

LOUIS NÉEL

Bases d'une nouvelle théorie générale du champ coercitif

Annales de l'université de Grenoble, tome 22 (1946), p. 299-343

http://www.numdam.org/item?id=AUG_1946__22__299_0

© Annales de l'université de Grenoble, 1946, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'université de Grenoble » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

BASES D'UNE NOUVELLE THÉORIE GÉNÉRALE DU CHAMP COERCITIF

par Louis NÉEL.

RÉSUMÉ

On rappelle dans l'introduction (§ 1 à 4) les principes de la théorie du champ coercitif actuellement admise, basée sur la notion de déplacement des parois de séparation entre les domaines élémentaires. La paroi est freinée par les *inégalités locales* de sa tension superficielle, que provoquent, soit les perturbations élastiques du réseau (Becker, Döring, etc...) soit la présence d'inclusions non magnétiques (Kersten). Les calculs ont toujours été menés de façon telle que tout se passe comme si la paroi était plane et rigide et les perturbations du réseau régulièrement réparties aux nœuds d'un réseau cubique simple.

L'auteur montre (§ 7) qu'en conservant l'hypothèse d'une paroi plane et rigide, mais avec une distribution essentiellement irrégulière des perturbations, beaucoup plus vraisemblable à priori, les plus grandes inégalités possibles de la tension superficielle ne provoquent en réalité qu'un champ coercitif négligeable, de l'ordre du dixième de gauss. Lorsqu'on suppose alors la paroi déformable, on obtient un champ coercitif plus grand mais qui reste néanmoins de l'ordre de grandeur du gauss (§ 8 à 12). Ainsi, le mécanisme auquel les théories actuelles ont recours est impuissant à rendre compte des champs coercitifs de plusieurs centaines de gauss fournis par l'expérience.

L'auteur propose (§ 12 et 13) un nouveau mécanisme, basé sur l'existence de fluctuations dans la *direction* ou l'*intensité* de l'aimantation spontanée, à l'intérieur des domaines élémentaires. Elles sont provoquées, en direction, par les perturbations élastiques du réseau, en intensité, par les inégalités de concentration ou par la présence d'inclusions ou de cavités. Par suite de l'existence de ces fluctuations, la divergence du vecteur aimantation n'est plus nulle, et les charges magnétiques fictives ainsi apparues créent une énergie magnétique qui varie suivant la position de la paroi, indépendamment de l'existence d'une tension superficielle de la paroi qui ne joue qu'un rôle secondaire.

On a ainsi calculé sur ces bases (§ 20 à 25) une expression approchée du champ coercitif provenant des inégalités locales des tensions internes du réseau (formules 84, 85, 86), ainsi qu'une expression approchée du champ coercitif

provenant des cavités et des inclusions (formules 98 et 99). On montre (§ 26) que l'ordre de grandeur des champs coercitifs obtenus est bien celui des champs observés : les inclusions jouant un rôle prépondérant dans le cas du fer et les déformations dans le cas du nickel. On montre enfin (§ 27) que la formule 99 permet de rendre compte d'une manière satisfaisante d'une série de résultats expérimentaux rassemblés par Kersten et relatifs à l'influence des inclusions sur le champ coercitif du fer. La théorie proposée paraît suffisamment souple et générale pour permettre de rendre compte d'un très grand nombre de faits d'expérience.

Au cours de ce travail, l'auteur a été amené à établir et à utiliser une représentation mathématique approchée des irrégularités des tensions superficielles de paroi (§ 5 et 6) ainsi qu'une expression approchée des perturbations de l'énergie magnétique provoquées par des tensions internes irrégulièrement distribuées (§ 14 à 19).

INTRODUCTION

1. — **Champ coercitif et variations de l'énergie superficielle de paroi.** — Les travaux de Becker⁽¹⁾, Kondorski⁽²⁾, Kersten⁽³⁾, etc., s'accordent pour attribuer les phénomènes d'hystérésis aux variations locales de l'énergie superficielle des parois de séparation entre les domaines élémentaires. Imaginons en effet une paroi P, *plane*, séparant deux domaines aimantés antiparallèlement, susceptible de se déplacer parallèlement à elle-même et repérons ces déplacements par l'abscisse x du plan de symétrie de la paroi⁽⁴⁾, comptée suivant un axe OX perpendiculaire à la paroi. Supposons que l'énergie superficielle γ de la paroi P, rapportée à l'unité de surface, varie avec x d'une manière irrégulière (courbe Γ , figure 1). En l'absence de champ magnétique, la paroi occupe l'une des positions A, A', d'énergie minimum. Si maintenant nous faisons agir un champ H, dirigé parallèlement à l'aimantation spontanée $\mathfrak{J}_s$ du domaine situé du côté des x négatifs, la paroi subit, par unité de surface, une force $2H\mathfrak{J}_s$, dirigée suivant OX, et se déplace dans ce sens jusqu'en un point où cette force soit équilibrée par la force $-\frac{\partial\gamma}{\partial x}$. Ainsi, quand le champ est faible, la paroi se déplace *réversiblement*. En particulier, après suppression du champ, elle revient en A. Cette réversibilité se maintient jusqu'à ce que la paroi atteigne en B un point d'inflexion de la courbe Γ ; soit h_c le champ critique correspondant. Si le champ dépasse tant soit peu cette valeur h_c , la paroi se déplace jusqu'en un point, tel que C, où la pente $\frac{\partial\gamma}{\partial x}$ de la courbe Γ soit égale

(1) BECKER et DÖRING, *Ferromagnetismus*, pp. 203-217.

(2) KONDORSKI, *Sowjet Phys.*, 1937, 11, 597.

(3) KERSTEN, *Physik. Z.*, 1943, 44, 63 ; cf. aussi référence 7.

(4) On sait en effet qu'une telle paroi n'est pas assimilable à un plan géométrique, mais possède une épaisseur notable de l'ordre de quelques centaines d'ångströms.

à $-2H_s$, et ce déplacement peut être très grand. Il est essentiellement *irréversible* car, en ramenant le champ à zéro, la paroi ne retourne qu'au minimum le plus voisin : en A' et non pas dans la

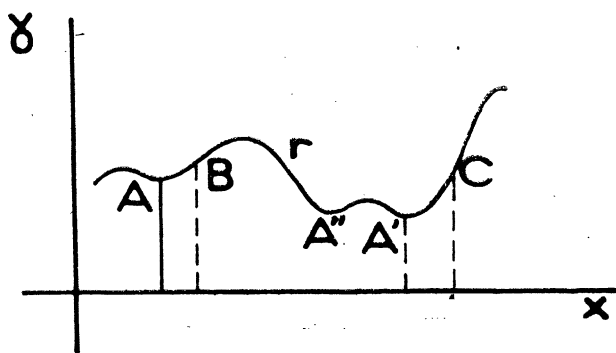


Fig. 1.

position initiale, en A. On conçoit qu'il soit possible d'établir sur ces bases une théorie formelle de l'hystérésis.

En particulier, le champ coercitif H_c est lié d'une manière étroite⁽⁵⁾ au champ critique correspondant à la valeur maximum $\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}\right)_m$ de la pente de la courbe Γ ; on a :

$$(1) \quad H_c \sim \frac{1}{2J_s} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}\right)_m.$$

Du point de vue physique, il importe maintenant de préciser l'origine de ces variations de tension superficielle. Deux phénomènes ont été invoqués : les inégalités des tensions internes (Becker, Döring⁽¹⁾, Kondorski)⁽²⁾ et l'existence d'inclusions non magnétiques (Kersten)⁽³⁾.

2. — Influence des tensions internes. — Becker a montré⁽⁶⁾ que lorsqu'un ferromagnétique, dont pour simplifier la magnétostriction à saturation λ_s est supposée isotrope, est soumis à une tension pure

⁽⁵⁾ Cf. NÉEL, Théorie des lois d'aimantation de Lord Rayleigh, *Cahiers de Physique*, n° 12, p. 1, 1942 et n° 13, p. 18, 1943, où ces problèmes sont discutés en détail.

⁽⁶⁾ BECKER et DÖRING, *Ferromagnetismus*, pp. 132-146.

σ , faisant un angle θ avec la direction de l'aimantation spontanée, il faut ajouter à l'énergie un terme de déformation élastique égal à $\frac{3}{2}\lambda_s\sigma\sin^2\theta$. La constante $C = \frac{3}{2}\lambda_s\sigma$ joue ainsi un rôle analogue à celui de la constante d'anisotropie K , de sorte que l'énergie de paroi égale à $2a\sqrt{JK}$ dans une substance non déformée, prend la valeur $2a\sqrt{J(K+bC)}$ sous l'action de la tension σ : dans ces expressions, a est le paramètre du réseau, J l'énergie d'échange par centimètre cube et b une constante numérique, de l'ordre de grandeur de l'unité, qui dépend de l'orientation de la paroi par rapport aux axes du cristal⁽¹⁾.

Tout changement d'orientation ou de grandeur de la tension de déformation est ainsi accompagné d'une modification de la tension superficielle. Dans les fortes déformations, C est de l'ordre de grandeur de K : on prévoit ainsi que l'amplitude $\delta\gamma$ des variations de l'énergie superficielle puisse atteindre l'ordre de grandeur de γ , c'est-à-dire quelques ergs par centimètre carré.

En supposant que les déformations ne dépendent que de x , la tension superficielle de la paroi P , dont il a été question plus haut, est ainsi susceptible de varier d'une quantité $\delta\gamma$, égale à quelques ergs par centimètre carré, dans un intervalle $d = x_1x_2$, qui peut être très petit si les inégalités de tension sont à petite échelle spatiale. Toutefois, cet intervalle ne peut devenir sensiblement inférieur à l'épaisseur e de paroi, à cause des effets de moyenne qui se produisent aux échelles plus petites. Comme e est de l'ordre de grandeur de quelques centaines d'angströms, on voit ainsi que le champ critique :

$$(2) \quad H_c = \frac{\delta\gamma}{2d\lambda_s}$$

peut atteindre quelques centaines de gauss pour les fortes déformations. C'est bien l'ordre de grandeur des champs coercitifs des bons aimants permanents.

3. — Influence des inclusions (Fremdkörpertheorie de Kersten^(3, 7)). — Depuis longtemps, les techniciens en matière d'aimants permanents ont remarqué que les impuretés et les additions non solubles augmentaient le champ coercitif du fer par leur présence

⁽¹⁾ Cf. l'exposé de KERSTEN, *Grundlagen einer Theorie der ferromagnetischen Hysterese und der Koerzitiokraft* (Hirzel, Leipzig, 1943).

même et non par un effet de déformation. Pour interpréter ces faits, Kersten a fait remarquer récemment qu'en présence d'inclusions non

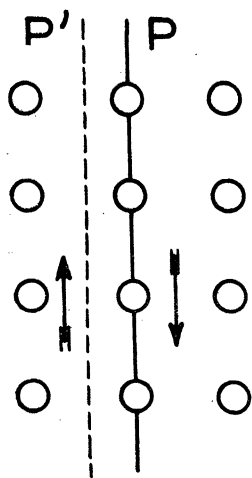


Fig. 2.

magnétiques l'énergie superficielle moyenne dépendait de la position de la paroi. Soit, en effet, des cavités sphériques, régulièrement réparties aux nœuds d'un réseau cubique simple (figure 2). Il est clair que dans la position P, où la paroi coupe un certain nombre de sphères, toutes les portions du plan de paroi situées à l'intérieur des sphères correspondent à une énergie superficielle nulle. L'énergie moyenne superficielle, par unité de surface, est donc plus faible que dans la position P' dans laquelle la paroi passe entre les sphères. Si les vides occupent un volume comparable à celui de la substance magnétique, les variations de l'énergie superficielle seront ainsi de l'ordre de grandeur de γ . L'ordre

de grandeur du champ critique correspondant est encore comparable à celui des données expérimentales.

4. — Critique des théories précédentes. — On peut élever de graves objections contre les théories que nous venons d'exposer. Elles supposent en effet, d'une part, la paroi plane, et, d'autre part, que les déformations, nous dirons désormais d'une manière plus générale les « accidents », sont également planes puisqu'indépendantes de y et de z ⁽⁸⁾ : un accident d'une épaisseur déterminée s'étend ainsi latéralement, parallèlement à la paroi sinon indéfiniment, du moins à des distances qui sont de l'ordre de grandeur des dimensions latérales de la paroi. Par exemple, un accident d'une épaisseur de 0,1 micron, correspondant à l'épaisseur d'efficacité maximum, s'étend latéralement sur au moins 10 microns puisque tel est l'ordre de grandeur des dimensions des domaines élémentaires et des parois qui les limitent. Ces accidents théoriques diffèrent énormément des accidents réels qui possèdent évidemment les mêmes dimensions

⁽⁸⁾ En réalité, dans la théorie de Kersten, les accidents ne sont pas plans, mais comme il s'agit d'accidents identiques, répartis aux nœuds d'un réseau cubique simple, avec paroi parallèle à l'une des faces du cube, cela revient exactement au même du point de vue mathématique.

moyennes suivant toutes les directions de l'espace. Mais alors, si il en est ainsi, une paroi plane, de dimensions latérales grandes vis-à-vis de ces accidents, doit en intégrer tous les effets, aussi bien les augmentations de tension superficielle que les diminutions et l'effet résultant doit finalement être beaucoup plus faible que celui qui a été calculé plus haut.

