

JEAN KUNTZMANN

**Remarques sur le calcul approché des racines
d'une équation**

Annales de l'université de Grenoble, tome 23 (1947-1948), p. 143-144

http://www.numdam.org/item?id=AUG_1947-1948__23__143_0

© Annales de l'université de Grenoble, 1947-1948, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'université de Grenoble » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

REMARQUES SUR LE CALCUL APPROCHÉ DES RACINES D'UNE ÉQUATION

par J. KUNTZMANN (Grenoble).

Soit $f(x) = 0$ l'équation proposée. Nous supposons que dans l'intervalle où l'on a enfermé la racine, la fonction $y = f(x)$ possède une fonction inverse et admet des dérivées jusqu'au 2^e ordre. Nous désignerons par $y'y''$, etc., $x'x''$, etc., les dérivées des divers ordres de y par rapport à x et de x par rapport à y . Les quantités relatives à un même point de la courbe représentative seront toutes affectées du même indice inférieur.

Nous désignerons par ε une borne supérieure de $\frac{y'_1 - y'_2}{y'_1}$ dans l'intervalle considéré (1, 2 quelconques dans l'intervalle).

C'est aussi une borne supérieure de $\frac{x'_1 - x'_2}{x'_1}$ car

$$\frac{x'_1 - x'_2}{x'_1} = \frac{\frac{1}{y'_1} - \frac{1}{y'_2}}{\frac{1}{y'_1}} = \frac{y'_2 - y'_1}{y'_2}$$

ε est invariant par tout changement d'échelles et pour une même échelle est en gros proportionnel à la longueur de l'intervalle car

$$\frac{y'_1 - y'_2}{y'_1} = \frac{y''_3}{y'_1} (x_1 - x_2).$$

Tant que ε n'est pas très petit, l'arc a une courbure appréciable sur les tracés à grande échelle, et le tracé graphique donne de meilleurs résultats que l'approximation par la corde ou la tangente.

Au contraire lorsque ε est très petit :

- 1° la corde, la tangente et l'arc sont graphiquement confondus ;
- 2° le point sur la corde ou sur la tangente donne des valeurs très approchées qu'il ne suffirait pas de déterminer graphiquement.

Pratiquement, on commencera à opérer par le calcul lorsque

$$\varepsilon \neq \frac{1}{100}.$$

**Calcul de l'erreur par les méthodes de Newton
et des parties proportionnelles.**

Ces deux méthodes se ramènent à une seule. On a deux points 1, 2 (distincts ou confondus). On remplace la courbe par la droite qui les joint. Prenons y comme variable, x comme fonction. Cela revient à trouver x_0 correspondant à $y_0 = 0$.

On a

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= (y_1 - 0)x'_0 & \theta \text{ entre } 0 \text{ et } 1, \\ x_2 - x_1 &= (y_2 - y_1)x'_{\theta'} & \theta' \text{ entre } 1 \text{ et } 2. \end{aligned}$$

On remplace θ par θ' .

On commet ainsi sur le terme correctif une erreur relative inférieure à $\frac{x'_\theta - x'_{\theta'}}{x'_\theta}$, donc inférieure à ε (ε étant relatif à l'intervalle 0, 1, 2).

Il peut être intéressant d'avoir une expression de l'erreur au moyen des dérivées de y .

On écrit :

$$x = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} (y - y_1) + K (y_2 - y)(y_1 - y)$$

et on choisit K pour que ceci soit vrai pour $y = 0$. On a alors en dérivant deux fois la quantité $x(y) - x_1 = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} (y_2 - y) K (y_1 - y)$ qui s'annule pour $y = y_1$, $y = y_2$, $y = 0$, $x''_0 = 2K$ (θ' sur 0, 1, 2).

L'erreur commise en interpolant linéairement, c'est-à-dire en négligeant le dernier terme est donc

$$\frac{x''_0}{2} y_1 y_2 = \frac{y''_0}{2 y_1^2} y_1 y_2.$$

Cette formule est valable, même si y_1 et y_2 sont de même signe (Par exemple, dans le cas de la méthode de Newton $y_1 = y_2$).

La borne supérieure de l'erreur ainsi trouvée est meilleure que celle donnée habituellement.

(Parvenu aux Annales le 1^{er} décembre 1947.)