n'}^A(M) \subset X_{n+n'}^A(M) \quad \text{car} \quad A_n.M_{n'} \subset M_{n+n'} .$$

Notons $X^A(A)$ l'anneau $A[X]$ muni de la filtration $(X_n^A(A))$ et $X^A(M)$ le $X^A(A)$-module $M[X]$ muni de la filtration $(X_n^A(M))$

A tout homomorphisme de A-modules filtrés (compatible avec les filtrations) $u : M \longrightarrow N$ associons l'homomorphisme $X^A(u)$:

$X^A(M) \longrightarrow X^A(N)$ obtenu à partir de u par tensorisation sur A avec l'identité de $A[X]$. Il est immédiat que $X^A(u)$ est compatible avec les filtrations de $X^A(M)$ et $X^A(N)$ [si $Q(X) \in M[X]$ et $Q(A) \subset M_n$, alors $X^A(u)(Q) \in N[X]$ et $(X^A(u)(Q))(A) = u(Q(A)) \subset u(M_n) \subset N_n$] et que c'est un homomorphisme de $X^A(A)$-modules filtrés.

Nous venons donc de définir un foncteur covariant X^A de la catégorie des A-modules filtrés dans la catégorie des $X^A(A)$-modules filtrés.

Dire que $M_o = M$ signifie que la filtration (M_n) est exhaustive. Dans ce cas $X^A_o(M) = \{Q(X) \in M[X] \mid Q(A) \subset M\} = M[X]$ et la filtration $(X^A_n(M))$ est exhaustive.

Posons $M_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n$. Dire que $M_\infty = (o)$ signifie que la filtration (M_n) est séparée. Posons de même :

$X^A_\infty(M) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X^A_n(M)$; il est immédiat que :

1.2. $X^A_\infty(M) = \{Q(X) \in M[X] \mid Q(A) \subset M_\infty\}$ et donc la formule (1.1) est valable pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Mais la filtration (M_n) peut être séparée sans que la filtration $(X^A_n(M))$ le soit.

A tout homomorphisme de A-modules filtrés $u : M \longrightarrow N$, associons l'homomorphisme $X^A_\infty(u) : X^A_\infty(M) \longrightarrow X^A_\infty(N)$ obtenu par restriction de $X^A(u)$ à $X^A_\infty(M)$. Nous avons ainsi défini un foncteur covariant X^A_∞ de la catégorie des A-modules filtrés dans la catégorie des A-modules.

On peut chercher à comparer la filtration évidente $(M_n[X])$ et la filtration polynomiale $(X_n^A(M))$ de $M[X]$. Il est clair que $M_n[X]$ est inclus dans $X_n^A(M)$ et dire qu'il y a égalité entre $M_n[X]$ et $X_n^A(M)$ revient à dire que $X_n^A(M/M_n) = X_\infty^A(M/M_n) = 0$ où le A-module M/M_n est muni de la filtration quotient (qui est séparée et même discrète).

Ainsi la comparaison entre les deux filtrations introduites se ramène à la connaissance du foncteur X_∞^A sur la catégorie des A-modules filtrés séparés. Cette hypothèse de séparation permet même d'oublier les filtrations pour ne considérer que le foncteur qui à tout module M associe le module $\{Q(X) \in M[X] \mid Q(A) = 0\}$; nous noterons encore X_∞^A ce foncteur.

C'est ce foncteur que nous allons considérer dans la suite. Nous étudierons particulièrement le cas des modules M tels que $X_\infty^A(M) = 0$ et ceux-ci seront bien caractérisés lorsque A sera un anneau noethérien.

2. LE FONCTEUR X^A_∞ (DES POLYNOMES NULS SUR A)

2.1. Rappelons qu'étant donné un anneau A on note X^A_∞ le foncteur covariant de la catégorie des A-modules dans elle-même qui à un A-module M fait correspondre le A-module des polynômes à coefficients dans M nuls sur A, c'est-à-dire $X^A_\infty(M) = \{Q(X) \in M[X] \mid Q(A) = o\}$ et qui à un homomorphisme de A-modules $u : M \longrightarrow N$ fait correspondre l'homomorphisme :

$$X^A_\infty(u) : X^A_\infty(M) \longrightarrow X^A_\infty(N)$$ obtenu par restriction de :

$$u \otimes 1_{A[X]} : M[X] = M \otimes_A A[X] \longrightarrow N[X] = N \otimes_A A[X] .$$

2.2. Le foncteur X^A_∞ est exact à gauche.

En effet, soit $o \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M''$ une suite exacte de A-modules. Par tensorisation avec le module libre $A[X]$, on obtient la suite :

$$o \longrightarrow M'[X] \xrightarrow{u \otimes 1_{A[X]}} M[X] \xrightarrow{v \otimes 1_{A[X]}} M''[X]$$ qui est exacte. Ceci prouve que $(v \otimes 1_{A[X]}).(u \otimes 1_{A[X]}) = (v.u) \otimes 1_{A[X]} = o$ et donc que les restrictions $X^A_\infty(u)$ et $X^A_\infty(v)$ vérifient $X^A_\infty(v).X^A_\infty(u) = o$. Montrons que $\operatorname{Ker} X^A_\infty(v)$ est inclus dans $\operatorname{Im} X^A_\infty(u)$ .Soit $Q \in X^A_\infty(M)$ tel que $X^A_\infty(v)(Q) = o$ donc tel que $(v \otimes 1_{A[X]})(Q) = o$ .Il existe $R \in M'[X]$ tel que $(u \otimes 1_{A[X]})(R) = Q$. On a alors : $u(R(A)) = (u \otimes 1_{A[X]})(R)(A) = Q(A) = o$ puisque $Q \in X^A_\infty(M)$. Comme u est injectif, $R(A) = o$ et donc R appartient à $X^A_\infty(M')$ et $X^A_\infty(u)(R) = Q$ .Enfin, $u \otimes 1_{A[X]}$ étant injectif, sa restriction $X^A_\infty(u)$ l'est aussi. On a donc la suite exacte :

$$o \longrightarrow X^A_\infty(M') \xrightarrow{X^A_\infty(u)} X^A_\infty(M) \xrightarrow{X^A_\infty(v)} X^A_\infty(M'') .$$

Notons aussi les formules :

2.3. $X^A_\infty(\bigoplus_{i\in I} M_i) = \bigoplus_{i\in I} X^A_\infty(M_i)$

$X^A_\infty(\prod_{i\in I} M_i) = \prod_{i\in I} X^A_\infty(M_i)$

pour toute famille $(M_i)_{i\in I}$ de A-modules.

2.4. $X^A_\infty(\sum_{i\in I} M_i) = \sum_{i\in I} X^A_\infty(M_i)$

pour toute famille filtrante $(M_i)_{i\in I}$ de sous-A-modules d'un A-module.

2.5. $X^A_\infty(M) \supset M \cdot X^A_\infty(A/\mathrm{ann}\ M)$

pour tout A-module M , où ann M désigne l'annulateur de M et où le produit est effectué dans $M\otimes_A(A/\mathrm{ann}M)[X] \simeq M[X]$.

2.6. Proposition. Si $u : M \longrightarrow N$ est une extension essentielle de A-modules, alors $X^A_\infty(u) : X^A_\infty(M) \longrightarrow X^A_\infty(N)$ est une extension essentielle de A-modules.

En effet, $u\otimes 1_{A[X]} : M[X] \longrightarrow N[X]$ est une extension essentielle de A-modules (BOURBAKI, [4] , II, § 2, exercice 15). Soit $Q\in N[X]-\{o\}$ tel que $Q(A) = o$. Il existe $a\in A$ tel que aQ appartienne à $M[X]-\{o\}$ et, comme $Q(A) = o$, aQ appartient à $X^A_\infty(M)$.

2.7. Proposition. Lorsque A est un anneau noethérien, le foncteur X^A_∞ commute aux limites inductives filtrantes.

Démonstration. Soit M la limite inductive d'un système inductif filtrant de A-modules (M_i, u_{ij}) et soient u_i les homomorphismes canoniques de M_i dans M. Notons que le système $(X_\infty^A(M_i), X_\infty^A(u_{ij}))$ est un système inductif filtrant et que $\varinjlim X_\infty^A(M_i)$ est inclus dans $M[X]$. Soit Q un élément de $\varinjlim X_\infty^A(M_i)$ et soit $Q_i \in X_\infty^A(M_i)$ tel que $X_\infty^A(u_i)(Q_i) = Q$; comme $Q_i(A) = o$, il est immédiat que $Q(A) = u_i(Q_i(A)) = o$ et que Q appartient à $X_\infty^A(M)$. Ainsi, $\varinjlim X_\infty^A(M_i)$ est inclus dans $X_\infty^A(M)$ et ceci sans hypothèse noethérienne.

Inversement, soit $Q \in X_\infty^A(M) \subset M[X]$ et soit $Q_i \in M_i[X]$ tel que $(u_i \otimes 1_{A[X]})(Q_i) = Q$. Pour tout $j \geqslant i$, soit $Q_j = u_{ij}(Q_i)$ et soit N_j le sous-A-module de M_j engendré par les valeurs de Q_j sur A . L'anneau A étant supposé noethérien et N_j étant contenu dans le A-module de type fini engendré par les coefficients de Q_j , le A-module N_j est de type fini. Comme en outre $Q(A) = o$, il existe $k \geqslant i$ tel que $Q_k(A) = o$, donc pour tout $j \geqslant k$, $Q_j(A) = o$ et par suite Q appartient à $\varinjlim X_\infty^A(M_i)$.

Notons enfin la remarque suivante qui nous sera utile dans la suite :

2.8. Remarque. Lorsque A est un anneau de cardinal infini, pour tout A-module M, $X_\infty^A(M)$ est formé des polynômes à coefficients dans M nuls sur presque tout A (c'est-à-dire pour tout élément de A sauf peut-être un nombre fini).

Démonstration. Il s'agit de montrer qu'un polynôme nul sur presque tout A est en fait nul sur tout A. On raisonne par récurrence sur le degré du polynôme. C'est évident pour le degré o, supposons le vérifié jusqu'au degré n. Soit $Q(X)$ un polynôme à coefficients dans M, de degré $n + 1$ et nul en tout élément de A sauf peut-être en ceux d'une partie finie T de A. Etant donné un élément a de A, notons $R_a(X) = Q(X) - Q(X-a)$. Le polynôme $R_a(X)$ est de degré inférieur ou égal à n et nul en tout élément de A sauf peut-être en ceux de T et en ceux de $T + a = \{b \in A \mid b = t + a \text{ où } t \in T\}$. D'après l'hypothèse de récurrence, $R_a(X)$ est nul sur tout A. Soit maintenant un élément c quelconque dans T et choisissons un élément a de A tel que $c - a$ n'appartienne pas à T. On a : $Q(c) = R_a(c) + Q(c - a) = o$.

Nous allons maintenant étudier plus particulièrement les cas où $X_\infty^A(M) = o$ et où $X_\infty^A(A) = o$.

3. MODULES SANS TORSION POLYNOMIALE

Nous introduisons ici une terminologie que sera justifiée au dernier paragraphe de ce chapitre.

3.1. Définition - Un A-module M est dit sans torsion polynomiale si le A-module $X_{\infty}^{A}(M)$ est nul c'est-à-dire si le polynôme 0 est le seul polynôme à coefficients dans M nul en tout élément de A. Un anneau A sera dit sans torsion polynomiale s'il est un A-module sans torsion polynomiale.

Dans la suite nous écrirons souvent en abrégé "s.t.p." au lieu de "sans torsion polynomiale".

3.2. Exemples -

a) Pour qu'un anneau intègre soit s.t.p. il faut et il suffit qu'il soit de cardinal infini.

b) Soient A un anneau et M un A-module. Le $A[X]$-module $M[X]$ est s.t.p. .En effet, soit $P(T) = \sum_{i=o}^{n} P_i(X)T^i$ un élément de $M[X][T]$ et soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > \text{Sup}(\text{degré de } P_i)$. Si $P(A[X]) = o$, en particulier $P(X^m) = \sum_{i=o}^{n} P_i(X)X^{im} = o$ et donc $P_i(X) = o$ pour tout i .

c) Soient A un anneau et M un A-module. Le $A[X]$-module $M[[X]]$ est s.t.p. .En effet, soit $Q(T) = \sum_{i=o}^{n} S_i(X)T^i$ un élément de $M[[X]][T]-\{o\}$ et soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > \text{Sup}(\text{ordre de } S_i)$. Alors $Q(X^m)$ est non nul.

Donnons quelques conséquences immédiates du paragraphe précédent :

3.3. Un module libre sur un anneau s.t.p. est lui-même s.t.p. et, de façon plus générale, une somme directe ou un produit direct de A-modules s.t.p. est un A-module s.t.p. (formule 2.3).

3.4. Une réunion filtrante de A-modules s.t.p. est un A-module s.t.p. (formule 2.4).

3.5. Une extension essentielle d'un A-module s.t.p. est un A-module s.t.p. (proposition 2.6).

3.6. Proposition - Soient A un anneau et M un A-module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Le A-module M est sans torsion polynomiale.

(ii) Pour tout entier n, le polynôme 0 est le seul polynôme de $M[X_1,\ldots,X_n]$ nul sur A^n.

(iii) Le polynôme 0 est le seul polynôme de $M[X]$ nul en tout élément de A sauf peut-être en un nombre fini.

L'équivalence de (i) et (ii) se vérifie par récurrence sur l'entier n et l'équivalence de (i) et (iii) résulte directement de la remarque 2.8.

Voyons maintenant un théorème indiquant la structure des modules sans torsion polynomiale :

3.7. Théorème - Soient A un anneau et M un A-module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Le A-module M est sans torsion polynomiale.

(ii) Pour tout élément non nul x de M, l'anneau $A/\mathrm{ann}\ x$ est sans torsion polynomiale.

(iii) Pour tout élément non nul x de M, il existe un idéal I_x de A contenant ann x et tel que l'anneau A/I_x soit sans torsion polynomiale.

Démonstration

(i) $\longrightarrow$ (ii) : En effet, $A/\mathrm{ann}\ x$ est isomorphe à Ax en tant que A-module et il est clair que :

Un sous-module d'un A-module sans torsion polynomiale est un A-module sans torsion polynomiale.

(ii) $\longrightarrow$ (iii) : Il suffit de prendre pour I_x l'idéal ann x

(iii) $\longrightarrow$ (i) : Soit $P = p_o + p_1X + \ldots + p_nX^n$ un polynôme à coefficients dans M, non nul et de degré n. Par hypothèse, il existe un idéal I contenant $\mathrm{ann}(p_n)$ tel que l'anneau A/I soit s.t.p. .Ainsi, le polynôme $D_n(X) = \prod_{o \leq i < j \leq n} (X^j - X^i)$ n'étant pas nul dans $(A/I)[X]$, il existe un élément a de A tel que $D_n(a) = \prod_{o \leq i < j \leq n} (a^j - a^i)$ ne soit pas dans I et a fortiori tel que $p_n.D_n(a)$ ne soit pas nul dans M. Or, $D_n(a)$ n'est autre que le déterminant du système :

$$\begin{aligned}
p_o + p_1 + \ldots + p_n &= P(1) ,\\
p_o + p_1 a + \ldots + p_n a^n &= P(a) ,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots ,\\
p_o + p_1 a^n + \ldots + p_n a^{n^2} &= P(a^n).
\end{aligned}$$

Les formules de Cramer montrent que $p_n.D_n(a)$ est une combinaison linéaire des valeurs $P(1),P(a),\ldots,P(a^n)$; l'une d'elles n'est donc pas nulle.

Pour qu'un A-module M soit s.t.p. il faut et il suffit donc que tout sous-module monogène de M soit un A-module s.t.p. .

C'est l'assertion (ii) du théorème puisque dire que A/ann x est un anneau s.t.p. équivaut à dire que Ax est un A-module s.t.p.

Mais le théorème 3.7 est surtout intéressant par ses corollaires lorsque l'anneau A est noethérien.

4. LE CAS NOETHERIEN

4.1. Proposition. Soient A un anneau noethérien et M un A-module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Le A-module M est sans torsion polynomiale.

(ii) Pour tout idéal premier associé à M (*), le corps résiduel correspondant est infini.

Pour montrer cette proposition, il suffit de rapprocher le théorème 3.7 de l'exemple 3.2.a et de remarquer que tout annulateur d'un élément de M est contenu dans un idéal premier associé.

4.2. Remarque. Lorsque l'anneau A n'est pas noethérien, les conditions :

- pour tout idéal premier associé à M , le corps résiduel correspondant est infini,
- pour tout élément non nul x de M , l'anneau A/ann x est de cardinal infini,

sont nécessaires pour que M soit un A-module s.t.p., mais elles ne sont pas suffisantes. C'est ce que montre l'exemple suivant.

(*) Etant donné un A-module M, on appelle idéal premier associé à M tout idéal premier de A qui est l'annulateur d'un élément de M. Leur ensemble est noté $\mathrm{Ass}_A(M)$ ou $\mathrm{Ass}(M)$ (BOURBAKI, [5], IV).

4.3. Exemple. Soit A l'anneau des fonctions f localement constantes de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{F}_2$. L'anneau A n'est pas s.t.p. car le polynôme X^2-X de $A[X]$ est partout nul sur A. Soient $f \in A-\{o\}$, $q \in \mathbb{Q}$ tel que $f(q) \neq o$ et U un voisinage de q tel que $f(U) = \{1\}$. On a $\operatorname{ann} f \subset \{g \in A \mid g(U) = \{o\}\}$ et, comme l'anneau $A/\{g \in A \mid g(U) = \{o\}\}$ est isomorphe à l'anneau des fonctions localement constantes de U dans $\mathbb{F}_2$ qui est un ensemble infini, l'anneau $A/\operatorname{ann} f$ est de cardinal infini.

4.4. Remarque. Par contre, les conditions :

- pour tout idéal premier faiblement associé à M (*), le corps résiduel correspondant est infini,

- pour tout élément non nul x de M, il existe un idéal premier de A contenant $\operatorname{ann} x$ et de corps résiduel infini,

sont suffisantes pour que M soit un A-module s.t.p. mais ne sont plus nécessaires lorsque A n'est pas un anneau noethérien. C'est ce que nous montre l'exemple suivant.

4.5. Exemple. Soit A l'anneau d'une valuation de hauteur 1, non discrète, de corps résiduel fini et d'idéal maximal m. Soit a un élément de A de valuation strictement positive. L'anneau A/aA

(*) Etant donné un A-module M, on appelle idéal premier faiblement associé à M tout idéal premier de A minimal parmi les idéaux premiers contenant l'annulateur d'un élément de M. Leur ensemble est noté $\operatorname{Ass}_f(M)$ (BOURBAKI, [5], IV, § 1, exercice 17). Lorsque A est noethérien, $\operatorname{Ass}_f(M)$ coïncide avec $\operatorname{Ass}(M)$.

a un seul idéal premier m/aA dont le corps résiduel est fini, alors que A/aA est un anneau s.t.p. (cela résultera de la proposition III.3.1 et du lemme III.2.5).

4.6. Corollaire. Soient A un anneau noethérien et M un A-module sans torsion polynomiale. Pour toute partie multiplicative S de A, le $S^{-1}A$-module $S^{-1}M$ est sans torsion polynomiale.

Soit Φ l'ensemble des idéaux premiers de A ne rencontrant pas S. L'application $p \longmapsto S^{-1}p$ est une bijection de $\mathrm{Ass}_A(M) \cap \Phi$ sur $\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M)$ (BOURBAKI, [5], IV). Comme il y a une injection de A/p dans $S^{-1}(A/p) = S^{-1}A/S^{-1}p$, lorsque le cardinal de A/p est infini, celui de $S^{-1}A/S^{-1}p$ l'est aussi. La proposition 4.1 permet de conclure.

4.7. Corollaire. Un module M plat sur un anneau A noethérien et sans torsion polynomiale est lui-même sans torsion polynomiale.

Cela provient de ce que les idéaux premiers associés à M sont aussi des idéaux premiers associés à A (LAZARD, [30]).

Puisque nous en sommes aux anneaux noethériens rappelons la proposition 2.7. :

4.8. Lorsque A est un anneau noethérien, une limite inductive filtrante de A-modules sans torsion polynomiale est un A-module sans torsion polynomiale.

4.9. Remarque. Le résultat 4.8 permet de retrouver le corollaire 4.7 en utilisant l'exemple 3.3 car tout module plat est limite inductive filtrante de modules libres (LAZARD, [30]).

4.10. Remarque. Lorsque l'on supprime l'hypothèse noethérienne, les assertions 4.6, 4.7 et 4.8 ne sont plus valables. Voici un contre-exemple :

4.11. Exemple. Soit A l'anneau des fonctions localement constantes f de $\mathbb{Q}$ dans une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}_2}$ de $\mathbb{F}_2$ telles que f(o) appartienne à $\mathbb{F}_2$. Soient $f \in A-\{o\}$ et $x \in \mathbb{Q}$ tel que $f(x) \neq o$. On a $\operatorname{ann} f \subset \{g \in A \mid g(x) = o\} = p_x$. On peut toujours supposer que x est différent de o, puisque f est localement constante. Donc $\operatorname{ann} f \subset p_x$ avec $x \neq o$, A/p_x est de cardinal infini, la condition (iii) du théorème 3.7 est réalisée et l'anneau A est s.t.p. D'autre part, A_{p_o} est isomorphe à $\mathbb{F}_2$, donc n'est pas un A-module s.t.p.

5. LE CAS INTEGRE

Ce sont des anneaux intègres que nous considérerons au chapitre III, lorsque nous étudierons les polynômes à valeurs entières.

5.1. Proposition. Un module M sans torsion sur un anneau intègre infini A est un A-module sans torsion polynomiale.

En effet, pour tout élément non nul x de M, A/ann x est égal à A, qui est un anneau s.t.p. (exemple 3.2.a), et donc M est un A-module s.t.p. (théorème 3.7).

5.2. Corollaire. Soient A un anneau intègre infini, M un A-module et T(M) son sous-module de torsion. On a la formule :

$$X^A_\infty(M) = X^A_\infty(T(M)) .$$

Démonstration. On a la suite exacte : $o \longrightarrow T(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/T(M) \longrightarrow o$. Le foncteur X^A_∞ étant exact à gauche (assertion 2.2), on en déduit la suite :

$o \longrightarrow X^A_\infty(T(M)) \longrightarrow X^A_\infty(M) \longrightarrow X^A_\infty(M/T(M))$ qui est exacte. Le module M/T(M) étant sans torsion, $X^A_\infty(M/T(M)) = o$; d'où l'égalité.

5.3. Corollaire. Soit A un anneau intègre. Pour qu'un A-module non nul M soit sans torsion polynomiale, il faut et il suffit que :

(i) L'anneau A soit de cardinal infini.

(ii) Le sous-module de torsion T(M) de M soit un A-module sans torsion polynomiale.

Démonstration. La condition suffisante résulte du corollaire 5.2. La condition (ii) est nécessaire car T(M) est un sous-module de M. Enfin, la condition (i) est nécessaire car de façon plus générale :

Pour qu'un A-module non nul M soit sans torsion polynomiale, il faut que A/ann M soit lui-même sans torsion polynomiale (formule 2.5).

5.4. Remarque. Pour qu'un $\mathbb{Z}$-module soit sans torsion polynomiale, il faut et il suffit qu'il soit sans torsion.

La condition suffisante résulte de la proposition 5.1. Inversement, si le $\mathbb{Z}$-module M n'est pas sans torsion, il existe $m \in M - \{o\}$ et $n \in \mathbb{N} - \{o\}$ tels que $n.m = o$ et le polynôme $P(X) = m\,(X-1)(X-2)\ldots(X-n)$ montre que M n'est pas un $\mathbb{Z}$-module s.t.p.

On retrouve ainsi en particulier un résultat de ACZEL [1] :

Un anneau sans torsion sur $\mathbb{Z}$ est un anneau s.t.p. et de façon plus générale :

Un A-module qui est un $\mathbb{Z}$-module sans torsion est un A-module s.t.p.

On peut généraliser cette idée de modules sans torsion sur un anneau intègre en parlant de modules non singuliers sur un anneau quelconque (GOLDIE [22]). Rappelons qu'un A-module M est dit non

singulier lorsque l'annulateur de tout élément non nul de M n'est pas essentiel dans A. (Un module non singulier sur un anneau intègre est sans torsion). Ainsi :

5.5. Proposition. Un module M non singulier sur un anneau A sans torsion polynomiale est un A-module sans torsion polynomiale.

Démonstration. Le A-module M étant non singulier, pour tout élément non nul x de M il existe un élément non nul a de A tel que ann a = ann ax (GAUTHERON [20]). Puisque A est un anneau s.t.p., A/ann a est un anneau s.t.p. (théorème 3.7). Ainsi, on a trouvé un idéal I_x = ann a contenant ann x et tel que A/I_x soit un anneau s.t.p. ; c'est la caractérisation (iii) du théorème 3.7 qui montre que M est un A-module sans torsion polynomiale.

Dans le cas intègre, on peut associer à tout module M un plus petit sous-module T(M) tel que M/T(M) soit sans torsion. De même, dans le cas général, on peut associer à tout module M un plus petit sous-module T(M) tel que M/T(M) soit non singulier (*

(*) A tout sous-module N de M on peut associer le sous-module $N' = \{x \in M \mid (N:x)$ est essentiel dans $A\}$. En itérant deux fois cette opération on obtient une fermeture : N" = N"'. Le module T(M) n'est autre que O". (Lorsque A est intègre T(M) est le sous-module de torsion de M).

5.6. Corollaire. Soient A un anneau sans torsion polynomiale, M un A-module et T(M) son plus petit sous-module tel que M/T(M) soit non singulier. On a la formule :

$$X^A_\infty(M) = X^A_\infty(T(M)).$$

La démonstration du corollaire 5.6 est identique à celle du corollaire 5.2. De façon analogue au corollaire 5.3, on a aussi :

5.7. Corollaire. Soient A un anneau et M un A-module. Pour que M soit un A-module sans torsion polynomiale il faut et il suffit que :

(i) L'anneau A/ann M soit sans torsion polynomiale.

(ii) Le sous-module T(M) soit un A-module sans torsion polynomiale.

6. ANNEAUX SANS TORSION POLYNOMIALE

Les résultats concernant les modules sans torsion polynomiale peuvent être retranscrits dans le cas des anneaux. On a de plus :

6.1. Proposition. Soit A un anneau dont le nilradical r est de type fini. Si A est un anneau sans torsion polynomiale, il en est de même de son quotient A/r.

Soient $Q(X) \in (A/r)[X]$ tel que $Q(A/r) = o$ et $P(X) \in A[X]$ relevant $Q(X)$. On a $P(A) \subset r$ et, r étant de type fini, il existe un entier n tel que $r^n = o$, donc tel que $P^n(A) = o$. L'anneau A étant s.t.p., $P^n(X) = o$, d'où $Q^n(X) = o$. Mais A/r étant réduit, $(A/r)[X]$ est aussi réduit et par suite $Q(X) = o$.

6.2. Remarque. Pour qu'un anneau noethérien soit sans torsion polynomiale, il faut que, pour tout idéal premier minimal, le corps résiduel correspondant soit infini. Car tout idéal premier minimal est un idéal premier associé (proposition 4.1). Cette condition n'est pas suffisante :

L'anneau noethérien $A = \mathbb{F}_2[x,y] = \mathbb{F}_2[X,Y]/(X^2,XY)$ n'est pas un anneau s.t.p. (le polynôme $T(T-1)x$ est partout nul), alors que (x) est le seul idéal premier minimal et que A/(x) isomorphe à $\mathbb{F}_2[Y]$ est infini.

6.3. Remarque. Pour qu'un anneau réduit soit sans torsion polynomiale il suffit que, pour tout idéal premier minimal, le corps résiduel correspondant soit infini. Car tout idéal premier faiblement associé à A est minimal (remarque 4.4).

7. LA TORSION POLYNOMIALE

Dans ce paragraphe nous allons justifier la terminologie de "modules sans torsion polynomiale" en montrant qu'ils constituent la classe libre d'une théorie de torsion que nous pouvons appeler torsion polynomiale.

7.1. Rappel. On appelle théorie de torsion dans la catégorie des A-modules (DICKSON [14] et JANS [26]), un couple $(\mathcal{C},\mathcal{F})$ de deux classes de A-modules qui satisfait aux conditions suivantes :

(i) $\mathcal{C} \cap \mathcal{F} = \{o\}$.

(ii) Si $o \longrightarrow M \longrightarrow F$ est une suite exacte et si F appartient à $\mathcal{F}$, alors M appartient à $\mathcal{F}$.

(iii) Si $T \longrightarrow M \longrightarrow o$ est une suite exacte et si T appartient à $\mathcal{C}$, alors M appartient à $\mathcal{C}$.

(iv) Pour tout A-module M, il existe un sous-module $\mathcal{C}(M)$ tel que $\mathcal{C}(M)$ appartienne à $\mathcal{C}$ et que $M/\mathcal{C}(M)$ appartienne à $\mathcal{F}$.

7.2. Lorsque $(\mathcal{C},\mathcal{F})$ est une théorie de torsion, $\mathcal{F}$ est stable par inclusion, extension et somme directe, $\mathcal{C}$ est stable par quotient, extension et somme directe et $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$ sont deux classes complètes pour la relation d'orthogonalité $\mathrm{Hom}(T,F) = o$ (où $T \in \mathcal{C}$ et $F \in \mathcal{F}$).

7.3. Une théorie de torsion $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ est dite héréditaire lorsque les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) La classe $\mathcal{C}$ est stable par inclusion.

(ii) La classe $\mathcal{F}$ est stable par passage aux enveloppes injectives.

7.4. Proposition. Soient A un anneau, $\mathcal{F}$ la classe des A-modules sans torsion polynomiale et $\mathcal{C}$ la classe des A-modules dont tous les quotients non nuls n'appartiennent pas à $\mathcal{F}$. Le couple $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ constitue une théorie de torsion héréditaire que l'on appellera torsion polynomiale.