Il en résulte que pour établir d'une manière définitive si l'hypothèse d'un champ coercitif dû aux inégalités de tension superficielle permet d'interpréter les phénomènes expérimentaux, il est indispensable de recourir à des méthodes de calcul plus perfectionnées. Ce sera l'objet de la première partie de ce mémoire.

PREMIÈRE PARTIE

THÉORIE GÉNÉRALE DE LA PROPAGATION D'UNE PAROI A TENSION SUPERFICIELLE VARIABLE

5. — Représentation mathématique des irrégularités de tension superficielle. — Considérons d'abord une substance irrégulièrement perturbée, sans qu'il soit d'ailleurs nécessaire de préciser l'origine des perturbations qui peut être quelconque : tensions internes, inclusions, inégalités de composition, etc. Supposons simplement que l'échelle des irrégularités soit petite vis-à-vis des dimensions des domaines élémentaires et que leur intensité soit assez faible pour que la notion de domaine élémentaire conserve un sens. Ces perturbations provoquent des inégalités locales de tension superficielle dont nous nous proposons avant tout d'établir une représentation mathématique maniable.

Pour cela, rapportons la substance à trois axes rectangulaires OXYZ. La tension superficielle γ_T d'un élément de surface ds , centré autour d'un point $M(xyz)$, est une fonction aléatoire des coordonnées x, y, z . Soit γ_0 la valeur moyenne et $\gamma = \gamma_T - \gamma_0$ la partie purement aléatoire de cette fonction. D'autre part, les accidents sont principalement caractérisés par leur *intensité* et par leur *extension* dans l'espace.

Leur intensité est liée à la valeur $\overline{\gamma^2}$ de la moyenne quadratique de γ . Dans une substance très perturbée, $\overline{\gamma^2}$ est du même ordre de grandeur que γ_0^2 .

L'extension est liée à la valeur η d'une certaine *distance de corrélation*, telle qu'en deux points M et M' , dont la distance MM' soit grande vis-à-vis de η , les valeurs correspondantes de γ puissent être considérées comme indépendantes et qu'en deux points M et M' , dont la distance soit petite vis-à-vis de η , les valeurs correspondantes de γ soient égales. Nous supposerons essentiellement que la

distance de corrélation est petite par rapport aux dimensions des domaines élémentaires.

Choisissons alors dans la substance une *base B* constituée par un cube de côté $2\pi L$, qui soit de l'ordre de grandeur des dimensions des domaines élémentaires. A l'intérieur du cube, la partie purement aléatoire de la tension superficielle peut alors se développer en série de Fourier :

$$(3) \quad \gamma = \sum_{pqr} \gamma_{pqr} \frac{\sin px}{\cos L} \frac{\sin qy}{\cos L} \frac{\sin rz}{\cos L},$$

où la somme est étendue à toutes les valeurs positives ou nulles, sauf $p = q = r = 0$, de p , q , r , et en notant qu'à chaque jeu de valeurs p , q , r , se rattachent 8 coefficients γ_{pqr} correspondant aux 8 combinaisons possibles des sinus et des cosinus. Nous supposons que la substance *fictive* obtenue en répétant périodiquement la base suivant trois directions rectangulaires, avec une période égale à $2\pi L$, possède des propriétés pratiquement identiques à celles de la substance réelle.

Les valeurs des coefficients γ_{pqr} sont liées aux valeurs de γ dans la base B par la formule :

$$(4) \quad \gamma_{pqr} = \frac{1}{\pi^3 L^3} \int_B \gamma \frac{\sin px}{\cos L} \frac{\sin qy}{\cos L} \frac{\sin rz}{\cos L} dx dy dz,$$

où l'intégrale est étendue à tout le volume intérieur à la base⁽³⁾. En changeant la position de la base dans la substance réelle, les valeurs fournies par cette formule sont naturellement différentes de sorte que les coefficients γ_{pqr} ne possèdent pas de valeurs certaines mais doivent plutôt être considérés comme des variables purement aléatoires que nous supposerons en outre indépendantes. On pourra donc écrire les relations suivantes où un trait supérieur signifie la moyenne de la quantité située au-dessous, par rapport à toutes les positions possibles de la base :

$$(5) \quad \overline{\gamma_{pqr}} = 0, \quad \overline{\gamma_{pqr} \gamma_{p'q'r'}} = 0.$$

En fait, dans les calculs n'interviendront que les moyennes quadra-

(3) Cette formule n'est valable que dans le cas où le produit pqr est différent de zéro. Quand l'une des quantités p , q , r , est nulle, il faut multiplier le second membre par 1 : 2 et par 1 : 4 quand deux des quantités p , q , r sont nulles.

tiques $\overline{\gamma_{pqr}^2}$ des coefficients. Il s'agit donc de calculer ces moyennes quadratiques en fonction de $\overline{\gamma^2}$ et de η , constantes caractéristiques de la perturbation.

6. — Calcul des moyennes quadratiques des coefficients du développement en série de Fourier d'une fonction aléatoire. — En élevant au carré l'équation (4), après avoir posé $d\tau = dx dy dz$ et $d\tau' = dx' dy' dz'$, on obtient, pour un terme à 3 cosinus par exemple :

$$(6) \quad \overline{\gamma_{pqr}^2} = \frac{1}{\pi^6 L^6} \int_B \int_B \gamma \gamma' \cos \frac{px}{L} \cos \frac{px'}{L} \cos \frac{qy}{L} \cos \frac{qy'}{L} \cos \frac{rz}{L} \cos \frac{rz'}{L} d\tau d\tau'.$$

Soit, centré autour du point $M(xyz)$ un cube C de côté égal au double de la distance η de corrélation. A titre d'approximation, nous supposons que si le point $M'(x'y'z')$ est en dehors de ce cube, la valeur moyenne de $\gamma \gamma'$, relative à toutes les positions de la base, est nulle, tandis que si le point M' est à l'intérieur du cube, cette valeur moyenne est égale à $\overline{\gamma^2}$. Dans ces conditions, si p, q, r , sont tels que $\frac{p\eta}{L}, \frac{q\eta}{L}, \frac{r\eta}{L}$, soient petits par rapport à $\frac{\pi}{2}$, l'intégrale (6) se réduit à :

$$(7) \quad \overline{\gamma_{pqr}^2} = \frac{8\eta^3 \overline{\gamma^2}}{\pi^6 L^6} \int_B \cos^2 \frac{px}{L} \cos^2 \frac{qy}{L} \cos^2 \frac{rz}{L} d\tau,$$

soit finalement :

$$(8) \quad \overline{\gamma_{pqr}^2} = \frac{8\eta^3 \overline{\gamma^2}}{\pi^3 L^3}.$$

Si au contraire $\frac{p\eta}{L}, \frac{q\eta}{L}, \frac{r\eta}{L}$ deviennent grands par rapport à $\frac{\pi}{2}$, la valeur moyenne de $\cos \frac{px'}{L} \cos \frac{qy'}{L} \cos \frac{rz'}{L}$ dans le cube C tend vers zéro et il en est de même de $\overline{\gamma_{pqr}^2}$. Posons alors $N = \frac{\pi L}{2\eta}$. Nous pouvons alors rassembler et schématiser ces résultats en disant que lorsque p, q, r sont tous inférieurs à N , la moyenne quadratique $\overline{\gamma_{pqr}^2}$ est donnée par :

$$(9) \quad \overline{\gamma_{pqr}^2} = \frac{\overline{\gamma^2}}{N^3};$$

elle est indépendante de p, q, r . Elle est nulle au contraire lorsque

l'une quelconque des quantités p , q , r , est supérieure à N . Ces résultats sont très simples : nous pourrions les admettre à priori comme définissant la perturbation, idéalement irrégulière, la plus simple.

1^{re} Remarque. — Les calculs précédents ne s'appliquent que dans le cas où le produit pqr est différent de zéro. Quand l'une des quantités p , q , r est nulle, on a par exemple :

$$(10) \quad \overline{\gamma_{oqr}^2} = \frac{1}{2} \frac{\overline{\gamma^2}}{N^3}$$

et quand deux des quantités p , q , r , sont nulles on a :

$$(11) \quad \overline{\gamma_{oor}^2} = \frac{1}{4} \frac{\overline{\gamma^2}}{N^3}.$$

2^e Remarque. — En un sens, les approximations de ce paragraphe reviennent à fragmenter la base B en $8N^3$ cubes égaux au cube C et à se donner, dans chacun de ces cubes, des valeurs constantes de γ indépendantes les unes des autres. On retrouve ces $8N^3$ variables aléatoires indépendantes sous la forme des $8N^3$ coefficients indépendants γ_{pqr} du développement (3), ce qui logiquement est satisfaisant.

3^e Remarque. — Sans doute, une telle représentation des irrégularités de la tension superficielle n'est-elle pas rigoureuse mathématiquement parlant, du moins paraît-elle s'approcher beaucoup plus près de la réalité que la méthode des accidents plans. Rappelons d'ailleurs à ce propos que des procédés de calcul analogues, appliqués aux lois d'approche à la saturation, ont fourni des résultats satisfaisants, en accord avec les données expérimentales⁽¹⁰⁾ ⁽¹¹⁾.

4^e Remarque. — Tous ces résultats ne s'appliquent qu'autant que la distance de corrélation η est plus grande que l'épaisseur e de paroi. Si η est inférieur à e , il faut limiter la somme (3) aux valeurs de p , q , r , inférieures chacune à la limite $N' = \frac{\pi L}{2e}$. En effet comme nous l'avons déjà fait remarquer plus haut (§ 2), la paroi intègre les

⁽¹⁰⁾ NÉEL, La loi d'approche en $a : H$ et une nouvelle théorie de la dureté magnétique (*Cahiers de Physique*, à paraître en 1946 ; voir aussi : *C. R. Ac. Sc.*, 1945, 220, 738).

⁽¹¹⁾ NÉEL, Relation entre la constante d'anisotropie et la loi d'approche à la saturation des ferromagnétiques (*Cahiers de Physique*, à paraître en 1946 ; voir aussi : *C. R. Ac. Sc.*, 1945, 220, 814).

accidents de petite longueur d'onde et leur influence, toutes choses égales d'ailleurs, devient d'autant plus faible que cette longueur d'onde est plus petite devant e . Pour simplifier, nous supposons donc finalement que les γ_{pqr} sont nuls lorsque l'un quelconque des p, q, r , est plus grand que le plus petit des deux nombres N et N' .

7. — Étude des déplacements d'une paroi plane. — Étudions maintenant les déplacements d'une paroi *plane*, parallèle au plan XOY. Son énergie superficielle, rapportée au centimètre carré, considérée comme une fonction de z , s'obtient en faisant la moyenne de l'expression (3) par rapport à x et y et se réduit ainsi à :

$$(12) \quad \gamma = \sum_r \gamma_{oor} \frac{\sin rz}{\cos L},$$

où le signe somme ne s'étend plus qu'aux $2N$ termes correspondant aux valeurs nulles de p et de q . On en déduit :

$$(13) \quad \frac{\partial \gamma}{\partial z} = \sum_r \gamma_{oor} \frac{r}{L} \frac{+\cos rz}{-\sin L}.$$

Pour calculer le champ coercitif moyen, il faut connaître la moyenne de la valeur maximum $\left(\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)_m$ de $\frac{\partial \gamma}{\partial z}$ relative à toutes les positions possibles de la base B. Pour l'évaluer, calculons d'abord la moyenne quadratique de $\frac{\partial \gamma}{\partial z}$, soit d'après (13) :

$$(14) \quad \overline{\left(\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)^2} = \sum_r \frac{1}{2} \frac{r^2}{L^2} \overline{\gamma_{oor}^2},$$

et en utilisant la relation (11), il vient :

$$(15) \quad \overline{\left(\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)^2} = \sum_{r=1}^N \frac{r^2}{4L^2 N^3} \overline{\gamma^2} = \frac{1}{12} \frac{\overline{\gamma^2}}{L^2}.$$

Pour établir une relation entre $\overline{\left(\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)^2}$ et $\overline{\left(\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)_m^2}$, nous nous inspirons d'une méthode antérieurement appliquée à l'interprétation des lois de Rayleigh dans les champs faibles⁽⁸⁾ : nous approcherons la courbe $\gamma = f(z)$ par un contour polygonal de $2N$ côtés, ayant chacun

une longueur égale à L/N et dont les pentes sont données par une loi de probabilité de Gauss. Dans un cas comme dans l'autre, on conserve ainsi le même nombre $2N$ de variables aléatoires indépendantes. Il est alors aisé de voir que le rapport $\overline{\left(\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)^2} : \overline{\left(\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)^2}_m$ est de l'ordre de grandeur de $\log 2N$.