Démonstration. Les conditions (i), (ii) et (iii) sont des conséquence directes des définitions. En ce qui concerne la condition (iv), prenons pour $\mathcal{C}(M)$ l'intersection T des sous-modules T_i de M tels que M/T_i appartienne à $\mathcal{F}$. Soit $P(X) \in M[X]$ tel que P(A) soit inclus dans T, alors, pour tout i, P(A) est inclus dans T_i, P appartient à $T_i[X]$, P appartient à $\cap T_i[X] = T[X]$ et donc M/T appartient à $\mathcal{F}$. D'autre part, soit N un sous-module de T ; on a la suite exacte : $o \to T/N \to M/N \to M/T \to o$ et comme $\mathcal{F}$ est stable par extension, si T/N appartient à $\mathcal{F}$, M/N appartient à $\mathcal{F}$, N contient T, T/N = o et donc T appartient à $\mathcal{C}$. Enfin, la théorie de torsion est héréditaire en vertu de l'assertion 3.5.

7.5. Corollaire. Soient A un anneau, M un A-module et $\mathcal{C}(M)$ le sous-module de torsion de M correspondant à la théorie de torsion polynomiale. On a la formule :

$$X^A_\infty(M) = X^A_\infty(\mathcal{C}(M)).$$

De même que pour les résultats 5.2 et 5.6 cela provient de l'exactitude à gauche du foncteur X^A_∞ .

Le point de vue de la torsion a été étudié particulièrement par CAHEN [8]: il a montré qu'un théorème de structure du type du théorème 3.7 est en fait valable pour toute théorie de torsion et il retrouve ainsi le résultat suivant :

7.6. Proposition. Il y a une correspondance biunivoque entre les théories de torsion héréditaires dans la catégorie des modules sur un anneau noethérien A et les parties du spectre de A stables par spécialisation :

$$(\mathcal{C},\mathcal{F}) \longmapsto \{p \in \mathrm{Spec}(A) \mid A/p \in \mathcal{C}\}.$$

En effet, rappelons que :

7.7. Il y a une correspondance biunivoque entre les théories de torsion héréditaires dans la catégorie Mod(A) des A-modules et les sous-catégories localisantes de Mod(A) :

$$(\mathcal{C},\mathcal{F}) \longmapsto \mathcal{C} \quad \text{(JANS [26])}.$$

7.8. Il y a une correspondance biunivoque entre les sous-catégorie localisantes de Mod(A) et les ensembles d'idéaux topologisants et idempotents :

$$\mathcal{C} \longmapsto \{a \subset A \mid A/a \in \mathcal{C}\} \text{ (GABRIEL [19])}.$$

7.9. Sur un anneau noethérien A, tout ensemble d'idéaux topologisants et idempotents peut être considéré comme l'ensemble des idéaux qui contiennent un produit de la forme $p_o.p_1....p_i...p_r$ où les p_i décrivent une partie $\mathcal{X}$ de Spec(A). Cette partie $\mathcal{X}$ peut être remplacée par la plus petite partie stable par spécialisation la contenant (GABRIEL [19]).

Dans le cas particulier de la torsion polynomiale, cela donne :

7.10. Proposition. Soit A un anneau noethérien et soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des idéaux premiers de A dont le corps résiduel est fini. Pour qu'un A-module M soit sans torsion polynomiale il faut et il suffit que $\mathrm{Ass}(M) \cap \mathcal{X} = \emptyset$ (proposition 4.1) et pour qu'un A-module M appartienne à la classe de torsion polynomiale il faut et il suffit que $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathcal{X}$ (CAHEN).

CHAPITRE II - MODULES SANS TORSION POLYNOMIALE ET CHANGEMENTS D'ANNEAUX

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre aux modules sans torsion polynomiale vis-à-vis de l'extension et de la restriction des scalaires.

On peut chercher à caractériser les A-modules M tels que, pour tout homomorphisme d'anneaux $u : A \longrightarrow B$, le B-module $M \otimes_A B$ obtenu par extension des scalaires soit sans torsion polynomiale. En fait, nous arriverons à bien caractériser une propriété plus forte (les sous-modules eux-aussi restent sans torsion polynomiale par extension des scalaires).

On peut aussi chercher à caractériser les B-modules M tels que, pour tout homomorphisme d'anneaux $u : A \longrightarrow B$, le A-module $M_{[u]}$ obtenu par restriction des scalaires soit sans torsion polynomiale. La réponse est immédiate : ce sont les modules sans torsion sur $\mathbb{Z}$ (cf. la remarque I.5.4).

Nous nous poserons plutôt la question suivante : quels sont les homomorphismes d'anneaux $u : A \longrightarrow B$ tels que, pour tout B-module M, dire que M est un B-module sans torsion polynomiale soit équivalent à dire que M est un A-module sans torsion polynomiale ?

1. MODULES UNIVERSELLEMENT SANS TORSION POLYNOMIALE

Sans aucune condition sur l'anneau :

1.1. Théorème. Soient A un anneau et M un A-module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout sous-A-module N de M et tout homomorphisme d'anneaux $A \longrightarrow B$, le B-module $N \otimes_A B$ est sans torsion polynomiale.

(ii) Pour tout sous-A-module N de M, le A-module M/N est sans torsion polynomiale.

(iii) Pour tout polynôme P de M[X], le A-module engendré par les coefficients de P est égal au A-module engendré par les valeurs de P sur A.

(iv) Pour tout idéal premier (respectivement maximal) du support de M, le corps résiduel correspondant est de cardinal infini.

Démonstration.

$$(i) \longleftrightarrow (iv) \begin{cases} \nearrow (ii) \\ \searrow (iii) \end{cases}$$

(i) $\longrightarrow$ (iv) : Soit m un idéal maximal de A appartenant au support de M et soit x un élément de M dont l'image canonique $\tilde{x}$ dans M_m n'est pas nulle. Le (A/m)-module $Ax \otimes_A A/m$ isomorphe à $A_m\tilde{x}/mA_m\tilde{x}$ n'est pas nul (lemme de Nakayama). Pour qu'il soit s.t.p. il faut que A/m soit infini (corollaire I.5.3).

(iv) $\longrightarrow$ (i) : Soient N un sous-module de M et $A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. Soient q un élément de $\mathrm{Supp}_B(N \otimes_A B)$ et p son image réciproque dans A. Comme on a les inclusions :

$\mathrm{Supp}_A(N \otimes_A B) \subset \mathrm{Supp}_A(N) \subset \mathrm{Supp}_A(M)$,

p appartient au support de M . D'après (iv) , A/p est infini et B/q aussi p puisque A/p s'y injecte. Donc N est un B-module s.t.p. (théorème I.3.7).

(iv) $\longrightarrow$ (ii) : Soit N un sous-module de M. Comme Supp(M/N) est inclus dans Supp(M), l'hypothèse (iv) implique bien que M/N est un A-module s.t.p. (théorème I.3.7).

(ii) $\longrightarrow$ (iii) : Pour le voir il suffit de passer au quotient par le A-module engendré par les valeurs de P sur A.

(iii) $\longrightarrow$ (iv) : Supposons qu'il existe un idéal maximal m appartenant au support de M et de corps résiduel fini. Choisissons dans M un élément x dont l'image canonique $\tilde{x}$ dans M_m n'est pas nulle et choisissons dans A un système de représentants $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de A modulo m. Considérons le polynôme de M[X] : $P(X) = x \prod_{i=1}^{n} (X-a_i)$. Les coefficients de P engendrent le A-module Ax, tandis que les valeurs prises par P sur A sont contenues dans le A-module mx. L'hypothèse (iii) implique Ax = mx ; en localisant en m on obtient $A_m\tilde{x} = mA_m\tilde{x}$, donc d'après Nakayama, $\tilde{x}$ est nul, ce qui est contraire au choix de x.

1.2. Définition. Un A-module M qui vérifie les conditions équivalentes du théorème 1.1 est dit universellement sans torsion polynomiale.

Dans la suite nous écrirons souvent en abrégé "u.s.t.p." au lieu de "universellement sans torsion polynomiale".

1.3. Remarque. Dans l'énoncé du théorème 1.1 on ne peut se contenter d'écrire en (i) :

Pour tout homomorphisme d'anneaux $A \longrightarrow B$, le B-module $M \otimes_A B$ est sans torsion polynomiale.

L'exemple suivant est celui d'un module qui vérifie cette propriété et qui pourtant n'est pas un module u.s.t.p. .

1.4. Exemple. Considérons le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}$; il n'est pas u.s.t.p. car tous les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}$ sont de corps résiduel fini. Soit maintenant $u : \mathbb{Z} \longrightarrow A$ un homomorphisme d'anneaux ; il s'agit de montrer que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A$ est un A-module s.t.p. : c'est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel donc un $\mathbb{Z}$-module sans torsion -nul ou non- (remarque I.5.4).

Notons aussi dans cet exemple que le sous-$\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Q}$ n'est pas s.t.p. par toute extension d'anneaux, car un anneau fini A n'est pas un A-module s.t.p. .

1.5. Remarque. L'assertion (ii) du théorème 1.1 signifie que, quelle que soit la filtration dont on munit le module M, les deux filtrations correspondantes de $M[X]$ introduites au début du chapitre I (filtration évidente et filtration polynomiale) sont identiques.

Par analogie avec la proposition 3.6, on a deux nouvelles assertions équivalentes à celles du théorème 1.1.

1.6. Proposition. Soient A un anneau et M un A-module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Le A-module M est universellement sans torsion polynomiale.

(ii) Pour tout entier n et pour tout polynôme $P(X_1,\ldots,X_n)$ de $M[X_1,\ldots,X_n]$, le A-module engendré par les coefficients de P est égal au A-module engendré par les valeurs prises par P sur A^n.

(iii) Pour toute partie finie T de A et pour tout polynôme P de $M[X]$, le A-module engendré par les coefficients de P est égal au A-module engendré par les valeurs prises par P sur A en dehors de T .

Démonstration. L'équivalence de (i) et (iii) résulte directement de la remarque I.2.8 en notant que, si M n'est pas nul, l'anneau A doit être de cardinal infini. Il est clair que (ii) implique (i). On montre par récurrence sur l'entier n que (i) implique (ii) et pour cela on utilise le fait que, si le A-module M est u.s.t.p. , alors le A-module $M[X_1,\ldots,X_n] = M \otimes_A A[X_1,\ldots,X_n]$ est u.s.t.p. (proposition 2.5 ci-dessous) :

Soit $P(X_1,\ldots,X_{n+1}) = \sum_i P_i(X_1,\ldots,X_n)\, X_{n+1}^i$ appartenant à $M[X_1,\ldots,X_n][X_{n+1}]$; il existe des éléments a_{ij} et b_j dans A tels que :

$P_i(X_1,\ldots,X_n) = \sum_j a_{ij}\, P(X_1,\ldots,X_n,b_j)$; les coefficients des polynômes $P_i(X_1,\ldots,X_n)$ sont combinaisons linéaires des valeurs prises par $P_i(X_1,\ldots,X_n)$ sur A^n d'après l'hypothèse de récurrence, donc combinaisons linéaires des valeurs prises par $P(X_1,\ldots,X_{n+1})$ sur A^{n+1} d'après l'égalité précédente.

2. PROPRIETES DES MODULES UNIVERSELLEMENT SANS TORSION POLYNOMIALE

Des considérations de support permettent d'obtenir les corollaires suivants du théorème 1.1 :

2.1. Proposition. Pour qu'un A-module M soit universellement sans torsion polynomiale il faut et il suffit que, pour tout idéal maximal m de A, le A_m-module M_m soit universellement sans torsion polynomiale.

2.2. Proposition. Pour qu'un A-module M soit universellement sans torsion polynomiale il faut et il suffit que, pour un sous-A-module quelconque M' de M, les A-modules M' et M/M' soient universellement sans torsion polynomiale.

En effet, $\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Supp}(M') \cup \mathrm{Supp}(M/M')$ (BOURBAKI, [5], III).

2.3. Proposition. Pour qu'un A-module M soit universellement sans torsion polynomiale il faut et il suffit que, pour une famille quelconque $(M_i)_{i \in I}$ de sous-A-modules dont la réunion est M, chaque A-module M_i soit universellement sans torsion polynomiale.

En effet, $\mathrm{Supp}(M) = \bigcup_{i \in I} \mathrm{Supp}(M_i)$ (BOURBAKI, [5], IV).

2.4. Corollaire. Une limite inductive $M = \varinjlim M_i$ de A-modules M_i universellement sans torsion polynomiale est un A-module universellement sans torsion polynomiale.

En effet, M est un quotient de la somme directe des M_i .

2.5. Proposition. Soient M et N deux A-modules. Si M ou N est un A-module universellement sans torsion polynomiale, alors $M \otimes_A N$ aussi.

En effet, $\mathrm{Supp}(M \otimes_A N) \subset \mathrm{Supp}(M) \cap \mathrm{Supp}(N)$.

2.6. Proposition. Soient $A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et M un A-module universellement sans torsion polynomiale, alors $M \otimes_A B$ est un B-module universellement sans torsion polynomiale.

Il suffit de considérer l'assertion (i) du théorème 1.1.

2.7. Proposition. Etant donné un A-module M, il existe un plus grand sous-A-module N de M qui soit un A-module universellement sans torsion polynomiale. Et tout homomorphisme d'un A-module universellement sans torsion polynomiale dans M se factorise par l'injection canonique de N dans M.

En effet, N est la réunion des sous-A-modules de M qui sont des A-modules u.s.t.p. (proposition 2.3). Comme l'image d'un A-module u.s.t.p. (dans M) est un A-module u.s.t.p. (proposition 2.2), elle est contenue dans N.

2.8. Remarque. Un produit de A-modules u.s.t.p. n'est pas toujours un A-module u.s.t.p. . Pour le montrer reprenons l'exemple I.4.11 :

Pour $x \neq o$, A/p_x est isomorphe à $\overline{\mathbb{F}_2}$ et est un A-module u.s.t.p. .Soit $B = \prod_{x \neq o} A/p_x$ .Puisque $\bigcap_{x \neq o} p_x \subset p_o$, l'idéal p_o est dans le support du A-module B ; or A/p_o est isomorphe à $\mathbb{F}_2$, donc est fini et B n'est pas un A-module u.s.t.p. .

2.9. Exemples.

a) Un anneau A intégralement clos de corps des fractions algébriquement clos est un A-module universellement sans torsion polynomiale.

b) Un A-module semi-simple qui est sans torsion polynomiale est un A-module universellement sans torsion polynomiale. En effet, il est somme de ses sous-modules simples qui sont s.t.p. et donc u.s.t.p. car le résultat est immédiat pour les modules simples.

3. LA LOCALISATION

Nous venons de voir que pour les modules universellement sans torsion polynomiale il y a passage aux localisés (proposition 2.1) ; par contre, pour les modules sans torsion polynomiale, cela n'est pas vrai en général (remarque I.4.10), sauf lorsque l'anneau est noethérien (corollaire I.4.6). Pour étudier ce problème de la localisation nous allons travailler sur les polynômes.

3.1. Théorème. Soient A un anneau, M un A-module et S une partie multiplicative de A. Si P est un polynôme appartenant à $M[X]$ nul sur A, alors son image canonique, notée $S^{-1}P$, dans $(S^{-1}M)[X]$ est nulle sur $S^{-1}A$.

Démonstration.

On peut supposer que l'anneau A est noethérien : en effet, A est réunion de ses sous-$\mathbb{Z}$-algèbres de type fini A_i qui sont des anneaux noethériens. Posons $S_i = S \cap A_i$. Alors, $P(A) = o$ implique $P(A_i) = o$, et, si on sait en déduire que $S_i^{-1}P(S_i^{-1}A_i) = o$, on aura bien $S^{-1}P(S^{-1}A) = o$ puisque $S^{-1}A = \bigcup S_i^{-1}A_i$.

Cas où S est le complémentaire d'un idéal maximal m de A : on a l'isomorphisme canonique $A/m^n \xrightarrow{\sim} A_m/m^nA_m$, donc l'image canonique de $S^{-1}P$ dans M_m/m^nM_m est nulle sur A_m/m^nA_m ; par suite, $S^{-1}P(A_m)$ est inclus dans m^nM_m . On peut toujours supposer que M est de type fini en le remplaçant par le sous-module engendré par les coefficients de P et l'anneau A étant supposé noethérien, le théorème de Krull montre alors que $S^{-1}P(A_m) = o$.

Cas où S est le complémentaire d'un idéal premier p dont le corps résiduel est infini. Les idéaux premiers de A associés à M_p sont inclus dans p et ils sont tous de corps résiduel infini le A-module M_p est donc un A-module sans torsion polynomiale (proposition I.4.1) et $S^{-1}P$ est identiquement nul, a fortiori $S^{-1}P(A_p) = o$.

On a traité les cas où S est le complémentaire d'un idéal premier p, car si le corps résiduel de p est fini, alors p est maximal. Le cas d'une partie multiplicative quelconque se déduit du corollaire un peu plus général suivant :

3.2. Corollaire. Soient $u : A \longrightarrow B$ un épimorphisme plat d'anneaux et M un B-module. Si P est un polynôme appartenant à $M[X]$ nul sur A, alors il est nul sur B.

Démonstration. Soient q un idéal premier de B et p l'image réciproque de q par u. D'après LAZARD [30] , de u on déduit un isomorphisme entre A_p et B_p. Si on note P_q l'image de P dans $M_q[X]$, $P(A) = o$ implique $P_q(A_p) = o$, (d'après ce qui précède) ; donc $P_q(B_p) = o$ et a fortiori $P_q(B) = o$. Ceci ayant lieu pour tout idéal premier q de B, l'injection canonique $M \longrightarrow \prod_q M_q$ montre que $P(B) = o$.

3.3. Corollaire. Soient A un anneau, M un A-module et S une partie multiplicative de A. Pour tout polynôme P appartenant à $M[X]$, les $S^{-1}A$-modules $S^{-1}(P(A))$ et $(S^{-1}P(S^{-1}A))$ sont égaux.

3.4. Corollaire. Soient A un anneau, M un A-module et S une partie multiplicative de A. Dans le $S^{-1}A$-module $(S^{-1}M)[X]$, on a l'inclusion :

$$S^{-1}(X^A_\infty(M)) \subset X^{S^{-1}A}_\infty(S^{-1}M) .$$

Ce n'est que la traduction du théorème 1.1.

3.5. Remarque. Lorsque M est un $S^{-1}A$-module, dans $M[X]$, on a l'égalité :

$$X^A_\infty(M) = X^{S^{-1}A}_\infty(M) .$$

En particulier, il revient au même de dire qu'un $S^{-1}A$-module est sans torsion polynomiale en tant que $S^{-1}A$-module ou bien en tant que A-module.

3.6. Proposition. Soient A un anneau noethérien, M un A-module et S une partie multiplicative de A. Dans le $S^{-1}A$-module $(S^{-1}M)[X]$, on a l'égalité :

$$S^{-1}(X^A_\infty(M)) = X^{S^{-1}A}_\infty(S^{-1}M) .$$

Démonstration. Le corollaire 3.4 fournit une première inclusion. Inversement soit P un élément de $X^{S^{-1}A}_\infty(S^{-1}M)$. Soient $Q(X) \in M[X]$ et $s \in S$ tels que $Q/s = P$. Le A-module N engendré par les valeurs de Q sur A étant contenu dans le A-module de type fini engendré par les coefficients de Q est de type fini ; il vérifie en outre $N/s = o$; par suite il existe $t \in S$ tel que $tN = o$. Ainsi le polynôme $R = tQ \in M[X]$ vérifie $R/st = P$ et $R(A) = o$.

Rappelons que l'égalité de la proposition 3.6 n'est pas vraie en général. Par contre, sans hypothèse noethérienne, on a le résultat de globalisation suivant :

3.7. Proposition. Soient A un anneau et M un A-module : $X^A_\infty(M)$ s'injecte dans le produit $\prod_p X^{A_p}_\infty(M_p)$ où p décrit l'ensemble des idéaux maximaux de A ou bien l'ensemble des idéaux premiers faiblement associés à M.

En particulier, si, pour tout idéal maximal p de A (respectivement tout idéal premier p de A faiblement associé à M), M_p est un A_p-module sans torsion polynomiale, alors M est un A-module sans torsion polynomiale.

En effet, des deux injections classiques :

$$M \longrightarrow \prod_{p \in \mathrm{Max}(A)} M_p \quad \text{et} \quad M \longrightarrow \prod_{p \in \mathrm{Ass}_f(M)} M_p$$

(BOURBAKI, [5] , IV) on déduit deux injections $M[X] \to \prod_p M_p[X]$. Par restriction, on obtient deux injections de $X^A_\infty(M)$ dans $\prod_p M_p[X]$ et le théorème 3.1 montre que l'image de $X^A_\infty(M)$ est contenue dans $\prod_p X^{A_p}_\infty(M_p)$.

4. LA RESTRICTION DES SCALAIRES : REDUCTION DU PROBLEME

Soit $u : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et soit M un B-module. Il est clair que tout polynôme à coefficients dans M nul sur B est nul sur A, c'est-à-dire $u(A)$. Ceci peut se traduire par l'inclusion :

$X^B_\infty(M) \subset X^A_\infty(M_{[u]})$ où l'on ne considère que les structures de groupe sous-jacentes. Nous allons chercher ici à caractériser les homomorphismes d'anneaux $u : A \longrightarrow B$ tel que l'on ait l'égalité :

$X^B_\infty(M) = X^A_\infty(M_{[u]})$ pour tout B-module M. Le paragraphe précédent nous fournit déjà certains résultats.

4.1. Définition. Un homomorphisme d'anneaux $u : A \longrightarrow B$ est dit de substitution lorsque tout polynôme à coefficients dans un B-module quelconque nul sur $u(A)$ est nul sur B.

Notons que, si $u : A \longrightarrow B$ est un homomorphisme de substitution, pour qu'un B-module soit sans torsion polynomiale il faut et il suffit qu'il le soit en tant que A-module.

Il est clair que :

4.2. Tout homomorphisme surjectif est de substitution.

4.3. Soient $u : A \longrightarrow B$ et $v : B \longrightarrow C$ deux homomorphismes d'anneaux. Si u et v sont de substitution, alors v.u aussi.
Si v.u est de substitution, alors v aussi.

4.4. Soient $u : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et $j : u(A) \longrightarrow B$ l'injection déduite de u. Pour que u soit de substitution il faut et il suffit que j soit de substitution.

4.5. Soient $u : A \longrightarrow B$, a un idéal de A, b un idéal de B contenant $u(a)$ et $\bar{u}$ l'homomorphisme de A/a dans B/b déduit de u. Si u est de substitution, alors $\bar{u}$ aussi.

Cela résulte du diagramme commutatif ci-contre :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/a & \xrightarrow[\bar{u}]{} & B/b \end{array}$$

et des assertions 4.2 et 4.3.

D'autre part, d'après la remarque 3.5 :

4.6. Proposition. Tout homomorphisme de localisation est de substitution.

On en déduit :

4.7. Soient $u : A \longrightarrow B$, m un idéal premier de B, $p = u^{-1}(m)$ et u_m l'homomorphisme de A_p dans B_m déduit de u. Si u est de substitution, alors u_m aussi.

Cela résulte du diagramme commutatif ci-contre :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_p & \xrightarrow[u_m]{} & B_m \end{array}$$

et des assertions 4.3 et 4.6.

4.8. Proposition. Avec les notations de 4.7, pour que u soit de substitution il faut et il suffit que u_m soit de substitution pour tout idéal maximal m de B .

Démonstration. La condition nécessaire résulte de l'assertion 4.7. Inversement, soient M un B-module, $Q(X)$ un polynôme à coefficients dans M nul sur $u(A)$ et N le B-module engendré par les valeurs de Q sur B. D'après la proposition 4.6, $A \longrightarrow A_p$ est de substitution et, par hypothèse, $A_p \longrightarrow B_m$ est de substitution, donc $N_m = o$; ceci ayant lieu pour tout idéal maximal m de B, on a bien $N = o$.

On sait aussi d'après le théorème 1.1 que, si A est un anneau local de corps résiduel infini, tout A-module M est universellement sans torsion polynomiale et donc tout polynôme appartenant à $M[X]$ qui est nul sur A est lui-même nul. Par suite :

4.9. Proposition. Tout homomorphisme de source un anneau local de corps résiduel infini est de substitution.

Les propositions 4.8 et 4.9 nous amènent donc à étudier le cas d'un homomorphisme $u : A \longrightarrow B$ d'anneaux locaux où A est de corps résiduel fini. Commençons par deux cas particuliers :

4.10. Soit $u : k \longrightarrow K$ un homomorphisme non nul de corps. Pour que u soit de substitution il faut et il suffit que k soit infini ou bien que u soit un isomorphisme.

4.11. Soit $u : k \longrightarrow B$ une injection d'un corps fini k dans un anneau local B. Si u est de substitution, alors u est un isomorphisme

Démonstration. Soit m l'idéal maximal de B. On a $m \cap k = o$ et, d'après les assertions 4.5 et 4.10, k est isomorphe à B/m. Soient k_i les éléments de k ; le polynôme $P(X) = \prod_i (X-k_i)$ étant nul sur k est nul sur B par hypothèse. Soit b un élément quelconque de B et soit k_j l'unique élément de k tel que $b-k_j$ appartienne à m ; pour $i \neq j$, $b-k_i$ est inversible dans B et donc $b = k_j$.

Ces préliminaires étant faits, nous allons, dans le paragraphe suivant, étudier le cas local en toute généralité et, moyennant une hypothèse noethérienne, nous obtiendrons des caractérisations des homomorphismes de substitution.

5. LA RESTRICTION DES SCALAIRES : CONCLUSION

5.1. Proposition. Soit $u : A \longrightarrow B$ un homomorphisme local d'un anneau local A d'idéal maximal p et de corps résiduel fini dans un anneau local B d'idéal maximal m. Pour que l'homomorphisme u soit de substitution il faut que les quotients A/p et $B/u(p)B$ soient isomorphes. Lorsque l'anneau B est noethérien cette condition est suffisante.

Dire que A/p et $B/u(p)B$ sont isomorphes équivaut à dire que l'image de p dans B engendre l'idéal maximal m et que A/p et B/m sont isomorphes.

Démonstration.

Notons $\bar{u} : A/p \longrightarrow B/u(p)B$ l'homomorphisme déduit de u par passage aux quotients. Si u est de substitution, alors l'assertion 4.5 montre que $\bar{u}$ aussi. L'homomorphisme $\bar{u}$ étant injectif est alors un isomorphisme d'après l'assertion 4.11.

Supposons maintenant que B est noethérien et montrons la réciproque. Des formules $B = u(A) + m$ et $u(p)B = m$, on déduit par récurrence que :

5.1.a. $\quad m^n = u(p^n) + m^{n+1}$

5.1.b. $\quad B = u(A) + m^n$, pour tout entien n.

Par suite, l'homomorphisme de A/p^n dans B/m^n déduit de u est surjectif. Soient M un B-module, Q(X) un polynôme à coefficients dans M et N le sous-B-module de type fini de M engendré par les coefficients de Q(X). D'après la surjection précédente si $Q(u(A)) = o$, alors $Q(B)$ est contenu dans m^nN pour tout entier n. Comme B est noethérien et N de type fini, l'intersection des m^nN est réduite à (o) et donc $Q(B) = o$.

Indiquons deux corollaires de cette proposition :

5.2. Corollaire. Un épimorphisme d'anneaux de source ou de but un anneau noethérien est un homomorphisme de substitution.

Démonstration. La proposition 4.8 nous ramène au cas d'un épimorphisme local u d'un anneau local A d'idéal maximal p dans un anneau local B. Un épimorphisme local de source un anneau noethérien ayant pour but un anneau noethérien (FERRAND, [17]), on peut aussi supposer que l'anneau B est noethérien. L'homomorphisme $\bar{u} : A/p \longrightarrow B/u(p)B$ déduit de u est un épimorphisme de source un corps, c'est donc un isomorphisme et l'on a la caractérisation de la proposition 5.1.

5.3. Corollaire. Soient A un anneau noethérien local d'idéal maximal p et $\hat{A}$ le complété de A pour la topologie p-adique. L'injection de A dans $\hat{A}$ est un homomorphisme de substitution.

En effet, l'injection de A dans $\hat{A}$ vérifie la caractérisation de la proposition 5.1. Ce corollaire nous suggère lorsque B est noethérien une autre caractérisation.

Nous allons utiliser le résultat suivant qui est probablement connu :

5.4. Proposition. Soit $u : A \longrightarrow B$ un homomorphisme local d'un anneau local A d'idéal maximal p dans un anneau local B d'idéal maximal m. Notons $\hat{u} : \hat{A} \longrightarrow \hat{B}$ l'homomorphisme déduit de u par complétion pour les topologies p-adique et m-adique. Pour que A/p soit isomorphe à $B/u(p)B$ il faut que $\hat{u}$ soit surjectif. Lorsque l'anneau B est noethérien cette condition est suffisante.

Démonstration.

Montrons que la condition est nécessaire. Notons $Gr(A)$, $GR(\hat{A})$, $Gr(B)$ et $Gr(\hat{B})$ les gradués associés à A, $\hat{A}$, B et $\hat{B}$ pour les filtrations p-adiques et m-adiques, $gr(u) : Gr(A) \longrightarrow Gr(B)$ et $gr(\hat{u}) : Gr(\hat{A}) \longrightarrow Gr(\hat{B})$ les homomorphismes gradués associés à u et $\hat{u}$. La formule 5.1.a montre que, pour tout entier n, l'homomorphisme de p^n/p^{n+1} dans m^n/m^{n+1} déduit de u est surjectif ; ce qui signifie que gr(u) est surjectif. Des isomorphismes $Gr(A) \longrightarrow Gr(\hat{A})$ et $Gr(B) \longrightarrow Gr(\hat{B})$, on déduit que $gr(\hat{u})$ est surjectif. Comme $\hat{A}$ est complet et que $\hat{B}$ est séparé, l'homomorphisme $\hat{u}$ est lui aussi surjectif (BOURBAKI, [5], III, §2).

Inversement, supposons que B soit noethérien et que $\hat{u}$ soit surjectif. Notons $\hat{p}$ et $\hat{m}$ les idéaux maximaux de $\hat{A}$ et de $\hat{B}$. On a les isomorphismes : $A/p \xrightarrow{\sim} \hat{A}/\hat{p}$, $B/m \xrightarrow{\sim} \hat{B}/\hat{m}$ et $\hat{A}/\hat{p} \xrightarrow{\sim} \hat{B}/\hat{m}$ ($\hat{u}$ surjectif et $\hat{u}(\hat{p}) \subset \hat{m}$) ; d'où un isomorphisme entre A/p et B/m. Montrons maintenant que l'idéal I de B

engendré par $u(p)$ est égal à m. Du fait que $\hat{u}$ est surjectif, nous avons $\hat{u}(\hat{p})\hat{B} = \hat{m}$ et donc $I\hat{B} = u(p)\hat{B} = \hat{u}(\hat{p})\hat{B} = \hat{m} = m\hat{B}$. Le B-module $\hat{B}$ étant fidèlement plat (BOURBAKI, [5], III, § 3), l'égalité entre $I\hat{B}$ et $m\hat{B}$ implique l'égalité entre I et m.

Des propositions 4.8, 4.9, 5.1 et 5.4, nous déduisons :

5.5. Conclusion. Soit $u : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et supposons que B soit noethérien. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) L'homomorphisme u est de substitution (c'est-à-dire tout polynôme à coefficients dans un B-module quelconque nul sur $u(A)$ est nul sur B).

(ii) Pour tout idéal maximal m de B, ou bien $A/u^{-1}(m)$ est infini ou bien l'image de $u^{-1}(m)$ dans B_m engendre mB_m et $A/u^{-1}(m)$ admet B/m pour corps des fractions.

(iii) Pour tout idéal maximal m de B, ou bien $A/u^{-1}(m)$ est infini ou bien l'homomorphisme déduit de u par localisation puis par complétion par rapport à $u^{-1}(m)$ et à m est surjectif.

CHAPITRE III - ANNEAUX DE POLYNOMES A VALEURS ENTIERES -

Etant donné un corps de nombres K d'anneau d'entiers A, POLYA [37] et OSTROWSKI [34] ont appelé "polynômes à valeurs entières" et étudié les polynômes à coefficients dans K qui en tout élément de A sont à valeurs dans A .

Ici, nous généralisons la définition et le problème en considérant un anneau intègre quelconque A de corps des fractions K. Dans ce premier chapitre sur l'anneau des polynômes à valeurs entières nous allons nous inspirer pour notre étude des résultats précédents concernant les polynômes à coefficients dans un module.

1. PREMIERS RESULTATS

1.1. Etant donné un anneau intègre A, on appelle polynôme à valeurs entières sur A tout polynôme à coefficients dans le corps des fractions K de A qui est à valeurs dans A pour tout élément de A.

Ces polynômes forment un anneau compris entre $A[X]$ et $K[X]$ que l'on note $A[X]_{sub}$ .Autrement dit :

$$A[X]_{sub} = \{Q(X) \in K[X] \mid Q(A) \subset A\}$$

Etant donné une famille quelconque $(X_i)_{i \in I}$ d'indéterminées, on notera de même :

$$A[(X_i)]_{sub} = \{Q(X) \in K[(X_i)] \mid Q(A^I) \subset A\}$$

Dans la suite de ce paragraphe A désigne un anneau intègre de corps des fractions K .

Notons que dans le A-module $(K/A)[X] \simeq K[X]/A[X]$ le quotient $A[X]_{sub}/A[X]$ n'est autre que le A-module $X^A_\infty(K/A)$ des polynômes à coefficients dans K/A nuls sur A. Cette remarque nous permet d'obtenir un certain nombre de propriétés de cet anneau $A[X]_{sub}$ résultant directement des deux chapitres précédents.

1.2. Proposition. Soit S une partie multiplicative de A. Pour tout polynôme $Q(X)$ à coefficients dans K, si $Q(A)$ est inclus dans A, alors $Q(S^{-1}A)$ est inclus dans $S^{-1}A$. Autrement dit, on a l'inclusion :

$$S^{-1}(A[X]_{sub}) \subset (S^{-1}A)[X]_{sub} .$$

C'est l'inclusion du théorème II.3.1. En effet :
$S^{-1}(A[X]_{sub}) / (S^{-1}A)[X] = S^{-1}(A[X]_{sub}/A[X]) = S^{-1}(X^{A}_{\infty}(K/A))$
est inclus dans $X^{S^{-1}A}_{\infty}(K/S^{-1}A) = (S^{-1}A)[X]_{sub} / (S^{-1}A)[X]$.

1.3. Corollaire. Pour toute famille (S_i) de parties multiplicatives de A telle que $A = \bigcap_i S_i^{-1}A$, on a l'égalité :

$$A[X]_{sub} = \bigcap_i (S_i^{-1}A)[X]_{sub} .$$

1.4. Proposition. Lorsque A est un anneau noethérien, pour toute partie multiplicative S de A, on a l'égalité :

$$S^{-1}(A[X]_{sub}) = (S^{-1}A)[X]_{sub} .$$

C'est l'égalité de la proposition I.3.6.

1.5. Proposition. Soit p un idéal premier de A de corps résiduel infini. Pour tout polynôme $Q(X)$ à coefficients dans K, si $Q(A)$ est inclus dans A, alors $Q(X)$ est à coefficients dans A_p. Autrement dit, on a :

$$A[X]_{sub} \subset A_p[X] .$$

En effet, d'après la proposition 1.2 , $Q(X)$ appartient à $A_p[X]_{sub}$ .Or, d'après le théorème II.1.1 ; tout A_p-module, et en particulier le A_p-module K/A_p, est universellement sans torsion polynomiale, donc $A_p[X]_{sub} / A_p[X] = X_\infty^{A_p}(K/A_p) = o$ et $Q(X)$ est à coefficients dans A_p .

1.6. Remarque. Si A est de cardinal infini, un polynôme Q à coefficients dans K, qui est à valeurs dans A pour presque tout élément de A, est en fait à valeurs dans A pour tout élément de A (cf. remarque I.2.8).

Si A est un anneau intègre de cardinal fini, c'est un corps et l'on a les égalités : $A[X] = A[X]_{sub} = K[X]$ .On peut donc supposer dans la suite que A est de cardinal infini. Dans ces conditions, pour tout anneau intègre B contenant A, un polynôme $Q(X) \in B[X]$ tel que $Q(A)$ soit inclus dans A est à coefficients dans K .

Nous allons nous intéresser maintenant à un cas que nous avons rencontré dans la proposition 1.5, celui où $A[X]_{sub}$ est égal à $A[X]$ (anneaux substitutiels). Puis nous considérerons le phénomène suivant : si $Q(A)$ est inclus dans $S^{-1}A$, alors $Q(S^{-1}A)$ est inclus dans $S^{-1}A$ et nous nous demanderons dans quelle mesure on peut remplacer $S^{-1}A$ par un anneau B (anneaux substituables).

2. ANNEAUX SUBSTITUTIELS

2.1. Définition. Un anneau intègre A de corps des fractions K est dit substitutiel si :

(i) L'anneau A est de cardinal infini.

(ii) L'anneau $A[X]_{sub}$ des polynômes à valeurs entières sur A est égal à $A[X]$.

La condition (ii) signifie que $X^A_\infty(K/A) = o$ autrement dit que le A-module K/A est sans torsion polynomiale. Quand à la condition (i), elle donne un meilleur sens à la définition, en effet :

Si A est un anneau substitutiel, alors, pour tout anneau intègre B contenant A, tout polynôme $Q(X) \in B[X]$, qui vérifie $Q(A) \subset A$, a ses coefficients dans A .

2.2. Exemple. Un anneau intègre qui est un A-module universellement sans torsion polynomiale est substitutiel. En particulier, un anneau local de corps résiduel infini est substitutiel. En effet, d'après le théorème II.1.1, le A-module K/A est sans torsion polynomiale.

2.3. Proposition. Soit (S_i) une famille de parties multiplicatives de A telle que $A = \bigcap_i S_i^{-1}A$ .Si chacun des $S_i^{-1}A$ est substitutiel, alors A est substitutiel.

Cela résulte de la proposition 1.3 .La proposition 1.4 donne :

2.4. Proposition. Les localisés d'un anneau noethérien substitutiel sont substitutiels.

Précédemment nous avons fait intervenir des idéaux premiers associés ou faiblement associés (pour les modules sans torsion polynomiale) et des idéaux maximaux (pour les modules universellement sans torsion polynomiale) ; la propriété demandée était que les corps résiduels correspondants soient infinis. Dans ce qui suit, nous allons avoir à considérer les idéaux premiers de hauteur 1.

2.5. Lemme. Pour qu'un anneau intègre A soit substitutiel il faut et il suffit que, pour tout idéal principal propre aA, le quotient correspondant A/aA soit un anneau sans torsion polynomiale.

Démonstration. Si A n'est pas substitutiel, il existe un polynôme $P(X)$ de $A[X]_{sub}$ n'appartenant pas à $A[X]$. Soit a un élément de A, qui est non nul et non inversible, tel que $Q(X) = aP(X)$ appartienne à $A[X]$. Alors $Q(X)$ n'appartient pas à $aA[X]$ tandis que $Q(A)$ est inclus dans aA : l'anneau A/aA n'est pas sans torsion polynomiale. La réciproque est analogue.

2.5.bis. Lemme. Soient A un anneau intègre et p un idéal premier de A de corps résiduel infini. Pour que A soit substitutiel il faut et il suffit que pour tout élément a de $A-p$, l'anneau A/aA soit sans torsion polynomiale.

Il suffit de noter dans la démonstration précédente que, si $P(X)$ appartient à $A[X]_{sub}$, alors $P(X)$ appartient à $A_p[X]$ (proposition 1.5) et donc l'élément a peut être choisi dans A-p .

2.6. Corollaire. Si tout élément non nul et non inversible d'un anneau intègre A est produit fini d'éléments irréductibles, alors pour que A soit substitutiel il faut et il suffit que, pour tout élément irréductible p de A, l'anneau A/pA soit sans torsion polynomiale.

Démonstration. Tout élément a de A étant décomposable en un produit $p_1 \ldots p_n$ de n éléments irréductibles de A, on va montrer par récurrence sur l'entier n que l'anneau A/aA est s.t.p. ; par hypothèse c'est vrai pour 1 ; supposons le pour n-1. Comme on a la suite exacte :

$$o \longrightarrow p_n A/aA \longrightarrow A/aA \longrightarrow A/p_n A \longrightarrow o$$ où $p_n A/aA$ est isomorphe à $A/p_1 \ldots p_{n-1} A$ et que par hypothèse de récurrence les deux quotients extrêmes sont s.t.p. , le quotient A/aA est aussi s.t.p. (par l'exactitude à gauche du foncteur X_∞^A).

2.7. Proposition. Pour qu'un anneau factoriel soit substitutiel il faut et il suffit que, pour tout élément irréductible p de A, le quotient A/pA soit de cardinal infini (c'est-à-dire que, pour tout idéal premier de hauteur 1, le corps résiduel correspondant soit infini).

L'idéal pA étant premier, dire que l'anneau A/pA est s.t.p. équivaut à dire qu'il est de cardinal infini (exemple I.3.2).

2.8. Corollaire. Les localisés d'un anneau factoriel substitutiel sont substitutiels.

Car un élément irréductible d'un localisé $S^{-1}A$ de A provient d'un élément irréductible p de A et A/pA s'injecte dans $S^{-1}(A/pA) = S^{-1}A/S^{-1}pA$.

2.9. Proposition. Pour qu'un anneau noethérien soit substitutiel il faut que, pour tout idéal premier de hauteur 1, le corps résiduel correspondant soit infini.

Démonstration. Soit p un idéal premier de hauteur 1 et soit a un élément de $p-\{o\}$ .L'idéal principal aA étant propre, pour que A soit substitutiel il faut que l'anneau A/aA soit sans torsion polynomiale (corollaire 2.6). L'anneau A/aA étant noethérien, il faut pour cela que A/p soit infini (remarque I.6.2).

2.10. Proposition. Pour qu'un anneau de Krull soit substitutiel il suffit que, pour tout idéal premier de hauteur 1, le corps résiduel correspondant soit infini.

En effet, un anneau de Krull A est intersection de ses localisés en les idéaux premiers de hauteur 1. Si ceux-ci sont de corps résiduels infinis, ils sont substitutiels (exemple 2.2) et leur intersection A aussi (proposition 2.3).

2.11. Proposition. Pour qu'un anneau noethérien intégralement clos soit substitutiel il faut et il suffit que, pour tout idéal premier de hauteur 1, le corps résiduel correspondant soit infini.

Cela résulte de ce qu'un anneau noethérien intégralement clos est un anneau de Krull et des propositions 2.9 et 2.10.

3. EXEMPLES D'ANNEAUX SUBSTITUTIELS

3.1. Proposition. Pour qu'un anneau de valuation soit substitutiel il faut et il suffit que son corps résiduel soit infini ou bien que son idéal maximal ne soit pas principal.

Démonstration.

Soit A un anneau de valuation dont l'idéal maximal est principal et le corps résiduel fini. Soient π une uniformisante de A et (a_i) un système de représentants dans A du corps résiduel. Le polynôme $P(X) = (1/\pi) . \prod_i (X-a_i)$ n'appartient pas à $A[X]$ tandis que $P(A)$ est inclus dans A : l'anneau A n'est pas substitutiel.

Si A est un anneau local de corps résiduel infini, il est substitutiel (exemple 2.2).

Soit donc A l'anneau d'une valuation v dont l'idéal maximal n'est pas principal ; il s'agit de montrer que A est substitutiel. Soit (x_n) une suite d'éléments de A telle que la suite $v(x_n)$ tende vers o et que $v(x_n) > o$, soit $P(X) = \sum_i p_i X^i$ un élément de $A[X]_{sub}$ et soit j le plus petit indice i tel que $v(p_i)$ soit minimal. Pour n assez grand, on a :

$v(p_j x_n^j) = v(P(x_n)) \geq o$; d'où $v(p_j) \geq -jv(x_n)$ et à la limite $v(p_j) \geq o$, c'est-à-dire $P(X)$ appartient à $A[X]$.

Nous avons vu que lorsqu'un anneau noethérien ou un anneau factoriel est substitutiel, ses localisés le sont aussi (proposition 2.4 et corollaire 2.8). Nous allons voir un exemple d'anneau substitutiel qui possède des localisés qui ne le sont pas.

3.2. Contre-exemple. Etant donné un corps L muni de n valuations discrètes, il est possible de construire une extension L' de L de degré 3 telle que chaque valuation de L possède deux extensions et deux seulement à L' , l'une immédiate (e=1,f=1), l'autre ramifiée (e=2,f=1) (cf. KRULL [29]).

A partir de $\mathbb{Q}$ muni de la valuation 2-adique, construisons successivement de cette façon des corps K_n .Soient K la réunion des corps K_n , V l'ensemble des valuations v de K prolongeant la valuation 2-adique de $\mathbb{Q}$; pour tout $v \in V$, A_v et m_v l'anneau et l'idéal maximal de la valuation v et A l'intersection des anneaux A_v .

Etant donné $v \in V$, la restriction de v à un corps K_n (qui est discrète) admet à la fois des prolongements à K discrets et des prolongements à K non discrets. Ainsi A est à la fois intersection des A_v où v est discrète et intersection des A_v où v n'est pas discrète.

Pour tout $v \in V$, posons $p_v = m_v \cap A$; on a l'égalité $A_{p_v} = A_v$ (BOURBAKI [5]). Si v est discrète A_{p_v} n'est pas substitutiel, tandis que si v est non discrète A_{p_v} est substitutiel (on applique la proposition 3.2 en notant que le corps résiduel de tous les anneaux A_v est fini puisque isomorphe à $\mathbb{F}_2$). En outre, l'anneau A est substitutiel, car il est intersection des A_{p_v} où v est non discrète (proposition 2.3).

Ainsi, on a un exemple d'anneau substitutiel tel que "beaucoup" de ses localisés soient substitutiels et en même temps tel que "beaucoup" de ses localisés ne soient pas substitutiels ("beaucoup" signifiant assez pour que l'anneau soit égal à leur intersection).

3.3. Exemple. Si A est un anneau intègre de cardinal infini, alors $A[X]$ est un anneau substitutiel.

On peut le vérifier par le calcul en considérant des polynômes. Nous allons nous amuser à le montrer en nous servant des résultats des chapitres précédents. Montrer que $A[X]$ est substitutiel, c'est montrer que $K(X)/A[X]$ est un $A[X]$-module sans torsion polynomiale (K désignant le corps des fractions de A). Comme $K[X]/A[X]$ est un sous-module de $K(X)/A[X]$, il suffit de montrer que les deux $A[X]$-modules $K[X]/A[X]$ et $K(X)/K[X]$ sont sans torsion polynomiale. Pour le premier, c'est l'exemple I.3.2.b . Pour le second, cela revient à dire que le $K[X]$-module $K(X)/K[X]$ est sans torsion polynomiale, car $K[X]$ est un localisé de $A[X]$ (remarque II.3.5). Or, cette dernière assertion signifie que l'anneau $K[X]$ est substitutiel et c'est exact puisque $K[X]$ contient un corps infini.

Notons qu'une démonstration analogue montrerait que $A[[X]]$ est aussi un anneau substitutiel, lorsque A est un anneau intègre de cardinal infini.

Par contre, si A est de cardinal fini, $A[X]$ et $A[[X]]$ ne sont pas substitutiels (considérer le polynôme $(1/X)\prod_{a\in A}(T-a)$).

4. ANNEAUX SUBSTITUABLES : REDUCTION DU PROBLEME

4.1. Proposition. Soit A un anneau intègre de corps des fractions K et soit B un anneau compris entre A et K et plat sur A. Pour tout polynôme $Q(X)$ à cefficients dans K, si $Q(A)$ est inclus dans B, alors $Q(B)$ est inclus dans B. Autrement dit, on a l'égalité :

$$B[X]_{sub} = \{Q(X) \in K[X] \mid Q(A) \subset B\} .$$

En effet, l'injection de A dans B est un épimorphisme plat (LAZARD [30]). D'après le corollaire II.3.2, un polynôme à coefficients dans K/B nul sur A est nul sur B.

C'est cette égalité que nous allons essayer de généraliser en posant la définition suivante.

DANS CE PARAGRAPHE ET LE SUIVANT B DESIGNERA UN ANNEAU INTEGRE DE CORPS DES FRACTIONS L ET A UN SOUS-ANNEAU DE B DE CORPS DES FRACTIONS K .

4.2. Définitions. L'anneau A est dit substituable à l'anneau B lorsque tout polynôme $Q(X)$ à coefficients dans L qui est à valeurs dans B sur A est encore à valeurs dans B sur B ; autrement dit lorsque l'anneau $B[X]_{sub} = \{Q(X) \in L[X] \mid Q(B) \subset B\}$ est égal à l'anneau $\{Q(X) \in L[X] \mid Q(A) \subset B\}$. L'anneau A est dit substituable lorsqu'il est substituable à tout anneau compris entre A et K .

4.3. Remarque. Si l'injection de A dans B est un homomorphisme de substitution, alors a fortiori A est substituable à B (il suffit d'appliquer la définition II.4.1 au B-module L/B). En particulier, A est substituable à ses localisés.

Il est immédiat que :

4.4. Si A est substituable à B, alors tout anneau compris entre A et B est substituable à B et, pour tout corps M compris entre K et L, A est substituable à $B \cap M$.

4.5. Proposition. Si B est la fermeture intégrale de A dans L, pour que A soit substituable à B il faut et il suffit que A soit substituable à sa clôture intégrale $B \cap K$ et que $B \cap K$ soit substituable à B .

Démonstration. La condition nécessaire résulte de l'assertion précédente. Montrons la réciproque : soit $Q(X) \in L[X]$ tel que $Q(A)$ soit inclus dans B et soit $Q^n + P_{n-1}Q^{n-1} + \ldots + P_1 Q + P_o = o$ l'équation caractéristique de $Q(X)$ sur $K[X]$ .Les P_i sont des fonctions symétriques des conjugués de Q ; par suite, pour tout élément a de A, les $P_i(a)$ sont des fonctions symétriques des conjugués de $Q(a)$ et donc $P_i(a)$ appartient à $B \cap K$ .Avec les hypothèses, $P_i(A) \subset B \cap K$ implique $P_i(B \cap K) \subset B \cap K$ et $P_i(B) \subset B$; donc $Q(b)$ est entier sur B c'est-à-dire appartient à B, pour tout élément b de B .

4.6. Si A est substituable à une famille d'anneaux B_i , alors A est substituable à l'intersection des B_i .En particulier :

Pour que A soit substituable à tout anneau intégralement clos compris entre A et L il faut et il suffit que A soit substituable à tout anneau de valuation de L .

L'anneau A est substituable à toute intersection de ses localisés.

4.7. Si A est substituable à une famille d'anneaux B_i dont l'intersection est A, alors l'anneau $A[X]_{sub}$ est égal à l'intersection des anneaux $B_i[X]_{sub}$.(On retrouve en particulier le corollaire 1.3).

4.8. Proposition. Si, pour tout idéal maximal p de A , A_p est substituable à B_p , alors A est substituable à B.

Si, pour tout idéal maximal m de B, $A_{m\cap A}$ est substituable à B_m , alors A est substituable à B .

Montrons par exemple la première assertion. Soit $Q(X)\in L[X]$ tel que $Q(A)$ soit inclus dans B .Alors $Q(A_p)$ est inclus dans B_p d'après la remarque 4.3 et par suite $Q(B)$ est inclus dans $\cap B_p = B$ grâce à l'hypothèse.

4.9. Proposition. Supposons que A soit noethérien. Si A est substituable à B, alors, pour tout idéal premier p de A, A_p est substituable à B_p , et, pour tout idéal premier m de B, $A_{m\cap A}$ est substituable à B_m .

Montrons par exemple la première assertion. Soit $Q(X) \in L[X]$ tel que $Q(A_p)$ soit inclus dans B_p .Le A-module engendré par les valeurs de $Q(X)$ sur A est de type fini car il est contenu dans le A-module engendré par les coefficients de $Q(X)$ et il existe $s \in A-p$ tel que $s.Q(A)$ soit inclus dans B. Par suite, avec l'hypothèse, $s.Q(B)$ est inclus dans B ; d'où $Q(B)$ est inclus dans B_p et finalement $Q(B_p)$ est inclus dans B_p .

L'hypothèse noethérienne est inutile pour le passage aux localisés des anneaux substituables, car il est immédiat que si A est substituable alors tout anneau compris entre A et K est substituable. D'où :

4.10. Proposition. Pour que A soit substituable il faut et il suffit que ses localisés en les idéaux maximaux soient substituables

4.11. Exemple. Un anneau de Prüfer est substituable.

On est en effet ramené par la proposition 4.10 au cas d'un anneau de valuation qui est substituable, car substituable à ses localisés.

4.12. Exemple. Soit p un idéal premier de A .Si A est substituable à tout anneau compris entre A et A_p , alors A/p est substituable En particulier, tout quotient intègre d'un anneau substituable est substituable. (Cela se vérifie en notant que, le corps des fractions de A/p étant A_p/pA_p , ses éléments se relèvent dans A_p).

4.13. Proposition. Si A est un anneau local de corps résiduel infini, alors A est substituable à tout anneau le contenant ; en particulier, A est substituable.

Cela résulte de la proposition II.4.9 .

Les propositions 4.8, 4.9, 4.10 et 4.13 ramènent notre étude au cas où A est local de corps résiduel fini et B est local dominant A .

5. ANNEAUX SUBSTITUABLES : CONCLUSION

Dans tout ce paragraphe et jusqu'à la conclusion, A est un anneau intègre, de corps des fractions K, local, d'idéal maximal p , de corps résiduel fini et B est un anneau contenant A, intègre, de corps des fractions L, local, d'idéal maximal m, dominant A (c'est-à-dire $m \cap A = p$).

Des propositions II.5.1 et II.5.4, nous déduisons :

5.1. Proposition. Si B est un anneau noethérien et si les conditions équivalentes suivantes :

(i) $pB = m$ et $A/p \simeq B/m$.

(ii) $\hat{A} \simeq \hat{B}$ (complétés pour les topologies p-adique et m-adique) sont réalisées, alors A est substituable à B .

Le corollaire II.5.3 devient :

5.2. Corollaire. Si A est un anneau noethérien, alors A est substituable à son complété pour la topologie p-adique (lorsque celui-ci est un anneau intègre).

La condition 5.1.i reste suffisante lorsque l'hypothèse noethérienne sur B est remplacée par "m est principal". Ainsi :

5.3. Proposition. Si m est principal engendré par un élément de p et si A/p est isomorphe à B/m, alors A est substituable à B.

Pour cela énonçons une proposition qui résultera directement des assertions IV.1.8 et IV.2.2 qui seront prouvées plus loin :

5.4. Proposition. Supposons l'idéal m engendré par un élément π et le quotient B/m de cardinal fini q .Soit $(b_0,b_1,\ldots,b_{q-1})$ un système de représentants de B modulo m et, pour $r\in\mathbb{N}$, posons :

$b_r = b_{r_0} + b_{r_1}\pi + \ldots + b_{r_k}\pi^k$ où $r_k\ldots r_1 r_0$ est l'écriture de l'entier r en base q .Alors, pour qu'un polynôme $Q(X)$ à coefficients dans L appartienne à $B[X]_{sub}$ il faut et il suffit que $Q(b_r)$ appartienne à B , pour $r\in\{0,1,\ldots,\deg Q\}$.

Avec les hypothèses de la proposition 5.3, on peut prendre pour π un élément de p et pour $(b_0,b_1,\ldots,b_{q-1})$ des éléments de A .Ainsi tous les b_r appartiennent à A et l'anneau A est bien substituable à B .

Voici une réciproque à la proposition 5.3 :

5.5. Proposition. S'il existe un idéal principal αB de B compris entre pB et m et si A est substituable à B , alors $m = \alpha B$ et A/p est isomorphe à B/m .

Démonstration. Soit $R(X) = \prod_{i=0}^{q-1} (X-a_i)$ où $(a_0,a_1,\ldots,a_{q-1})$ est un système de représentants dans A du quotient A/p. On a :

$R(A)\subset p\subset \alpha B$, donc $\frac{1}{\alpha} R(A)\subset B$ et , A étant substituable à B , $\frac{1}{\alpha} R(B)\subset B$.

Pour tout élément b de B', $R(b)$ appartient à αB donc à m Soit j tel que $b-a_j$ appartienne à m ; pour $i \neq j$, $b-a_i$ n'appartient pas à m et est donc inversible dans B. Par suite, $(R(b)) = (b-a_j) \subset \alpha B$, d'où : $B = A + \alpha B$.

En outre, pour tout élément b de m, $(R(b)) = (b) \subset \alpha B$, donc $m = \alpha B$.

5.6. Corollaire. Si l'idéal pB de B est principal et si A est substituable à B, alors $pB = m$ et A/p est isomorphe à B/m.

La proposition 5.3 et le corollaire 5.6 montrent que :

5.7. Proposition. Si pB est principal engendré par un élément de A, alors pour que A soit substituable à B il faut et il suffit que $pB = m$ et que A/p soit isomorphe à B/m.

5.8. Proposition. Si B est un anneau de valuation, pour que A soit substituable à B il faut et il suffit que l'une des deux conditions suivantes soit réalisée :

(i) $pB = m$ et A/p est isomorphe à B/m.

(ii) $pB = m$ et m n'est pas principal.

Démonstration. Notons v la valuation dont B est l'anneau.

Supposons que A soit substituable à B. L'anneau B étant un anneau de valuation, si m contient strictement pB, pour tout $\alpha \in m-pB$, on a $m \supset \alpha B \supset pB$; la proposition 5.5 implique alors $m = \alpha B$; par suite, $pB = \{b \in B \mid v(b) > v(\alpha)\}$;

l'idéal m étant principal, l'idéal pB l'est aussi ; le corollaire 5.6 implique alors $pB = m$ (ce qui devient obligatoire).

D'autre part, si m est principal, la proposition 5.5 montre que A/p est isomorphe à B/m .

Inversement, si m est principal et si la condition (i) est réalisée, l'anneau B étant de valuation, l'idéal $m = pB$ est engendré par un élément de p ; la proposition 5.3 montre qu'alors A est substituable à B .

Si la condition (ii) est réalisée, il existe une suite (x_n) d'éléments de A telle que $v(x_n)$ tende vers o et que $v(x_n)$ soit strictement positif pour tout n . Soit $P(X) = \sum_i p_i X^i$ un polynôme à coefficients dans L tel que $P(A)$ soit inclus dans B et soit j le plus petit indice i tel que $v(p_i)$ soit minimal. Pour n assez grand, on a : $v(p_j x_n^j) = v(P(x_n)) \geqslant o$; d'où $v(p_j) \geqslant -jv(x_n)$ et à la limite $v(p_j) \geqslant o$, c'est-à-dire $P(X)$ appartient à $B[X]$ et par suite $Q(B)$ est inclus dans B .

5.9. Remarques.

Si A est substituable à B , si p est de type fini et si B est un anneau de valuation, alors m est principal (car de type fini).

Si A et B sont deux anneaux de valuation vérifiant la condition 5.8.i, on dit que la valuation de L dont B est l'anneau est une extension immédiate de la valuation de K dont A est l'anneau ; dans ce cas, on a $B \cap K = A$.

5.10. Proposition. Si A est noethérien et si B est un anneau de valuation de hauteur 1, alors pour que A soit substituable à B il faut et il suffit que $B \cap K = A$ et que la valuation dont B est l'anneau soit une extension immédiate de sa restriction à K (dont A est l'anneau).