En utilisant alors l'expression (1) du champ coercitif, on obtient

$$(16) \quad H_c \sim \sqrt{\frac{\log 2N}{12}} \frac{\sqrt{\overline{\gamma^2}}}{2\beta_s L}.$$

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, $\sqrt{\overline{\gamma^2}}$ est au maximum de l'ordre de γ_0 c'est-à-dire de quelques unités c. g. s., L est de l'ordre de 10^{-3} cm, N (ou N') est au plus de l'ordre d'une centaine. Le champ coercitif que donne la formule (16) est ainsi de l'ordre de 1 gauss pour les plus fortes perturbations possibles de la tension superficielle, bien au-dessous des valeurs de plusieurs centaines de gauss fournies par les méthodes de Döring, Kornetzki, Kersten, etc.

8. — Étude des déplacements d'une paroi déformable. — Le résultat précédent ne prouve pas cependant que le champ coercitif ne provienne pas des inégalités de la tension superficielle de paroi, car une autre des hypothèses des auteurs précités est indéfendable : celle de la paroi plane. La paroi doit en effet se déformer et se gondoler irrégulièrement au cours de sa propagation. Nous allons lever cette restriction et étudier les conséquences de ce phénomène. Pour cela nous utiliserons l'expression de γ donnée en (3), mais pour simplifier l'écriture et les calculs ultérieurs, nous supposerons nuls les termes correspondant aux valeurs simultanément nulles de p et de q , ce qui ne présente aucun inconvénient puisque nous venons de montrer que leur influence est négligeable et qu'au surplus ces termes, indépendants de x et de y , ne tendent pas à déformer la paroi.

Nous supposerons les coefficients γ_{pqr} suffisamment petits par rapport à γ_0 pour que la paroi soit peu déformée et qu'une position quelconque de la paroi, parallèle en moyenne au plan XOY, et d'altitude moyenne h_0 , puisse être représentée par l'équation :

$$(17) \quad z = h_0 + \sum_{pq} h_{pq} \frac{\sin px}{\cos L} \frac{\sin qy}{\cos L}.$$

En principe, cette paroi sépare deux régions : du côté des z négatifs,

une région dont l'aimantation spontanée J_s est partout parallèle à la direction OX supposée être une direction privilégiée ; du côté des z positifs une région avec aimantation spontanée dirigée en sens inverse. En réalité, l'aimantation spontanée subit au voisinage de la paroi des déviations locales dont nous aurons également à tenir compte.

Nous nous proposons de déterminer la ou les positions d'équilibre possibles de la paroi sous l'action d'un champ H parallèle à OX. Il faudra pour cela déterminer les valeurs correspondantes des coefficients h_o et h_{pq} : à cet effet, nous écrirons que l'énergie libre F , considérée comme une fonction de ces coefficients est minimum.

9. — Calcul des différents termes de l'énergie. — Cette énergie F , que nous rapporterons à l'unité de surface de paroi, est la somme de trois termes : l'énergie magnétique F_H dans le champ appliqué extérieur H , l'énergie de paroi F_p et l'énergie F_D du champ magnétique, dit de *dispersion*, provenant des charges magnétiques fictives réparties sur la paroi par suite de son obliquité par rapport à l'aimantation spontanée.

Énergie dans le champ extérieur. — Elle ne dépend que du champ H et de l'altitude moyenne h_o de la paroi ; à une constante près, elle s'écrit :

$$(18) \quad F_H = -2h_o J_s H.$$

Énergie de paroi. — Elle comprend deux termes. Un premier terme F'_p provient de l'augmentation de surface de la paroi provoquée par la déformation. Pour le calculer, en se limitant aux termes du second ordre, il suffit de supposer la tension superficielle constante et égale à γ_o . On obtient ainsi :

$$(19) \quad F'_p = \frac{\gamma_o}{8L^2} \sum_{pq} (p^2 + q^2) h_{pq}^2.$$

Le second terme F''_p correspond aux variations locales de la tension superficielle : on l'obtiendra en développant la valeur de γ donnée par l'équation (3) en série de Taylor par rapport à z autour de la valeur $z = h_o$ et en y reportant la valeur de z donnée en (17) ; on fera ensuite la moyenne par rapport à x et y et on y remplacera l'élément réel d'aire de la paroi par sa projection sur le plan XOY. On

obtient ainsi :

$$(20) \quad F''_P = \gamma_0 + \sum_{pq} \left\{ \frac{h_{pq}}{4} \sum_r \frac{r}{L} \gamma_{pqr} \frac{+ \cos r h_0}{- \sin \frac{r h_0}{L}} \right\}.$$

Pour écrire cette équation (20), nous utilisons le développement en série de Taylor de la série de Fourier (3). Ce procédé n'est évidemment valable que dans le cas où les valeurs des écarts $z - h_0$ de la paroi réelle par rapport à la paroi plane moyenne restent petits vis-à-vis de la plus petite des quantités L/p , L/q . Il en est bien ainsi, car, d'une part, du point de vue physique, le développement (3) peut, sans inconvénients, être considéré comme limité et d'autre part on peut étudier des perturbations d'amplitude suffisamment faible pour que les écarts $z - h_0$ soient inférieurs à toute limite fixée à l'avance.

Finalement le terme F_p cherché est donné par :

$$(21) \quad F_P = F'_P + F''_P.$$

Énergie magnétique. — Si les deux domaines que sépare la paroi conservaient une aimantation rigide, il apparaîtrait sur cette paroi une densité superficielle σ de charges magnétiques donnée par :

$$(22) \quad \sigma = \frac{2j_s}{L} \sum_{pq} p h_{pq} \frac{- \cos \frac{px}{L}}{+ \sin \frac{px}{L}} \frac{\sin \frac{qy}{L}}{\cos \frac{qy}{L}}.$$

Du point de vue des effets de ces charges, tout se passe en première approximation comme si la densité σ était une densité, donnée à priori, portée par la paroi moyenne d'altitude h_0 , au lieu d'être portée par la paroi réelle (17). Ces charges créent un champ magnétique dont les composantes normales à OX vont dévier l'aimantation spontanée de sa direction initiale parallèle à OX. Soit par exemple, dans le domaine inférieur, du côté des z négatifs, β et γ les angles, supposés petits, que font avec OX les projections de l'aimantation spontanée sur les plans XOY et XOZ. En chaque point, l'aimantation spontanée est en équilibre sous l'action des forces magnéto-cristallines dérivant d'un potentiel $K(\beta^2 + \gamma^2)$ et d'un champ magnétique dérivant d'un potentiel V . Les conditions d'équilibre s'écrivent :

$$(23) \quad 2K\beta + j_s \frac{\partial V}{\partial y} = 0; \quad 2K\gamma + j_s \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Dans le domaine supérieur, les équations sont analogues : il suffit de remplacer $\mathfrak{J}_s$ par $-\mathfrak{J}_s$.

En écrivant ces équations, nous négligeons les forces qui dérivent des interactions à courte distance de Weiss-Heisenberg, ce qui n'est légitime qu'autant que le rayon de courbure de la paroi déformée réelle est grand devant l'épaisseur de paroi (0,1 micron pour le fer). Nous supposons que cette condition est réalisée.

Comme l'aimantation n'est plus uniforme, il apparaît une densité cubique m de charges magnétiques, liée au potentiel V par l'équation de Poisson $\Delta V + 4\pi m = 0$ et donnée par

$$m = -\operatorname{div} \vec{\mathfrak{J}} = -\mathfrak{J}_s \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right)$$

au deuxième ordre près. En éliminant β , γ et m entre les quatre équations précédentes, on trouve finalement que le potentiel V satisfait à l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$(24) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + Q \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) = 0$$

après avoir posé pour abréger l'écriture :

$$(25) \quad Q = 1 + \frac{2\mu \mathfrak{J}_s^2}{K}.$$

Il faut maintenant trouver deux expressions analytiques du potentiel, solutions de (24), l'une V valable dans la région des $z - h_0$ négatifs, l'autre V' valable dans la région des $z - h_0$ positifs, nulles pour z infini et satisfaisant, sur la paroi de séparation, à la condition :

$$(26) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_0 - \left(\frac{\partial V'}{\partial z} \right)_0 = 4\pi \left(\sigma + \gamma_0 \mathfrak{J}_s + \gamma'_0 \mathfrak{J}_s \right),$$

en désignant par l'indice 0 les coordonnées du plan de paroi et compte tenu des charges σ et des charges provenant de la rotation de l'aimantation. D'après les équations (23) et (25), l'équation (26) s'écrit aussi :

$$(27) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_0 - \left(\frac{\partial V'}{\partial z} \right)_0 = \frac{4\pi\sigma}{Q}.$$

On trouve alors pour V :

$$(28) \quad V = \sum_{pq} V_{pq} \frac{-\cos \frac{px}{L} \sin \frac{qy}{L}}{\sin \frac{px}{L} \cos \frac{qy}{L}} e^{m(z-h_0)}$$

avec les notations :

$$(29) \quad m = \frac{1}{L} \sqrt{q^2 + \frac{p^2}{Q}} \quad \text{et} \quad (30) \quad V_{pq} = \frac{4\pi p \mathfrak{J}_s}{mLQ} h_{pq}.$$

Pour obtenir l'expression de V' , il suffit de remplacer V par V' et m par $-m$ dans la seule équation (28).

Connaissant V et V' , il est aisé d'en déduire β , γ et β' , γ' .

Ce qui nous importe d'ailleurs, c'est l'énergie de la distribution, obtenue en ajoutant en chaque point l'énergie magnéto-cristalline à l'énergie magnétique et en intégrant dans tout l'espace. On obtient ainsi, compte-tenu de (23) :

$$(31) \quad W = \int \left[\frac{H^2}{8\pi} + K(\beta^2 + \gamma^2) \right] d\tau \\ = \frac{1}{8\pi} \int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + Q \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + Q \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau.$$

Tous calculs faits, l'énergie correspondant à un centimètre carré de paroi s'écrit :

$$(32) \quad F_D = \frac{1}{16\pi} \sum_{pq} \frac{p^2 + Qq^2}{mL^2} V_{pq}^2 = \frac{\pi \mathfrak{J}_s^2}{L\sqrt{Q}} \sum_{pq} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + Qq^2}} h_{pq}^2.$$

Si nous avons supposé l'aimantation rigide, ce qui revient à supposer K infini, l'énergie correspondante aurait été obtenue en remplaçant Q par 1 dans l'équation précédente. On voit ainsi que les déformations des lignes d'aimantation qui se produisent dans la réalité divisent l'énergie par un facteur au moins égal à $\sqrt{Q}$, c'est-à-dire par au moins 6,6 dans le cas du fer, et au moins 5,7 dans le cas du nickel, à la température ordinaire, et davantage à haute température. On commettrait donc une grosse erreur en négligeant cette déformation.

10. — Équilibre de la paroi. — L'énergie totale, obtenue en ajoutant les valeurs de F_H , F'_P et F''_P , F_D données par les équations (18), (19), (20) et (32), est une fonction de h_0 et des h_{pq} . A l'équi-

libre, les dérivés partielles de l'énergie totale par rapport à chacune de ces variables seront nulles, ce qui donne les équations :

$$(33) \quad -2\mathcal{J}_s H - \sum_{pq} \left\{ h_{pq} \sum_r \frac{r^2}{4L^2} \gamma_{pqr} \frac{\sin r h_o}{L} \right\} = 0,$$

$$(34) \quad 2h_{pq} A_{pq} + \sum_r \frac{r}{4L} \gamma_{pqr} \frac{+\cos r h_o}{L} = 0,$$

dans lesquelles on a posé, pour simplifier l'écriture :

$$(35) \quad A_{pq} = \frac{\pi \mathcal{J}_s^2}{L \sqrt{Q}} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + Q q^2}} + \frac{\gamma_0}{8L^2} (p^2 + q^2).$$

En éliminant les h_{pq} , l'équation (33) prend la forme :

$$(36) \quad -2\mathcal{J}_s H + \frac{\partial \Gamma}{\partial h_o} = 0,$$

avec la notation :

$$(37) \quad \Gamma = \sum_{pq} \left\{ \frac{1}{4A_{pq}} \sum_r \frac{r^2}{4L} \gamma_{pqr} \frac{-\cos r h_o}{L} \right\}.$$

L'équation (36) représente l'équation d'équilibre d'une paroi fictive, plane et rigide, séparant les deux domaines élémentaires en cause, avec une énergie qui est une fonction irrégulière de l'altitude h_o donnée par l'équation (37). Le problème complexe du déplacement d'une paroi déformable est ainsi ramené au problème beaucoup plus simple du déplacement d'une paroi rigide.