Démonstration. La condition suffisante résulte directement de la proposition 5.8 . Inversement supposons que A soit substituable à B . L'anneau B est alors un anneau de valuation discrète de hauteur 1 (remarque 5.9), pB est égal à m et A/p est isomorphe à B/m (proposition 5.8). L'anneau B étant noethérien, ceci implique que les complétés $\hat{A}$ et $\hat{B}$ de A et B pour les topologies p-adique et m-adique respectivement sont isomorphes (proposition II.5.4). L'anneau B étant un anneau de valuation discrète, $\hat{B}$ est intègre et donc $\hat{A}$ aussi. Les anneaux A et B étant des anneaux de Zariski, on a $\hat{B} \cap L = B$ et $\hat{A} \cap K = A$ (cf. [5] , III, § 3) et par suite $B \cap K = A$.

5.11. Proposition. Si l'anneau A est noethérien et substituable, alors A est un anneau de valuation discrète.

L'anneau A étant noethérien, il existe un anneau de valuation discrète du corps K dominant l'anneau local A (cf. [23] ,0, § 6). L'anneau A devant lui être substituable lui est égal d'après la proposition 5.10 .

5.12. CONCLUSION. Soit A un anneau intègre noethérien de corps des fractions K .Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) L'anneau A est substituable (à tout anneau B compris entre A et K, c'est-à-dire, pour tout polynôme $Q(X) \in K[X]$, si $Q(A)$ est inclus dans B, alors $Q(B)$ est inclus dans B).

(ii) L'anneau A est substituable à tout anneau de valuation discrète compris entre A et K .

(iii) Pour tout idéal maximal p de A, ou bien A/p est infini, ou bien A_p est un anneau de valuation (discrète).

6. CLOTURE INTEGRALE

6.1. Proposition. Soient A un anneau intègre, K le corps des fractions de A, L une extension de K et B la fermeture intégrale de A dans L. La fermeture intégrale de l'anneau $\{P(X) \in K[X] \mid P(A) \subset B\}$ dans $L(X)$ est l'anneau $\{Q(X) \in L[X] \mid Q(A) \subset B\}$.

Démonstration. Il est clair que la fermeture intégrale en question est contenue dans $L[X]$. Soit $Q(X)$ un polynôme à coefficients dans L et soit :

$$Q^n + P_{n-1}Q^{n-1} + \ldots + P_1 Q + P_o = o$$

l'équation caractéristique de $Q(X)$ sur $K[X]$.

Si Q est entier sur $\{P(X) \in K[X] \mid P(A) \subset B\}$, alors les P_i vérifient $P(A) \subset B$, et, pour tout élément a de A, $Q(a)$ est entier sur B donc appartient à B.

Inversement, supposons que $Q(A)$ soit inclus dans B. Les $P_i(X)$ sont des fonctions symétriques des conjugués de $Q(X)$ sur $K[X]$ et, pour tout élément a de A, les $P_i(a)$ sont des fonctions symétriques des conjugués de $Q(a)$ sur K donc appartiennent à B (et même à $B \cap K$).

6.2. Corollaire. Soient A un anneau intègre et intégralement clos, K le corps des fractions de A, L une extension de K et B la fermeture intégrale de A dans L. La fermeture intégrale de $A[X]_{sub}$ dans $L(X)$ est l'anneau $\{Q(X) \in L[X] \mid Q(A) \subset B\}$.

6.3. Corollaire. Avec les notations et les hypothèses du corollaire 6.2, si A est substituable à B, alors la fermeture intégrale de $A[X]_{sub}$ dans $L(X)$ est égale à $B[X]_{sub}$.

6.4. Corollaire. Avec les notations et les hypothèses du corollaire 6.2, si A est substitutiel, alors B aussi.

En effet, si A est substitutiel, $A[X]_{sub}$ est égal à $A[X]$ et la fermeture intégrale de $A[X]$ dans $L(X)$ étant $B[X]$, on a :

$$B[X] = \{Q(X) \in L[X] \mid Q(A) \subset B\} \supset \{Q(X) \in L[X] \mid Q(B) \subset B\} = B[X]_{sub} \supset B[X]$$

6.5. Corollaire. Si A est un anneau intègre et intégralement clos, alors l'anneau $A[X]_{sub}$ aussi.

Dans le corollaire 6.2, faire $L = K$.

CHAPITRE IV - ANNEAUX DE POLYNOMES A VALEURS ENTIERES : LA STRUCTURE DE MODULE

Etant donné un anneau intègre A, l'anneau $A[X]_{sub}$ des polynômes à valeurs entières sur A peut aussi être considéré comme un A-module.

Ainsi, dans le cas de l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers rationnels, il est classique que le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}[X]_{sub}$ est libre et admet pour base la famille des polynômes

$$\binom{X}{n} = \frac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{n!} \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{et avec} \quad \binom{X}{o} = 1 .$$

Nous allons voir que pour d'autres anneaux A, le A-module $A[X]_{sub}$ est libre et, lorsque ce sera le cas,nous essaierons d'en construire une base. Si l'anneau A est substitutiel, $A[X]_{sub}$ étant égal à $A[X]$ est évidemment libre ; nous ne nous intéresserons pas à ce cas. Commençons par le cas le plus simple des anneaux de valuation.

1. ANNEAUX DE VALUATION

Compte tenu de la proposition III.3.1, nous ne nous intéresserons qu'aux anneaux de valuation d'idéal maximal non principal et de corps résiduel fini (de façon que $A[X]_{sub}$ ne soit pas égal à $A[X]$).

1.1. Notations. Dans ce paragraphe A désignera l'anneau d'une valuation v discrète et de corps résiduel fini.

Soient K le corps des fractions de A, π une uniformisante de A , q le cardinal du corps résiduel $A/\pi A$ et $(a_0,a_1,\ldots,a_{q-1})$ un système de représentants dans A de ce corps résiduel.

1.2. Soit (a_r) une suite d'éléments de A prolongeant la suite $(a_0,\ldots,a_{q-1})$ telle que, quels que soient les entiers k et t, les éléments a_r , pour $kq^t \leqslant r < (k+1)q^t$, forment un système de représentants de A modulo $\pi^t A$.

1.3. Remarque. On obtient une suite (a_r) satisfaisant à la condition 1.2 de la façon suivante :

si r s'écrit $r_k\ldots r_1 r_o$ en base q , on pose :

$$a_r = a_{r_k}\pi^k + \ldots + a_{r_1}\pi + a_{r_o} .$$

1.4. Soit u la fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par :

$$u(n) = \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{n}{q^s}\right] \quad \text{où} \quad \left[\frac{n}{q^s}\right] \text{ désigne la partie entière de } \frac{n}{q^s} .$$

1.5. Etant donné une suite (a_r) satisfaisant à la condition 1.2, posons, pour tout entier n :

$$Q_n(X) = \pi^{-u(n)} \prod_{o \leq r < n} (X-a_r) \quad ; \quad \text{pour } n = o \text{ ,}$$

on convient que $Q_o(X) = 1$.

1.6. Lemme. Avec les notations et les hypothèses précédentes, pour tout entier n , le polynôme $Q_n(X)$ est à valeurs entières sur A et l'élément $Q_n(a_n)$ est inversible dans A .

Cela se vérifie en regroupant les termes du produit $\prod(X-a_r)$ qui ont même valuation.

1.7. Proposition. (POLYA). Le A-module $A[X]_{sub}$ est libre et admet pour base la famille des polynômes $Q_n(X)$ (définis en 1.5).

Le polynôme $Q_n(X)$ est de degré n et donc tout polynôme $P(X)$ de $K[X]$ peut s'écrire $P(X) = \sum_{n=o}^{degP} p_n Q_n(X)$ où p_n appartient à K . Si $P(X)$ est un polynôme à valeurs entières sur A, $P(a_o), P(a_1), \ldots, P(a_{degP})$ sont des éléments de A . On en déduit en utilisant le lemme précédent que chaque p_n appartient à A .

Ce résultat est dû en gros à POLYA [37] , la terminologie étant différente.

La démonstration précédente montre en particulier que :

1.8. Proposition. Pour qu'un polynôme $P(X)$ de $K[X]$ appartienne à $A[X]_{sub}$ il faut et il suffit que $P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_{\deg P})$ appartiennent à A (où (a_r) est une suite satisfaisant à la condition 1.2).

Nous aurons besoin par la suite d'un résultat plus général que celui de la proposition 1.7 :

1.9. Proposition. Soit (a_r) une suite d'éléments de A satisfaisant à la condition 1.2 .Pour tout entier n , soit $(b_{n,r})_{0 \leq r < n}$ une suite d'éléments de A telle que, pour tout $r \in \{0, \ldots, n-1\}$, $v(b_{n,r}-a_r) > u(n)$. Pour tout entier n , posons :

$$R_n(X) = \pi^{-u(n)} \prod_{0 \leq r < n} (X-b_{n,r}) .$$

La famille des polynômes $R_n(X)$ constitue une base du A-module $A[X]_{sub}$.

En effet, de façon analogue au lemme 1.6, on vérifie que les polynômes $R_n(X)$ sont à valeurs entières sur A .Comme en outre ils ont les mêmes coefficients directeurs que les polynômes $Q_n(X)$ ils engendrent le même A-module.

Le cas d'un anneau de valuation de hauteur supérieure à 1 relève du paragraphe un peu plus général suivant.

2. ANNEAUX LOCAUX D'IDEAL MAXIMAL PRINCIPAL

Compte tenu de l'exemple 3.2.2, nous ne nous intéresserons qu'aux anneaux locaux de corps résiduel fini.

2.1. Notations. Soit A un anneau intègre local d'idéal maximal principal et de corps résiduel fini.

Soient K le corps des fractions de A, π un générateur de l'idéal maximal de A, q le cardinal du corps résiduel $A/\pi A$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_{q-1})$ un système de représentants dans A de ce corps résiduel.

Notons v l'application de A dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ définie par

$v(x) = n$ si $x \in \pi^n A - \pi^{n+1} A$ et

$v(x) = +\infty$ si $x \in \bigcap_n \pi^n A$.

2.2. Remarque. Avec ces nouvelles notations et hypothèses, la remarque 1.3, le lemme 1.6, les propositions 1.7, 1.8 et 1.9 sont encore valables ; en particulier, le A-module $A[X]_{sub}$ est libre et l'on retrouve bien la proposition III.5.4 annoncée précédemment.

Les démonstrations correspondantes sont tout à fait analogues et utilisent le fait suivant :

Quels que soient x et y appartenant à A,

$v(x.y) = v(x) + v(y)$ où l'on prolonge de façon évidente l'addition de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

3. ANNEAUX NOETHERIENS INTEGRALEMENT CLOS

OSTROWSKI [34] a montré que, lorsque l'anneau A des entiers d'un corps de nombres est principal, le A-module $A[X]_{sub}$ des polynômes à valeurs entières sur A est libre.

Ce résultat a été étendu par CAHEN [8] à tous les anneaux de Dedekind :

3.1. Proposition. (CAHEN). Soit A un anneau de Dedekind. Le A-module $A[X]_{sub}$ est libre et peut s'écrire comme une somme directe de A-modules projectifs :

$$A[X]_{sub} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I_n P_n(X)$$ où I_n est un idéal fractionnaire de A et $P_n(X)$ un polynôme de degré n à coefficients dans A.

De notre côté nous étendrons le résultat d'OSTROWSKI aux anneaux factoriels avec la proposition 4.1 .

Lorsque l'on ôte l'hypothèse de dimension 1, il ne subsiste de la proposition 3.1 que le fait suivant :

3.2. Proposition. Soit A un anneau noethérien intégralement clos. Le A-module $A[X]_{sub}$ est fidèlement plat.

Démonstration. L'anneau A étant noethérien, pour tout idéal premier p de A, le localisé en p de $A[X]_{sub}$ est égal à $A_p[X]_{sub}$ (proposition III.1.4).

Lorsque p est de hauteur 1, A_p étant un anneau de valuation, le A_p-module $A_p[X]_{sub}$ est libre (proposition 1.7), tandis que lorsque p est de hauteur strictement supérieure à 1, l'anneau A_p est substitutiel (proposition III.2.10) et le A_p-module $A_p[X]_{sub} = A_p[X]$ est encore libre.

Toutefois lorsqu'on se restreint aux polynômes de degré inférieur ou égal à n :

3.3. Proposition. Soit A un anneau noethérien intégralement clos. Le A-module $A[X]^n_{sub}$ des polynômes à valeurs entières sur A de degré inférieur ou égal à n est projectif.

Démonstration. L'anneau A étant noethérien, pour tout idéal premier p de A, le localisé de $A[X]^n_{sub}$ en p est égal à $A_p[X]^n_{sub}$ (cf. la proposition II.3.6). L'anneau A étant de plus supposé intégralement clos, le A_p-module $A_p[X]^n_{sub}$ est libre de rang n (cf. la démonstration précédente). Pour pouvoir conclure, il nous suffit de savoir que le A-module $A[X]^n_{sub}$ est de type fini ([5] ,II,§5) ; nous allons le vérifier par récurrence sur n (cela étant évident pour n=o , $A[X]^o_{sub} = A$).

Soit I_n l'ensemble des coefficients dominants des polynômes à valeurs entières sur A de degré égal à n ; c'est un A-module et si l'on montre qu'il est de type fini, il en sera de même, par récurrence, de $A[X]^n_{sub}$. Si le cardinal du quotient A/p est strictement supérieur à n, alors I_n est contenu dans A_p (propositions III.1.5 et 1.7) ; pour les autres idéaux premiers p

(qui sont en nombre fini d'après le lemme 3.4 suivant), il existe $a_p \in A-\{o\}$ tel que $a_p.I_n$ soit inclus dans A_p ; par suite, il existe un élément non nul a de A tel que $a.I_n$ soit inclus dans A et le A-module I_n est fractionnaire, donc de type fini.

Indiquons le lemme annoncé qui a déjà été cité par CAHEN [8] pour les anneaux de Dedekind, mais qui est en fait valable pour tout anneau de Krull :

3.4. Lemme. Soit A un anneau de Krull. Pour tout entier q il n'y a qu'un nombre fini de valuations essentielles de A dont le corps résiduel a un cardinal égal à q .

Démonstration. On peut naturellement supposer que A est de cardinal infini. L'équation en X :
(*) $X^q - X = o$ n'ayant qu'un nombre fini de racines dans un anneau intègre, il existe un élément a de A tel que a^q-a ne soit pas nul. L'image canonique de a dans le corps résiduel d'une valuation essentielle v de A dont le cardinal est égal à q vérifie l'équation (*) et donc a^q-a appartient à l'idéal maximal de v . Or, ceci ne peut avoir lieu que pour un nombre fini de valuations essentielles v de A .

4. ANNEAUX FACTORIELS

4.2. Proposition. Soit A un anneau factoriel. Le A-module $A[X]_{sub}$ est libre et admet une base $(R_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ où $R_n(X)$ est un polynôme de degré n .

Démonstration.

Notons V l'ensemble des valuations essentielles de A ; pour toute valuation v appartenant à V , p_v l'idéal premier de A correspondant et q_v le cardinal du corps résiduel de v ; pour tout entier q , V_q le sous-ensemble de V formé des valuations v telles que q_v soit inférieur ou égal à q (cet ensemble est fini d'après le lemme 3.4).

Pour toute valuation v appartenant à $\bigcup_q V_q$, l'idéal p_v est maximal puisque son corps résiduel est fini et par suite A/p_v^n est isomorphe à $A_{p_v}/(p_v A_{p_v})^n$, pour tout entier n . On peut alors choisir dans A une suite d'éléments $(a_{v,r})_{r\in\mathbb{N}}$ satisfaisant à la condition 1.2 (par exemple en se servant de la remarque 1.3) relativement à l'anneau de valuation A_{p_v} .

Fixons pour l'instant un entier q . L'ensemble V_q étant fini et les idéaux p_v correspondants $(v\in V_q)$ étant maximaux, les inéquations suivantes en $(b_{q,r})_{0\leq r<n}$ admettent des solutions dans A (ZARISKI et SAMUEL, [40], III) :

$$v(b_{q,r} - a_{v,r}) > u_v(q) \quad \text{où} \quad 0\leq r<q \quad , \text{ où v décrit } V_q$$

et où $u_v(q) = \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{q}{q_v^s}\right]$.

Soit donc $(b_{q,r})$ des solutions et, pour tout v appartenant à $\bigcup_q V_q$, soit α_v un élément de A qui engendre p_v (l'anneau A est factoriel).

Montrons que les polynômes $R_n(X)$ suivants forment une base du A-module $A[X]_{sub}$:

$$R_n(X) = \Big(\prod_{v\in V_n} \alpha_v^{-u_v(n)}\Big)\Big(\prod_{o\leqslant r<n} (X-b_{n,r})\Big) .$$

Soit v appartenant à $\bigcup_q V_q$. D'après le choix des $b_{n,r}$ et la proposition 1.9, les polynômes $R_n(X)$ forment une base du A_{p_v}-module $A_{p_v}[X]_{sub}$ (on note que $\prod_{\substack{w\in V_n\\ w\neq v}} \alpha_w^{-u_w(n)}$ est inversible dans A_{p_v}).

Soit v appartenant à $V-\bigcup_q V_q$. Le quotient A/p_v étant de cardinal infini, l'anneau $A_{p_v}[X]_{sub}$ est égal à $A_{p_v}[X]$ (exemple III.2.2) et les polynômes $R_n(X)$ forment une base du A_{p_v}-module $A_{p_v}[X]_{sub}$ (on note que $R_n(X)$ est un polynôme de degré n et de coefficient directeur inversible dans A_{p_v}).

Les polynômes $R_n(X)$ étant dans $A_{p_v}[X]_{sub}$ pour tout $v\in V$ sont dans $A[X]_{sub}$ (corollaire III.1.3).

D'autre part, tout polynôme P(X) appartenant à $A[X]_{sub}$ s'écrit sous la forme $P(X) = \sum_{n=o}^{deg(P)} p_n R_n(X)$ où p_n appartient à K . Comme $A[X]_{sub}$ est inclus dans $A_{p_v}[X]_{sub}$ pour tout $v\in V$ (proposition III.1.2) et que les polynômes $R_n(X)$ forment une base du A_{p_v}-module $A_{p_v}[X]_{sub}$, chaque p_n appartient à A_{p_v} pour tout $v\in V$, donc appartient à A .

5. BONNES CONDITIONS DE LOCALISATION

Nous avons eu besoin et nous aurons besoin pour simplifier notre étude de localiser le A-module $A[X]_{sub}$ en les idéaux premiers p de A (en particulier pour déterminer les idéaux premiers de l'anneau $A[X]_{sub}$ en fonction de ceux de A au chapitre suivant). Nous allons rappeler quelques situations où la localisation marche bien et nous servir du paragraphe 2 pour en obtenir une autre.

5.1. Proposition. Soient A un anneau intègre et p un idéal de A. Le localisé en p de $A[X]_{sub}$ est égal à $A_p[X]_{sub}$ lorsque l'une des hypothèses suivantes est réalisée :

(i) L'anneau A est noethérien.

(ii) L'anneau $A_p[X]_{sub}$ est égal à l'anneau $A_p[X]$.

(iii) Le quotient A/p est de cardinal infini.

(iv) L'idéal p est principal.

Démonstration. Le cas noethérien n'est autre que la proposition III.1.4. Lorsque l'égalité (ii) est réalisée, on a la suite d'égalités et d'inclusions :

$$A_p[X] = (A[X])_p \subset (A[X]_{sub})_p \subset A_p[X]_{sub} = A_p[X]$$

grâce à la proposition III.1.2, d'où l'égalité cherchée. Lorsque l'hypothèse (iii) est réalisée, l'anneau local A_p a un corps résiduel A_p/pA_p de cardinal infini et l'exemple III.2.2 montre que l'hypothèse (ii) est alors réalisée.

Enfin, dans l'hypothèse (iv), on peut supposer en outre que le corps résiduel de p est de cardinal fini (sinon on serait dans le cas (iii)) ; ceci signifie en particulier que p est un idéal maximal et donc que A/p^n est isomorphe à à $A_p/(pA_p)^n$ pour tout entier n . Ainsi, on peut choisir des éléments a_r dans A satisfaisant à la condition 1.2 relativement à l'anneau local A_p dont l'idéal maximal pA_p est engendré par un élément de A . La remarque 2.2 et la proposition 1.7 montrent que le A_p-module $A_p[X]_{sub}$ est libre et admet une base formée par les polynômes $Q_n(X)$ construits à partir des a_r . Or par construction ces polynômes $Q_n(X)$ sont aussi des éléments de $A[X]_{sub}$, d'où l'inclusion de $A_p[X]_{sub}$ dans $(A[X]_{sub})_p$.

6. TRANSFERTS

Ce paragraphe n'a pas sa place dans ce chapitre, il pourra toutefois nous servir d'introduction au chapitre suivant.

Dans ce qui suit, A désignera un anneau intègre de corps des fractions K . Nous allons voir que lorsque l'anneau A possède certaines propriétés, l'anneau $A[X]_{sub}$ les possède aussi.

Le paragraphe III.6 nous fournit déjà le résultat suivant qui se vérifie d'ailleurs de façon directe :

6.1. Proposition. Si l'anneau A est intégralement clos, alors l'anneau $A[X]_{sub}$ aussi.

On a un résultat plus précis et pour cela introduisons une notation qui simplifiera certains énoncés :

6.2. Notations. Etant donné une valuation v sur un corps K de groupe des valeurs G , notons $\hat{K}$ le complété de K pour la valuation v , $\hat{v}$ le prolongement de v à $\hat{K}$ et, pour tout élément x de $\hat{K}$, notons v_x la valuation du corps K(X) , à valeurs dans le produit lexicographique $\mathbb{Z} \times G$, qui, pour tout élément P(X) de $K[X] - \{o\}$, a pour valeur :

$$v_x(P(X)) = (r_x , \hat{v}(P_1(x))) \quad \text{où}$$

$$P(X) = (X-x)^{r_x}.P_1(X) \quad , \quad P_1(X) \in \hat{K}[X] \quad \text{et} \quad P_1(x) \neq o \ .$$

6.3. Proposition. Soient K un corps, V une famille de valuations v de K et A l'intersection des anneaux des valuations $v \in V$. Notons V' la famille des valuations v_a de $K(X)$ où v décrit V et a décrit A et W la famille des valuations $P(X)$-adiques de $K(X)$ où $P(X)$ est un polynôme irréductible de $K[X]$. Alors l'anneau $A[X]_{sub}$ est égal à l'intersection des anneaux des valuations de $V' \cup W$.

Cette proposition est immédiate compte tenu de ce que l'intersection des anneaux des valuations de W est l'anneau $K[X]$.

Dans [33] OHM note les implications suivantes :

(a) A est un anneau de Krull.

$\Longrightarrow$ (b) A est intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1.

$\Longrightarrow$ (c) A est complètement intégralement clos.

$\Longrightarrow$ (d) $A[[T]]$ est intégralement clos.

$\Longrightarrow$ (e) A est intégralement clos et, pour tout élément non inversible a de A, $\bigcap_{n=o}^{\infty} a^n A = o$

$\Longrightarrow$ (f) A est intégralement clos.

Nous venons de voir qu'il y a transfert de la propriété (f) de A à $A[X]_{sub}$, nous allons voir ce qu'il en est des autres propriétés :

6.4. Proposition. Si l'anneau A possède la propriété (e) ci-dessus, alors l'anneau $A[X]_{sub}$ aussi.

Soit $P(X)$ un élément non inversible de $A[X]_{sub}$. Si $P(X)$ n'appartient pas à A, alors des considérations de degré montrent que $\bigcap_{n=o}^{\infty} P^n(X).A[X]_{sub} = o$, tandis que, si $P(X)$ appartient à A, c'est l'hypothèse sur A qui implique $\bigcap_{n=o}^{\infty} P^n(X).A[X]_{sub} = o$.

6.5. Proposition. Si l'anneau $A[[T]]$ est intégralement clos, alors l'anneau $A[X]_{sub}[[T]]$ aussi.

Démonstration. L'anneau $K[X][[T]]$ étant intégralement clos, il suffit de considérer un élément $Q(X,T)$ de $K[X][[T]]$ vérifiant une relation de dépendance intégrale de la forme :

$$Q_n(X,T) + P_{n-1}(X,T)Q^{n-1}(X,T) + \ldots + P_1(X,T)Q(X,T) + P_o(X,T) = o$$

où $P_i(X,T)$ appartient à $A[X]_{sub}[[T]]$ et de montrer que $Q(X,T)$ appartient à $A[X]_{sub}[[T]]$.

Pour tout élément a de A, $Q(a,T)$ appartient à $K[[T]]$ et $P(a,T)$ à $A[[T]]$; ainsi, ou bien $Q(a,T) = o$ ou bien $Q(a,T)$ vérifie une relation de dépendance intégrale à coefficients dans $A[[T]]$ et donc appartient à $A[[T]]$. Par suite, $Q(X,T)$ appartient bien à $A[X]_{sub}[[T]]$.

6.6. Proposition. Si l'anneau A est complètement intégralement clos, alors l'anneau $A[X]_{sub}$ aussi.

Démonstration. (cf. chapitre VI) - Soient $P(X)$ un élément de $K(X)$ et $Q(X)$ un élément de $A[X]_{sub} - \{o\}$ tels que, pour tout entier n, $Q.P^n$ appartienne à $A[X]_{sub}$. Comme $K[X]$ est complètement intégralement clos, $P(X)$ appartient à $K[X]$.

Pour tout élément a de A , $Q(a)P^n(a)$ appartient à A et donc, pour tout élément a de A tel que Q(a) ne soit pas nul, P(a) appartient à A . Le polynôme Q n'ayant qu'un nombre fini de racines, P appartient à $A[X]_{sub}$ en vertu de la remarque III.1.6 (le cas où A est de cardinal fini, étant immédiat car alors $A = K$ et $A[X]_{sub} = K[X]$).

6.7. Remarques.

(i) Les propositions 6.1, 6.4, 6.5 et 6.6 sont encore valables lorsqu'on remplace l'anneau $A[X]_{sub}$ par l'anneau $\{P(X) \in K[X] \mid P(A_o) \subset A\}$ où A_o est un sous-anneau infini de A .

(ii) Ces mêmes propositions sont encore valables lorsqu'on remplace l'anneau $A[X]_{sub}$ par l'anneau $A[(X_i)_{i \in I}]_{sub}$ où I est un ensemble quelconque (cf. notations III.1.1).

La vérification de ces assertions est immédiate sauf peut-être en ce qui concerne le transfert de la propriété d'être complètement intégralement clos de A à $A[(X_i)_{i \in I}]_{sub}$ qui nécessite le lemme suivant :

6.8. Lemme. Soient P et Q des éléments non nuls de $K[X_1,\ldots,X_n]$ (où n est un entier quelconque). Si $P(\underline{a})$ appartient à A pour tout élément $\underline{a}$ de A^n tel que $Q(\underline{a}) \neq o$, alors $P(\underline{a})$ appartient à A pour tout élément $\underline{a}$ de A^n c'est-à-dire P appartient à $A[X_1,\ldots,X_n]_{sub}$.

Démonstration. On peut supposer que le cardinal de A est infini, sinon $A = K$ et $A[X_1,\ldots,X_n]_{sub} = K[X_1,\ldots,X_n]$ et on raisonne par récurrence sur n. Le lemme est évident pour $n=o$ et déjà montré pour $n=1$ (remarque III.1.6), supposons le montré jusqu'au rang $n-1$.

Les éléments a de A tels que $Q(X_1,X_2,\ldots,X_{n-1},a) = o$ sont en nombre fini ; fixons pour l'instant $a \in A$ tel que $Q(X_1,\ldots,X_{n-1},a) \neq o$ et posons $P_a(X_1,\ldots,X_{n-1}) = P(X_1,\ldots,X_{n-1},a)$ et de même $Q_a(X_1,\ldots,X_{n-1}) = Q(X_1,\ldots,X_{n-1},a)$. Pour tout élément $\underline{b}$ de A^{n-1} tel que $Q_a(\underline{b}) \neq o$, on a par hypothèse $P_a(\underline{b})$ appartient à A et donc, par hypothèse de récurrence, pour tout élément $\underline{b}$ de A^{n-1}, $P_a(\underline{b})$ appartient à A. Fixons maintenant un élément quelconque $\underline{b}$ de A^{n-1} :

On vient de voir que pour tout élément a de A tel que le polynôme Q_a ne soit pas nul, le polynôme $P(\underline{b},X_n)$ a pour valeur en a $P(\underline{b},a) = P_a(\underline{b})$ qui appartient à A ; l'hypothèse de récurrence au rang 1 montre que, pour tout élément a de A, $P(\underline{b},a)$ appartient à A.

Enfin, pour l'étude du transfert despropriétés (a) et (b), nous allons nous restreindre au cas où A est un anneau de valuation de hauteur 1. Or nous savons que :

- Si A est un anneau de valuation de hauteur 1 non discrète ou de corps résiduel infini, alors $A[X]_{sub}$ est égal à $A[X]$ (exemple III.3.1).

- Si A est intersection d'anneaux de valuation (discrète) de hauteur 1, alors $A[X]$ aussi (ZARISKI-SAMUEL, [40], IV) et si A est un anneau de Krull, alors $A[X]$ aussi (même référence).

Il s'agit donc d'étudier $A[X]_{sub}$ lorsque A est un anneau de valuation discrète de hauteur 1 et de corps résiduel fini. C'est ce que nous allons faire au chapitre suivant et, pour déterminer les anneaux de valuation contenant $A[X]_{sub}$, nous allons d'abord déterminer les idéaux premiers de $A[X]_{sub}$.

CHAPITRE V - ANNEAUX DE POLYNOMES A VALEURS ENTIERES : LES IDEAUX PREMIERS

Dans tout ce chapitre A désignera un anneau intègre (de cardinal infini) de corps des fractions K .

Nous allons déterminer les idéaux premiers de l'anneau $A[X]_{sub}$ des polynômes à valeurs entières sur A en fonction des idéaux premiers de l'anneau A . C'est le cas simple des anneaux de valuation que nous pourrons traiter en détail et qui nous fournira les résultats les plus intéressants.