11. Détermination du champ coercitif. — Pour calculer le champ coercitif, nous calculerons d'abord $\frac{\partial \Gamma}{\partial h_o}$ d'après l'équation (37) ;

$$(38) \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial h_o} = \sum_{pq} \left\{ \frac{1}{32A_{pq}} \sum_{rr'} \frac{r r'^2}{L^3} \gamma_{pqr} \gamma_{pqr'} \frac{-\cos r h_o}{L} \frac{\sin r' h_o}{L} \right\}.$$

Puis nous calculons la moyenne quadratique de cette quantité (38) pour toutes les valeurs de h_o , et toutes les positions possibles de la base B, ce qui donne en remarquant que les termes rectangles disparaissent dans la moyenne :

$$(39) \quad \overline{\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial h_o} \right)^2} = \sum_{pqrr'} \left(\frac{1}{32} \right)^2 \frac{1}{4A_{pq}^2 L^6} \gamma_{pqr}^2 \gamma_{pqr'}^2 r^2 r'^4.$$

En effectuant la sommation par rapport à r et à r' et en remplaçant $\overline{\gamma_{pqr}^2}$, $\overline{\gamma_{pqr'}^2}$ par leurs valeurs données en (9), il vient simplement :

$$(40) \quad \overline{\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial h_o}\right)^2} = \left(\frac{1}{32}\right)^2 \frac{N^2}{15L^6} (\overline{\gamma^2})^2 \sum_{pq} \frac{1}{A_{pq}^2}.$$

En réalité, ce qui nous intéresse, c'est la moyenne quadratique du maximum $\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial h_o}\right)_m$ de $\frac{\partial \Gamma}{\partial h_o}$. Par un raisonnement analogue à celui qui a été employé dans le paragraphe 7, on peut déduire que le rapport $\overline{\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial h_o}\right)^2} : \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial h_o}\right)_m^2$ doit être de l'ordre de grandeur de $\log 4N$ puisque l'expression de l'énergie donnée en (37) ne contient que $4N$ termes en sinus et cosinus réellement indépendants. D'après les relations (1) et (40), on obtiendra finalement la valeur approximative suivante du champ coercitif :

$$(41) \quad 2H_c J_s \sim \frac{N \overline{\gamma^2}}{32L^3} \sqrt{\frac{\log 4N}{15} \sum_{pq} \frac{1}{A_{pq}^2}}.$$

Calcul de $\sum \frac{1}{A_{pq}^2}$. — Les termes les plus importants de cette somme correspondent aux petites valeurs de A_{pq} parmi lesquels nous commencerons à calculer ceux qui correspondent à $p=0$. On tire aisément de (35) :

$$(42) \quad \sum_q \frac{1}{A_{oq}^2} = \left(\frac{8L^2}{\gamma_0}\right)^2 \sum_{q=1}^N \frac{1}{q^4} \sim \left(\frac{8L^2}{\gamma_0}\right)^2 \frac{\pi^4}{90}.$$

D'ailleurs, il faut en outre multiplier cette expression par 2 pour tenir compte des termes en sinus et en cosinus et la diviser par 4, car en remplaçant $\overline{\gamma_{ppr}^2}$ et $\overline{\gamma_{pqr'}^2}$ par leur valeur, nous avons uniformément utilisé la formule (9) alors qu'il aurait fallu utiliser la formule (10), puisque p est nul.

Calculons maintenant les termes de la somme pour lesquels p est différent de zéro. Les termes prépondérants correspondent aux petites valeurs de p pour lesquels p/Q est négligeable devant q . D'autre part en négligeant $\frac{p^2 \gamma_0}{8L^2}$ devant $\frac{q^2 \gamma_0}{8L^2}$, nous commettrons dans l'évaluation de la somme une erreur par excès, ce qui est sans impor-

tance, comme nous le verrons. Ceci posé, on aura :

$$(43) \quad A_{pq} = \frac{K}{2L} \frac{p^2}{q} + \frac{\gamma_0}{8L^2} q^2$$

et

$$(44) \quad \frac{1}{A_{pq}^2} = \left(\frac{8L^2}{\gamma_0} \right)^2 \frac{q^2}{\left(q^3 + \frac{4KL}{\gamma_0} p^2 \right)^2}.$$

La somme par rapport à q s'évalue simplement en la transformant en intégrale :

$$(45) \quad \sum_q \frac{1}{A_{pq}^2} \sim \frac{1}{3} \left(\frac{8L^2}{\gamma_0} \right)^2 \left[\frac{1}{\frac{4KL}{\gamma_0} p^2} - \frac{1}{N^3 + \frac{4KL}{\gamma_0} p^2} \right].$$

Le second terme du crochet est négligeable devant le premier. Il reste à faire la somme par rapport à p soit :

$$(46) \quad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

et finalement :

$$(47) \quad \sum_{pq} \frac{1}{A_{pq}^2} \sim \frac{\pi^2}{18} \left(\frac{8L^2}{\gamma_0} \right)^2 \frac{\gamma_0}{4KL} \quad (p=0 \text{ exclu}).$$

Or, la quantité $\frac{\gamma_0}{4KL}$ est toujours petite devant l'unité puisque γ_0 est de l'ordre de 1, K de l'ordre de 10^5 et L de l'ordre de 10^{-3} cm. Il en résulte que la somme (47) est négligeable devant la somme (42). La signification physique de ce résultat est d'ailleurs claire : les seules déformations de paroi dont les effets soient sensibles sont cylindriques avec des génératrices parallèles à la direction de l'aimantation spontanée. La paroi ressemble en somme à une tôle ondulée, avec ondulations parallèles à l'aimantation ; le champ démagnétisant s'oppose aux autres déformations.

Finalement, d'après (41) et (42), le champ coercitif s'écrit :

$$(48) \quad H_c \sim \frac{1}{30} \frac{N \gamma_0^2}{L \gamma_s \gamma_0} \frac{\pi^2}{8} \sqrt{\frac{\log 4N}{3}}.$$

Il est d'autant plus grand que L/N est plus petit, mais la valeur la

plus petite que puisse prendre cette quantité est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur e de paroi, soit 10^{-6} cm. Comme $\mathcal{J}_s$ est de l'ordre de 10^3 , il en résulte que, pour les plus grandes déformations possibles, la formule (48) donne un champ coercitif qui ne dépasse pas quelques gauss et qui est par conséquent bien inférieur aux valeurs expérimentales.

Ainsi, lorsqu'on tient compte des déformations de la paroi, on obtient un champ coercitif (éq. 48) nettement plus élevé qu'avec l'hypothèse d'une paroi plane (éq. 16), mais qui ne dépasse cependant pas dix pour cent des valeurs expérimentales. Les variations de la tension superficielle de paroi ne jouent en somme qu'un rôle assez secondaire dans l'origine du champ coercitif.

Les hypothèses qui sont à la base des théories actuellement admises ne permettent donc pas d'interpréter les faits expérimentaux : il est donc nécessaire de rechercher le mécanisme réel susceptible de freiner le déplacement des parois.

DEUXIÈME PARTIE

NOUVELLE THÉORIE DU CHAMP COERCITIF

12. — Sur le rôle certain des tensions internes et des cavités. — Si les inégalités de la tension superficielle de paroi ne jouent qu'un rôle subordonné dans l'interprétation du champ coercitif, il n'en reste pas moins que les anisotropies locales dues à la présence des tensions internes doivent jouer un rôle extrêmement important dans les phénomènes d'hystérésis. On peut en donner deux preuves convaincantes : on sait d'abord qu'un recuit qui suffit à relâcher les tensions de déformation suffit aussi à diminuer le champ coercitif dans des proportions considérables. En second lieu, comme, dans les substances à magnétostriction nulle, les tensions internes ne provoquent aucune anisotropie magnétique, on doit s'attendre à ce que de telles substances, les permalloys par exemple, possèdent des champs coercitifs particulièrement faibles : c'est bien ce que l'on constate.

D'autre part, comme nous l'avons déjà fait remarquer (§ 3), les cavités et les inclusions non magnétiques ont également une influence.

Nous allons montrer que dans ces deux cas, l'aimantation du domaine élémentaire n'est plus uniforme et que les champs magnétiques de dispersion qui en résultent empêchent le libre déplacement des parois des domaines.

13. — Les champs magnétiques de dispersion et le champ coercitif. — Soit d'abord deux domaines élémentaires adjacents, aimantés dans des directions antiparallèles et séparés par une paroi plane, parallèle à la direction de l'aimantation. Lorsque le cristal ne présente ni déformations, ni inclusions, l'aimantation est parfaitement uniforme et égale à l'aimantation spontanée théorique dans

l'ensemble de chaque domaine et la paroi de séparation est susceptible de se déplacer librement sans dépense d'énergie.

Imaginons maintenant à l'intérieur du cristal des tensions internes irrégulièrement distribuées. Sauf en quelques rares endroits, ces perturbations tendent à dévier l'aimantation spontanée de la direction idéale primitive de facile aimantation. Une nouvelle distribution d'aimantation spontanée tend ainsi à s'établir; mais cette nouvelle distribution, qui n'a aucune raison d'être à divergence nulle, s'accompagne de l'apparition de charges magnétiques internes, donc de *champs magnétiques de dispersion*. Cette apparition, qui nécessite de l'énergie, tend donc à s'opposer aux déviations de l'aimantation spontanée et en limite les amplitudes. Il s'agit là en somme d'*interactions magnétiques* entre les différentes régions d'un même domaine élémentaire.

Un équilibre s'établit alors, caractérisé par une certaine densité m de charges magnétiques: $m = -\operatorname{div} \vec{J}$, variable d'un point à l'autre à l'intérieur de chaque domaine. Si l'aimantation spontanée se retourne bout pour bout, comme cela se produit après le passage de la paroi, le nouvel équilibre est identique au précédent, à cela près que les densités sont changées de signes.

Soit donc un domaine A (figure 3a), aimanté vers la droite, dans

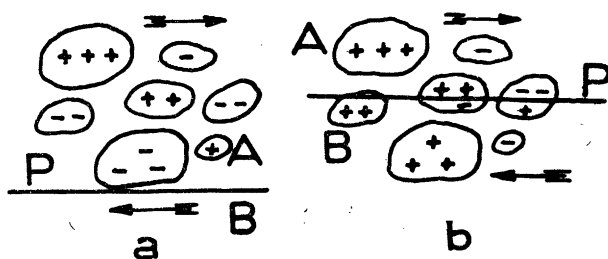


Fig. 3.

lequel nous avons figuré quelques îlots de charges magnétiques, les unes positives, les autres négatives; ce domaine A est séparé par une paroi P d'un domaine B aimanté en sens inverse. Il est visible que si la paroi prend la position de la figure 3b dans laquelle elle bissecte un certain nombre d'îlots, l'énergie potentielle du système devient plus faible. En effet, le passage de la paroi change le signe

des charges : la bissection d'un îlot fait donc apparaître des charges de signes contraires au voisinage les unes des autres, ce qui diminue l'énergie potentielle. Le passage de la paroi au travers d'un domaine ainsi perturbé est donc accompagné de fluctuations continues de l'énergie potentielle, d'où apparition de phénomènes d'hystérésis, selon le mécanisme décrit dans le paragraphe 1. Les variations de l'énergie superficielle de paroi ne jouent plus maintenant qu'un rôle subordonné et, dans une première approximation, on pourra les négliger.

L'apparition de l'hystérésis et du champ coercitif s'associe ainsi aux variations de *direction* de l'aimantation spontanée à l'intérieur des domaines. Remarquons dès à présent que des variations irrégulières de la *grandeur* de l'aimantation spontanée feront aussi apparaître des charges magnétiques internes et des phénomènes d'hystérésis selon un mécanisme tout à fait analogue au précédent. Ces variations de grandeur de l'aimantation spontanée seront produites par la présence d'une phase non magnétique, ou moins magnétique, finement dispersée à l'intérieur de la phase principale.

14. — Expression mathématique des perturbations de l'énergie dues à des tensions internes irrégulièrement distribuées. — La mise en œuvre mathématique de la théorie dont nous venons d'esquisser les bases présente malheureusement de très grosses difficultés. Nous serons obligés de mettre au point et d'utiliser des méthodes de calcul assez grossières, mais qui suffiront, nous l'espérons du moins, à donner l'ordre de grandeur des phénomènes.

Soit d'abord un domaine élémentaire, rapporté à trois axes rectangulaires OXYZ et aimanté suivant OX, direction privilégiée. Nous supposons que l'aimantation spontanée $\mathfrak{J}_s$ est retenue suivant OX par les forces magnétocristallines et éventuellement par un champ magnétique H. Si, dans un volume dv , l'aimantation spontanée s'écarte un peu de OX suivant une certaine direction, définie par ses cosinus directeurs β et γ par rapport à OY et OZ, l'énergie du système augmente de $\left(K + \frac{H\mathfrak{J}_s}{2}\right)(\beta^2 + \gamma^2)$ où K est la constante d'anisotropie. Si nous supposons maintenant que la substance est perturbée par des tensions internes, la direction privilégiée sera plus ou moins déviée et l'énergie magnétocristalline plus ou moins modifiée : il faudra donc ajouter à l'expression de l'énergie du système, expression qui devra être minimum dans l'état d'équilibre, un

terme de perturbation $F(\beta, \gamma)$, fonction de x, y, z , et l'énergie W_i du système s'écrira :

$$(49) \quad W_i = \int \left[F(\beta, \gamma) + \left(K + \frac{H_0^2}{2} \right) (\beta^2 + \gamma^2) \right] dv.$$

Cette expression de l'énergie ne tient pas encore compte des interactions magnétiques, au sens que nous leur avons donné plus haut : nous étudierons ultérieurement la façon de les introduire. Pour l'instant, la difficulté consiste à donner à F une forme qui permette le développement des calculs ultérieurs, notamment en conservant un caractère linéaire à l'équation aux dérivées partielles du second ordre qui détermine le potentiel magnétique. La forme la plus générale que nous puissions adopter est la suivante :

$$(50) \quad F = C[r(\beta^2 + \gamma^2) - 2(\beta\beta' + \gamma\gamma')],$$

où C est une constante, indépendante de x, y, z , ayant les dimensions d'une énergie, r un nombre et β', γ' , des fonctions de x, y, z , développables en série de Fourier, à l'intérieur de la base :

$$(51) \quad \begin{aligned} \beta' &= \sum \beta'_\lambda \sin \frac{p'x}{L} \cos \frac{q'y}{L} \sin \frac{r'z}{L}, \\ \gamma' &= \sum \gamma'_\lambda \sin \frac{p'x}{L} \sin \frac{q'y}{L} \cos \frac{r'z}{L}. \end{aligned}$$

Le signe somme est étendu à toutes les valeurs possibles de l'indice λ qui, pour simplifier l'écriture, a été mis à la place du quadruple indice p', q', r', t où p', q', r' , peuvent prendre toutes les valeurs entières et positives et où t peut prendre les 8 valeurs correspondant aux 8 combinaisons possibles de sinus et de cosinus.

Ces fonctions β', γ' sont des fonctions aléatoires dans le sens qui a été précisé dans le paragraphe 5. Les coefficients $\beta'_\lambda, \gamma'_\lambda$ des développements seront des variables aléatoires dont la moyenne quadratique sera constante tant que p', q', r' , seront inférieurs à une certaine limite N et nuls au delà. Cette limite sera d'autant plus grande que la distance de corrélation des perturbations sera plus petite. Dans la suite, pour simplifier l'écriture, nous poserons :

$$(52) \quad \lambda = \frac{p'}{L}, \quad \mu = \frac{q'}{L}, \quad \nu = \frac{r'}{L}, \quad l = \frac{N}{L}.$$

15. — Principe de la détermination de C , r , β' et γ' à partir des caractéristiques de la perturbation. — Nous nous représenterons de la façon suivante les tensions internes irrégulières qui perturbent la substance : nous supposerons que ce sont des tensions pures σ_i , constantes en grandeur, mais dont les orientations sont distribuées d'une manière irrégulière, quoique isotrope en moyenne, suivant toutes les directions de l'espace. En outre, pour rendre ce schéma un peu plus général, nous supposerons que ces tensions n'affectent qu'une fraction v du volume total de la substance laissant ainsi subsister une fraction $1 - v$ du corps non perturbée.

Pour déterminer la valeur de F correspondant à la distribution ainsi décrite, nous emploierons un artifice : nous supposerons que la constante K d'énergie magnétocristalline est nulle, nous négligerons les interactions magnétiques et nous calculerons la loi d'approche à la saturation de la substance par deux méthodes différentes, la méthode rigoureuse classique et une méthode mettant en œuvre une énergie F , du type donné par l'équation (50). *Nous donnerons à C , r , β' et γ' des valeurs telles que cette deuxième méthode donne les mêmes résultats que la première.* L'énergie sera alors complètement déterminée et l'expression ainsi obtenue permettra d'étudier l'influence des interactions magnétiques.

16. — Détermination de la loi d'approche par la méthode classique. — Pour déterminer la loi d'approche de la substance perturbée, nous la considérons comme formée de petits éléments $d\tau$ soumis à des tensions uniformes σ_i , constantes en grandeur et réparties au hasard en direction. Puisque par hypothèse nous négligeons les interactions magnétiques, nous obtiendrons la loi d'approche de l'ensemble en faisant la moyenne des lois d'approche des éléments $d\tau$. En réalité l'ensemble des petits domaines que nous considérons ici possède de l'hystérésis : pour préciser, la loi d'approche dont il est question ici représente l'aimantation $\mathcal{N}$, obtenue après aimantation à saturation, lorsqu'on ramène le champ magnétique à zéro. En désignant par θ l'angle de l'aimantation spontanée avec la direction de la tension, l'énergie magnéto-élastique s'écrit, comme nous l'avons rappelé au paragraphe 2, sous la forme :

$$(53) \quad W = \frac{3}{2} \lambda_s \sigma_i \sin^2 \theta = C \sin^2 \theta.$$

Un calcul identique a déjà été fait par Gans ⁽¹²⁾, à propos de la loi d'approche du cobalt, polycristallin, dont l'énergie magnéto-cristalline peut prendre la forme (53). La loi d'aimantation ne dépend que du paramètre $\xi = \frac{HJ_s}{C}$; elle est donc de la forme :

$$(54) \quad J' = J_s [1 - v f(\xi)],$$

puisque la perturbation n'intéresse qu'une fraction v de la substance,

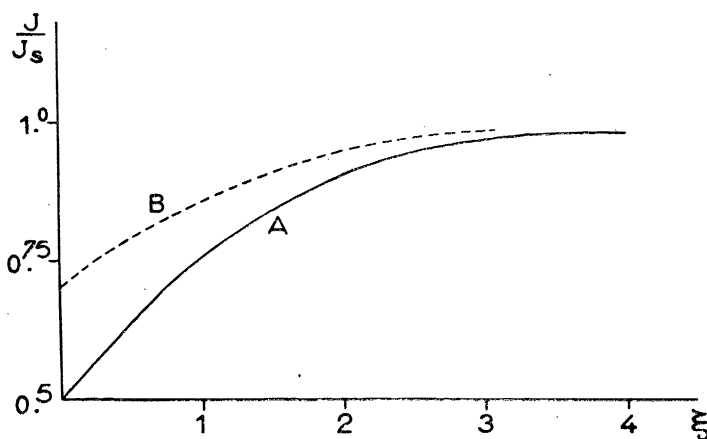


Fig. 4.

En A, courbe d'approche à la saturation d'une substance uniaxe polycristalline, calculée en négligeant les interactions magnétiques. En B, la même courbe, calculée en tenant compte de ces interactions.

le reste étant saturé pour toute valeur du champ. Quand le champ est faible, on obtient le développement suivant :

$$(55) \quad f(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\xi + \frac{3}{32}\xi^2 - \frac{1}{30}\xi^3 + \dots$$

Quand il est très intense, au voisinage de la saturation on a :

$$(56) \quad f(\xi) = \frac{4}{15} \frac{1}{\xi^2} + \frac{32}{105} \frac{1}{\xi^3} + \dots$$

Cette loi d'aimantation est représentée en A sur la figure 4, dans le cas où v est égal à 1.

(12) GANS, *Ann. der Physik*, 1932, t. 15, p. 28 et *Physik. Z.*, 1932, t. 33, p. 15.

17. — Détermination de la loi d'approche, utilisant l'expression F de l'énergie de perturbation. — Les conditions locales d'équilibre de l'aimantation sous l'action du champ H s'écrivent simplement :

$$(57) \quad -\frac{\partial F}{\partial \beta} = H J_s \beta, \quad -\frac{\partial F}{\partial \gamma} = H J_s \gamma,$$

puisque K est nul et que nous négligeons les interactions magnétiques. On en déduit β et γ . L'aimantation locale, dans la direction du champ H , est, à l'approximation où nous plaçons, égale à

$$J = J_s \left(1 - \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2} \right).$$

En faisant la moyenne de ces valeurs par rapport à toutes les valeurs de x, y, z , on obtient finalement comme loi d'approche :

$$(58) \quad J = J_s \left[1 - \frac{P}{\left(\frac{z}{2} + r \right)^2} \right],$$

dans laquelle on a posé, pour simplifier l'écriture :

$$(59) \quad P = \frac{1}{16} \sum_k (\beta_k^{1/2} + \gamma_k^2)$$

et

$$(60) \quad z = \frac{H J_s}{C}.$$

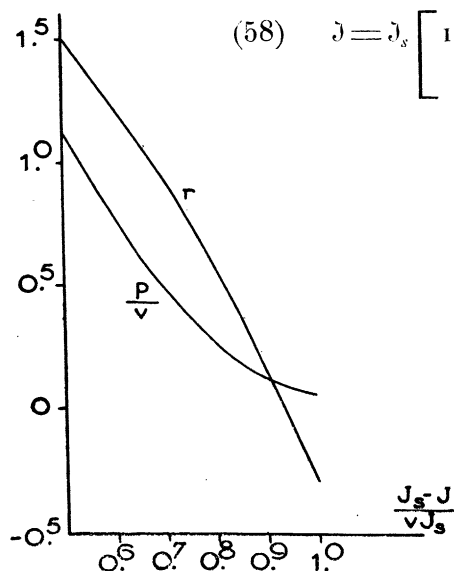


Fig. 5.

Valeurs des coefficients r et $\frac{P}{v}$ en fonction du paramètre $\frac{J_s - J}{v J_s}$.

18. — Détermination de P et de r . — Nous supposons d'abord que les constantes C définies dans les équations (50) et (53) sont identiques. Ensuite pour exprimer que la loi approchée (58) coïncide au mieux, au voisinage d'une certaine aimantation J , avec la loi exacte (54), nous déterminerons P et r de manière qu'en ce point les deux courbes d'aiman-

tation aient même tangente, ce qui donne :

$$(61) \quad \frac{P}{\left(\frac{\xi}{2} + r\right)^2} = v f(\xi); \quad \frac{-P}{\left(\frac{\xi}{2} + r\right)^3} = v \frac{df(\xi)}{d\xi}.$$

Les valeurs de P/v et de r ainsi déterminées sont représentées par les deux courbes de la figure 5 en fonction de $f(\xi)$ comme paramètre, c'est-à-dire de $\frac{j_s - j}{v j_s}$. Les très petites perturbations sont particulièrement intéressantes ; les valeurs correspondantes sont : $P/v = 1/15$ et $r = -2/7$.

19. — Application de la méthode proposée à l'étude de l'influence des interactions magnétiques sur la loi d'approche à la saturation. — Pour déterminer les modifications que les interactions magnétiques apportent à la loi d'approche (54), nous considérerons d'abord P et r comme deux constantes auxquelles nous attribuerons, une fois le calcul fini et pour chaque valeur j de l'aimantation obtenue, les valeurs correspondant à la valeur finale en chaque point du paramètre $f(\xi) = \frac{j_s - j}{v j_s}$.