1. GENERALITES

Il y a tout d'abord le cas simple des anneaux A substitutiels c'est-à-dire tels que $A[X]_{sub}$ soit égal à $A[X]$. A ce propos rappelons que :

1.1. Les idéaux premiers de $A[X]$ au-dessus d'un idéal maximal m de A sont l'idéal $mA[X]$ et les idéaux de la forme $(m,Q(X))A[X]$ où $Q(X)$ est un polynôme unitaire non constant de $A[X]$ dont l'image canonique dans $(A/m)[X]$ est irréductible.

1.2. Avec les notations précédentes, si x désigne une racine de $Q(X)$ dans une extension de K, on vérifie que :

$$(m,Q(X))A[X] = \{P(X)\in A[X] \mid P(x)\in m[x]\} .$$

En particulier, pour un élément a de A :

$$(m,X-a)A[X] = \{P(X)\in A[X] \mid P(a)\in m\} = \{P(X)\in A[X] \mid P(a+m)\subset m\} .$$

Quant à l'idéal $mA[X]$, on peut écrire par analogie :

$$mA[X] = \{P(X)\in A[X] \mid P(X)\in m[X]\} \text{ ; mais non}$$
$$\{P(X)\in A[X] \mid P(A)\subset m\}$$

car cet idéal contient strictement $mA[X]$ lorsque le quotient A/m est fini.

1.3. Remarque. Etant donné un idéal premier p de A et un élément a de A, notons p_a l'idéal de $A[X]_{sub}$ formé des polynômes $P(X)$ de $A[X]_{sub}$ tels que $P(a)$ appartienne à p. L'idéal p_a est premier et le quotient $A[X]_{sub}/p_a$ est isomorphe à A/p.

En effet, pour tout $Q(X)$ appartenant à $A[X]_{sub}$, on a $Q(X) = (Q(X)-Q(a)) + Q(a)$, d'où $A[X]_{sub} = p_a + A$; or $p_a \cap A = p$, d'où l'isomorphisme.

Notons tout de suite que les idéaux premiers de $A[X]_{sub}$ ne sont pas tous de cette forme et que, a et b étant deux éléments distincts de A, les idéaux p_a et p_b peuvent être égaux.

1.4. Proposition. La dimension de l'anneau $A[X]_{sub}$ est supérieure ou égale à la dimension de A augmentée de 1.

En effet, si $o=p_o \subset p_1 \subset \ldots \subset p_i \subset \ldots \subset p_n$ est une chaîne strictement croissante d'idéaux premiers de A,

$$o \subset (p_o)_a \subset (p_1)_a \subset \ldots \subset (p_i)_a \subset \ldots \subset (p_n)_a$$

(avec la notation de la remarque 1.3) est une chaîne strictement croissante d'idéaux premiers de $A[X]_{sub}$:

$(p_i)_a \neq (p_{i+1})_a$ car $(p_i)_a \cap A = p_i \neq p_{i+1} = (p_{i+1})_a \cap A$

$(p_o)_a \neq (o)$ car $X-a \in (p_o)_a$; on a donc bien :

$\dim(A[X]_{sub}) \geqslant 1 + \dim(A)$.

Dans les bonnes conditions de localisation (cf. IV, § 5), pour connaître les idéaux premiers de $A[X]_{sub}$ au-dessus d'un idéal premier p de A, on se ramènera au cas local et il s'agira de déterminer les idéaux premiers de $A_p[X]_{sub}$ au-dessus de l'idéal maximal pA_p de A_p. Ainsi :

1.5. Proposition. Soit p un idéal premier de A. Si l'anneau $A_p[X]_{sub}$ est égal à $A_p[X]$, en particulier si le corps résiduel de p est infini, les idéaux premiers de $A[X]_{sub}$ au-dessus de p sont les intersections avec $A[X]_{sub}$ des idéaux premiers de $A_p[X]$ au-dessus de pA_p (donnés par 1.1).

On trouve en particulier l'idéal premier $pA_p[X] \cap A[X]_{sub}$ qui est le radical de l'idéal $pA[X]_{sub}$ de $A[X]_{sub}$.

La connaissance des idéaux premiers de $A[X]_{sub}$ au-dessus de p résulte de la bijection classique avec ceux de son localisé en p au-dessus de pA_p ; or ce localisé est égal à $A_p[X]$ en vertu de la proposition IV.5.1 .

Comme les idéaux premiers de $A_p[X]$ au-dessus de pA_p contiennent tous l'idéal premier $pA_p[X]$, le radical de l'idéal $pA[X]_{sub}$ de $A[X]_{sub}$ est bien égal à $pA_p[X] \cap A[X]_{sub}$.

1.6. Complément. Dans le cas où p est un idéal premier de A de corps résiduel infini, l'idéal premier $pA_p[X] \cap A[X]_{sub}$ de $A[X]_{sub}$ est aussi égal à l'idéal $\{P(X) \in K[X] \mid P(A) \subset p\}$.

Il est clair que $pA_p[X] \cap A[X]_{sub}$ est inclus dans l'ensemble des $P(X) \in K[X]$ tels que $P(A) \subset pA_p \cap A = p$; réciproquement, si $P(X) \in K[X]$ et vérifie $P(A) \subset p$, alors $P(X)$ appartient à $A[X]_{sub}$ et, d'après le théorème II.1.1, $P(X)$ appartient aussi à $pA_p[X]$.

De ce qui précède résulte en particulier :

1.7. Les idéaux premiers de $A[X]_{sub}$ au-dessus de l'idéal premier (o) de A sont l'idéal (o) et les idéaux de la forme :

$\{P(X) \in A[X]_{sub} \mid P(X) = Q(X).R(X) \text{ où } R(X) \in K[X]\}$ où $Q(X)$ est un polynôme non constant et irréductible de $K[X]$. Notons que ces derniers idéaux premiers sont tous de hauteur 1 et que les localisés correspondants sont les anneaux de valuation Q-adique de $K(X)$.

On pourrait espérer réduire le problème en diminuant la dimension de A, or on a seulement :

1.8. Lorsque p est un idéal premier de A de corps résiduel infini, le quotient $A[X]_{sub}/pA_p[X] \cap A[X]_{sub}$ s'injecte dans l'anneau $(A/p)[X]_{sub}$, mais il n'y a pas isomorphisme en général.

En effet, $A[X]_{sub}/pA_p[X] \cap A[X]_{sub}$ qui est isomorphe au quotient $\{P(X) \in A_p[X] \mid P(A) \subset A\} / \{P(X) \in pA_p[X] \mid P(A) \subset A\}$ est contenu dans $\{P(X) \in (A_p/pA_p)[X] \mid P(A) \subset A/pA_p \cap A = A/p\}$ c'est-à-dire $(A/p)[X]_{sub}$ puisque A_p/pA_p est le corps des fractions de A/p.

D'autre part, si l'on pose $A = k[Y,Z]$ où k est un corps fini et $p = (Z)$, l'anneau A est substitutiel (exemple III.3.3) et donc $A[X]_{sub}/pA_p[X] \cap A[X]_{sub}$ est isomorphe à $(A/p)[X] = k[Y][X]$, tandis que l'anneau $A/p = k[Y]$ n'est pas substitutiel et $(A/p)[X]_{sub}$ contient strictement $k[Y][X]$.

Toutefois, la condition A/p est de cardinal fini impose à p d'être maximal et le seul problème est de déterminer les idéaux premiers de $A[X]_{sub}$ au-dessus des idéaux maximaux de A de corps résiduel fini. Dans de bonnes conditions de localisation on pourra même supposer A local et l'exemple le plus simple où A est un anneau local non substitutiel est celui où A est un anneau de valuation discrète de corps résiduel fini.

2. ANNEAUX DE VALUATION DISCRETE : LES IDEAUX PREMIERS

Reprenons toutes les hypothèses et notations du paragraphe IV.1 : l'anneau A est celui d'une valuation v discrète et de corps résiduel fini.

Soient $\hat{K}$ le complété de K pour la valuation v, $\hat{v}$ le prolongement de v à $\hat{K}$ et $\hat{A}$ l'anneau de la valuation $\hat{v}$.

2.1. Théorème. Les idéaux premiers non nuls de $A[X]_{sub}$ sont de l'une des deux formes suivantes :

(i) $\mathfrak{P}_Q = \{P(X) \in A[X]_{sub} \mid P = Q.R \quad \text{où} \quad R \in K[X]\}$

où Q est un polynôme non constant, irréductible et primitif de $A[X]$ (déterminé à un élément de A^* près).

(ii) $m_x = \{P(X) \in A[X]_{sub} \mid \hat{v}(P(x)) > o\}$ où x est un élément quelconque de $\hat{A}$ (uniquement déterminé).

Les idéaux premiers de la forme (i) sont les idéaux premiers non nuls de $A[X]_{sub}$ au-dessus de l'idéal (o) de A (cf. 1.7).

Pour déterminer les idéaux premiers de $A[X]_{sub}$ au-dessus de l'idéal maximal πA de A nous aurons besoin du lemme suivant :

2.2. Lemme. Soit t un entier positif et soit $(b_r)_{o \leq r < q^t}$ un système de représentants de A module $\pi^t A$. Posons :

$R_{q^t}(X) = \pi^{-u(q^t)} \prod_{o \leq r < q^t} (X-b_r)$. Pour tout élément x de $\hat{A}$, on a : $\hat{v}(R_{q^t}(x)) = -t + \sup_{o \leq r < q^t} \hat{v}(x-b_r)$.

En effet, soit s l'unique indice tel que $x-b_s$ appartienne à $\pi^t A$; alors s est l'unique indice tel que $\hat{v}(x-b_s) = \sup_r \hat{v}(x-b_r)$. Pour $r \neq s$, on a $\hat{v}(x-b_r) = v(b_s-b_r)$; or, $\sum_{r \neq s} v(b_s-b_r) = u(q^t)-t$ par un calcul simple où l'on regroupe les $v(b_s-b_r)$ ayant une valeur donnée.

Démonstration du théorème. Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de $A[X]_{sub}$ au-dessus de l'idéal maximal πA de A . Soit t un entier. Considérons l'égalité :

$$\pi Q_{q^{t+1}}(X) = \prod_{o \leq k < q} \pi^{-u(q^t)} \prod_{kq^t \leq r < (k+1)q^t} (X-a_r) .$$

Comme $Q_{q^{t+1}}(X)$ appartient à $A[X]_{sub}$, $\pi Q_{q^{t+1}}(X)$ appartient à $\pi A[X]_{sub}$ donc à $\mathfrak{P}$ et il existe un entier $k_t \in \{o,\ldots,q-1\}$ tel que le polynôme

$$R_{q^t}(X) = \pi^{-u(q^t)} \prod_{k_t q^t \leq r < (k_t+1)q^t} (X-a_r)$$

appartienne à $\mathfrak{P}$. On recommence en décomposant $R_{q^t}(X)$ en q facteurs, et on obtient un entier $k_{t-1} \in \{o,\ldots,q-1\}$ tel que

$$R_{q^{t-1}}(X) = \pi^{-u(q^{t-1})} \prod_{k_t q^t + k_{t-1} q^{t-1} \leq r < k_t q^t + (k_{t-1}+1)q^{t-1}} (X-a_r)$$

appartienne à $\mathfrak{P}$. Ainsi de suite jusqu'à $R_1(X)$, que l'on notera $X-b_t$.

La proposition IV.1.7 montre alors qu'on peut définir des polynômes $R_n(X)$ pour $o \leqslant n < q^t$ et $n \neq q^s$ de façon que les polynômes $(R_n(X))_{o \leqslant n \leqslant q^t}$ forment une base du A-module des polynômes de $A[X]_{sub}$ de degré inférieur ou égal à q^t et que, pour $q^s \leqslant n < q^{s+1}$, $R_n(X)$ soit divisible par $R_{q^s}(X)$ dans $A[X]_{sub}$

Soit $P(X)$ un polynôme quelconque de $A[X]_{sub}$ de degré inférieur ou égal à q^t. On a :

$$P(X) = P(b_t) + \sum_{n=1}^{q^t} p_n R_n(X) \quad \text{où} \quad p_n \in A .$$

Du fait que, pour $n \geqslant 1$, $R_n(X)$ appartient à $\mathfrak{P}$ et que $\mathfrak{P} \cap A = \pi A$, on déduit : (*) Pour que $P(X)$ appartienne à $\mathfrak{P}$, il faut et il suffit que $P(b_t)$ appartienne à πA.

Soit t' un entier supérieur à t. On obtient par la méthode précédente, un polynôme de degré 1 appartenant à $\mathfrak{P}$ que l'on notera $X-b_{t'}$. Soit s un entier inférieur ou égal à t tel que $v(b_{t'}-b_t) \geqslant s$ (o par exemple). Puisque $R_{q^s}(X)$ appartient à $\mathfrak{P}$, $R_{q^s}(b_{t'})$ appartient à πA et, comme les a_r intervenant dans $R_{q^s}(X)$ forment un système de représentants de A modulo $\pi^s A$, le lemme 2.2 montre que $\sup_r v(b_{t'}-a_r) \geqslant s+1$. Or, b_t est l'un de ces a_r, donc $v(b_{t'}-b_t) \geqslant s+1$. D'où, finalement, $v(b_{t'}-b_t) \geqslant t+1$ et, ainsi, la suite des b_t, pour $t \in \mathbb{N}$, définit un élément x de $\hat{A}$.

Etant donné $P(X)$ appartenant à $A[X]_{sub}$, pour t assez grand, $P(X)$ appartient à $\mathfrak{P}$ est équivalent à $v(P(b_t)) > o$, et $v(P(b_t)) > o$ est équivalent à $\hat{v}(P(x)) > o$. Donc $\mathfrak{P}$ est égal à m_x.

Soient x et x' deux éléments distincts de $\hat{A}$. Posons $\hat{v}(x-x') = t$. Choisissons a_o de façon que $\hat{v}(a_o-x) > t$. Le lemme 2.2 montre que $\hat{v}(Q_{q^t}(x)) > o$ tandis que $\hat{v}(Q_{q^t}(x')) = o$. Donc m_x est distinct de $m_{x'}$.

2.3. Compléments au théorème 2.1 :

(a) Pour que $\mathfrak{P}_Q$ soit inclus dans m_x il faut et il suffit que $Q(x) = o$.

(b) Pour tout élément x de $\hat{A}$, l'idéal m_x est maximal et son corps résiduel est isomorphe à celui de v.

(c) Si Q n'a pas de racines dans $\hat{A}$, l'idéal $\mathfrak{P}_Q$ est maximal et son corps résiduel est isomorphe à $K[X]/(Q)$.

(d) Si Q a une racine dans $\hat{A}$, le quotient $A[X]_{sub}/\mathfrak{P}_Q$ est un anneau semi-local contenant la fermeture intégrale de A dans $K[X]/(Q)$.

Démonstration. Il est clair que l'idéal $\mathfrak{P}_Q$ est inclus dans l'idéal m_x lorsque $Q(x) = o$. Inversement, si $Q(x)$ n'est pas nul, construisons un polynôme de $\mathfrak{P}_Q$ qui n'appartient pas à m_x. Posons $\hat{v}(Q(x)) = t$; choisissons a_o de façon que $\hat{v}(a_o-x) > t$, alors $v(Q(a_o)) = t$ ($Q(X)$ appartient à $A[X]$). Posons $R(X) = Q_{q^t}(X)/(X-a_o)$ et montrons que le polynôme $R(X)Q(X)$ répond à la question. Soit a un élément de $\hat{A}$. Si $\hat{v}(a-a_o) \leq t$, alors $\hat{v}(a-a_o) \leq \hat{v}(Q(a))$ et donc $R(a)Q(a)$ appartient à $\hat{A}$. Si $\hat{v}(a-a_o) > t$, alors, d'après le lemme 2.2 , $\hat{v}(R(a)) = -t$, et donc $\hat{v}(R(a)Q(a)) = o$. En particulier, $R(X)Q(X)$ appartient à $A[X]_{sub}$ donc à $\mathfrak{P}_Q$, tandis que $\hat{v}(R(x)Q(x)) = o$.

Montrons que le quotient $A[X]_{sub}/m_x$ est isomorphe à $A/\pi A$. Soient $P(X)$ appartenant à $A[X]_{sub}$ et $t\in\mathbb{N}$ tel que $\deg P < q^t$. On a vu (*) qu'il existe un élément b_t de A tel que $P(X)-P(b_t)$ appartienne à m_x , par suite $P(X) = (P(X)-P(b_t))+P(b_t)$ montre que $A[X]_{sub} = m_x + A$ et comme $m_x \cap A = \pi A$, on a bien l'isomorphisme.

Quant aux idéaux premiers $\mathfrak{P}_Q$, on a :

$$Q.K[X] \cap A[X]_{sub} = \mathfrak{P}_Q \quad \text{et} \quad \mathfrak{P}_Q \cap A[X] = Q.A[X] .$$

Donc les homomorphismes canoniques suivants sont des injections : $A[X]/(Q) \longrightarrow A[X]_{sub}/\mathfrak{P}_Q \longrightarrow K[X]/(Q)$ .Si $Q(X)$ n'a pas de racines dans $\hat{A}$, $\mathfrak{P}_Q$ est maximal car il n'est contenu dans aucun m_x ; comme $K[X]/(Q)$ est le corps des fractions de $A[X]/(Q)$, on a l'isomorphisme $A[X]_{sub}/\mathfrak{P}_Q \simeq K[X]/(Q)$. D'où l'assertion (c) . Enfin, pour prouver l'assertion (d) nous utiliserons le théorème 3.2 suivant.

2.4. Remarque. Pour que l'idéal $\mathfrak{P}_Q$ soit monogène engendré par Q il faut et il suffit que l'image de Q dans $(A/\pi A)[X]$ n'ait pas de racines dans $A/\pi A$ c'est-à-dire que, pour tout $a\in A$, $Q(a)$ soit inversible dans A .

En effet, supposons cette dernière condition réalisée : soit $P = Q.R$ un élément de $\mathfrak{P}_Q$ où $R\in K[X]$; $P(a)\in A$ et $Q(a)\in A^*$ impliquent $R(a)\in A$ et donc $R\in A[X]_{sub}$. Inversement, supposons qu'il existe $a\in A$ tel que $v(Q(a))>o$; soient

$a_1,\ldots,a_{q-1}$ des éléments de A tels que $(a,a_1,\ldots,a_{q-1})$ forment un système de représentants de A modulo πA ; le polynôme $P = Q.R$ où $R = \frac{1}{\pi}(X-a_1)\ldots(X-a_{q-1})$ appartient à $\mathcal{P}_Q$, alors que R n'appartient pas à $A[X]_{sub}$.

2.5. Remarque. Relation entre les idéaux premiers de $A[X]$ et ceux de $A[X]_{sub}$:

- l'idéal (Q) de $A[X]$, où Q est un polynôme non constant, irréductible et primitif de $A[X]$, est dominé par $\mathcal{P}_Q$ seulement ;

- l'idéal (π) de $A[X]$ est perdu dans $A[X]_{sub}$;

- l'idéal (π,F) de $A[X]$, où l'image $\overline{F}$ de F dans $(A/\pi A)[X]$ est irréductible, est :

perdu dans $A[X]_{sub}$ si $\deg F > 1$,

dominé par les m_x où $x \equiv a \bmod \pi\hat{A}$ si $F \equiv X-a \bmod \pi A$ où $a \in A$.

3. ANNEAUX DE VALUATION DISCRETE : LES LOCALISES

Nous voulons préciser ici la forme des localisés de $A[X]_{sub}$ en les idéaux premiers P_Q et m_x du théorème 2.1. Pour cela plutôt que de raisonner directement sur l'anneau, il nous semble finalement plus simple de déterminer d'abord les anneaux de valuation de $K(X)$ contenant $A[X]_{sub}$ et d'utiliser le fait que $A[X]_{sub}$ et donc ses localisés sont intégralement clos. Les hypothèses et notations sont celles du paragraphe précédent.

3.1. Théorème. Les valuations de $K(X)$ dont l'anneau contient $A[X]_{sub}$ sont de l'un des deux types suivants :

(i) La valuation Q-adique de $K(X)$ où Q est un polynôme non constant et irréductible de $K[X]$.

(ii) La valuation v_x de $K(X)$ à valeurs dans le produit lexicographique $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ où x est un élément (quelconque) de $\hat{A}$ (La valuation v_x a déjà été définie à partir de la valuation v en IV.6.2).

Démonstration. Soit w une valuation de $K(X)$ dont l'anneau contient $A[X]_{sub}$. En particulier, l'anneau de w contient A , donc ou bien il contient K (et $K[X]$) et alors w est de la forme (i) , ou bien w prolonge v .

Supposons donc que w prolonge v. Supposons aussi, pour l'instant, que A soit complet. L'idéal premier de la valuation w a pour intersection avec $A[X]_{sub}$ un idéal premier contenant πA, donc de la forme m_x où $x \in A$ (théorème 2.1). Pour tout $P(X)$ appartenant à $A[X]_{sub}$, on a donc :

$$w(P(X)) > o \quad \text{équivaut à} \quad v(P(x)) > o .$$

Soit t un entier. Considérons les polynômes $R_n(X)$ formés avec la suite $b_r = a_r + x - a_{q^t-1}$. On a alors :

$$R_{q^t}(X) = \pi^{-u(q^t)} \prod_{o \leq r < q^t} (X-b_r) = R_{q^t-1}(X).\ \pi^{-t}.(X-x) .$$

On a $R_{q^t}(x) = o$, donc $w(R_{q^t}(X)) > o$, et $v(R_{q^t-1}(x)) = o$, donc $w(R_{q^t-1}(X)) = o$ d'où $w(X-x) > tw(\pi)$ pour tout entier t et la valuation w est de hauteur au moins 2. Or, d'après BOURBAKI ([5], VI), la hauteur de la valuation w ne peut être que 1 ou 2 et, si elle est égale à 2, alors le groupe des valeurs de w est isomorphe au produit lexicographique $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. En effet, plus précisément :

Soit $P(X) \in A[X]$ tel que $P(x) \neq o$. On a :

$P(X) = P(x) + (X-x)R(X)$ où $R(X) \in A[X]$, et comme

$w((X-x)R(X)) \geq w(X-x) > v(P(x)).w(\pi) = w(P(x))$,

$w(P(X))$ est égal à $v(P(x))w(\pi)$.

Soit $R(X) \in K(X)$, on peut écrire $R(X) = (X-x)^{r_x}(P_1(X)/P_2(X)$ où $P_1(X)$ et $P_2(X)$ appartiennent à $A[X]$ et $P_1(x)$ et $P_2(x)$ ne sont pas nuls, d'où :

$$w(R(X)) = r_x w(X-x) + (v(P_1(x))-v(P_2(x)))w(\pi)$$

et par suite :

$$w(K(X)-\{o\}) = w(X-x)\,\mathbb{Z} + w(\pi)\,\mathbb{Z} .$$

On doit donc avoir $w(\pi) = (o,1)$ et $w(X-x) = (1,o)$ et w est bien de la forme v_x .

Revenons au cas général, soit w une valuation de $K(X)$ prolongeant v et dont l'anneau contient $A[X]_{sub}$. Soit $\hat{w}$ un prolongement de w à $\hat{K}(X)$, la restriction de $\hat{w}$ à $\hat{K}$ prolonge v , c'est donc $\hat{v}$.

Soit $P(X) = \sum_{i=o}^{s} p_i X^i$ un élément de $\hat{A}[X]_{sub}$ et soit $Q(X) = \sum_{i=o}^{s} q_i X^i$ un élément de $K[X]$ tel que $\hat{v}(p_i-q_i) \geqslant o$ pour tout i . Comme P appartient à $\hat{A}[X]_{sub}$, Q appartient à $A[X]_{sub}$ et donc $w(Q) \geqslant o$, d'où $\hat{w}(P) \geqslant o$ .Ainsi, $\hat{w}$ est une valuation de $\hat{K}(X)$ prolongeant $\hat{v}$ et dont l'anneau contient $\hat{A}[X]_{sub}$. D'après ce qui précède, $\hat{w}$ correspond à un élément x de $\hat{A}$ et sa restriction w à $K(X)$ est bien de la forme v_x et le théorème est démontré.

3.2. Corollaire. Le localisé de l'anneau $A[X]_{sub}$ en l'idéal premier P_Q est l'anneau de la valuation Q-adique et le localisé de $A[X]_{sub}$ en l'idéal premier m_x est l'anneau de la valuation v_x .

En effet, l'anneau $A[X]_{sub}$ étant intégralement clos (proposition IV.6.1), le localisé de $A[X]_{sub}$ en un idéal premier $\mathfrak{P}$ est égal à l'intersection des anneaux de valuation de $K(X)$ contenant $A[X]_{sub}$ et au-dessus de $\mathfrak{P}$. Le théorème 3.1 permet de conclure.

3.3. Corollaire. L'anneau $A[X]_{sub}$ est de Prüfer (ses localisés en les idéaux maximaux sont des anneaux de valuation). L'anneau $A[X]_{sub}$ est cohérent.

En effet, $A[X]_{sub}$ étant un anneau de Prüfer, pour qu'un $A[X]_{sub}$-module soit plat il faut et il suffit qu'il soit sans torsion, par suite tout produit de $A[X]_{sub}$-modules plats est un $A[X]_{sub}$-module plat.

3.4. Remarque. La valuation v_x du théorème 3.1 est de hauteur 1 si et seulement si l'élément x est transcendant sur K.

3.5. Remarque. L'anneau $A[X]_{sub}$ n'est ni un anneau noethérien, ni un anneau de Krull.

Sinon il en serait de même de ses localisés, or les localisés de $A[X]_{sub}$ en les idéaux premiers m_x où x appartient à A sont des anneaux de valuation de hauteur 2.

3.6. Corollaire. Pour que l'anneau $A[X]_{sub}$ soit intersection d'anneaux de valuation (discrète) de hauteur 1 il faut et il suffit que $\hat{K}$ soit une extension transcendante de K (ce qui est le cas lorsque K est un corps de nombres).

Démonstration. Si $\hat{K}$ n'est pas une extension transcendante de K, les seules valuations de hauteur 1 de $K(X)$ dont l'anneau contient $A[X]_{sub}$ sont les valuations Q-adiques ; or, l'intersection des anneaux des valuations Q-adiques est l'anneau $K[X]$ qui contient strictement $A[X]_{sub}$.

Inversement, si l'ensemble $\mathcal{X}$ des éléments de $\hat{A}$ transcendants sur K n'est pas vide, alors il est à la fois dense dans $\hat{A}$ et adhérent à A (pour la topologie induite par $\hat{v}$) ; d'où, étant donné $P(X) \in K[X]$, pour tout $a \in A$, il existe $x \in \mathcal{X}$ (et, inversement, pour tout $x \in \mathcal{X}$, il existe $a \in A$) tel que $\hat{v}(P(x)-P(a)) \geqslant o$, donc tel que $(v_x(P) \geqslant o)$ soit équivalent à $(P(a) \in A)$. On en déduit :

$$A[X]_{sub} = \left(\bigcap_{x \in \mathcal{X}} V_x\right) \cap K[X]$$ où l'on note V_x l'anneau de la valuation v_x.

Montrons maintenant l'assertion (d) du théorème 2.1. Soit Q un polynôme irréductible de $A[X]$ admettant des racines x_i $(i=1,\ldots,s)$ dans $\hat{A}$. On a des isomorphismes canoniques :

$$(A[X]_{sub}/\mathfrak{P}_Q)_{(m_{x_i}/\mathfrak{P}_Q)} \simeq (A[X]_{sub})_{m_{x_i}}/(\mathfrak{P}_Q)_{m_{x_i}} \simeq V_{x_i}/Q.V_{x_i},$$

où V_{x_i} désigne l'anneau de la valuation v_{x_i}. Considérons les homomorphismes :

$$A \to A[X]/(Q) \to A[X]_{sub}/\mathfrak{P}_Q \to (A[X]_{sub}/\mathfrak{P}_Q)_{(m_{x_i}/\mathfrak{P}_Q)} \simeq$$

$$V_{x_i}/Q.V_{x_i} \to K[X]_{(Q)}/Q.K[X]_{(Q)} \simeq K[X]/(Q) \xrightarrow{\psi_i} \hat{K}, \text{ où}$$

Ψ_i est l'injection qui envoie la classe de X sur x_i, les autres homomorphismes étant des injections ou des isomorphismes canoniques ; l'homomorphisme composé de $A[X]_{sub}/P_Q$ dans $K[X]/(Q)$ est l'injection canonique déjà rencontrée, elle ne dépend pas de i. Posons $A_{x_i} = \Psi_i^{-1}(\hat{A})$. Il apparaît que $V_{x_i}/P.V_{x_i}$ est isomorphe à A_{x_i}. Ainsi, $A[X]_{sub}/P_Q$ qui est égal à l'intersection de ses localisés en les idéaux maximaux est isomorphe à l'intersection des anneaux de valuation A_{x_i} ; il contient donc en particulier la fermeture intégrale de A dans $K[X]/(Q)$.

Nous allons maintenant essayer d'obtenir de tels résultats avec des anneaux A un peu plus généraux.

4. ANNEAUX LOCAUX D'IDEAL MAXIMAL PRINCIPAL

Reprenons toutes les hypothèses et notations du paragraphe IV.2 : l'anneau A est local d'idéal maximal principal A et de corps résiduel fini.

Notons en outre r l'idéal de A intersection des idéaux $\pi^n A$ où $n \in \mathbb{N}$.

Les idéaux premiers de $A[X]_{sub}$ qui ne sont pas au-dessus de l'idéal maximal de A sont donnés par la proposition 1.5 ; on obtient en particulier l'idéal premier $r[X]$. D'autre part :

4.1. Proposition. Le quotient $A[X]_{sub}/r[X]$ est isomorphe à l'anneau $(A/r)[X]_{sub}$.

Notons que l'idéal premier r de A n'étant pas maximal, $A[X]_{sub}$ est inclus dans $A_r[X]$ (proposition III.1.5).

D'autre part, r est égal à rA_r (tout élément de r est divisible par n'importe quelle puissance de π) ; donc le quotient A_r/r est égal à A_r/rA_r c'est-à-dire au corps des fractions $Fr(A/r)$ de A/r .