En désignant par V le potentiel des interactions magnétiques, les deux composantes suivant OY et OZ du champ magnétique correspondant sont $-\frac{\partial V}{\partial y}$ et $-\frac{\partial V}{\partial z}$ et les conditions locales d'équilibre données en (57) doivent être remplacées par les suivantes :

$$(62) \quad -\frac{\partial F}{\partial \beta} = H j_s \beta + j_s \frac{\partial V}{\partial y}; \quad -\frac{\partial F}{\partial \gamma} = H j_s \gamma + j_s \frac{\partial V}{\partial z}.$$

D'autre part les composantes suivant les trois axes de l'aimantation locale s'écrivent :

$$(63) \quad j_x = j_s, \quad j_y = \beta j_s, \quad j_z = \gamma j_s,$$

d'où une densité de charges magnétiques :

$$(64) \quad m = -\operatorname{div} j = -j_s \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right),$$

et après avoir posé pour abréger :

$$(65) \quad Q = 1 + \frac{4\pi j_s^2}{H j_s + 2Cr}; \quad R = \frac{2C}{H j_s + 2Cr}$$

l'équation de Poisson $\Delta V + 4\pi m = 0$, s'écrit alors, compte tenu des équations (51) et (52) :

$$(66) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial^2 x} + Q \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) \\ = -4\pi j_s R \sum_k (\mu \beta'_k + \nu \gamma'_k) \sin \lambda x \sin \mu y \sin \nu z.$$

Elle est satisfaite par un potentiel V de la forme suivante :

$$(67) \quad V = 4\pi j_s R \sum_k \frac{\mu \beta'_k + \nu \gamma'_k}{\lambda^2 + Q(\mu^2 + \nu^2)} \sin \lambda x \sin \mu y \sin \nu z.$$

En portant cette valeur dans les équations (62), on en déduit les valeurs de β et de γ et, de là, l'aimantation moyenne dans la direction OX , en faisant la moyenne de l'aimantation locale

$$j = j_s \left(1 - \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2} \right)$$

par rapport à toutes les valeurs possibles de x, y, z . L'expression obtenue est de degré zéro en λ, μ, ν . Nous remplacerons les λ^2, μ^2, ν^2 par leurs valeurs moyennes qui sont toutes égales et en remarquant que la valeur moyenne de $\beta'_k \gamma'_k$ est nulle, il reste finalement :

$$(68) \quad j = j_s \left[1 - \frac{R^2 Q^2 + Q + 2,5}{8(1 + 2Q)^2} \sum (\beta'^2_k + \gamma'^2_k) \right].$$

En général, même quand les perturbations internes sont grandes, Q est grand devant l'unité. Dans ces conditions, l'expression (68) se simplifie encore et se réduit, avec les notations déjà employées, à :

$$(69) \quad j = j_s \left[1 - \frac{P}{2 \left(\frac{r}{2} + r \right)^2} \right].$$

Calculons maintenant les valeurs de P et de r , correspondant à une valeur déterminée, donnée à l'avance de j , pour une substance dont une fraction v est perturbée par des tensions internes. On connaît alors la valeur a du paramètre $\frac{j - j_s}{v j_s}$ et, des courbes de la figure 5, on déduit les valeurs correspondantes de P/v et de r .

Mais d'après l'équation (69), on a :
$$\frac{P}{2v\left(\frac{\xi}{2} + r\right)^2} = \frac{j_s - j}{vj_s} = a$$

d'où on tire la valeur du paramètre ξ et finalement j en fonction de H . C'est ainsi qu'on a déterminé les valeurs du tableau I.

TABLEAU I

ξ	$\frac{j_s - j}{vj_s}$	$\frac{P}{v}$	r
0,02	0,30	0,500	0,925
0,20	0,25	0,375	0,755
0,51	0,20	0,270	0,565
0,86	0,15	0,190	0,365
1,29	0,10	0,130	0,160
1,59	0,075	0,107	0,050
2,02	0,050	0,090	— 0,06
2,81	0,025	0,075	— 0,18

Dans le cas où v est égal à 1, nous avons tracé en B sur la figure 4, la courbe d'aimantation correspondante, en fonction du paramètre ξ . En la comparant à la courbe A, on s'aperçoit ainsi que les interactions magnétiques rendent l'aimantation plus facile. Rappelons à ce propos que nous avons, par une méthode analogue, calculé antérieurement ⁽¹⁾ la loi d'approche à la saturation du nickel et obtenu des résultats conformes à l'expérience. Le calcul précédent est sensiblement plus général.

20. — Propagation d'une paroi dans une substance à tensions internes irrégulièrement distribuées. — Étudions maintenant la propagation d'une paroi parallèle au plan XOY, séparant deux domaines aimantés antiparallèlement, l'un suivant OX du côté des z positifs, l'autre suivant la direction inverse du côté des z négatifs. Nous prendrons l'énergie de perturbation sous la forme donnée en (50). Le calcul de l'équilibre de l'aimantation spontanée à l'intérieur d'un domaine élémentaire se traite d'une manière analogue au cas précédent (§ 19). Nous supposerons seulement maintenant que c'est l'énergie magnétocristalline et non pas le champ magnétique qui tend à retenir l'aimantation suivant la direction privilégiée OX.

Dans la formule (49), c'est donc le champ H qui est nul et K qui est différent de zéro. Il faudra donc remplacer par $2K$ le produit $H\mathfrak{J}_s$ chaque fois qu'il se présentera dans les formules. Les équations (65) de définition de Q et de R sont à remplacer par les suivantes :

$$(70) \quad Q = 1 + \frac{2\pi\mathfrak{J}_s^2}{K + Cr}; \quad R = \frac{C}{K + Cr}.$$

Compte tenu de ce changement, les équations (62), (63), (64), (66), resteront valables mais la suite du calcul va différer car il faut s'occuper maintenant des deux domaines que sépare la paroi. Dans le domaine supérieur, les équations rappelées plus haut restent valables telles quelles, mais dans le domaine inférieur, il faut changer $\mathfrak{J}_s$ de signe.

21. — Calcul de l'énergie du système en fonction de la cote h de la paroi. — Nous négligerons l'énergie superficielle de paroi et nous supposerons en outre que la paroi se déforme de manière à ne porter aucune charge magnétique superficielle : nous préciserons d'ailleurs ultérieurement les limites de validité de ces hypothèses.

Avant de calculer l'énergie du système, il faut déterminer l'état d'équilibre de l'aimantation de part et d'autre de la paroi. Comme l'aimantation change de signe en la traversant, il faut trouver deux expressions du potentiel, l'une V_1 relative au domaine supérieur, l'autre V_2 relative au domaine inférieur, satisfaisant d'une part à l'équation aux dérivées partielles (66), et d'autre part aux conditions aux limites à la surface de la paroi. Puisque la paroi ne porte pas de charges, ces conditions s'écrivent :

$$(71) \quad V_1 = V_2, \quad \frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{\partial V_2}{\partial z} \quad \text{pour } z = h.$$

Pour simplifier les calculs, nous supposerons pour l'instant que les sommes $\sum$ qui figurent dans les équations précédentes ne s'étendent qu'à un seul terme. Dans ce cas, les expressions des potentiels V_1 et V_2 s'écrivent :

$$(72) \quad \begin{aligned} V_1 &= v \sin \lambda x \sin \mu y \sin \nu z + A e^{-n(z-h)} \sin \lambda x \sin \mu y, \\ V_2 &= -v \sin \lambda x \sin \mu y \sin \nu z + B e^{n(z-h)} \sin \lambda x \sin \mu y, \end{aligned}$$

avec les notations suivantes ;

$$(73) \quad v = \frac{4\pi R J_s (\mu \beta'_h + \nu \gamma'_h)}{\lambda^2 + Q(\mu^2 + \nu^2)},$$

$$(74) \quad n^2 = \mu^2 + \frac{\lambda^2}{Q}.$$

Les constantes A et B se déterminent en écrivant que les conditions aux limites (71) sont satisfaites soit :

$$(75) \quad \begin{aligned} B + A &= 2v \frac{\nu}{n} \cos \nu h, \\ B - A &= 2v \sin \nu h. \end{aligned}$$

L'état d'équilibre de l'aimantation étant ainsi déterminé, nous allons calculer l'énergie correspondante. La densité locale d'énergie est la somme de trois termes : d'abord le terme magnétique classique $\frac{1}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right]$ puis l'énergie magnétocristalline $K(\beta^2 + \gamma^2)$ et l'énergie magnétoélastique F. On vérifie aisément, qu'à un terme en β'^2 et un terme en γ'^2 près, la somme de ces deux derniers termes est égale à $\frac{J_s^2}{4(Cr + K)} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right]$.

Or les termes en β'^2 et γ'^2 ne présentent pas d'intérêt pour nous puisqu'ils ne fournissent dans l'intégration que des termes indépendants de h . Finalement, l'énergie totale s'écrit :

$$(76) \quad W = \frac{1}{8\pi} \int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + Q \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + Q \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau.$$

Le calcul de l'énergie dans les deux domaines ne présente aucune difficulté ; on trouve ainsi, dans un cylindre de génératrices parallèles à OZ et de 1 cm^2 de base, la valeur :

$$(77) \quad W = \frac{\nu^2}{16\pi} Q \left(\frac{\nu^2}{n} + n \right) \cos^2 \nu h.$$

22. — Calcul du champ critique. — Cette énergie est une fonction sinusoïdale de l'altitude h de la paroi. Pour que la paroi soit en équilibre sous la poussée $2H J_s$ d'un champ dirigé suivant OX, on

doit avoir :

$$(78) \quad 2H\dot{J}_s = -\frac{\partial W}{\partial h} = \frac{\nu^2 Q \nu}{16\pi} \left(\frac{\nu^2}{n} + n \right) 2 \sin \nu h \cos \nu h.$$

Le champ critique pour lequel la paroi se déplace brusquement à travers tout le domaine correspond au maximum de $\frac{\partial W}{\partial h}$, soit en explicitant ν :

$$(79) \quad H_c = \frac{\pi R^2 \dot{J}_s}{2} \frac{\nu(\mu\beta'_\lambda + \nu\gamma'_\lambda)^2}{n[\lambda^2 + Q(\mu^2 + \nu^2)]}.$$

Ce calcul se rapporte à une valeur particulière de l'indice λ . Nous admettrons qu'on obtient une valeur approchée du champ critique provoqué par une perturbation, caractérisée par une certaine valeur de P donnée par l'équation (59), et correspondant à l'ensemble des valeurs possibles de l'indice λ , en faisant la moyenne des champs critiques dus à des perturbations élémentaires correspondant chacune à une seule valeur de λ , mais telles que pour chacune la valeur de P soit la même que plus haut, de sorte que l'équation (59) est à remplacer par :

$$(80) \quad P = \frac{1}{16}(\beta'^2_\lambda + \gamma'^2_\lambda).$$

Il faut donc faire la moyenne de l'expression (79) par rapport à toutes les valeurs possibles de λ , μ , ν . Comme cette expression est homogène et de degré zéro en λ , μ , ν , on peut en outre imposer la condition : $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$. Nous nous limiterons en outre au cas où Q est grand, ce qui est pratiquement toujours réalisé même avec de grandes déformations. Si on remarque que la valeur moyenne de β'^2_λ est égale à la valeur moyenne de γ'^2_λ , on peut écrire, en ce qui concerne les valeurs moyennes, puisque la valeur moyenne de $\beta'_\lambda \gamma'_\lambda$ est nulle :

$$(81) \quad (\mu\beta'_\lambda + \nu\gamma'_\lambda)^2 = \frac{1}{2}(\beta'^2_\lambda + \gamma'^2_\lambda)(\mu^2 + \nu^2).$$

Le champ critique moyen s'écrit alors :

$$(82) \quad \bar{H}_c \sim \frac{4\pi \dot{J}_s P R^2}{Q} \left(\frac{\mu^2 + \nu^2}{\mu^2 + \nu^2 + \frac{\lambda^2}{Q}} \frac{\nu}{n} \right).$$

Comme Q est grand, on peut remplacer par 1 le rapport :

$$\frac{\mu^2 + \nu^2}{\mu^2 + \nu^2 + \lambda^2 : Q}.$$

La dernière parenthèse de (82) se réduit donc à la valeur moyenne que prend $\frac{\nu}{n}$, quand λ, μ, ν sont les coordonnées d'un point pris au hasard sur la sphère unitaire. On trouve aisément que lorsque Q est grand :

$$(83) \quad \overline{\left(\frac{\nu}{n}\right)} = \frac{2}{\pi} (1,386 + \log \sqrt{Q}).$$

On remarquera que ce terme varie d'une façon extrêmement lente avec Q . Compte tenu des valeurs de Q et de R données en (70), on obtient finalement :

$$(84) \quad \bar{H}_c \sim \frac{4}{\pi} \frac{P}{j_s} \frac{C^2}{K + Cr} \left[1,386 + \log \sqrt{\frac{2\pi j_s^2}{K + Cr}} \right].$$

Comme la constante $2K$ joue maintenant un rôle analogue à celui de H_{js} , le paramètre ξ , dont il est question dans les paragraphes 16, 17 et 18, est ici donné par :

$$(84 \text{ bis}) \quad \xi = \frac{2K}{C},$$

et les valeurs de P et de r sont, dans l'équation 84, des fonctions de ξ , c'est-à-dire de $2K/C$, données par le tableau I.