Ainsi, $A[X]_{sub}/r[X] = \{P(X) \in A_r[X] \mid P(A) \subset A\}/r[X] = \{P(X) \in (A_r/r)[X] \mid P(A) \subset A/r\} = \{P(X) \in Fr(A/r) \mid P(A/r) \subset A/r\} = (A/r)[X]_{sub}$.

On obtient là l'isomorphisme que l'on ne pouvait avoir dans le cas général avec l'assertion 1.8 . Et le problème est bien réduit, car l'anneau quotient A/r est un anneau de valuation discrète ; d'où :

4.2. Proposition. Les idéaux premiers de $A[X]_{sub}$ au-dessus de l'idéal maximal πA de A sont de la forme :

$$m_x = \{P(X) \in A[X]_{sub} \mid P(x_n) \in \pi A \text{ pour } n \text{ assez grand}\}$$

où x est un élément du séparé-complété de A pour la topologie πA-adique (uniquement déterminé) et (x_n) une suite quelconque d'éléments de A représentants x. Ces idéaux sont maximaux et de corps résiduel isomorphe à celui de πA.

Cela résulte du théorème 2.1 et de la proposition 4.1.

La remarque 2.4 subsiste :

4.3. Pour que l'idéal $P_Q = \{P(X) \in A[X]_{sub} \mid P = Q.R \text{ où } R \in K[X]\}$ soit principal il faut et il suffit que, pour tout $a \in A$, $Q(a)$ soit inversible dans A.

On peut essayer de poursuivre l'analogie et voir si le localisé de $A[X]_{sub}$ en l'idéal premier m_x est l'anneau $\{R(X) \in K(X) \mid R(x_n) \in A \text{ pour } n \text{ assez grand}\}$ (comparer avec le corollaire 3.2). Pour pouvoir faire une démonstration du même type qu'au paragraphe précédent nous allons supposer que A est en outre un anneau de valuation (de hauteur strictement supérieure à 1) et nous allons déterminer les valuations de $K(X)$ prolongeant celle de A et contenant $A[X]_{sub}$.

4.4. Proposition. Supposons que A est l'anneau d'une valuation v d'idéal maximal principal πA, de corps résiduel fini (et de hauteur strictement supérieure à 1). Soit x un élément du

séparé-complété de A pour la topologie πA-adique et soit (x_n) une suite d'éléments de A tendant vers x. Les valuations w de $K(X)$ dominant le localisé de $A[X]_{sub}$ en l'idéal maximal m_x sont les prolongements w de la valuation v de K à $K(X)$ tels que :

pour tout $t \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $w(X-x_n) > tw(\pi)$

Démonstration. Soit w une valuation de $K(X)$ dominant le localisé de $A[X]_{sub}$ en m_x. Il est clair que w prolonge v. Imposons à la suite de Cauchy (x_n) de vérifier : $v(x_{n+1}-x_n) > nv(\pi)$. Soit t un entier. Reprenons la démonstration du théorème 3.1 dans le cas complet en remplaçant x par x_n où n est un entier strictement supérieur à $u(q^t)$ (notations de IV.1). On a : $v(R_{q^t}(x_n)) > o$ et, pour $m \geqslant n$, $v(R_{q^t}(x_m)) > o$ puisque $v(R_{q^t}(x_m)-R_{q^t}(x_n)) > o$ ($n > u(q^t)$). De même, $v(R_{q^{t-1}}(x_n)) = o$ et, pour $m \geqslant n$, $v(R_{q^{t-1}}(x_m)) = o$. Donc $w(R_{q^t}(X)) > o$ et $w(R_{q^{t-1}}(X)) = o$, d'après la définition de l'idéal m_x. Ceci implique $w(X-x_n) > tw(\pi)$ en vertu de l'égalité : $R_{q^{t-1}}(X).\pi^{-t}.(X-x_n) = R_{q^t}(X)$.

Réciproquement, montrons qu'une valuation w de $K(X)$ prolongeant v et telle que, pour tout $t \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $w(X-x_n) > tw(\pi)$ répond à la question. Comme les éléments de $A[X]_{sub}$ sont combinaisons linéaires à coefficients dans A des polynômes $Q_n(X)$ (introduits en IV.1.5), pour montrer que l'anneau de w contient $A[X]_{sub}$ il s'agit de

montrer que, pour tout n , $w(Q_n(X)) \geqslant o$. Fixons n et soit $s \in \mathbb{N}$ tel que $w(X-x_s) > (n+u(n)).w(\pi)$. On peut toujours supposer que la suite (a_r) satisfaisant à la condition IV.1.2 et permettant de définir les polynômes $Q_n(X)$ satisfait aussi : $a_o = x_s + \pi^n$. Par une démonstration analogue à celle du lemme IV.1.6, on voit que : $v(Q_n(x_s))$ est de la forme $mv(\pi)$ où $o \leqslant m \leqslant n$. Considérons la décomposition :

$$\pi^{u(n)}Q_n(X) = \pi^{u(n)}Q_n(x_s) + (X-x_s)R(X) \quad \text{où} \quad R(X) \in A[X] .$$

Comme l'anneau de w contient A et $X-x_s$, il contient $R(X)$, d'où :

$$w(\pi^{u(n)}Q_n(x_s)) = (u(n)+m)w(\pi) < w(X-x_s) \leqslant w(X-x_s)+w(R(X))$$

et par suite :

$$w(Q_n(X)) = w(Q_n(x_s)) = mw(\pi) \geqslant o .$$

Enfin, w prolongeant v , l'anneau de w domine $A[X]_{sub}$ en un idéal au-dessus de πA donc de la forme m_y où y appartient au séparé-complété de A . D'après la partie directe, pour tout $t \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $w(X-y_n) > tw(\pi)$ et comme par hypothèse si n est choisi assez grand $w(X-x_n) > tw(\pi$ on a $w(x_n-y_n) > tw(\pi)$ et donc les suites de Cauchy (x_n) et (y_n) ont même limite $x=y$.

4.5. Remarque. Dans la proposition 4.4 on trouve en particulier les valuations suivantes :

- si x appartient à A , la valuation v_x de $K(X)$ introduite en IV.6.2 .

- si x n'appartient pas à A , la valuation $\tilde{v}_x$ définie par : pour tout $R(X) \in K(X) - \{o\}$: $\tilde{v}_x(R(X)) = \lim_n v(R(x_n))$.

Les anneaux correspondant à ces deux types de valuation sont : $\{R(X) \in K(X) \mid R(x_n) \in A \quad \text{pour} \quad n \quad \text{assez grand}\}$.

Mais il y a d'autres valuations satisfaisant aux conditions de la proposition 4.4. Par exemple :

Soient k un corps fini, w la valuation de $k(X,Y,Z)$ à valeurs dans le produit lexicographique $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ telle que $w(X)=(o,1,o)$, $w(Y)=(o,o,1)$ et $w(Z)=(1,o,o)$ et v la restriction de w à $k(Y,Z)$. Les valuations v et w satisfont à la proposition 4.4 relativement à $x=o$. Or, si on pose $R(X) = X/Z$, on a $w(R(X))=(-1,1,o) < o$ tandis que $R(o)=o$ appartient à l'anneau de v . Ainsi dans ce cas le localisé de $A[X]_{sub}$ en m_x est strictement inclus dans $\{R(X)\in K(X) \mid R(x_n) \in A \quad \text{pour} \quad n \quad \text{assez grand}\}$ (et l'on répond par la négative à la question que l'on s'était posé).

4.6. Remarque. Soit A un anneau local d'idéal maximal m (sans conditions sur l'idéal m). Pour tout élément a de A , le localisé de $A[X]_{sub}$ en l'idéal maximal $m_a = \{P(X)\in A[X]_{sub} \mid P(a)\in m\}$ est inclus dans l'anneau $\{R(X)\in K(X) \mid R(a)\in A\}$.

On vient de voir que cette inclusion est stricte en général (même si m est principal) ; cela devient encore plus clair dans le cas d'un anneau substitutiel (par exemple, un anneau local, noethérien, intégralement clos, de dimension supérieure ou égale à 2, proposition III.2.11), car :

le localisé de $A[X]$ en l'idéal maximal $(m,X-a)A[X]$ est strictement inclus dans l'anneau $\{R(X)\in K(X) \mid R(a)\in A\}$ (en effet, il est aussi contenu dans l'anneau $\{R(X)\in K(X) \mid R(b)\in A\}$ pour tout élément b de A congru à a modulo m et ces deux derniers anneaux ont une intersection propre).

Notons aussi que si les idéaux de la forme m_a ne sont pas tous les idéaux maximaux de $A[X]_{sub}$ au-dessus de m, nous avons toutefois :

$$A[X]_{sub} = \bigcap_{a\in A} (A[X]_{sub})_{m_a} \cap K[X} \text{ , car le second membre}$$

est contenu dans $\bigcap_{a\in A}\{P(X)\in K[X] \mid P(a)\in A\}$.

4.7. Remarque. Si A est un anneau local d'idéal maximal m et :

- si le quotient A/m est de cardinal infini, alors $A[X]_{sub}$ est égal à $A[X]$.

- si le quotient A/m est fini et si m est principal, alors le A-module $A[X]_{sub}$ est libre et toujours distinct de $A[X]$ (remarque IV.2.2).

- si le quotient A/m est fini et si m n'est pas principal $A[X]_{sub}$ peut être égal à $A[X]$ (cas d'un anneau A noethérien intégralement clos de dimension supérieure ou égale à 2) et $A[X]_{sub}$ peut être distinct de $A[X]$ (cas de l'anneau $A = \mathbb{F}_2[T^2,T^3]_{(T^2,T^3)}$, le polynôme $\frac{T^3}{T^2}X(X-1)$ appartient à $A[X]_{sub}$ et non à $A[X]$).

5. ANNEAUX DE KRULL

Soient A un anneau de Krull et p un idéal premier de A. Considérons les trois cas suivants :

(i) Le quotient A/p est de cardinal infini.

(ii) L'idéal premier p est de hauteur strictement supérieure à 1.

(iii) L'idéal premier p est de hauteur 1 et de corps résiduel fini.

Dans le cas (i) $A[X]_{sub}$ est inclus dans $A_p[X]$ (proposition III.1.5), dans le cas (ii) l'anneau A_p est substitutiel (proposition III.2.10) ; donc :

Dans les cas (i) et(ii) l'anneau $A_p[X]_{sub}$ est égal à $A_p[X]$ et les idéaux premiers de $A[X]_{sub}$ au-dessus de p sont donnés par la proposition 1.5 .

Mais dans le cas (iii) on ne sait pas conclure si l'on ne se place pas dans de "bonnes conditions de localisation" pour que $(A[X]_{sub})_p$ soit égal à $A_p[X]_{sub}$ (cf. proposition IV.5.1) ; on supposera donc soit A noethérien soit p principal. Ainsi :

5.1. Proposition. Si A est un anneau noethérien intégralement clos ou un anneau factoriel, les idéaux premiers de $A[X]_{sub}$ au-dessus d'un idéal premier p de A de hauteur 1 et de corps résiduel fini sont les idéaux $p_a = \{P(X) \in A[X]_{sub} \mid P(a) \in p\hat{A}_p\}$ où a est un élément de $\hat{A}_p$ complété de A_p pour la topologie pA_p-adique.

En effet, ce sont les intersections avec $A[X]_{sub}$ des idéaux premiers de l'anneau $A_p[X]_{sub}$ au-dessus de pA_p qui eux sont fournis par le théorème 2.1, A_p étant un anneau de valuation discrète.

Notons qu'il existe bien des anneaux de Krull de dimension strictement supérieure à 1 possédant un idéal premier de hauteur 1 et de corps résiduel fini (donc maximal), autrement dit le cas (iii) n'a pas lieu uniquement pour les anneaux de Krull qui sont des anneaux de Dedekind (Cahen en a donné un exemple).

6. ANNEAUX NOETHERIENS LOCAUX : LES ANNEAUX $A[X]_{sub}$ ET $\mathcal{E}(\hat{A},\hat{A})$

Revenons pour un moment dans la situation du paragraphe 2 et reprenons-en les notations. CAHEN [8] a retrouvé les résultats du théorème 2.1 par une autre méthode : il s'agit de comparer l'anneau $A[X]_{sub}$ à l'anneau $\mathcal{E}(\hat{A},\hat{A})$ des fonctions continues de $\hat{A}$ dans $\hat{A}$ et d'utiliser le résultat suivant :

6.1. Proposition. (BOURBAKI [5] , II, § 4, exercice 17). Soient X un espace compact totalement discontinu, k un corps et $\mathcal{E}(X,k)$ l'anneau des fonctions localement constantes de X dans k . Alors $\mathcal{E}(X,k)$ est un anneau absolument plat et il y a une bijection entre X et le spectre de $\mathcal{E}(X,k)$:

$$x \in X \longmapsto \{f \in \mathcal{E}(X,k) \mid f(x)=0\} .$$

Rappelons brièvement la démonstration de Cahen et simplifions la un peu en notant, d'après AMICE [2] , que $A[X]_{sub}$ est dense dans $\mathcal{E}(\hat{A},\hat{A})$ muni de la topologie de la convergence uniforme et que :

$$\mathcal{E}(\hat{A},\hat{A}) = A[X]_{sub} + \pi\mathcal{E}(\hat{A},\hat{A}) .$$

Comme $\pi\mathcal{E}(\hat{A},\hat{A}) \cap A[X]_{sub} = \pi A[X]_{sub}$, il y a un isomorphisme entre $A[X]_{sub}/\pi A[X]_{sub}$ et $\mathcal{E}(\hat{A},\hat{A})/\pi\mathcal{E}(\hat{A},\hat{A})$, or ce dernier quotient est isomorphe à $\mathcal{E}(\hat{A},\hat{A})/\mathcal{E}(\hat{A},\pi\hat{A})$ lui-même isomorphe à $\mathcal{E}(\hat{A},\hat{A}/\pi\hat{A})$ où $\hat{A}/\pi\hat{A}$ est muni de la topologie quotient donc discrète. Il est aussi classique que l'anneau topologique $\hat{A}$ est compact et totalement discontinu,

et la proposition 6.1 appliquée à $\mathcal{C}(\hat{A},\hat{A}/\pi\hat{A})$ montre que les idéaux premiers de $A[X]_{sub}$ au-dessus de l'idéal πA de A sont les idéaux de la forme $m_x = \{P(X) \in A[X]_{sub} \mid P(x) \in \hat{A}\}$ où $x \in \hat{A}$.

On retrouve ainsi assez rapidement le théorème 2.1 ; par contre, les compléments 2.3 et le théorème 3.1 nécessitent toujours certains calculs. C'est cette idée de démonstration que nous allons essayer de généraliser. Mais, s'il est évident lorsque A est un anneau de valuation discrète que $A[X]_{sub}$ est inclus dans $\mathcal{C}(\hat{A},\hat{A})$ et même dans $\hat{A}[X]_{sub}$, cela n'est pas le cas en général.

Nous avons vu au paragraphe 1 que la question de la détermination des idéaux premiers de $A[X]_{sub}$ en fonction de ceux de A se ramène à la détermination de ceux qui sont au-dessus des idéaux maximaux m de A de corps résiduel fini. Si l'on suppose maintenant que l'anneau A est noethérien l'égalité entre $A_m[X]_{sub}$ et $(A[X]_{sub})_m$ nous ramène au cas d'un anneau local. Aussi, désormais dans ce paragraphe et le suivant :

6.2. L'anneau A (intègre de corps des fractions K) sera noethérien, local, d'idéal maximal m et de corps résiduel fini. On notera $\hat{A}$ le complété de A pour la topologie m-adique, $\hat{m}$ l'idéal $m.\hat{A}$ et $\mathcal{C}(\hat{A},\hat{A})$ l'anneau des fonctions continues de $\hat{A}$ dans $\hat{A}$ muni de la topologie de le convergence uniforme.

Il s'agit de déterminer les idéaux premiers de $A[X]_{sub}$ au-dessus de m. Nous allons montrer que l'anneau $A[X]_{sub}$ est bien inclus dans l'anneau $\mathcal{E}(\hat{A},\hat{A})$ et, dans le paragraphe suivant, nous en déduirons les idéaux premiers de $A[X]_{sub}$ au-dessus de m lorsque la dimension de A est égale à 1.

6.3. Lemme. Pour tout élément non nul x de A il existe un entier $r(x)$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $a\in A$, ax appartient à $m^{n+r(x)}$ implique a appartient à m^n.

En effet, d'après le lemme d'Artin-Rees appliqué au A-module A et à son sous-module Ax, il existe un entier $r(x)$ tel que $m^{n+r(x)}\cap Ax\subset m^n x$ pour tout entier n. Si ax appartient à $m^{n+r(x)}$, alors ax appartient à $m^n x$ et a appartient à m^n.

6.4. Proposition. Avec les hypothèses et notations 6.2, l'anneau $A[X]_{sub}$ s'injecte dans l'anneau $\mathcal{E}(\hat{A},\hat{A})$.

Démonstration. Soient $P(X) = \sum p_i X^i$ un élément de $A[X]_{sub}$ et x un élément non nul de A tel que $xP(X)$ appartienne à $A[X]$. Soient a et b deux éléments quelconques de A tels que $a-b$ appartienne à $m^{n+r(x)}$, où n est un entier quelconque et $r(x)$ l'entier du lemme précédent. On a :

$$x(P(a)-P(b)) = x\sum_{i\geq 1} p_i(a^i-b^i) = (a-b)\sum_{i\geq 1}(xp_i)\frac{a^i-b^i}{a-b}.$$

Comme xp_i et $\frac{a^i-b^i}{a-b}$ appartiennent à A, $x(P(a)-P(b))$ appartient à $m^{n+r(x)}$ et, d'après le lemme, $P(a)-P(b)$ appartient à m^n.

Ceci signifie que tout élément P de $A[X]_{sub}$ peut être considéré comme une fonction uniformément continue de A dans A (ou $\hat{A}$). Comme $\hat{A}$ est complet et séparé, cette fonction peut être prolongée par continuité à $\hat{A}$ tout entier et la fonction prolongée que l'on notera encore P est uniformément continue de $\hat{A}$ dans $\hat{A}$ et l'on aura :

6.5. Pour tout élément P de $A[X]_{sub}$, il existe un entier $s(P)$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout a et b appartenant à $\hat{A}$, $a-b$ appartient à $\hat{m}^{n+s(P)}$ implique $P(a)-P(b)$ appartient à $\hat{m}^n$.

6.6. Remarque. Pour raisonner de façon tout à fait analogue au cas de valuation discrète, on aurait pu être tenté d'utiliser le résultat suivant de BOURBAKI ([6],X, § 4, exercice 21) : soient X un espace compact totalement discontinu, R un anneau topologique possédant un système fondamental de voisinages de o qui sont des idéaux et C un sous-anneau de $\mathcal{C}(X,R)$ contenant les constantes et séparant les points de X. Alors C est dense dans $\mathcal{C}(X,R)$ muni de la topologie de la convergence uniforme.

Or, ce résultat est faux : il est clair que $A[X]$ n'est pas dense dans $\mathcal{C}(\hat{A},\hat{A})$ (même lorsque A est un anneau de valuation discrète).

Et, même la formule (plus faible) $\mathcal{C}(\hat{A},\hat{A}) = A[X]_{sub} + \mathcal{C}(\hat{A},\hat{m})$ est fausse (lorsque A n'est pas un anneau de valuation discrète), car sinon $A[X]_{sub}/\{P(X)\in K[X] \mid P(A)\subset m\}$ serait isomorphe à $\mathcal{C}(\hat{A},\hat{A}/\hat{m})$ ce qui serait en contradiction avec les assertions 6.1 et 7.4 .

7. ANNEAUX NOETHERIENS DE DIMENSION 1

Conservons les hypothèses et notations 6.2 .

7.1. Lemme. L'anneau topologique $\hat{A}$ est compact et totalement discontinu.

Démonstration. On vérifie par récurrence sur l'entier n que le quotient A/m^n est de cardinal fini. En effet, cela est vrai pour $n=1$, supposons le jusqu'à $n-1$. On a la suite exacte de A-modules :

$$o \longrightarrow m^{n-1}/m^n \longrightarrow A/m^n \longrightarrow A/m^{n-1} \longrightarrow o .$$

Or, m^{n-1}/m^n isomorphe à $m^{n-1} \otimes_A A/m$ est un A/m-espace vectoriel de type fini, donc est de cardinal fini. Comme A/m^{n-1} est fini par hypothèse de récurrence, il en est de même de A/m^n .

D'autre part, $\hat{A}$ est isomorphe à la limite projective des anneaux A/m^n munis de la topologie quotient (donc discrète) et par suite est compact et totalement discontinu.

7.2. Pour tout élément x de $\hat{A}$, l'idéal

$m_x = \{P(X) \in A[X]_{sub} \mid P(x) \in \hat{m}\}$ de $A[X]_{sub}$ est maximal et son corps résiduel est isomorphe de A/m .

Remarquons que la proposition 6.4 nous permet de calculer la valeur de tout élément de $A[X]_{sub}$ en un élément de $\hat{A}$ et que l'on peut donc bien considérer un tel idéal m_x . Soient $P(X) \in A[X]_{sub}$ et $a \in A$ tel que x-a appartienne à $\hat{m}^{s(P)+1}$ où $s(P)$ est l'entier défini en 6.5 . On a alors : $P(X) = (P(X)-P(a))+P(a)$ et $P(X)-P(a)$ appartient à m_x d'après le choix de a ; donc $A[X]_{sub} = m_x + A$. Comme d'autre part, $m_x \cap A = \hat{m} \cap A = m$, on a bien un isomorphisme entre $A[X]_{sub}/m_x$ et A/m .

7.3. Les idéaux premiers de $A[X]_{sub}$ contenant l'idéal $I = \{P(X) \in A[X]_{sub} \mid P(A) \subset m\}$ sont les idéaux de la forme $m_x = \{P(X) \in A[X]_{sub} \mid P(x) \in \hat{m}\}$ où x est un élément quelconque de $\hat{A}$.

Démonstration. D'après la proposition 6.4 l'anneau $A[X]_{sub}$ s'injecte dans l'anneau $\mathcal{C}(\hat{A},\hat{A})$; d'autre part, comme $\hat{m} \cap A = m$, l'intersection de $\mathcal{C}(\hat{A},\hat{m})$ avec $A[X]_{sub}$ est l'idéal I ; donc le quotient $A[X]_{sub}/I$ s'injecte dans le quotient $\mathcal{C}(\hat{A},\hat{A})/\mathcal{C}(\hat{A},\hat{m})$ lui-même isomorphe à $\mathcal{C}(\hat{A},\hat{A}/\hat{m})$ où $\hat{A}/\hat{m}$ est muni de la topologie quotient donc discrète. Le lemme 7.1 nous permet d'utiliser la proposition 6.1 : les idéaux premiers de $\mathcal{C}(\hat{A},\hat{A})/\mathcal{C}(\hat{A},\hat{m})$ sont tous de la forme $\{f \in \mathcal{C}(\hat{A},\hat{A}) \mid f(x) \in \hat{m}\}/\mathcal{C}(\hat{A},\hat{m})$ où x appartient à $\hat{A}$.

D'après l'injection de $A[X]_{sub}/I$ dans $\mathcal{C}(\hat{A},\hat{A})/\mathcal{C}(\hat{A},\hat{m})$, tout idéal premier minimal de $A[X]_{sub}/I$ est l'image réciproque d'un idéal premier minimal de $\mathcal{C}(\hat{A},\hat{A})/\mathcal{C}(\hat{A},\hat{m})$, donc est de la forme

$\{P(X)\in A[X]_{sub} \mid P(x)\in \hat{m}\}/I = m_x/I$. Or l'assertion 7.2 nous dit que de tels idéaux sont maximaux, c'est donc que l'on obtient ainsi tous les idéaux premiers de $A[X]_{sub}$ contenant I .

7.4. Proposition. Avec les hypothèses et notations 6.2, lorsqu'en outre la dimension de A est supérieure ou égale à 2 , les idéaux premiers de $A[X]_{sub}$ contenant l'idéal $I = \{P(X)\in K[X] \mid P(A)\subset m\}$ sont les idéaux $m_{a_i} = \{P(X)\in A[X]_{sub} \mid P(a_i)\in m\}$ où a_i décrit un système de représentants de A modulo m ; ces idéaux m_{a_i} sont maximaux et distincts.

Démonstration. La proposition résultera de l'assertion 7.3 dès que l'on aura montré que les idéaux m_x et m_y sont égaux si et seulement si $x-y$ appartient à $\hat{m}$. Si $x-y$ n'appartient pas à $\hat{m}$, alors le polynôme $X-x$ appartient à m_x et n'appartient pas à m_y .

Inversement, supposons que $x-y$ appartienne à $\hat{m}$. Soient $P(X) = \sum p_i X^i$ un élément de $A[X]_{sub}$ et a et b deux éléments de A tels que $x-a$ et $y-b$ appartiennent à $\hat{m}^{s(P)+1}$ (notation de 6.5), de façon que $P(x)-P(a)$ et $P(y)-P(b)$ appartiennent à $\hat{m}$. Comme $x-y$ appartient à $\hat{m}$, $a-b$ appartient à $\hat{m}\cap A = m$ et, comme A est noethérien, il existe un idéal premier p de A de hauteur 1 contenant $a-b$. Comme l'idéal p n'est pas maximal, le quotient A/p est infini ; par suite $P(X)$ appartient à $A_p[X]$ (proposition III.1.5) et il existe $d\in A-p$ tel que $dP(X)$ appartienne à $A[X]$. L'élément $d(P(a)-P(b)) = (a-b)\sum_{i\geq 1} (dp_i)\,\frac{a^i-b^i}{a-b}$ appartient alors à l'idéal

engendré par $a-b$, lui-même contenu dans p . Par suite, $P(a)-P(b)$ appartient à $pA_p \cap A = p$, lui-même inclus dans m ; $P(x)-P(y)$ appartient à $\hat{m}$ et P appartient à m_x est équivalent à P appartient à m_y .

7.5. Remarque. Si en plus des hypothèses de la proposition 7.4 on avait supposé l'anneau A intégralement clos, alors A aurait été un anneau de Krull local de dimension supérieure ou égale à 2 et A aurait été substitutiel (proposition III.2.10) ($A[X]_{sub} = A[X]$) . Dans ce cas les idéaux premiers de $A[X]_{sub}$ contenant I donnés par la proposition 7.4 sont bien ceux que l'on aurait obtenus directement en considérant $A[X]$ (cf. 1.2).

Par contre en dimension 1 , on a le résultat suivant :

7.6. Lemme. Lorsque la dimension de A est égale à 1 , le radical de l'idéal $mA[X]_{sub}$ de $A[X]_{sub}$ est égal à l'idéal $I = \{P(X) \in K[X] \mid P(A) \subset m\}$.

Démonstration. Soit x un élément non nul de m ; le radical de l'idéal Ax est égal à l'intersection des idéaux premiers de A le contenant, c'est-à-dire est égal à m et, comme m est de type fini, il existe un entier n tel que m^n soit inclus dans Ax . Nous allons en déduire que I^n est inclus dans $mA[X]_{sub}$; comme d'autre part il est clair que $mA[X]_{sub}$ est inclus dans I et que I est égal à son propre radical, le lemme sera prouvé.

Soit donc $P(X)$ un élément de I^n ; de $P(A) \subset m^n$, on déduit : $P(A) \subset m^n \subset xA$ et $\frac{1}{x} P(X)$ appartient à $A[X]_{sub}$; d'où $P(X)$ appartient à $xA[X]_{sub}$ et en particulier à $mA[X]_{sub}$.

Ce lemme nous permet de déduire de l'assertion 7.3 :

7.7. Théorème. Soit A un anneau intègre, noethérien, de dimension 1, local, d'idéal maximal m et de corps résiduel fini. Les idéaux premiers de $A[X]_{sub}$ au-dessus de m sont les idéaux maximaux suivants :

$m_x = \{P(X) \in A[X]_{sub} \mid P(x) \in m\hat{A}\}$ où x est un élément quelconque du complété $\hat{A}$ de A pour la topologie m-adique.

Les résultats III.1.4, III.2.10, 1.5 et 7.7 nous montrent que :

7.8. Conclusion. On connaît les idéaux premiers de $A[X]_{sub}$ en fonction de ceux de A lorsque A est un anneau noethérien tel que, pour tout idéal maximal m de A , l'une des trois conditions suivantes est réalisée :

(i) Le corps A/m est infini.

(ii) L'anneau A_m est intégralement clos.

(iii) L'anneau A_m est de dimension 1 .

CHAPITRE VI - ELEMENTS QUASI-ENTIERS

Dans ce chapitre nous allons introduire une notion d'élément quasi-entier qui prolonge une notion classique connue dans un cadre restreint, car nous en aurons besoin au chapitre suivant pour étudier le développement en série des fractions rationnelles. Puis nous nous intéresserons aux anneaux complètement intégralement clos, d'une part en appliquant les résultats généraux obtenus sur les éléments quasi-entiers, d'autre part en donnant des contre-exemples non classiques à l'aide de l'anneau des polynômes à valeurs entières.

1. POUR UNE NOTION D'ELEMENTS QUASI-ENTIERS

Soient A un anneau et B une A-algèbre. Rappelons qu'un élément x de B est dit entier sur A si les assertions équivalentes suivantes sont réalisées :

(i) L'élément x est racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans A .

(ii) La A-algèbre $A[x]$ est un A-module de type fini.

Par analogie, il existe une définition classique, mais dans un cadre beaucoup plus restreint :

1.1. Définition. Soient A un anneau intègre et K son corps des fractions. Un élément x de K est dit quasi-entier sur A si les assertions équivalentes suivantes sont réalisées :

(i) Il existe un élément non nul d de A tel que $d.A[x]$ soit inclus dans A .

(ii) Il existe un sous-A-module de K de type fini contenant $A[x]$.

Notons qu'un élément de K entier sur A est en particulier quasi-entier sur A . Mais nous voudrions utiliser cette notion d'élément quasi-entier dans un cadre plus général. Une telle généralisation a déjà été faite : ainsi, étant donné deux anneaux A et B tels que A soit contenu dans B , un

élément x de B est dit "ganz in bezug auf A" (VAN DER WAERDEN [39]) ou "almost integral over A" (GILMER et HEINZER [21] s'il existe un sous-A-module de B de type fini contenant A[x].

Une telle généralisation mot à mot de 1.1(ii) permet d'obtenir un certain nombre de bonnes propriétés (cf. [21]) ; elle ne nous paraît pas toutefois satisfaisante car elle fait dépendre la notion du sur-anneau B considéré. En effet, soit A un anneau intégralement clos et non complètement intégralement clos (par exemple un anneau de valuation de hauteur strictement supérieure à 1) et soit x un élément du corps des fractions de A quasi-entier sur A au sens classique de 1.1 (et au sens "almost integral" de [21]) et non dans A. Ce même x considéré comme élément de l'anneau B = A[x] n'est pas "almost integral over A", sinon B serait un A-module de type fini et x appartiendrait à A .

Dans tout ce qui suit A désignera un anneau et B et C deux A-algèbres telles que B soit contenue dans C .

Nous cherchons à définir pour tout élément de B une notion d'élément quasi-entier sur A de façon que :

(a) Tout élément entier sur A soit quasi-entier sur A .

(b) Cette notion généralise la notion classique 1.1 .

(c) Cette notion soit indépendante de la A-algèbre B .

(d) L'ensemble des éléments de B quasi-entiers sur A soit un anneau (donc une A-algèbre).

Commençons par noter que :

1.2. Proposition. Soit x un élément de B. Si la A-algèbre $A[x]$ s'injecte dans un A-module de type fini, alors elle s'injecte dans un sous-A-module de type fini de son enveloppe injective.

Démonstration. Soit M un A-module de type fini contenant $A[x]$ et soit $I(M)$ une enveloppe injective de M. L'enveloppe injective E du A-module $A[x]$ s'injecte dans $I(M)$, c'en est même un facteur direct et il existe un supplémentaire N tel que $I(M) = E \oplus N$. Soit $(m_i)_{i \in I}$ un système fini de générateurs de M et soient $m_i = e_i + n_i$ la décomposition des m_i selon la somme directe. Pour tout entier r, on a alors :

$x^r = \sum_i a_{i,r} m_i$ où $a_{i,r} \in A$ et donc

$x^r = \sum_i a_{i,r} e_i + \sum_I a_{i,r} n_i$ et comme x^r appartient à E,

$x^r = \sum_i a_{i,r} e_i$; ainsi, $A[x]$ est contenu dans le sous-A-module de type fini de E engendré par les e_i.

Mais dans le cas général on ne sait pas si l'ensemble des éléments x de B tels que $A[x]$ s'injecte dans un A-module de type fini, est un anneau ou même seulement un A-module. Cette propriété ne nous paraît donc pas non plus une bonne définition des éléments quasi-entiers. Nous sommes obligés d'introduire une A-algèbre arbitraire Ω qui contiendra toutes les A-algèbres et tous les A-modules considérés dans la suite de ce paragraphe.

1.3. Définition. Un élément x de B est dit quasi-entier sur A s'il existe un sous-A-module de Ω de type fini contenant $A[x]$.

Cette définition n'est ni très jolie ni très pratique, elle permet toutefois d'obtenir encore un certain nombre de bonnes propriétés et, lorsque nous nous restreindrons à ne considérer que des anneaux intègres, la définition deviendra plus intrinsèque et les bonnes propriétés subsisteront.

Notons A'_B l'ensemble des éléments de B entiers sur A et A''_B l'ensemble des éléments de B quasi-entiers sur A (on omet la référence Ω supposée fixée pour tout ce paragraphe). Il est clair que A'_B est inclus dans A''_B (condition a).

Rappelons que la A-algèbre B est dite entière sur A si tout élément de B est entier sur A ($A'_B = B$) et que l'anneau A est dit intégralement fermé dans B si tout élément de B entier sur A appartient à l'image canonique, notée encore A , de A dans B $(A'_B = A)$.

Par analogie, on dira que la A-algèbre B est quasi-entière sur A si tout élément de B est quasi-entier sur A $(A''_B = B)$ et que l'anneau A est complètement intégralement fermé dans B si tout élément de B quasi-entier sur A appartient à l'image canonique de A dans B $(A''_B = A)$.

Nous verrons au paragraphe suivant que la définition 1.3 généralise la définition 1.1 (dès que Ω contient K) (condition b). D'autre part, la définition 1.3 est indépendante de l'algèbre B contenant x (condition c) ; en effet, il est clair que l'on a la formule :

1.4. $A''_B = A''_C \cap B$.

Enfin, la condition d est réalisée :

1.5. Proposition. L'ensemble A''_B des éléments de B quasi-entiers sur A est une A-algèbre.

En effet, si x et y appartiennent à A''_B, il existe deux A-modules de type fini M et N tels que $A[x] \subset M$ et $A[y] \subset N$; d'où $A[x,y] \subset MN$ et MN est un A-module de type fini.

De façon plus générale :

1.6. Proposition. Lorsque B est une A-algèbre de type fini, pour qu'elle soit quasi-entière sur A il faut et il suffit qu'elle soit contenue dans un A-module de type fini (lui-même contenu dans Ω).

Contrairement à la notion d'élément entier, la notion d'élément quasi-entier n'est pas transitive, ce qui revient à dire que A'_B est intégralement fermé dans B , alors que A''_B peut ne pas être complètement intégralement fermé dans B, ni même $(A''_B)''_B$, il faut parfois poursuivre l'opération une infinité de fois (cf. HILL [25]) (cette remarque est valable dans la situation de la définition classique 1.1 où A est intègre et B est le corps des fractions de A). On a toutefois les résultats suivants :

1.7. Proposition. Si la A-algèbre B est quasi-entière sur A et si x est un élément de C entier sur B , alors x est quasi-entier sur A .

Autrement dit, on a la formule : $(A''_B)'_C \subset A''_C$ et, en particulier, l'anneau A''_B est intégralement fermé dans B .

Démonstration. Si x est entier sur B , alors x est racine d'une équation :

$X^{n+1} + b_n X^n + \ldots + b_1 X + b_o = o$ où les b_i appartiennent à B . Si la A-algèbre B est quasi-entière sur A , alors la A-algèbre de type fini $A[b_o,\ldots,b_n]$ est quasi-entière sur A et donc, d'après 1.6, il existe un A-module de type fini M tel que $A[b_o,\ldots b_n] \subset M \subset \Omega$. Par suite le A-module de type fini $M+Mx+\ldots+Mx^n$ contient l'anneau $A[x]$.

1.8. Proposition. Si B est contenu dans un A-module de type fini (contenu dans Ω), alors tout élément de C quasi-entier sur B est quasi-entier sur A et l'on a l'égalité $B''_C = A''_C$.

Démonstration. Soit x un élément de C quasi-entier sur B, soit $\sum_{i=1}^{r} Bm_i$ un B-module de type fini contenant $B[x]$ et contenu dans Ω et soit $\sum_{j=1}^{s} An_j$ un A-module de type fini contenant B et contenu dans Ω. On a alors :

$$A[x] \subset B[x] \subset \sum_i Bm_i \subset \sum_i \left(\sum_j An_j \right) m_i$$

1.9. Remarque. Dans la proposition 1.8, l'hypothèse "B est entier sur A" ne serait pas suffisante, comme le montre l'exemple 2.9 plus bas.

2. ELEMENTS QUASI-ENTIERS DANS LE CAS INTEGRE

Nous allons voir que lorsqu'on ne considère que des anneaux intègres tout s'arrange : on a une bonne définition qui permet de conserver les résultats précédents.

Dans tout ce paragraphe A et B désignent deux anneaux intègres tels que B contienne A et K désigne le corps des fractions de A .

2.1. Proposition. Soit x un élément de B . Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un A-module de type fini contenant $A[x]$.

(ii) Il existe un anneau Ω contenant B et un sous-A-module de Ω de type fini contenant $A[x]$.

(iii) Il existe un sous-A-module de $K[x]$ de type fini contenant $A[x]$.

Démonstration. Il est clair que (iii) implique (ii) et que (ii) implique (i) ; enfin, pour montrer que (i) implique (iii) il suffit de montrer, compte tenu de la proposition 1.2 , que le A-module $K[x]$ est injectif (c'est même l'enveloppe injective du A-module $A[x]$). Soient I un idéal de A et $u : I \longrightarrow K[x]$ un A-homomorphisme. Etant donné deux éléments quelconques i et j de I, on a :

$i^{-1}.u(i) = (j^{-1}.j)(i^{-1}.u(i)) = (j^{-1}.i^{-1}).u(j.i) = j^{-1}.(i^{-1}.i).u(j) = j^{-1}u(j) = y$ et l'on peut donc prolonger u en un A-homomorphisme de A dans $K[x]$ en posant $u(a) = ay$ pour tout élément a de A.

2.2. Définition. Un élément x de B est dit quasi-entier sur A si les assertions équivalentes de la proposition 2.1 sont réalisées.

Dorénavant, lorsque l'on parlera d'éléments quasi-entiers, ces éléments seront toujours contenus dans un anneau intègre et ce sera toujours à cette définition que l'on fera référence.

Cette définition est bien intrinsèque et elle donne comme cas particulier la définition 1.1 pour les éléments de K. Il est clair que toutes les propositions du paragraphe précédent peuvent être retranscrites :

2.3. L'ensemble A''_B des éléments de B quasi-entiers sur A est un anneau et celui-ci est intégralement fermé dans B.

2.4. Lorsque B est une A-algèbre de type fini, pour qu'elle soit quasi-entière sur A il faut et il suffit qu'elle soit contenue dans un A-module de type fini (lui-même contenu dans le corps des fractions de B).

Enfin, pour tout anneau intègre C contenant B, on a la formule :

2.5. $A''_B = A''_C \cap B$ et

2.6. Lorsque B est contenu dans un A-module de type fini, on a l'égalité $B'_C = A'_C$.

Notons que, lorsque l'anneau A est noethérien, les deux notions d'éléments entiers et quasi-entiers sur A coïncident. En particulier, un élément quasi-entier sur A est algébrique sur K .

De façon analogue à la condition 1.1.(i) , on a aussi :

2.7. Proposition. Pour qu'un élément x de B soit quasi-entier sur A il faut et il suffit qu'il existe deux éléments non nuls s et d de A tels que sx soit entier sur A et que $d.A[x]$ soit inclus dans $A[sx]$.

Démonstration. Si x est quasi-entier sur A , alors x est algébrique sur K , il existe $s \in A-\{o\}$ tel que sx soit entier sur A et, si l'on pose $S = A-\{o\}$, on a $K[x] = K[sx] = S^{-1}A[sx]$ D'autre part, il existe un A-module M de type fini tel que :

$A[x] \subset M \subset K[x] = S^{-1}A[sx]$; par suite, il existe $d \in S$ tel que dM , et donc $d.A[x]$, soit inclus dans $A[sx]$.

Inversement, si s et d satisfont aux hypothèses, d'après la définition 1.1 , x est quasi-entier sur $A[sx]$; mais $A[sx]$ est un A-module de type fini, et, d'après 2.6, x est aussi quasi-entier sur A .

2.8. Corollaire. Si A est l'intersection d'une famille finie d'anneaux A_i ayant même corps des fractions que A, pour qu'un élément x de B soit quasi-entier sur A il faut et il suffit qu'il soit quasi-entier sur chaque A_i.

Donnons maintenant le contre-exemple annoncé dans la remarque 1.9 :

2.9. Contre-exemple. Etant donné un corps k, considérons les deux sous-anneaux de $K = k(X,Y)$ suivants :

$A = k[X,Y]\left[(X^n/Y^{n^2})_{n\in\mathbb{N}}\right]$ et $B = k[X,Y]\left[(X/Y^n)_{n\in\mathbb{N}}\right]$.

L'anneau B est entier sur A, car, pour tout entier n, on a : $(X/Y^n)^n - X^n/Y^{n^2} = o$; ainsi : B est inclus dans A'_K.

D'autre part, l'anneau $k[X,Y,Y^{-1}]$ est factoriel, donc complètement intégralement clos (fermé dans K) ; par suite tout élément non nul f de K quasi-entier sur A appartient à $k[X,Y,Y^{-1}]$ et peut s'écrire :

$f = X^nY^mP$ où $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{Z}$, $P\in k[X,Y]$ et $P(o,o) \neq o$.

On note que pour qu'un tel élément f appartienne à A il faut et il suffit que $n^2 + m \geqslant o$ et pour qu'il appartienne à B il faut et il suffit que $n > o$ lorsque $m < o$.

D'après 1.1.(i), f étant quasi-entier sur A, il existe un élément $g\in A-\{o\}$ tel que gf^r appartienne à A pour tout $r\in\mathbb{N}$. Ecrivons g sous la forme : $g = X^kY^lQ$ où $k\in\mathbb{N}$, $l\in\mathbb{Z}$, $Q\in k[X,Y]$ et $Q(o,o) \neq o$. D'après ce qui précède on doit avoir, pour tout $r\in\mathbb{N}$:

$$(k+rn)^2 + (l+rm) \geqslant o .$$

Si $m \geqslant o$, alors f appartient à A et aussi à B .

Si $m < o$, alors $n > o$ sinon, pour r assez grand, k^2+1+rm serait négatif, par suite f. appartient encore à B . On a donc : $A \subset A''_K \subset B \subset A'_K$ et ainsi :

$$B = A'_K = A''_K .$$

Par ailleurs, il est immédiat que $1/Y$ est quasi-entier sur B , mais n'appartient pas à B , c'est-à-dire :

$$B = B'_K \subsetneq B''_K .$$

On a donc un exemple d'anneau intègre A de corps des fractions K tel que l'anneau $A'_K = A''_K$ ne soit pas complètement intégralement clos (fermé dans K).

3. TRANSFERTS

Dans tout ce paragraphe A et B désigneront deux anneaux intègres tels que B contienne A.

En ce qui concerne l'intersection il est immédiat que :

3.1. Proposition. Soient C un anneau intègre, $(B_i)_{i\in I}$ une famille de sous-anneaux de C et, pour chaque $i \in I$, soit A_i un sous-anneau de B_i. Si chaque A_i est complètement intégralement fermé dans B_i, alors $A = \bigcap_{i\in I} A_i$ est complètement intégralement fermé dans $B = \bigcap_{i\in I} B_i$.

Le passage aux polynômes :

3.2. Proposition. Les polynômes à coefficients dans B qui sont quasi-entiers sur $A[X]$ sont les polynômes à coefficients quasi-entiers sur A ; autrement dit les anneaux $(A[X])''_{B[X]}$ et $(A''_B)[X]$ sont égaux.

Démonstration. Il est immédiat que $(A''_B)[X]$ est inclus dans $(A[X])''_{B[X]}$. Réciproquement, soit $P(X)\in (A[X])''_{B[X]}$: la caractérisation 2.7 montre qu'il existe deux polynômes non nuls $S(X)$ et $T(X)$ appartenant à $A[X]$ tels que $S(X).P(X)$ soit entier sur $A[X]$ et $T(X).A[X][P(X)]$ soit inclus dans $A[X]$. Pour tout polynôme $Q(X)$ de $B[X]-\{o\}$ notons q son coefficient directeur. On a alors : s et t appartiennent à $A-\{o\}$, sp est entier sur A et $t.A[p]$ est inclus dans A ; donc p est

quasi-entier sur B . On achève la démonstration par récurrence sur le degré de P .

On voit sans peine que la formule est encore valable pour une famille quelconque d'indéterminée (X_i) .

3.3. Corollaire. Pour que $A[X]$ soit complètement intégralement fermé dans $B[X]$ il faut et il suffit que A soit complètement intégralement fermé dans B .

3.4. Remarque. Pour les séries formelles un raisonnement analogue ne marche pas. Mais, si l'on suppose que B est contenu dans le corps des fractions de A , alors $(A[[X]])^{n}_{B[[X]]}$ est inclus dans $(A^{n}_{B})[[X]]$; on le vérifie en considérant les coefficients non nuls de plus bas degré des séries formelles et en utilisant la définition 1.1.(i). On en déduit :

3.5. Si B est contenu dans le corps des fractions de A , pour que $A[[X]]$ soit complètement intégralement fermé dans $B[[X]]$ il faut et il suffit que A soit complètement intégralement fermé dans B .

3.6. Proposition. Soit S une partie multiplicative de A . Si B est quasi-entier sur A , alors $S^{-1}B$ est quasi-entier sur $S^{-1}A$. Autrement dit, $S^{-1}(A^{n}_{B})$ est inclus dans $(S^{-1}A)^{n}_{S^{-1}B}$ (mais il n'y a pas égalité en général).

Démonstration. Soit x un élément de $S^{-1}(A_B^n)$: $x = b/s$ où $s \in S$ et $b \in A_B^n$. Il existe un A-module de type fini M contenant $A[b]$, d'où par localisation par S : $(S^{-1}A)[x] = S^{-1}A[b/s] = S^{-1}A[b] \subset S^{-1}M$ et x est quasi-entier sur $S^{-1}A$. Il n'y a pas égalité en général, sinon les localisés d'un anneau complètement intégralement fermé dans son corps des fractions le seraient encore (contradiction avec l'assertion 4.7).

3.7. Remarque. La notion d'élément quasi-entier ne passe pas au quotient (par des idéaux premiers) ; sinon lorsque B serait quasi-entier sur A, pour tout idéal premier q de B, B/q serait quasi-entier sur $A/q \cap A$; or : Soit V un anneau de valuation de hauteur 2 à valeurs dans le produit lexicographique $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et soit p l'idéal premier de hauteur 1 de V. L'anneau V_p est quasi-entier sur l'anneau V, tandis que l'anneau V_p/pV_p n'est pas quasi-entier sur l'anneau V/p ; en effet, ce dernier est un anneau de valuation (discrète) de hauteur 1, donc complètement intégralement fermé dans son corps des fractions (isomorphe à V_p/pV_p).

3.8. Proposition. Supposons que la dimension de A soit finie. Si B est quasi-entier sur A, alors pour que A soit un corps il faut et il suffit que B soit un corps.

Démonstration. Si A est un corps les notions d'élément quasi-entier et entier coïncident, B est entier sur A et il est classique qu'alors B est un corps. Inversement, supposons que A ne soit pas un corps ; la dimension de A étant finie, il

existe un idéal premier p de A de hauteur 1 et l'anneau A_p est local de dimension 1. D'après le lemme ci-dessous, A est contenu dans un anneau de valuation V de hauteur 1 lui-même contenu dans le corps des fractions K de A. Par suite, tout élément de K qui appartient à B étant quasi-entier sur A appartient à V et l'inclusion $B \cap K \subset V$ montre que B ne peut être un corps.

3.9. Lemme. Soit R un anneau intègre, de corps des fractions F, local, d'idéal maximal m et de dimension 1. Il existe un anneau de valuation de hauteur 1 compris entre R et F.

En effet, tout sous-anneau de F contenant R et l'inverse d'un élément r de m est égal à F, car le spectre de l'anneau $R[1/r]$ est réduit à (o). La famille des anneaux contenant R et contenus strictement dans F est non vide et inductive (car ces anneaux ne contiennent pas les inverses des éléments de m), donc admet un élément maximal qui est un anneau de valuation de hauteur 1.

3.10. Remarque. Lorsque B est quasi-entier sur A et q un idéal maximal de B, on ne sait pas déduire de la proposition 3.8 que $q \cap A$ est un idéal maximal de A. C'est d'ailleurs faux en général : reprenons l'exemple de la remarque 3.7, l'idéal maximal pV_p de V_p est au-dessus de l'idéal p de V qui n'est pas maximal.

Pour étudier le passage aux extensions, donnons deux résultats préparatoires :

3.11. Proposition. Soient L/K une extension de corps et x et x' deux éléments de L conjugués sur K. Si A est un anneau invariant globalement par tout K-automorphisme de L et si x est quasi-entier sur A, alors x' est aussi quasi-entier sur A.

En effet, il existe un K-isomorphisme u de $K(x)$ sur $K(x')$ qui transforme x en x'. Si x est quasi-entier sur A il existe un A-module de type fini $\sum Am_i$ compris entre $A[x]$ et $K[x]$, par suite $A[x']$ est contenu dans le A-module de type fini $\sum Au(m_i)$.

3.12. Lemme. Pour qu'un élément x de B soit quasi-entier sur A'_B il faut et il suffit qu'il existe un élément non nul d de A tel que $dA[x]$ soit inclus dans A'_B.

Démonstration. La condition est évidemment suffisante. Inversement, si x est quasi-entier sur A'_B, alors x est algébrique sur le corps des fractions $Fr(A'_B)$ de A'_B, donc algébrique sur K. Or, tout élément de B algébrique sur K appartient à $Fr(A'_B)$, donc x appartient à $Fr(A'_B)$ et il existe $d \in A'_B - \{o\}$ tel que $dA[x]$ soit inclus dans A'_B (définition 1.1.(i)). L'élément d vérifie une équation de dépendance intégrale sur A :

$d^n + d_{n-1}d^{n-1} + \ldots + d_1 d + d_o = o$ où $d_o \in A - \{o\}$. On a alors :

$$d_o.A[x] = (d_1 + \ldots + d_{n-1}d^{n-2} + d^{n-1}).d.A[x] \subset A'_B .$$

3.13. Proposition. Si K désigne le corps des fractions de A, on a la formule :

$$(A'_B)''_B \cap K = (A'_{B\cap K})''_{B\cap K} .$$

Démonstration. Il est clair que $(A'_B)''_B \cap K$ contient $(A'_{B\cap K})''_{B\cap K}$. Inversement, soit x un élément de $B\cap K$ quasi-entier sur A'_B. D'après le lemme précédent, il existe $d \in A-\{0\}$ tel que $dA[x] \subset A'_B$, et donc $dA[x] \subset A'_B \cap K = A'_{B\cap K}$. Par suite, x appartient à $(A'_{B\cap K})''_{B\cap K}$.

3.14. Proposition. Si B est un anneau intègre contenant le corps des fractions K de A, on a la formule :

$$((A'_K)''_K)'_B = (A'_B)''_B .$$

Démonstration. Il est clair que $((A'_K)''_K)'_B$ est inclus dans $((A'_B)''_B)'_B$, or, d'après 2.3, $((A'_B)''_B)'_B = (A'_B)''_B$, d'où l'inclusion de $((A'_K)''_K)'_B$ dans $(A'_B)''_B$.

Montrons l'inclusion inverse : soit x un élément de $(A'_B)''_B$. Comme nous l'avons vu dans la démonstration du lemme 3.12, x est algébrique sur K ; soit donc $P(X)$ le polynôme caractéristique de x sur K. Soit N une extension normale de K contenant B ; l'élément x étant quasi-entier sur A'_N, il en est de même des conjugués de x sur K d'après 3.11. Par suite les coefficients de $P(X)$ sont dans K et dans $(A'_N)''_N$, donc dans $(A'_K)''_K$ d'après la proposition 3.13. L'élément x étant racine du polynôme unitaire $P(X)$ appartient à $((A'_K)''_K)'_B$.

Par une démonstration analogue à la précédente (mais simplifiée), on montrerait le résultat suivant :

3.15. Proposition. Si B est un anneau intègre contenant le corps des fractions K de A, on a la formule :

$$(A''_K)'_B = A''_B \quad .$$

4. PROPRIETES DES ANNEAUX COMPLETEMENT INTEGRALEMENT CLOS

4.1. Un anneau intègre A est dit complètement intégralement clos s'il est complètement intégralement fermé dans son corps des fractions K, c'est-à-dire, si tout élément de K quasi-entier sur A appartient à A, c'est-à-dire encore, si tout élément x de K, tel que $A[x]$ soit contenu dans un sous-A-module de K de type fini, appartient à A.

On retrouve bien la définition classique et nous allons rappeler les propriétés de tels anneaux (cf. BOURBAKI, [5], V), certaines se déduisant des résultats précédents plus généraux :

4.2. Toute intersection non vide de sous-anneaux complètement intégralement clos d'un anneau intègre est un anneau complètement intégralement clos (cf. 3.1).

4.3. Un anneau de valuation est complètement intégralement clos si et seulement si il est de hauteur 1. Par suite, un anneau intègre qui est intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 est complètement intégralement clos.

4.4. Si A est un anneau complètement intégralement clos, alors les anneaux $A[X]$ et $A[[X]]$ sont aussi complètement intégralement clos (cf. 3.3 et 3.5).

4.5. Si A est un anneau complètement intégralement clos, alors sa fermeture intégrale dans un corps extension de son corps des fractions est aussi un anneau complètement intégralement clos (appliquer la formule 3.15).

4.6. Une réunion filtrante croissante de sous-anneaux complètement intégralement clos d'un anneau intègre n'est pas toujours un anneau complètement intégralement clos (considérer la réunion des anneaux complètement intégralement clos $k[X,Y,X/Y^n]$ où k est un corps).

4.7. Les localisés d'un anneau complètement intégralement clos ne sont pas toujours des anneaux complètement intégralement clos :

Rappelons l'exemple donné par BOURBAKI ([5], V, § 1, exercice 12). Le corps K des fonctions méromorphes d'une variable complexe peut être muni d'une famille de valuation discrète $(w_z)_{z\in\mathbb{C}}$ de la façon suivante : pour tout $f\in K$, $w_z(f)$ est l'ordre de la fonction f en z. L'intersection A des anneaux de valuation correspondants est l'anneau des fonctions entières. C'est un anneau complètement intégralement clos (cf. 4.3) qui admet des localisés qui ne sont pas complètement intégralement clos (cf. Bourbaki).

Notons toutefois que, si dans cet exemple on sait qu'il existe de tels localisés, on ne sait pas les décrire car il intervient dans la démonstration des ultrafiltres non triviaux. L'exemple suivant tiré du chapitre V est beaucoup plus explicite :

4.8. Proposition. Soit A l'anneau d'une valuation discrète v d'un corps K dont le corps résiduel est fini. L'anneau des polynômes à valeurs entières sur A, $A[X]_{sub} = \{P(X) \in K[X] \mid P(A) \subset A\}$, est un anneau complètement intégralement clos, alors que, pour tout élément a de A, son localisé en l'idéal maximal $m_a = \{P(X) \in A[X]_{sub} \mid v(P(a)) > o\}$ n'est pas complètement intégralement clos.

En effet, A étant complètement intégralement clos, $A[X]_{sub}$ aussi (proposition IV.6.6), alors que le localisé de $A[X]_{sub}$ en m_a est l'anneau de la valuation v_a de hauteur 2 (corollaire V.3.2), donc non complètement intégralement clos.

Enfin, nous verrons au chapitre suivant une propriété caractéristique des anneaux complètement intégralement clos :

4.9. Proposition. Pour qu'un anneau intègre A de corps des fractions K soit complètement intégralement clos il faut et il suffit que, pour tout couple de polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ à coefficients dans K, étrangers entre eux et tels que $Q(o) = 1$, si les coefficients du développement en série en X de la fraction rationnelle $P(X)/Q(X)$ appartiennent à A, alors les coefficients de P et Q appartiennent à A.

Soit x un élément de A''_K et soit $d \in A-\{o\}$ tel que $dA[x]$ soit inclus dans A ; alors la fraction rationnelle $d/(1-xX)$ admet un développement en série $\sum dx^n X^n$ qui est à coefficients dans A . Si la condition de la proposition est réalisée, x appartient à A et A est complètement intégralement clos. La réciproque sera prouvée au chapitre suivant avec le théorème VII.3.3 plus général.

5. LA CLASSE DES ANNEAUX COMPLETEMENT INTEGRALEMENT CLOS

Nous avons vu qu'un anneau de valuation est complètement intégralement clos si et seulement si il est de hauteur 1. KRULL [28] s'est demandé si, inversement, tout anneau intègre, local, de dimension 1 qui est complètement intégralement clos est un anneau de valuation (de hauteur 1). NAGATA [31] a répondu par la négative.

Nous avons vu qu'un anneau intègre qui est intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 est complètement intégralement clos. KRULL [27] s'est demandé si, inversement, tout anneau complètement intégralement clos est intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1. KRULL [28] a montré qu'il en est ainsi lorsque l'anneau est en outre local et de dimension 1. Il est d'autre part immédiat qu'il en est ainsi lorsque l'anneau est en outre intersection d'un nombre fini d'anneaux de valuation (en vertu du corollaire 2.8 et du théorème d'approximation pour les valuations de Bourbaki, [5] , VI).

Mais NAKAYAMA [32] a montré qu'un anneau complètement intégralement clos n'est pas toujours intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 . L'exemple de NAKAYAMA a été repris et simplifié par OHM : il s'agit de construire un groupe ordonné réticulé G tel que tout homomorphisme de groupes ordonnés de G dans $\mathbb{Z}$ soit trivial, puis de construire un anneau intègre A de corps des fractions K dont le groupe de divisibilité

$K^*/U(A)$ est isomorphe à G. Un tel anneau ne sera contenu dans aucun anneau de valuation de K de hauteur 1 .

Cet exemple ne semble toutefois pas très maniable (les éléments de l'anneau A ne s'écrivent pas simplement) ; l'anneau des polynômes à valeurs entières nous fournit par contre un exemple simple.

5.1. Théorème. Soit K un corps local c'est-à-dire un corps muni d'une valuation discrète v de corps résiduel fini pour laquelle il est complet et soit A l'anneau de la valuation v . L'anneau $A[X]_{sub} = \{P(X) \in K[X] \mid P(A) \subset A\}$ des polynômes à valeurs entières sur A est un anneau complètement intégralement clos qui n'est pas intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 .

Nous avons déjà vu que l'anneau $A[X]_{sub}$ est complètement intégralement clos ; il n'est pas intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 en vertu du corollaire V.3.6 que nous rappelons :

5.2. Proposition. Soit K un corps muni d'une valuation discrète v de corps résiduel fini et soit A l'anneau de la valuation v . Pour que l'anneau $A[X]_{sub}$ soit intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 il faut et il suffit que le complété $\hat{K}$ de K pour v soit une extension transcendante de K .

La condition suffisante est facile ; mais la démonstration de la condition nécessaire, qui nous intéresse ici, a nécessité les paragraphes IV.1, V.2 et V.3 ; nous allons donner ci-dessous une démonstration simplifiée qui utilise simplement le lemme IV.1.6 .