Deux cas sont particulièrement intéressants :

1° *Celui où l'énergie C de déformation élastique, qui affecte une portion v de la substance, est petite devant l'énergie magnétocristalline K ; ξ est grand et P/v est alors égal à 1/15. On a dans ces conditions :*

$$(85) \quad \bar{H}_c \sim \frac{4}{15\pi} \frac{vC^2}{K j_s} \left[1,386 + \log \sqrt{\frac{2\pi j_s^2}{K}} \right].$$

2° *Le cas où l'énergie C est au contraire grande devant K ; ξ est petit, P/v est égal à 0,5 et r à 0,925. On en déduit :*

$$(86) \quad \bar{H}_c \sim 0,69 \frac{vC}{j_s} \left[1,386 + \log \sqrt{\frac{6,8 j_s^2}{C}} \right].$$

Quand la substance est très perturbée, v est voisin de 1 et la formule ainsi obtenue se rapproche beaucoup de la formule :

$$(87) \quad H_c \sim \frac{C}{\lambda_s}$$

correspondant au mécanisme de pures rotations s'effectuant simultanément dans l'ensemble de chaque cristallite ; la substance étant supposée constituée d'une réunion d'un grand nombre de cristallites dont on néglige les actions mutuelles et qui sont déformés d'une manière homogène suivant toutes les directions possibles ⁽¹³⁾.

Cet accord est tout à fait réconfortant, car les approximations qui sont à la base des calculs précédents paraissent d'autant moins justifiées que les perturbations sont plus fortes. Malgré tout, nous aboutissons pour les grandes perturbations au même résultat qu'avec la théorie de la pure rotation qui elle, au contraire, est d'autant plus correcte que les perturbations sont plus grandes, puisque les interactions magnétiques entre domaines, qu'elle néglige, deviennent comparativement de plus en plus faibles. Il semble donc bien que les méthodes de calcul que nous venons d'exposer conduisent à des ordres de grandeur corrects quelle que soit la grandeur relative des perturbations.

23. — Influence de la tension superficielle de paroi. — Nous avons négligé dans les calculs précédents l'énergie provenant de l'augmentation de la surface de la paroi due à sa non-planéité : nous avons en effet supposé que la paroi se déformait de manière à ne porter aucune charge magnétique. Un calcul élémentaire mais long, qu'il n'y a pas intérêt à reproduire ici, montre que ce terme d'énergie ne devient comparable aux autres, dont il a été tenu compte, qu'au moment où la longueur d'onde $\frac{2\pi}{\lambda}$, $\frac{2\pi}{\mu}$, $\frac{2\pi}{\nu}$ des perturbations devient assez petite pour être comparable à l'épaisseur de paroi.

Pour une déviation donnée β , γ de l'aimantation, ce terme ainsi négligé est positif : il équivaut ainsi à une augmentation de K , c'est-à-dire à une diminution du champ coercitif. Il agit ainsi dans le même sens que les effets suivants que nous avons également négligés :

1° L'effet d'intégration des petites perturbations par l'épaisseur de paroi quand celle-ci devient grande devant la distance de corrélation.

(13) BECKER, *Ferromagnetismus*, pp. 216-217.

2° L'énergie de Weiss-Heisenberg qui n'est plus négligeable lorsque les changements de direction de l'aimantation spontanée se font à une échelle assez petite pour être comparable à l'épaisseur de paroi.

Cet ensemble de faits nous invite donc à supprimer dans les développements en série de Fourier de ζ' et de γ' définissant la perturbation, les termes, s'ils existent, pour lesquels $\frac{2\pi}{\lambda}$, $\frac{2\pi}{\mu}$, $\frac{2\pi}{\nu}$ sont inférieurs à l'épaisseur de paroi. On tiendra compte ainsi d'une manière approchée mais simple de ces effets perturbateurs complémentaires.

24. — Propagation d'une paroi à aimantation spontanée irrégulière, variable d'un point à l'autre. — Avant de discuter les équations (85) et (86), nous étudierons l'autre origine des champs magnétiques internes de dispersion : l'existence, à l'intérieur des domaines élémentaires, de particules ou d'inclusions non magnétiques ou moins magnétiques que la phase principale. D'une façon encore plus générale, cela revient à dire que l'aimantation spontanée $\mathfrak{J}_s$ varie localement d'un point à l'autre. Afin d'aborder analytiquement le problème nous supposons donc que l'aimantation spontanée est développable sous la forme d'une série de Fourier :

$$(88) \quad \mathfrak{J}_s = \mathfrak{J}_m + \sum_{\lambda} i_{\lambda} \cos \lambda x \sin \mu y \sin \nu z,$$

dans laquelle nous supposons les coefficients i_{λ} petits vis-à-vis de l'aimantation spontanée moyenne $\mathfrak{J}_m$. Tous les calculs développés dans les paragraphes précédents se transposent sans grandes modifications. En particulier, les équations (57) ou (62) d'équilibre de l'aimantation spontanée restent identiques au premier ordre d'approximation que nous envisageons ici, puisque les i_{λ} sont petits devant $\mathfrak{J}_m$. La seule différence vient de ce que les équations (63) définissant les trois composantes de l'aimantation spontanée doivent désormais s'écrire, au premier ordre près :

$$(89) \quad \mathfrak{J}_x = \mathfrak{J}_m + \sum_{\lambda} i_{\lambda} \cos \lambda x \sin \mu y \sin \nu z, \quad \mathfrak{J}_y = \zeta \mathfrak{J}_m, \quad \mathfrak{J}_z = \gamma \mathfrak{J}_m.$$

La valeur m de la densité des charges magnétiques intérieures devient, en supposant comme plus haut, et pour simplifier, que les

signes Σ ne s'étendent qu'à une seule valeur de l'indice λ :

$$(90) \quad m = -\operatorname{div} \vec{J} = \lambda i_\lambda \sin \lambda x \sin \mu y \sin \nu z - J_m \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right).$$

L'équation de Poisson (66) est à remplacer par :

$$(91) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + Q \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) \\ = -4\pi [\lambda i_\lambda + R J_m (\mu \beta'_\lambda + \nu \gamma'_\lambda)] \sin \lambda x \sin \mu y \sin \nu z.$$

Les solutions, de part et d'autre de la paroi, sont toujours du type (72), mais l'équation (73) qui donne v est alors donnée par l'expression suivante :

$$(92) \quad v = 4\pi \frac{\lambda i_\lambda + R J_m (\mu \beta'_\lambda + \nu \gamma'_\lambda)}{\lambda^2 + Q(\mu^2 + \nu^2)}.$$

Tout le reste du calcul est identique et on obtient finalement comme champ coercitif, à la place de l'équation (79), l'équation suivante :

$$(93) \quad H_c = \frac{\pi \nu}{2 J_m n} \frac{[\lambda i_\lambda + R J_m (\mu \beta'_\lambda + \nu \gamma'_\lambda)]^2}{\lambda^2 + Q(\mu^2 + \nu^2)}.$$

Comme tout à l'heure, nous nous intéressons plus spécialement à la valeur moyenne du champ (93), relative à toutes les valeurs de λ , μ , ν . Comme il est bien évident que les valeurs moyennes de $i_\lambda \beta'_\lambda$ et de $i_\lambda \gamma'_\lambda$ sont nulles, il en résulte que le champ coercitif total moyen est la somme de deux termes : l'un $\overline{H_c}$ que nous avons déjà calculé en (82) et (84), provenant des tensions internes irrégulières, et l'autre $\overline{H_c}$ correspondant aux actions propres des inégalités de l'aimantation spontanée et qui est donnée par l'équation suivante :

$$(94) \quad \overline{H_c} = \frac{\pi i_\lambda^2}{2 Q J_m} \left[\lambda^2 \nu \left(\mu^2 + \nu^2 + \frac{\lambda^2}{Q} \right)^{-1} \left(\mu^2 + \frac{\lambda^2}{Q} \right)^{-\frac{1}{2}} \right].$$

Pour simplifier le calcul du produit entre crochets et puisqu'il ne saurait s'agir ici que d'évaluer l'ordre de grandeur des phénomènes, nous remplacerons par sa valeur moyenne celui des facteurs du produit qui varie le moins autour de cette valeur moyenne : nous remplacerons donc $\mu^2 + \nu^2 + \frac{\lambda^2}{Q}$ par $\frac{2}{3} + \frac{1}{3Q}$, soit sensiblement $2/3$.

La moyenne du produit $\lambda^2 \nu \left(\mu^2 + \frac{\lambda^2}{Q} \right)^{-\frac{1}{2}}$ se calcule alors sans difficulté si Q est grand ; on trouve alors $\frac{2}{3\pi} (0,386 + \log \sqrt{Q})$. L'expression du champ coercitif devient alors :

$$(95) \quad \overline{H}_c = \frac{K + Cr}{4\pi j_m} \frac{i_k}{j_m^2} \left(0,386 + \log \sqrt{\frac{2\pi j_m^2}{K + Cr}} \right).$$

Rappelons que lorsque les tensions internes sont petites (C petit devant K), r est égal à $-0,18$ et que lorsqu'elles sont grandes, r est égal à $0,925$.

Nous admettrons, par analogie avec les résultats de l'étude rigoureuse faite plus haut dans les paragraphes 8 à 11 sur l'influence des inégalités de tension superficielle de paroi, que lorsqu'une perturbation d'aimantation spontanée est représentée par une série telle que (88), le champ coercitif total est représenté par la somme d'une série de termes élémentaires tels que (95). On obtiendra donc le champ coercitif total en remplaçant i_k^2 , dans l'expression (95), par la somme $\sum_{\lambda} i_{\lambda}^2$.

25. — Évaluation de $\sum i_{\lambda}^2$ dans quelques cas simples. — Supposons par exemple la substance constituée de deux éléments finement dispersés, l'un d'aimantation spontanée i_1 occupant un volume v_1 , l'autre d'aimantation spontanée i_2 occupant un volume v_2 . Naturellement : $v_1 + v_2 = 1$. L'aimantation spontanée moyenne est égale à $v_1 i_1 + v_2 i_2$ et la moyenne quadratique de l'aimantation spontanée est égale à $v_1 i_1^2 + v_2 i_2^2$. Mais, de l'équation (88) on tire :

$$(96) \quad \overline{j}_s^2 = j_m^2 + \frac{1}{8} \sum i_{\lambda}^2,$$

et de là :

$$(97) \quad \sum i_{\lambda}^2 = 8v_1 v_2 (i_1 - i_2)^2.$$

En introduisant cette valeur dans l'expression du champ coercitif, nous obtenons finalement, en nous limitant au cas où les perturbations de tension sont faibles :

$$(98) \quad \overline{H}_c = \frac{K}{4\pi j_m} \frac{8v_1 v_2 (i_1 - i_2)^2}{j_m^2} \left(0,386 + \log \sqrt{\frac{2\pi j_m^2}{K}} \right).$$

Appliquons en particulier cette formule dans le cas où l'un des constituants est formé d'inclusions non magnétiques ($i_2 = 0$) et en désignant par $v' = v_2$ le volume de ces inclusions, on a finalement⁽¹⁴⁾ :

$$(99) \quad \overline{H}_c' = \frac{2Kv'}{\pi j_m} \left(0,386 + \log \sqrt{\frac{2\pi j_m^2}{K}} \right).$$

26. — Remarques générales et ordre de grandeur respectif des champs coercitifs dus aux déformations et aux inclusions. — Avant d'appliquer les formules précédentes à l'interprétation des résultats expérimentaux, il importe essentiellement de rappeler qu'elles se rapportent au cas schématique d'une paroi unique, plane *en moyenne* et parallèle à la direction Δ du champ appliqué, séparant deux domaines élémentaires de quelques dizaines de microns d'épaisseur, aimantés en moyenne, l'un suivant la direction Δ , l'autre en sens inverse. En outre les perturbations diverses du réseau sont supposées suffisamment faibles et peu étendues pour ne pas donner naissance à de nouveaux domaines élémentaires⁽¹⁵⁾. Le champ coercitif trouvé est en somme le champ moyen qui est nécessaire pour déplacer la paroi d'une distance dont l'ordre de grandeur soit égal à la moitié de l'épaisseur du domaine.

Dans la réalité, on aura affaire à une multitude de domaines élémentaires séparés par des parois d'orientations diverses et à des perturbations excessivement complexes du réseau. Les formules ne peuvent donc prétendre à donner mieux qu'une première et grossière approximation : elles négligent en particulier un phénomène que l'on rencontre parfois, relatif aux difficultés de développement des germes qui donnent naissance aux parois.