Démonstration. Il s'agit de prouver que si w est une valuation de $K(X)$ de hauteur 1, prolongeant v et dont l'anneau contient $A[X]_{sub}$, alors $\hat{K}$ est une extension transcendante de K .

Le polynôme $Q_q(X) = \frac{1}{\pi}(X-a_o)(X-a_1)\dots(X-a_{q-1})$ (où $a_o = o$) appartient à $A[X]_{sub}$, donc $w(Q_q(X)) \geqslant o$ et il existe $i \in \{o,\dots,q-1\}$ tel que $w(X-a_i) > o$. On peut toujours supposer moyennant une translation $X \longmapsto X-a_i$ que $i=o$ et donc que $w(X) > o$. Soit $t \in \mathbb{N}-\{o\}$ tel que $t-1 < w(X) \leqslant t$. Calculons $w(Q_{q^t}(X))$, puis écrivons que cette valeur doit être positive ou nulle. On a $w(Q_{q^t}(X)) = \sum_{r=o}^{q^t-1} w(X-a_r) - u(q^t)$. Comme $w(X) > t-1$, on a $w(X-a_r) = v(a_r)$ pour $1 \leqslant r \leqslant q^t - 1$. D'autre part, $\sum_{r=1}^{q^t} v(a_r) = u(q^t)$. En définitive : $w(Q_{q^t}(X)) = w(X) - v(a_{q^t}) = w(X)-t \geqslant o$; d'où $w(X) = t$. De même, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $w(X-a_r)$ est un entier.

Supposons que l'ensemble des $w(X-a_r)$ soit majoré et posons maintenant : $t-1 = \sup_{r\in\mathbb{N}} w(X-a_r) = w(X-a_{r_o})$ et $Y = X-a_{r_o}$. On a donc $w(Y) = t-1$ et, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $w(Y-a_r) \leqslant t-1$; pour $1 \leqslant r \leqslant q^t-1$, $v(a_r) \leqslant t-1$ et on aura $w(Y-a_r) = v(a_r)$. Aussi par un calcul analogue au précédent

on voit que $w(Q_{q^t}(Y)) = w(Y) - v(a_{q^t}) = (t-1) - t = -1$.

Comme $Q_{q^t}(Y)$ appartient à $A[Y]_{sub} = A[X]_{sub}$, il y aurait une contradiction.

Ainsi, si on considère $K(X)$ muni de la topologie déduite de w , X est adhérent à A , ou encore A est dense dans $A[X]$, K est dense dans $K(X)$, $K(X)$ s'injecte dans $\hat{K}$ et $\hat{K}$ est transcendant sur K .

Le contre-exemple du théorème 5.1 répond en outre à une question de HEINZER [24]. Un anneau intègre A de corps des fractions K est dit de dimension valuative n s'il existe un anneau de valuation de hauteur n compris entre A et K , mais pas d'anneau de valuation de hauteur strictement supérieure à n . Le contre-exemple donné par NAKAYAMA étant de dimension valuative infinie (s'il était contenu dans un anneau de valuation de hauteur finie, il serait contenu dans un anneau de valuation de hauteur 1), Heinzer demande : Un anneau complètement intégralement clos ayant une dimension valuative finie est-il intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 ? Et, de façon plus faible, un anneau complètement intégralement clos, de Prüfer et de dimension finie est-il intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 ? Les réponses sont négatives :

5.3. Proposition. L'anneau $A[X]_{sub}$ indiqué en 5.1 est un anneau de Prüfer de dimension 2 qui n'est pas intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1.

Cela résulte des théorèmes V.2.1 et V.3.1 et leurs corollaires

CHAPITRE VII - EXTENSIONS DE FATOU

On résoud dans ce chapitre un problème posé par BENZAGHOU concernant les anneaux de Fatou et, de façon plus générale, on étudie le rapport entre les coefficients d'une fraction rationnelle et ceux de son développement en série, en utilisant la notion d'élément quasi-entier introduite précédemment.

1. LA QUESTION DES ANNEAUX DE FATOU

FATOU [16] a donné une propriété de l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers rationnels, résultat repris par POLYA [36] et connu sous le nom de :

1.1. Lemme de Fatou. Soient $P(X)$ et $Q(X)$ des polynômes à coefficients entiers rationnels tels que P et Q soient étrangers entre eux, que Q soit primitif et que $Q(o)$ soit non nul. Si les coefficients a_n du développement en série à l'origine de la fraction $P(X)/Q(X) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n X^n$ sont des entiers, alors $|Q(o)| = 1$.

Mais cette propriété de $\mathbb{Z}$ est encore vraie pour d'autres anneaux. Ainsi, PISOT [35] l'a démontrée pour les anneaux d'entiers d'un corps de nombres :

1.2. Proposition. Soit a_n le terme général d'une suite d'entiers d'un corps de nombres K . Supposons qu'il existe entre les éléments a_n une relation de récurrence d'ordre s :

1.2.1. $\quad a_{n+s} + q_1 a_{n+s-1} + \ldots + q_s a_n = o$

et qu'il n'en existe aucune d'ordre $s-1$. Alors $q_1, q_2, \ldots, q_s$ sont des entiers de K .

C'est bien une généralisation du lemme de Fatou, car :

1.3. Etant donné un corps K, pour que la série $\sum a_n X^n$ où les a_n sont des éléments de K représente une fraction rationnelle $P(X)/Q(X)$ de $K(X)$ il faut et il suffit que, pour n assez grand, les éléments a_n vérifient une relation de récurrence de la forme (1.2.1). Lorsque ceci est réalisé et que l'ordre s de la relation est le plus petit possible, il existe une représentation de la fraction rationnelle correspondante avec des polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $K[X]$ étrangers entre eux et $Q(X) = 1 + q_1 X + \ldots + q_s X^s$.
Si le degré de P est strictement inférieur à celui de Q, alors la récurrence (1.2.1) commence à $n=o$.

1.4. Pour tout anneau intègre A de corps des fractions K, la propriété (i) ci-dessous implique la propriété (ii) :

(i) Pour tout couple de polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $K[X]$ tels que P et Q soient étrangers entre eux et que $Q(o) = 1$, si les coefficients du développement en série à l'origine de $P(X)/Q(X)$ appartiennent à A , alors les coefficients de $Q(X)$ appartiennent aussi à A .

(ii) Pour tout couple de polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $A[X]$ tels que P et Q soient étrangers entre eux, que Q soit primitif et que $Q(o)$ soit non nul, si les coefficients du développement en série à l'origine de $P(X)/Q(X)$ appartiennent à A , alors $Q(o)$ est inversible dans A .

Notons en outre que DRESS [15] a étendu à son tour la propriété (i) en question aux anneaux factoriels.

Ce qui précède a conduit BENZAGHOU à poser la définition suivante :

1.5. Définition. (BENZAGHOU [3]). Un anneau intègre A de corps des fractions K est dit de Fatou lorsque les propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout couple de polynômes P(X) et Q(X) de K[X] tels que P et Q soient étrangers entre eux et que Q(o) = 1 , si les coefficients du développement en série à l'origine de P(X)/Q(X) appartiennent à A , alors les coefficients de Q(X) appartiennent aussi à A .

(ii) Si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A vérifie une relation de récurrence du type (1.2.1), où les coefficients q_k appartiennent à K et où l'ordre s de la récurrence est le plus petit possible, alors les q_k sont eux-mêmes dans A .

BENZAGHOU a retrouvé tous les cas d'anneaux de Fatou envisagé précédemment en prouvant :

1.6. Un anneau intègre qui est intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 est un anneau de Fatou [3].

Et il a remarqué que :

1.7. Un anneau de Fatou est complètement intégralement clos [3] (cf. VI.4.9).

Ces deux résultats lui ont fait poser la question : la classe des anneaux de Fatou est-elle distincte de la classe des anneaux intègres qui sont intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 et de la classe des anneaux complètement intégralement clos [3] ? A ce propos, nous avons vu au paragraphe VI.5 que l'on trouve difficilement des exemples d'anneaux complètement intégralement clos qui ne sont pas intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 .

Depuis, on a montré que :

1.8. La classe des anneaux de Fatou est distincte de la classe des anneaux intègres qui sont intersection d'anneaux de valuation de hauteur 1 [11].

1.9. La propriété pour un anneau d'être de Fatou passe à la fermeture intégrale [3] et aux anneaux de polynômes [7], mais ne passe pas aux localisés [11] (tout comme pour la propriété d'être complètement intégralement clos).

Finalement, nous verrons avec le théorème 3.3 que les anneaux de Fatou sont exactement les anneaux complètement intégralement clos.

Mais nous allons commencer par étudier les représentations d'une fraction rationnelle.

2. REPRESENTATIONS D'UNE FRACTION RATIONNELLE

2.1. Pour tout anneau A, nous appellerons "anneau des fractions rationnelles à coefficients dans A" et noterons $A(X)$ le localisé de l'anneau des polynômes $A[X]$ par la partie multiplicative formée des polynômes dont le coefficient non nul de plus bas degré est égal à 1.

Notons que cette définition coïncide avec celle du corps des fractions rationnelles lorsque A est un corps.

Dans la suite de ce paragraphe A désignera un anneau intègre de corps des fractions K.

2.2. On appelle représentation d'une fraction rationnelle à coefficients dans K son écriture comme un quotient P/Q de deux polynômes P et Q à coefficients dans K. On dit que la représentation est :

- irréductible si les polynômes P et Q sont étrangers entre eux,
- normalisée si le coefficient non nul de plus bas degré de Q est égal à 1,
- à coefficients dans A si les coefficients de P et de Q appartiennent à A.

2.3. Tout élément de $K(X)$ admet une représentation irréductible normalisée et une seule P_1/Q_1 et toute autre représentation normalisée P/Q s'en déduit par les formules $P = P_1.R$ et $Q = Q_1.R$ où R est un polynôme à coefficients dans K dont le coefficient non nul de plus bas degré est égal à 1 .

2.4. L'anneau $A(X)$ est l'ensemble des éléments de $K(X)$ admettant une représentation normalisée (pas nécessairement irréductible) à coefficients dans A .

2.5. Proposition. Etant donné un élément de $K(X)$ il est équivalent de dire :

(i) qu'il admet une représentation normalisée P/Q telle que les coefficients de Q soient dans A .

(ii) qu'il admet une représentation normalisée P/Q telle que les coefficients de Q soient entiers sur A .

(iii) que sa représentation irréductible normalisée P_1/Q_1 est telle que les coefficients de Q_1 soient entiers sur A .

Démonstration. Il est clair que (i) implique (ii). Montrons que (ii) implique (iii) : d'après 2.3, on a $Q = Q_1.R$ où R est un polynôme à coefficients dans K dont le coefficient non nul de plus bas degré est égal à 1 . On a donc l'égalité suivante entre les polynômes réciproques qui eux sont unitaires : $Q^* = Q_1^*.R^*$. Si les coefficients de Q^* sont entiers sur A ,

alors ses racines sont entières sur A , a fortiori les racines de Q_1^* sont entières sur A et les coefficients de Q_1^* c'est-à-dire de Q_1 sont entiers sur A . Enfin, le fait que (iii) implique (i) résulte directement du lemme suivant :

2.6. Lemme. Pour tout polynôme Q de $K[X]$ à coefficients entiers sur A et tel que $Q(o)=1$, il existe un polynôme R de $K[X]$ tel que $R(o)=1$ et que $Q.R$ soit à coefficients dans A .

Démonstration. On écrit $Q(X)$ sous la forme $\prod_i (1-x_iX)$ où les x_i sont les inverses des racines de Q dans un corps de décomposition L . Les x_i sont racines du polynôme réciproque de Q donc entiers sur A'_K , c'est-à-dire entiers sur A . Si R_i est un polynôme unitaire à coefficients dans A tel que $R_i(x_i) = o$, alors $1-x_iX$ divise le polynôme réciproque R_i^* de R_i dans $L[X]$. Le polynôme $R = \prod_i R_i^* / \prod_i (1-x_iX)$ est bien sûr à coefficients dans K et vérifie $R(o)=1$, ainsi que $QR = \prod_i R_i^* \in A[X]$.

3. DEVELOPPEMENT EN SERIE D'UNE FRACTION RATIONNELLE

3.1. Pour tout anneau A ; nous appellerons "anneau des séries formelles à coefficients dans A et à exposants entiers rationnels et noterons $A((X))$ le localisé de l'anneau des séries formelles $A[[X]]$ par la partie multiplicative formée des puissances de X .

Tout élément de $A((X))$ admet une représentation et une seule sous la forme $\sum_{n \geqslant n_o} a_n X^n$ où $a_n \in A$ et $n_o \in \mathbb{Z}$.

Comme les polynômes dont le coefficient non nul de plus bas degré est égal à 1 sont inversibles dans $A((X))$, il y a une inclusion naturelle de $A(X)$ dans $A((X))$. Lorsque A est un corps, on retrouve l'inclusion du corps $A(X)$ dans le corps $A((X))$.

Dans la suite de ce paragraphe A désignera un anneau intègre de corps des fractions K .

La proposition 2.5 admet pour corollaire :

3.2. Proposition. L'anneau $A(X)$ est l'ensemble des éléments de $K(X) \cap A((X))$ dont la représentation irréductible normalisée est à coefficients entiers sur A .

Démonstration. Soit P/Q la représentation irréductible normalisée d'un élément de $K(X)$ .Si P/Q appartient à $A(X)$,alors d'après la proposition 3.6 les coefficients de Q sont entiers sur A et, comme P/Q appartient à $A((X))$,les coefficients de P , qui sont combinaisons linéaires de ceux de Q à coefficients dans A , sont eux aussi entiers sur A . Inversement, si les coefficients de Q sont entiers sur A , alors d'après la proposition 3.6 il existe une représentation normalisée P'/Q' où les coefficients de Q' appartiennent à A et, si en outre P/Q appartient à $A((X))$, alors les coefficients de P' sont eux aussi dans A .

Le résultat fondamental est le suivant :

3.3. Théorème. La représentation irréductible normalisée de tout élément de $K(X) \cap A((X))$ est à coefficients quasi-entiers sur A . Autrement dit, pour tout couple de polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $K[X]$ tel que P et Q soient étrangers entre eux et que $Q(o) = 1$, si les coefficients du développement en série en X de la fraction rationnelle $P(X)/Q(X)$ appartiennent à A , alors les coefficients de P et de Q sont quasi-entiers sur A .

Démonstration. Soient donc $P(X)$ et $Q(X)$ deux polynômes à coefficients dans K et $\sum a_n X^n$ le développement en série de la fraction P/Q .On suppose que P et Q sont étrangers entre eux, que $Q(o) = 1$ et que les a_n appartiennent à A . Il s'agit de montrer que les coefficients de Q appartiennent à A_K^n .

Soit $1/x$ une racine de $Q(X)$. L'élément x étant algébrique sur K , il existe un élément non nul a de A tel que ax soit entier sur A . Posons $B = A[ax]$ et soit $L = K[x]$ le corps des fractions de B . On a $Q(X) = (1-xX).R(X)$ où $R(X) \in L[X]$ et il existe un élément non nul d de B tel que $d.R(X)$ appartienne à $B[X]$. On a les égalités :

$$dP/(1-xX) = dR.P/Q = (dR).(\sum a_n X^n) = \sum b_n X^n \quad .$$

Par hypothèse les a_n appartiennent à A et par construction les coefficients de dR appartiennent à B , donc les b_n appartiennent à B .

D'autre part, pour n assez grand $(n \geqslant p)$, les b_n vérifient la relation de récurrence : $b_{n+1} = x.b_n$, d'où :

$$b_{n+p} = x^n.b_p \quad \text{pour} \quad n \geqslant o \ .$$

En outre, b_p n'est pas nul, sinon b_n serait nul pour $n \geqslant p$, $\sum b_n X^n$ serait un polynôme et $1/x$ serait racine de P , contrairement à l'hypothèse. L'égalité précédente montre donc que x est un élément de L quasi-entier sur B (au sens classique). Comme B est un A-module de type fini, x est aussi quasi-entier sur A (cf. VI.2.6).

Soit maintenant L_1 un corps de décomposition de Q et $1/x_i$ les racines de Q dans L_1 . On a l'égalité : $Q(X) = \prod_i (1-x_iX)$ et on vient de voir que les x_i appartiennent à A''_{L_1} ; par suite les coefficients de Q appartiennent à A''_{L_1} , puisque A''_{L_1} est un anneau, et comme ils appartiennent aussi à K , ils sont finalement dans A''_K .

3.4. Corollaire. Soient $P(X)$ et $Q(X)$ deux éléments de $K[X]$ étrangers entre eux, avec $Q(o) = 1$. Pour qu'il existe un élément non nul d de A tel que le développement en série de la fraction rationnelle $d.P/Q$ soit à coefficients dans A il faut et il suffit que les coefficients de Q soient quasi-entiers sur A .

Démonstration. La condition nécessaire résulte du théorème 3.3. Inversement, supposons que Q appartienne à $A''_K[X]$. Posons $Q(X) = 1 - R(X)$ et soit d un élément non nul de A tel que $dA[R(X)]$ soit inclus dans $A[X]$. Soit d'autre part, d' un élément non nul de A tel que $d'.P$ appartienne à $A[X]$. Alors $d.d'.P/Q = d'.P. \sum_{n=o}^{\infty} dR^n$ appartient à $A[X].A((X)) \subset A((X))$.

3.5. Corollaire. L'anneau $K(X) \cap A((X))$ est inclus dans l'anneau $A''_K(X)$.

Notons que ce corollaire est nettement plus faible que le théorème.

4. EXTENSIONS DE FATOU.

Partant de l'idée de Benzaghou, FLIESS [18] a introduit la notion d'extension de fatou. Nous allons la reprendre ici dans le cas des anneaux intègres et pour une seule variable.

Dans la suite, A désigne un anneau intègre de corps des fractions K et B un anneau intègre contenant A de corps des fractions L .

4.1. Définition. On dit que l'anneau B est une extension de fatou de l'anneau A si l'on a l'égalité : $A(X) = B(X) \cap A((X))$.

On dit que l'anneau A est de fatou si son corps des fractions K est une extension de fatou de A .

Bien sûr on a toujours l'inclusion de $A(X)$ dans $B(X) \cap A((X))$ et seule l'inclusion inverse est en question.

Le corollaire 3.5 montre que la clôture intégrale A'_K de A est une extension de fatou de A . Nous allons en fait caractériser les extensions de fatou.

4.2. Proposition. Toute extension de corps est une extension de fatou [3].

C'est immédiat. Si P/Q est le représentation irréductible normalisée d'un élément de $L(X) \cap K((X))$, on peut écrire un système de "degré de Q" équations à coefficients dans K

vérifiées par les coefficients de Q et dont le déterminant est non nul ; les formules de Cramer montrent que ce système admet une solution dans K et comme la solution est unique les coefficients de Q appartiennent à K .

4.3. Théorème. Pour que B soit une extension de fatou de A il faut et il suffit que tout élément de K entier sur B et quasi-entier sur A soit entier sur A .

Démonstration. Soit P/Q la représentation irréductible normalisée d'un élément de $B(X)\cap A((X))$. C'est a fortiori un élément de $L(X)\cap K((X))$, donc de $K(X)$ d'après la proposition précédente et les coefficients de P et de Q sont dans K . Comme il s'agit de la représentation irréductible normalisée d'un élément de $K(X)\cap A((X))$, ces coefficients sont aussi quasi-entiers sur A (théorème 3.3) et comme il s'agit de la représentation d'un élément de $B(X)$ ces coefficients sont aussi entiers sur B (proposition 3.2). Si tout élément de K quasi-entier sur A et entier sur B est entier sur A , alors les coefficients de P et Q sont entiers sur A et la fraction P/Q appartient à $A(X)$ (proposition 3.2).

Inversement, supposons que B soit une extension de fatou de A et soit x un élément de K quasi-entier sur A et entier sur B . Soit d un élément non nul de A tel que $dA[x]$ soit inclus dans A . Alors la fraction $d/(1-xX)$ se développe en en $\sum_n dx^n X^n$; la série appartient à $A((X))$, la fraction

appartient à $B(X)$ car sa représentation irréductible normalisée est à coefficients entiers sur B (proposition 3.2). Par suite $d/(1-xX)$ appartient à $B(X) \cap A((X)) = A(X)$ et x est entier sur A toujours d'après la même proposition 3.2.

4.4. Corollaire. Pour que l'anneau A soit de fatou il faut et il suffit que tout élément de K quasi-entier sur A soit entier sur A.

Lorsqu'un anneau est de fatou tout anneau intègre qui le contient en est une extension de fatou.

4.5. Corollaire. Pour que B soit une extension de fatou de A il faut et il suffit que $B \cap K$ soit une extension de fatou de A.

4.6. Corollaire. Si B est une extension de fatou de A, alors $B[X]$ est une extension de fatou de $A[X]$.

Cela résulte de ce que $(B[X])'_{L(X)} = B'_L[X]$ et que $(A[X])''_{K(X)} = A''_K[X]$.

4.7. Exemples d'anneaux de fatou.

(i) tout anneau intègre noethérien (car alors les notions d'éléments entiers et quasi-entiers sont confondues).

(ii) tout anneau intègre dont la clôture intégrale est un anneau complètement intégralement clos (l'exemple VI.2.9 montre que cette condition n'est pas nécessaire pour que l'anneau soit de fatou).

4.8. Remarque. La propriété pour un anneau d'être de fatou ne passe pas (i) à la réunion filtrante (ii) aux localisés (iii) à la clôture intégrale.

On a vu au paragraphe VI.4 que la propriété d'être complètement intégralement clos n'est pas conservée par réunion filtrante ou par localisation, contrairement à la propriété d'être intégralement clos. Les assertions (i) et (ii) résultent alors de ce qu'un anneau complètement intégralement clos est de fatou et de ce qu'un anneau intégralement clos est de fatou si et seulement si il est complètement intégralement clos.

L'assertion (iii) résulte de l'exemple VI.2.9 (l'anneau A est de fatou tandis que l'anneau $B = A'_K$ ne l'est pas).

5. EXTENSIONS DE FATOU-BENZAGHOU

Dans ce paragraphe A désignera toujours un anneau intègre de corps des fractions K et B un anneau intègre contenant A de corps des fractions L.

Dans la définition des anneaux de Fatou, Benzaghou considère la représentation irréductible normalisée des fractions rationnelles ; aussi, de façon plus proche de cette idée, nous poserons la définition suivante :

5.1. Définition. On dit que l'anneau B est une extension de Fatou-Benzaghou de l'anneau A si, la représentation irréductible normalisée d'un élément de $B(X)\cap A((X))$ étant à coefficients dans B, cette même représentation est en fait à coefficients dans A.

On dit que l'anneau A est de Fatou-Benzaghou (ou de Fatou) si son corps des fractions K est une extension de Fatou-Benzaghou de A.

Si A est un anneau de fatou, tout élément de $K(X)\cap A((X))$ admet une représentation normalisée à coefficients dans A, alors que si A est un anneau de Fatou (avec une majuscule) c'est la représentation irréductible normalisée qui doit être à coefficients dans A, puisque cette même représentation est de toute façon à coefficients dans K. Ainsi, tout anneau de Fatou est un anneau de fatou. Par contre, on ne sait pas si une extension de Fatou-Benzaghou est une extension de fatou, sauf en ce qui concerne les extensions de corps :

5.2. Proposition. Toute extension de corps est une extension de Fatou-Benzaghou.

Cela résulte de la proposition 4.2.

5.3. Théorème. Pour que B soit une extension de Fatou-Benzaghou de A il faut et il suffit que A soit complètement intégralement fermé dans $B \cap K$.

Démonstration. Soit P/Q la représentation irréductible normalisée d'un élément de $B(X) \cap A((X))$. On sait que les coefficients de P et Q appartiennent à A''_K (théorème 3.3), si on les suppose en outre dans B et si A est complètement intégralement fermé dans $B \cap K$, alors les coefficients de P et Q appartiennent à A et l'extension est bien de Fatou-Benzaghou.

Inversement, soit x un élément de $B \cap K$ quasi-entier sur A et soit d un élément non nul de A tel que $dA[x]$ soit inclus dans A . Alors $d/(1-xX)$ est la représentation irréductible normalisée d'un élément de $B(X) \cap A((X))$ dont les coefficients sont dans B ; si l'on suppose que l'extension est de Fatou-Benzaghou, ces coefficients sont dans A , x appartient à A et A est complètement intégralement fermé dans $B \cap K$.

5.4. Corollaire. Pour que B soit une extension de Fatou-Benzaghou de A il faut et il suffit que $B \cap K$ soit une extension de Fatou-Benzaghou de A .

5.5. Corollaire. Pour que A soit un anneau de Fatou il faut et il suffit que A soit complètement intégralement clos.

BIBLIOGRAPHIE -

1 ACZEL (J.).- Ueber die Gleichheit der Polynomfunctionnen auf Ringen, Act. Sci. Math. ; t.21, 1960, p. 105-107.

2. AMICE (Y.).- Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t.92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math., Paris, 1963).

3. BENZAGHOU (B.).- Algèbres de Hadamard, Bull. Soc. math. France, t. 98, 1970, p. 209-252 (Thèse Sc. math. Paris, 1969).

4. BOURBAKI (N.).- Algèbre, 1967.
5 - - Algèbre commutative, 1961-1965.
6 - - Topologie générale, 1967.- Paris, Hermann.

7 CAHEN (P.-J.).- Transfert de la propriété de Fatou aux anneaux de polynômes, Bull. Sc. math., 2° série, t. 94, 1970, p. 81-83.
8 - - Queen's University at Kingston, Mathematical Preprints, n° 4, 14 et 24, 1971.

9 CAHEN (P.-J.) et CHABERT (J.-L.).- Coefficients et valeurs d'un polynôme, Bull. Sc. math., 2° série, t.95, 1971, p. 295-304.
10 - - Extensions de Fatou, Queen"s University at Kingston, Mathematical Preprint, n° 22, 1972.

11 CHABERT (J.-L.).- Anneaux de polynômes à valeurs entières et anneaux de Fatou, Bull. Soc. math. France, t. 99, 1971, p. 273-283.
12 - - Anneaux de polynômes à valeurs entières, Colloque d'algèbre de Rennes, 1972, exposé n° 8.
13 - - Anneaux de Fatou, L'enseignement mathématique, t. 18, 1972, p. 141-144.

14 DICKSON (S. E.).- A torsion theory for abelian categories, Trans. Amer. Math. Soc., t. 121, 1966, p. 223-235.

15 DRESS (Fr.).- Familles de séries formelles et ensembles de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4° série, t. 1968, p. 1-44 (Thèse Sc. math. Paris, 1967).

16 FATOU (P.).- Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta. Math., Uppsala, t. 30, 1906, p. 335-400 (Thèse).

17 FERRAND (D.).- Monomorphismes de schéma noethériens, Séminaire P. Samuel, 1967-1968, n° 7.- Paris, Secrétariat mathématique.

18 FLIESS (M.).- Séries formelles rationnelles et reconnaissables, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, Paris, 1972.

19 GABRIEL (P.).- Des catégories abéliennes, Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962, p. 323-448.

20 GAUTHERON (V.).- Anneaux d'entiers, Anneaux de Fatou, Modules non singuliers, Thèse 3° cycle, Paris, 1971.

21 GILMER (R.) et HEINZER (W.).- On the complete integral closure of an integral domain, J. Australian Math. Soc., t.6, 1966, p. 351-361.

22 GOLDIE (A. W.).- Torsion free modules and rings, J. of Algebra, t. 1, 1964, p. 268-287.

23 GROTHENDIECK (A.).- Eléments de géométrie algébrique.- Springer-Verlag, Berlin, 1971.

24 HEINZER (W.).- Some remarks on complete integral closure, J. Australian Math. Soc., t.9, 1969, p. 310-314.

25 HILL (P.).- On the complete integral closure of a domain, à paraître.

26 JANS (J. P.).- Some aspects of torsion, Pacific J. of Math., t. 15, 1965, p. 1249-1259.

27 KRULL (W.).- Allgemeine Bewertungstheorie, J. für reine und angew. Math., t. 167, 1931, p. 160-196.

28 - - Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche II, Math. Zeit., t. 41, 1936, P. 665-679.

29 - - Ueber eine Existenzsatz der Bewertungstheorie, Abh. Math. Sem. Hamburg, t. 23, 1959, p. 29-35.

30 LAZARD (D.).- Autour de la platitude, Bull. Soc. math. France, t. 97, 1969, p. 81-128 (Thèse Sc. math., Paris, 1968).

31 NAGATA (M.).- On Krull's conjecture concerning valuation rings, Nagoya Math. J., t. 4, 1952, p. 29-33 et t. 9, 1955, p. 209-212.

32 NAKAYAMA (T.).- On Krull's conjecture concerning completely integrally closed integrity domains, Proc. Imp. Acad. Tokyo, t. 18, 1942, p. 185-187 et 233-236, et, Proc. Japan Acad. t. 22, 1946, p. 249-250.

33 OHM (J.).- Some counterexamples related to integral closure in $D[[X]]$, Trans. Amer. Math. Soc., t. 122, 1966, p. 321-333.

34 OSTROWSKI (A).- Ueber ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern, J. für reine und angew. Math., t. 149, 1919, P. 117-124.

35 PISOT (Ch.).- La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 2° série, t. 7, 1938, p. 205-248 (Thèse Sc. math., Paris, 1938).

36 POLYA (P.).- Ueber Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten, Math. Ann., t. 77, 1916, p. 497-513.

37 POLYA (P.).- Ueber ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern, J. für reine und angew. Math., t. 149, 1919, p. 97-115.

38 ROUCHALEAU (Y.) et WYMAN (B.).- Linear dynamical systems over integral domains, à paraître.

39 VAN DE WAERDEN (B. L.).- Moderne Algebra.- Berlin, Springer, 1931.

40 ZARISKI (O.) et SAMUEL (P.).- Commutative algebra.- Princeton, D. Van Nostrand Company, 1958-1960.