Quoi qu'il en soit, le champ coercitif de déplacement de paroi se présente sous la forme de deux termes ; un premier terme $\overline{H}_c$, donné par l'équation (84), relatif aux déformations provoquées par les tensions internes, et un deuxième terme $\overline{H}_c'$, donné par l'équation

(14) Cette formule diffère profondément de celle que nous avons donnée dans un mémoire antérieur (*Cahiers de Physique*, 1944, n° 25, p. 21), consacré à l'étude de l'effet des cavités et des inclusions sur le champ coercitif. La raison en est que, dans un but de simplification, nous avons à tort : premièrement, supposé comme Kersten les cavités placées aux nœuds d'un réseau cubique simple et, 2°) supposé l'aimantation rigide de part et d'autre de la paroi. La formule (99) donnée ci-dessus est donc bien préférable à la formule (21) du mémoire cité.

(15) On exclut ainsi les grandes perturbations, égales ou supérieures à 10 μ , par exemple. Se reporter d'ailleurs au mémoire de Néel déjà cité (5), paragraphe 4.

(98), relatif aux cavités et aux inclusions. Suivant les cas, il peut être avantageux de mettre l'équation (84) sous l'une des formes (85) ou (86) et l'équation (98) sous la forme (99).

Il importe maintenant de préciser l'ordre de grandeur respectif des champs coercitifs dus à ces deux causes, afin d'établir si les mécanismes étudiés sont effectivement susceptibles de rendre compte des phénomènes observés. Pour cela, nous appliquerons les formules à du *fer* et à du *nickel* dans lesquels nous supposerons qu'une fraction v du volume est soumise à des tensions internes irrégulièrement orientées d'une intensité σ_i de 30 Kg/mm^2 et une autre fraction v' occupée par des inclusions.

Fer. — Pour le fer, nous admettons : $J_s = 1700$; $\lambda_s = 20 \cdot 10^{-6}$; $C = \frac{3}{2} \lambda_s \sigma_i = 9,0 \cdot 10^4$; $K = 4,3 \cdot 10^5 \text{ ergs/cm}^3$. Le paramètre ξ défini en (84 bis), est égal à 9,5 ; il est grand et la formule (85) est applicable. On utilisera d'autre part la formule (99) pour obtenir au total :

$$(100) \quad H_c = 2,1 v + 360 v' \quad (\text{fer}).$$

Nickel. — Pour le nickel, nous avons : $J_s = 500$; $\lambda_s = 30 \cdot 10^{-6}$; $C = \frac{3}{2} \lambda_s \sigma_i = 13,5 \cdot 10^4$; $K' = -5,0 \cdot 10^4 \text{ ergs/cm}^3$. Mais la constante K qui intervient dans nos formules est relative à l'énergie de rappel de l'aimantation spontanée suivant la direction de facile aimantation : ici l'axe ternaire. On voit aisément qu'avec les notations du paragraphe 14, l'énergie magnétocristalline W_m prend au voisinage de cette direction la forme :

$$(101) \quad W_m = \frac{K'}{3} \left[1 - 2(\beta^2 + \gamma^2) \right]$$

d'où $K = -2K'/3 = 3,3 \cdot 10^4$. On a alors $\xi = 2K/C = 0,244$. Il faut appliquer l'équation (84) et en utilisant le tableau I, on trouve $P/v = 0,355$ et $r = 0,73$. Finalement, on obtient :

$$(102) \quad H_c = 330 v + 97 v' \quad (\text{nickel}).$$

En rapprochant les formules (100) et (102), on constate ainsi que dans le fer l'influence des inclusions est prépondérante tandis que dans le nickel ce sont les tensions internes qui l'emportent. On voit aussi qu'avec des valeurs raisonnables de v et de v' , on aboutit à des

champs coercitifs qui sont bien de l'ordre de grandeur des champs observés.

27. — Les difficultés de vérification de la théorie des tensions internes. — Dans la théorie que nous venons d'exposer, les tensions internes qui perturbent une substance magnétique sont caractérisées par deux paramètres : leur intensité σ_i , c'est-à-dire le paramètre $C = \frac{3}{2} \lambda_s \sigma_i$ et leur extension, définie par la fraction v du volume total dans lequel cette tension s'exerce. La mesure du champ coercitif fournit simplement une relation entre ces deux paramètres. Pour achever de les déterminer, on peut étudier la loi d'approche dans les champs forts dont la théorie a fait l'objet du paragraphe 19. Il faut naturellement, dans cette loi d'approche, faire la part de l'influence de la structure polycristalline et de l'énergie magnétocristalline : la théorie de la loi d'approche correspondante a déjà été exposée⁽¹¹⁾. En outre, il faut être sûr, d'une part que la substance ne présente pas de déformations élastiques homogènes, non représentables par la formule (50), et, d'autre part, qu'il y ait assez peu de cavités ou d'inclusions pour ne pas donner lieu à un champ coercitif important.

Pour vérifier toute cette théorie, il faudrait disposer d'une méthode indépendante d'évaluation des tensions internes ; malheureusement, il n'en existe pas, mise à part l'étude aux rayons X dont la sensibilité est insuffisante et l'interprétation difficile.

Magnétiquement, Kersten⁽¹⁶⁾ a déjà proposé un certain nombre de méthodes d'évaluation des tensions internes mais elles ont été établies sans tenir compte des interactions magnétiques entre les domaines élémentaires, aussi ne paraît-il pas possible, sans une discussion approfondie, d'en comparer les résultats à ceux de la méthode exposée ici. Ce sera l'objet d'une publication ultérieure.

28. — Vérification de la formule reliant le champ coercitif au volume des inclusions. — La vérification de la formule (99) relative aux inclusions se présente dans de meilleures conditions que celles de la formule (84) relative aux tensions internes ; il est beaucoup plus facile en effet de connaître le volume des inclusions que l'intensité des tensions internes.

⁽¹⁶⁾ M. KERSTEN, *Z. f. Physik*, 1931, 71, 553 ; 1932, 76, 505 ; 1933, 82, 723 ; 1933, 85, 708 ; ainsi que l'exposé de BECKER, *Ferromagnetismus*, p. 157-167.

A cet effet, nous utiliserons des résultats expérimentaux rassemblés par Kersten (⁷), relatifs à des inclusions du Cu, Fe³C, Al²O³ ..., etc., dans du fer. Il s'agit d'alliages recuits dans lesquels on suppose que le champ coercitif est simplement dû à un effet de volume. Dans la figure 6 on a porté, en coordonnées logarithmiques, le champ

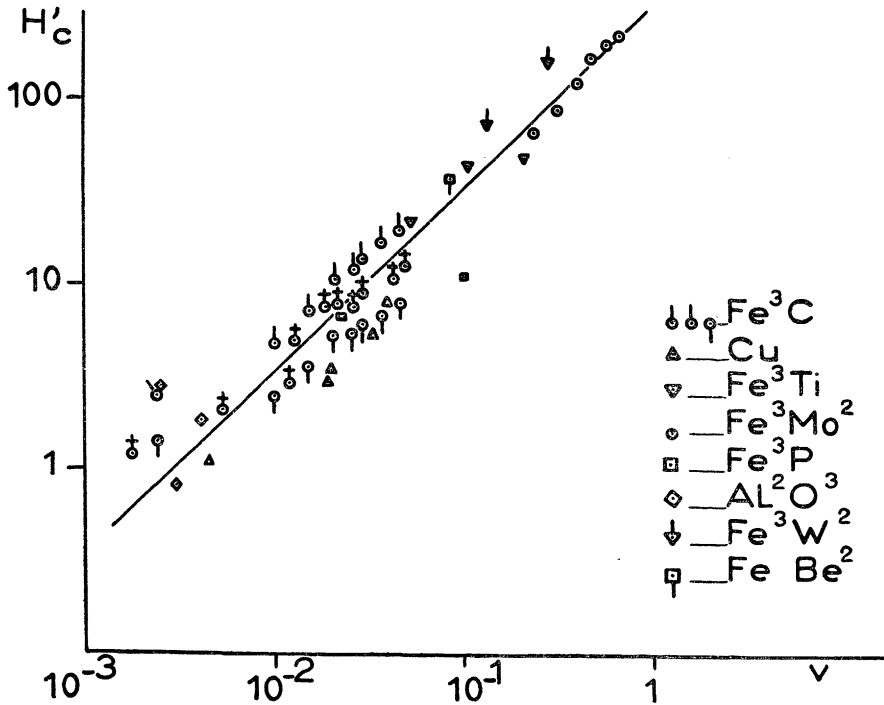


Fig. 6.

Champ Coercitif d'une série d'alliages de fer, d'après les résultats rassemblés par Kersten, représenté en fonction du volume relatif v occupé par la phase non magnétique (coordonnées logarithmiques). La droite correspond à la théorie établie dans le texte.

coercitif en fonction du volume de l'inclusion. On a adopté les volumes qui ont été calculés par Kersten, en tenant compte des solutions solides possibles : par exemple le titane se dissout dans le fer jusqu'à trois pour cent et c'est le surplus seulement qui contribue à la formation des inclusions de Fe³Ti. Signalons seulement que dans le cas de la cémentite, nous avons modifié le calcul de v fait par Kersten, pour tenir compte du magnétisme propre de cette sub-

stance. C'est en effet la formule générale (98) qui est alors valable avec $i_1 = 1700$ et $i_2 = 1052$ et le volume fictif, à introduire dans la formule (99) pour en maintenir la validité dans ce cas, est lié au poids p de carbone contenu dans 1 g d'alliage par la relation : $v = 2,3 p$.

Sur cette même figure, on a tracé la droite théorique donnée en (100). L'accord général entre la théorie et l'expérience est assez impressionnant, compte tenu, d'une part, des imperfections et des approximations de la théorie, et, d'autre part, des phénomènes qui ont été négligés. Nous avons pris par exemple, pour K et J_m , les valeurs correspondant au fer pur tandis qu'il aurait fallu prendre celles qui correspondent à la limite de la solution solide, qui sont malheureusement inconnues. Il est fort possible, en outre, que certaines inclusions provoquent, malgré les recuits, des déformations élastiques du réseau : le champ coercitif calculé est alors trop petit. Ce serait le cas des inclusions de Fe^3W^2 . Dans un sens inverse, quand une proportion notable des inclusions se trouve sous la forme de grains de dimensions inférieures à l'épaisseur de paroi (0,1 micron) ou au contraire sous la forme de grains très gros (supérieurs à 10 microns), le champ coercitif que donne l'expression (99) est trop grand. Ce serait le cas du cuivre et de certaines formes de cimentite. Un bel exemple de ce dernier phénomène, cité par Kersten (7, p. 68) est donné par le soufre, qui même sous de faibles concentrations, constitue de grosses inclusions visibles au microscope : corrélativement le champ coercitif d'un fer qui contient en volume dix pour cent de soufre n'est que de 2,2 gauss, valeur quinze fois plus faible que la valeur théorique donnée par (99).

Bref, l'ensemble des résultats cités par Kersten parle bien davantage en faveur de la théorie que nous venons de développer ici qu'en faveur de sa propre théorie dont les bases et le développement mathématique étaient susceptibles de graves objections et qui donnait une variation du champ coercitif proportionnelle à $v^{\frac{2}{3}}$, visiblement en désaccord avec les points de la figure 6.

29. — Variation thermique du champ coercitif. — Il semblerait que les formules (84) et (99) permettent de calculer immédiatement la variation thermique du champ coercitif, connaissant celle de K et de J_m , à condition que C , v et v' soient constants : c'est en effet le cas pour le volume v' des inclusions et il est raisonnable de penser que la variation thermique de C et de v est relativement faible, sur-

tout au point de Curie, au voisinage duquel H_c varie rapidement. On aurait ainsi un moyen indirect d'éprouver la validité de la théorie⁽¹⁷⁾. Dans la réalité, les choses sont malheureusement beaucoup plus compliquées, car dès qu'on s'approche à une centaine de degrés du point de Curie, K devient extrêmement petit d'où un gros accroissement de l'épaisseur des parois qui finit pas être de l'ordre de grandeur des dimensions des domaines élémentaires : la notion de domaine élémentaire perd son sens et la théorie précédente aussi. Dans une certaine mesure, on pourrait en tenir compte en faisant varier la limite de coupure des développements (51) et (88) comme on l'a indiqué antérieurement (Rem. 4 du § 6). Nous n'avons pas encore les éléments pour faire de tels calculs notamment en ce qui concerne la variation thermique de K .

(17) Dans son exposé⁽⁷⁾, Kersten fait des calculs de variation thermique de H_c qui paraissent cadrer avec l'expérience ; mais il suppose que l'énergie A d'échange, par centimètre cube, est indépendante de la température. En réalité, A varie à peu près comme le carré de l'aimantation spontanée, comme le montre à la fois l'expérience (chaleurs spécifiques) et une étude plus attentive de la théorie. Les concordances trouvées sont donc illusoires.
